Úvod do variačního počtu

1 Funkcionál a jeho variace

Definice 1. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ se nazývá *norma*, jestliže
(N1) $(\forall x_1, x_2 \in V)(\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|)$
(N2) $(\forall x \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|)$
(N3) $(\forall x \in V)(x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0)$

Poznámka 1. Norma má vlastnosti:

1. $\|0\| = 0$
2. $(\forall x \in V)(\|x\| \geq 0)$

Důkaz:

1. $0 = 0x$ pro libovolné $x \in V$. Tedy podle (N2) je $\|0\| = \|0x\| = |0|\ \|x\| = 0$
2. S využitím (N1), (N2) a 1.:
$\|x\| = \frac{1}{2}(\|x\| + \|x\|) = \frac{1}{2}(\|x\| + |-1|\ \|x\|) = \frac{1}{2}(\|x\| + \|-x\|) \geq \frac{1}{2}\|x + (-x)\| = \frac{1}{2}\|0\| = 0.$

□

Poznámka 2. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\|$ norma na něm. Zobrazení $\rho : V^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\rho(x, y) = \|x - y\|$ je metrikou na V.

Důkaz: $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (podle definice 1, (N3) a poznámky 1) $\Leftrightarrow x = y$
$\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1|\ \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$
$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(x, z)$ □

Definice 2. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $v : V \to \mathbb{R}$ se nazývá *funkcionál* (*na vektorovém prostoru* V).
Obraz vektoru x při zobrazení v označíme $v[x]$.
Funkcionál v na prostoru V se nazývá *spojitý v* $x_0 \in V$, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny $x \in V$ z nerovnosti $\|x - x_0\|$ plyne nerovnost $|v[x] - v[x_0]| < \varepsilon$. (Funkcionál je tedy chápaný jako zobrazení metrického prostoru V s metrikou zavedenou v poznámce 2 do metrického prostoru $\mathbb{R}$ s přirozenou metrikou). Funkcionál na V se nazývá *lineární*, jestliže pro všechna $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$v[x + y] = v[x] + v[y], \qquad v[\alpha x] = \alpha v[x].$$

Poznámka 3. Lineární funkcionál v na vektorovém prostoru V je spojitý právě tehdy, když v je spojitý v 0 (nulovém vektoru).

Důkaz: Nechť zobrazení v je spojité v 0 a buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. K ε existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý vektor $z \in V$ takový, že $\|z\| < \delta$ platí $|v[z]| < \varepsilon$.
Buď nyní $x \in V$ libovolný vektor. Pro každý vektor $y \in V$ takový, že $\|x - y\| < \delta$ platí $|v[x] - v[y]| = |v[x - y]| < \varepsilon$, což znamená, že v je zobrazení spojité v $x \in V$.
Opačná implikace je triviální. □

Označení: $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\varepsilon = \mathcal{O}_{\varepsilon, V, \|\cdot\|} = \{x \in V : \|x\| < \varepsilon\}$

Definice 3. Nechť v je funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$, a $\mathcal{A} \subseteq V$ je vektorový podprostor.
$\mathcal{A}$ nazveme *prostor přípustných vektorů*, prvky z $\mathcal{A}$ nazveme *variace* (*přírůstky*) *argumentu* funkcionálu v. Variace argumentu funkcionálu v se někdy značí δx.
Dále nechť $x \in V$ a $L(x)$ je lineární funkcionál na prostoru přípustných vektorů $\mathcal{A}$. Jestliže existuje funkcionál τ na $\mathcal{A}$ takový, že $\lim\limits_{h \to 0} \tau[h] = 0$ a navíc platí

$$\Delta v[x] \;=\; v[x+h] - v[x] \;=\; L(x)[h] + \|h\|\,\tau[h]$$

pro všechny vektory $h \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}$. Pak lineární funkcionál $L(x)$ nazveme *variace funkcionálu v* (*v prostoru V s normou $\|\cdot\|$ na vektoru x vzhledem k množině $\mathcal{A}$*) a značíme $L(x) = \delta v(x)$.

Definice 4. Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$, $x \in V$ a buď $\mathcal{A}$ prostor přípustných vektorů.
Řekneme, že funkcionál v nabývá na $x \in V$ *lokálního maxima* (resp. *minima*) *vzhledem k $\mathcal{A}$*, jestliže existuje $\mathcal{O}$ tak, že pro každý vektor $h \in \mathcal{O} \cap \mathcal{A}$ je $v[x] \geq v[x+h]$ (resp. $v[x] \leq v[x+h]$).
Řekneme, že funkcionál v nabývá na $x \in V$ *ostrého lokálního maxima* (resp. *minima*) *vzhledem k $\mathcal{A}$*, jestliže existuje $\mathcal{O}$ tak, že pro každý vektor $h \in (\mathcal{O} \cap \mathcal{A}) \setminus \{0\}$ je $v[x] > v[x+h]$ (resp. $v[x] < v[x+h]$).
(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrnně (*ostré*) *lokální extrémy* funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$.

Věta 1. *Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$ a buď $\mathcal{A}$ prostor přípustných vektorů. Pro pevně zvolené vektory $x \in V$ a $h \in \mathcal{A}$ definujme reálnou funkci jedné reálné proměnné $\varphi(\,\cdot\,; x, h)$ předpisem $\varphi(\alpha; x, h) = v[x + \alpha h]$. Existuje-li variace funkcionálu v na x vzhledem k $\mathcal{A}$, pak $\delta v(x)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0; x, h)$.*

Důkaz: $\Delta v[x] = \varphi(\alpha; x, h) - \varphi(0; x, h)$, $\Delta\alpha = \alpha - 0 = \alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0; x, h) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(\alpha; x, h) - \varphi(0; x, h)}{\alpha} \;&=\; \lim_{\alpha \to 0} \frac{\Delta v[x]}{\alpha} \;= \\
= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\delta v(x)[\alpha h] + \|\alpha h\|\,\tau[\alpha h]}{\alpha} \;&=\; \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha \delta v(x)[h] + |\alpha|\,\|h\|\,\tau[\alpha h]}{\alpha} \;= \\
&= \delta v(x)[h] + \|h\| \lim_{\alpha \to 0} \operatorname{sgn}(\alpha)\tau[\alpha h] \;=\; \delta v(x)[h] \qquad \square
\end{aligned}$$

Věta 2. *Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$, $x \in V$ a $\mathcal{A}$ prostor přípustných vektorů. Jestliže funkcionál v nabývá na $x \in V$ svého lokálního extrému vzhledem k $\mathcal{A}$ a existuje-li variace $\delta v(x)$, pak $\delta v(x) = 0$ (tj. funkcionál, který každému vektoru z $\mathcal{A}$ přiřadí číslo 0).*

Důkaz: Nechť v nabývá na $x \in V$ svého lokálního maxima vzhledem k $\mathcal{A}$ a nechť existuje $\delta v(x)$.
Připusťme, že existuje takový vektor $h \in \mathcal{A}$ takový, že $\delta v(x)[h] > 0$.
Definujme funkci $\varphi(\,\cdot\,; x, h)$ jako ve Větě 1. Pak je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0; x, h) > 0$. To podle známých vět z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné znamená, že funkce $\varphi(\cdot, x, h)$ (tj. funkce φ chápaná jako funkce pouze první proměnné, přičemž druhou a třetí proměnnou považujeme za parametry) je rostoucí v okolí nuly. Existuje tedy $\tilde{\alpha} > 0$ takové číslo, že pro všechna

$\alpha \in (0, \tilde{\alpha})$ je $\varphi(\alpha; x, h) > \varphi(0; x, h)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $\alpha \in \left(0, \min\left\{\tilde{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\|h\|}\right\}\right)$. Pak $\alpha h \in \mathcal{A}$ (neboť $\mathcal{A}$ je vektorový podprostor) a $\alpha h \in \mathcal{O}_\varepsilon$ (neboť $\|\alpha h\| = \alpha \|h\| < \frac{\varepsilon}{\|h\|} \|h\| = \varepsilon$). Pro $\alpha h \in \mathcal{A}$ tedy platí, že

$$v[x + \alpha h] = \varphi(\alpha; x, h) > \varphi(0; x, h) = v[x]\,,$$

což znamená, že funkcionál v nenabývá v x svého lokálního maxima.
Analogicky ukážeme, že nemůže existovat vektor $h \in \mathcal{A}$ takový, aby $\delta v(x)[h] < 0$. Celkem tedy pro každý vektor $h \in \mathcal{A}$ je $\delta v(x)[h] = 0$.
Pro minimum se důkaz provede analogicky. □

Definice 5. Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$ a $\mathcal{A}$ buď prostor přípustných vektorů. Vektor $x \in V$ se nazývá *extrémální vektor* (stručně *extrémála*) *funkcionálu v* (*vzhledem k prostoru přípustných vektorů* $\mathcal{A}$), jestliže $\delta v(x) = 0$, tj. $\delta v(x)[h] = 0$ pro každý vektor $h \in \mathcal{A}$.

2 Úlohy s pevnými konci

2.1 Úlohy typu $\int_a^b F\big(s, x(s), x'(s)\big)\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$, $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$

Je-li F dvakrát diferencovatelná funkce tří proměnných, V prostor funkcí definovaných a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a, b]$ a na V je zavedena některá z norem

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &= \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\} \\ \|x\|_1 &= \max\{\max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}, \max\{|x'(t)| : t \in [a, b]\}\}. \end{aligned}$$

Poznámka 4. Definujme funkcionál $v : V \to \mathbb{R}$ předpisem

$$v[x] = \int_a^b F\big(s, x(s), x'(s)\big)\mathrm{d}s.$$

Tento funkcionál je spojitý na prostoru V s normou $\|\cdot\|_1$.

Důkaz: Buď $x \in V$ libovolná funkce a $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Položme

$$p_1 = \min\{x(t) : t \in [a, b]\}, \quad p_2 = \max\{x(t) : t \in [a, b]\},$$

$$q_1 = \min\{x'(t) : t \in [a, b]\}, \quad q_2 = \max\{x'(t) : t \in [a, b]\},$$

$$\begin{aligned} M = \max\Big\{ &\max\{|F_x(t, \xi, \eta)| : t \in [a, b], \xi \in [p_1 - \varepsilon, p_2 + \varepsilon], \eta \in [q1 - \varepsilon, q_2 + \varepsilon]\}, \\ &\max\{|F_{x'}(t, \xi, \eta)| : t \in [a, b], \xi \in [p_1 - \varepsilon, p_2 + \varepsilon], \eta \in [q1 - \varepsilon, q_2 + \varepsilon]\}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\delta = \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2M(b - a)}\right\}.$$

Buď $g \in \mathcal{O}_{\delta, V, \|\cdot\|_1}$. S využitím věty o střední hodnotě a vět známých z integrálního počtu dostaneme

$$|v[x+g] - v[x]| = \left| \int_a^b F\big(s, x(s)+g(s), x'(s)+g'(s)\big)\mathrm{d}s - \int_a^b F\big(s, x(s), x'(s)\big)\mathrm{d}s \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left| F_x\big(s, x(s)+\vartheta_1(s)g(s), x'(s)+g'(s)\big)g(s) + F_{x'}\big(s, x(s), x'(s)+\vartheta_2(s)g'(s)\big)g'(s)\mathrm{d}s \right|,$$

přičemž $0 \leq \vartheta_1(s) \leq 1$, $0 \leq \vartheta_2(s) \leq 1$ pro všechna $s \in [a,b]$. Tedy

$$|v[x+g] - v[x]| \leq \int_a^b M \max\{|g(t)| : t \in [a,b]\}\mathrm{d}s + \int_a^b M \max\{|g'(t)| : t \in [a,b]\}\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \|g\|_1 2M(b-a) < 2M(b-a)\delta \leq \varepsilon.$$

□

Funkcionál v může být spojitý i na prostoru V s normou $\|\cdot\|_0$.

Položme $\mathcal{A} = \{h \in V : h(a) = h(b) = 0\}$.

Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$. Navíc požadujeme, aby pro funkci $x \in V$, v níž se extrém realizuje, platilo $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou předem dané konstanty. V případě normy $\|\cdot\|_1$ mluvíme o *slabých extrémech*, v případě normy $\|\cdot\|_0$ mluvíme o *silných extrémech*. (Nabývá-li funkcionál v na x silného extrému vzhledem k $\mathcal{A}$, nabývá na této funkci i slabého extrému.)

Využijeme věty 1 a 2:

$$\varphi(\alpha; x, h) = \int_a^b F(s, x(s)+\alpha h(s), x'(s)+\alpha h'(s))\mathrm{d}s\,,$$

$$\delta v(x)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0; x, h) = \int_a^b \big(F_x(s, x(s), x'(s))h(s) + F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s)\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

Integrací per partes dostaneme

$$\int_a^b F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s)\mathrm{d}s = \big[F_{x'}(s, x(s), x'(s))h(s)\big]_a^b - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s, x(s), x'(s))\right) h(s)\mathrm{d}s$$

a poněvadž $h(a) = h(b) = 0$, platí

$$\delta v(x)[h] = \int_a^b \left(F_x(s, x(s), x'(s)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s, x(s), x'(s))\right) h(s)\mathrm{d}s = 0\,.$$

Tato rovnost má platit pro libovolnou funkci h z prostoru přípustných funkcí $\mathcal{A}$, takže pro $t \in [a,b]$ musí být splněna *Eulerova rovnice*

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'} = 0\,,$$

v rozepsaném tvaru

$$F_x - F_{x't} - F_{x'x}x' - F_{x'x'}x'' \;=\; 0\,.$$

Řešení (integrální křivky) Eulerovy rovnice splňující podmínky

$$x(a) = x_1, \quad x(b) = x_2$$

jsou extrémály funkcionálu v. Jsou to funkce podezřelé z toho, že na nich nabývá funkcionál v lokálního extrému.

2.1.1 Řešení Eulerovy rovnice v některých speciálních případech

1. F nezávisí na x':

   $$F_x(t,x) \;=\; 0$$

   Rovnice není diferenciální, její řešení nezávisí na volitelných konstantách. Úloha: najít extrém funkcionálu $v[x] = \int\limits_a^b F(s,x(s))\mathrm{d}s$ s podmínkami $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$ obecně nemá řešení.

2. F závisí pouze na x':

   $$F_{x'x'}x'' \;=\; 0$$

   Odtud $F_{x'x'} = 0$ nebo $x'' = 0$.
   Je-li $x'' = 0$, pak $x(t) = C_1 t + C_2$, kde C_1, C_2 jsou konstanty.
   Je-li $F_{x'x'} = 0$ a λ je kořenem této (nediferenciální) rovnice s neznámou x', pak

   $$x(t) = \lambda t + C,$$

   kde C je konstanta.
   Extrémálou je tedy úsečka.

3. F nezávisí na t:

   $$F_x - F_{x'x}x' - F_{x'x'}x'' \;=\; 0$$

   Poněvadž

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F - x'F_{x'}\right) = \\ = F_x x' + F_{x'}x'' - x''F_{x'} - x'\left(F_{x'x}x' + F_{x'x'}x''\right) = x'\left(F_x - F_{x'x}x' - F_{x'x'}x''\right),$$

   Eulerova rovnice přejde na tvar

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F - x'F_{x'}\right) \;=\; 0\,,$$

   neboli

   $$F - x'F_{x'} \;=\; C\,,$$

   kde C je konstanta.

2.2 Úlohy typu $\int\limits_a^b F\big(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{x}'(s)\big)\mathrm{d}s \to$ extr, $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{x_2}$

Je-li F dvakrát diferencovatelná funkce $2n+1$ proměnných, V prostor (vektorových) funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definovaných a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a,b]$ a na V je zavedena některá z norem

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_0 &= \big\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T\big\|_0 = \sum_{i=1}^{n} \max\{|x_i(t)| : t \in [a,b]\} \\
\|\boldsymbol{x}\|_1 &= \big\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T\big\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \max\{\max\{|x_i(t)| : t \in [a,b]\}, \max\{|x_i'(t)| : t \in [a,b]\}\},
\end{aligned}$$

pak

$$v[\boldsymbol{x}] = \int_a^b F\big(s, x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s), x_1'(s), x_2'(s), \ldots, x_n'(s)\big)\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V s normou $\|\cdot\|_1$.

Položme $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{h} \in V : \boldsymbol{h}(a) = \boldsymbol{h}(b) = 0\}$.

Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$.

Položme $\boldsymbol{h}^i = (h_1, h_2, \ldots, h_n)^T \in \mathcal{A}$, kde

$$h_1 \equiv 0, h_2 \equiv 0, \ldots, h_{i-1} \equiv 0, h_{i+1} \equiv 0, \ldots, h_n \equiv 0$$

a složka h_i je libovolná ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Analogicky jako v 2.1 odvodíme

$$\begin{aligned}
0 = \delta v(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}^i] &= \int_a^b F_{x_i}\big(s, x_1(s), \ldots, x_n(s), x_1'(s), \ldots, x_n'(s)\big) h_i(s)\mathrm{d}s - \\
&- \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x_i'}\big(s, x_1(s), \ldots, x_n(s), x_1'(s), \ldots, x_n'(s)\big) h_i(s)\mathrm{d}s \\
&\qquad i = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}$$

z čehož dostaneme soustavu Eulerových diferenciálních rovnic druhého řádu

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x_i'} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Jejím řešením splňujícím podmínky

$$x_i(a) = (\boldsymbol{x_1})_i, \ x_i(b) = (\boldsymbol{x_2})_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

jsou extrémály funkcionálu v — (vektorové) funkce podezřelé z toho, že na nich nabývá funkcionál v lokálního extrému.

2.3 Úlohy typu $\int\limits_a^b F\big(s, x(s), x'(s), x''(s), \dots, x^{(n)}(s)\big)\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$, $x(a) = \alpha_0$, $x'(a) = \alpha_1$, …, $x^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}$, $x(b) = \beta_0$, $x'(b) = \beta_1$, …, $x^{(n-1)}(b) = \beta_{n-1}$

Je-li F $(n+1)$-krát diferencovatelná funkce $n+2$ proměnných, V prostor funkcí definovaných a $(n+1)$-krát spojitě diferencovatelných na intervalu $[a,b]$ a na V je zavedena některá z norem

$$\begin{aligned}
&\|x\|_k = \\
&= \max\Big\{\max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}, \max\{|x'(t)| : t \in [a,b]\}, \dots, \max\{|x^{(k)}(t)| : t \in [a,b]\}\Big\}, \\
&\hfill k = 0, 1, 2. \dots, n,
\end{aligned}$$

pak

$$v[x] \;=\; \int\limits_a^b F\big(s, x(s), x'(s), x''(s), \dots, x^{(n)}(s)\big)\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V s normou $\|\cdot\|_n$.

Položme $\mathcal{A} = \{h \in V : h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n-1)}(a) = 0 = h(b) = h'(b) = \cdots = h^{(n-1)}(b)\}$.

Opět využijeme věty 1 a 2:

$$\varphi(\alpha; x, h) = \int\limits_a^b F\Big(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s) + \alpha h'(s), x''(s) + \alpha h''(s), \dots, x^{(n)}(s) + \alpha h^{(n)}(s)\Big)\,\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned}
\delta v(x)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0; x, h) \;&=\; \int\limits_a^b \Big(F_x h + F_{x'} h' + F_{x'} h'' + \cdots + F_{x^{(n)}} h^{(n)}\Big)\,\mathrm{d}s \;= \\
&=\; \int\limits_a^b F_x h\mathrm{d}s + \int\limits_a^b F_{x'} h'\mathrm{d}s + \int\limits_a^b F_{x''} h''\mathrm{d}s + \cdots + \int\limits_a^b F_{x^{(n)}} h^{(n)}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Druhý až $(n+1)$-ní integrál upravíme pomocí integrace per partes

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b F_{x'} h'\mathrm{d}s \;&=\; [F_{x'} h]_a^b - \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x'} h\mathrm{d}s \;=\; -\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x'} h\mathrm{d}s \\
\int\limits_a^b F_{x''} h''\mathrm{d}s \;&=\; \big[F_{x''} h'\big]_a^b - \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x''} h'\mathrm{d}s \;= \\
&=\; -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x''} h\right]_a^b + \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} F_{x''} h\mathrm{d}s \;=\; \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} F_{x''} h\mathrm{d}s \\
&\;\;\vdots \\
\int\limits_a^b F_{x^{(n)}} h^{(n)}\mathrm{d}s \;&=\; (-1)^n \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F_{x^{(n)}} h\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Má-li na funkci $x \in V$ být extrém funkcionálu v, musí podle 2 být

$$\delta v(x)[h] \;=\; \int\limits_a^b \left(F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} F_{x''} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F_{x^{(n)}} \right) h \mathrm{d}s \;=\; 0\,.$$

pro libovolnou funkci $h \in \mathcal{A}$. Odtud dostaneme *Eulerovu-Poissonovu diferenciální rovnici*

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} F_{x''} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F_{x^{(n)}} \;=\; 0\,.$$

Její řešení (integrální křivky) splňující podmínky

$$x(a) = \alpha_0,\ x'(a) = \alpha_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1},\ x(b) = \beta_0,\ x'(b) = \beta_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(b) = \beta_{n-1}$$

jsou extrémály uvažované variační úlohy. Jsou to funkce podezřelé z toho, že na nich nabývá funkcionál v svého lokálního extrému.

Analogicky jako v 2.2 lze ukázat, že nutnou podmínkou pro extrém funkcionálu

$$v[\boldsymbol{x}] \;=\; \int\limits_a^b F\big(s, x_1(s), x_1'(s), x_1''(s), \ldots, x_1^{(n_1)}(s), \ldots, x_m(s), x_m'(s), x_m''(s), \ldots, x_m^{(n_m)}(s)\big) \mathrm{d}s$$

je soustava rovnic

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x_i'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} F_{x_i''} - \cdots + (-1)^{n_i} \frac{\mathrm{d}^{n_i}}{\mathrm{d}s^{n_i}} F_{x_i^{(n_i)}} \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

2.4 Úlohy typu $\int\limits_\Omega F\big(x, y, u, \frac{\partial}{\partial x} u, \frac{\partial}{\partial y} u\big) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \to \mathrm{extr}$, $u(x, y) = g(x, y)$ pro $(x, y) \in \partial\Omega$

Nechť $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ je třikrát diferencovatelná funkce a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je elementární množina (vzhledem k oběma osám), tj. existují čísla $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ a funkce $\eta_0, \eta_1, \xi_0, \xi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\begin{aligned} \Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ & x_0 \le x \le x_1, \eta_0(x) \le y \le \eta_1(x)\big\} = \\ &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y_0 \le y \le y_1, \xi_0(y) \le \xi_1(y)\big\} \end{aligned}$$

a pro hranici množiny Ω platí

$$\begin{aligned} \partial\Omega = \big\{\big(x, \eta_0(x)\big) \in \mathbb{R}^2 :\ x_0 \le x \le x_1\big\} &\cup \big\{\big(x, \eta_1(x)\big) \in \mathbb{R}^2 :\ x_0 \le x \le x_1\big\} = \\ = \big\{\big(\xi_0(y), y\big) \in \mathbb{R}^2 :\ y_0 \le y \le y_1\big\} &\cup \big\{\big(\xi_1(y), y\big) \in \mathbb{R}^2 :\ y_0 \le y \le y_1\big\}\,. \end{aligned}$$

Nechť dále V je vektorový prostor funkcí $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ dvakrát spojitě diferencovatelných na $\operatorname{int}\Omega$ a spojitých na $\bar{\Omega}$ s normou

$$\begin{aligned} \|u\| = \max\Bigg\{ \max\big\{|u(x, y)| :\ (x, y) \in \bar{\Omega}\big\}, \sup\left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right| :\ (x, y) \in \operatorname{int}\Omega \right\}, \\ \sup\left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right| :\ (x, y) \in \operatorname{int}\Omega \right\} \Bigg\}\,. \end{aligned}$$

pak

$$v[u] = \int\limits_{\Omega} F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

je spojitý funkcionál na prostoru V.

Položme $\mathcal{A} = \{h \in V : h(x,y) = 0 \text{ pro } (x,y) \in \delta\Omega\}$.

Opět využijeme věty 1 a 2. Pro zjednodušení zápisu budeme používat označení $\frac{\partial}{\partial x}u = u_x$, $\frac{\partial}{\partial y}u = u_y$.

$$\varphi(\alpha; u, h) = \int\limits_{\Omega} F\big(x, y, u(x,y) + \alpha h(x,y), u_x(x,y) + \alpha h_x(x,y), u_y(x,y) + \alpha h_y(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\delta v(u)[h] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0; u, h) = \\ &= \int\limits_{\Omega} \big(F_u(x,y,u,u_x,u_y)h + F_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y)h_x + F_{u_y}(x,y,u,u_x,u_y)h_y\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

S využitím Fubiniovy věty a integrace per partes dostaneme

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} F_{u_x}\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_{y_0}^{y_1}\left(\int\limits_{\xi_0(y)}^{\xi_1(y)} F_{u_x}\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_{y_0}^{y_1}\left(\big[F_{u_x}\big(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y)\big)h(x,y)\big]_{x=\xi_0(y)}^{\xi_1(y)} - \int\limits_{\xi_0(y)}^{\xi_1(y)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{u_x}\right)h\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \\ &= -\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{u_x}\right)h\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

neboť $h\big(\xi_0(y), y\big) = 0 = h\big(\xi_1(y), y\big)$. Podobně dostaneme

$$\int\limits_{\Omega} F_{u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_{u_y}\right)h\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Má-li tedy funkce $u \in V$ být extrémálou funkcionálu v, musí podle vět 1 a 2 platit

$$\delta v(u)[h] = \int\limits_{\Omega}\left(F_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{u_x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_{u_y}\right)h\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Aby tato rovnost byla splněna pro libovolnou funkci $h \in \mathcal{A}$, musí být funkce v závorce za integrálem identicky nulová na množině Ω. To znamená, že funkce u je řešením parciální diferenciální rovnice

$$F_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{u_x} - \frac{d}{\mathrm{d}y}F_{u_y} = 0. \tag{1}$$

Tato rovnice se nazývá *Eulerova-Lagrangeova* nebo *Ostrogradského rovnice.*

Poznamenejme, že rovnici (1) extrémály funkcionálu lze odvodit i bez předpokladu, že množina Ω je elementární. V takovém případě bychom využili Greenovy vzorce.

3 Úlohy s volnými konci

3.1 Úlohy typu $\int_a^b F\big(s, x(s), x'(s)\big)\mathrm{d}s \to \mathrm{extr},\ x(a) = x_1$

Je-li F dvakrát diferencovatelná funkce tří proměnných, V prostor funkcí definovaných a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a, b]$ a na V je zavedena některá z norem

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &= \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\} \\ \|x\|_1 &= \max\{\max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}, \max\{|x'(t)| : t \in [a, b]\}\}, \end{aligned}$$

pak

$$v[x] = \int_a^b F\big(s, x(s), x'(s)\big)\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V s normou $\|\cdot\|_1$.

Položme $\mathcal{A} = \{h \in V : h(a) = 0\}$.

Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$. Navíc požadujeme, aby pro funkci $x \in V$, v níž se extrém realizuje, platilo $x(a) = x_1$, kde $x_1 \in \mathbb{R}$ je předem daná konstanta. V případě normy $\|\cdot\|_1$ mluvíme o *slabých extrémech*, v případě normy $\|\cdot\|_0$ mluvíme o *silných extrémech.*

Využijeme věty 1 a 2:

$$\varphi(\alpha; x, h) = \int_a^b F(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s) + \alpha h'(s))\mathrm{d}s\,,$$

$$\delta v(x)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0; x, h) = \int_a^b \big(F_x(s, x(s), x'(s))h(s) + F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s)\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

Integrací per partes dostaneme

$$\int_a^b F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s)\mathrm{d}s = \big[F_{x'}(s, x(s), x'(s))h(s)\big]_a^b - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s, x(s), x'(s))\right) h(s)\mathrm{d}s$$

a poněvadž $h(a) = 0$, platí

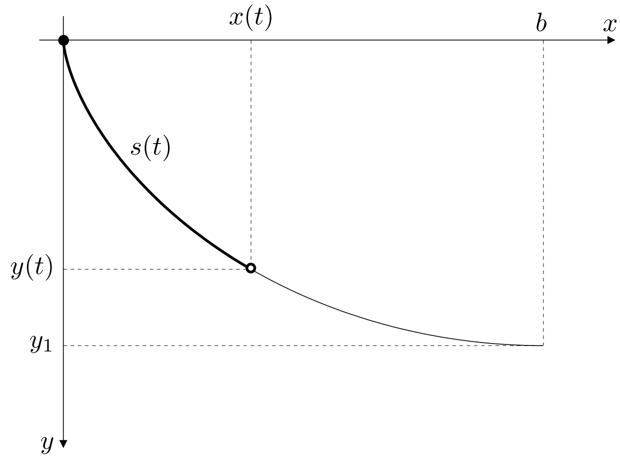
$$\delta v(x)[h] = F_{x'}(b, x(b), x'(b))h(b) + \int_a^b \left(F_x(s, x(s), x'(s)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s, x(s), x'(s))\right) h(s)\mathrm{d}s = 0.$$

Tato rovnost platí pro každou přípustnou funkci $h \in \mathcal{A}$ právě tehdy, když funkce x splňuje na (a, b) Eulerovu rovnici

$$F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'}$$

a tzv. *podmínku transverzality*

$$F_{x'}(b, x(b), x'(b)) = 0\,.$$



Obrázek 1: K úloze o brachystochroně

Úplně stejně můžeme ukázat, že extremála funkcionálu v, která vyhovuje podmínce $x(b) = x_2$, musí splňovat Eulerovu rovnici a podmínku transverzality

$$F_{x'}(a, x(a), x'(a)) \;=\; 0\,.$$

3.1.1 Úloha o brachystochroně

V roce 1696 zformuloval Johann Bernoulli problém najít tzv. čáru nejrychlejšího sestupu. Představme si, že hmotný bod, který je na začátku v klidu a pohybuje se pouze působením gravitace, má překonat vodorovnou vzdálenost b. Výchozí bod v takovém případě samozřejmě musí být výše, než bod koncový. Má se najít „převýšení" a tvar křivky, po níž se má bod pohybovat, které zaručí, aby čas potřebný k překonání vzdálenosti byl nejmenší.

Zavedeme souřadný systém tak, že osa x je vodovorovná a směřuje zleva doprava, osa y je svislá a orientovaná shora dolů. Výchozí bod je v počátku souřadnic, koncový bod má první souřadnici rovnu b a druhou, vyjadřující „převýšení", zatím neurčenou, viz obr. 1.

Poloha pohybujícího se bodu závisí na čase. V okamžiku t se bude bod nacházet v bodě $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$, od začátku děje urazí dráhu $s = s(t)$ a poklesne o výšku $y = y(t) = y\big(x(t)\big)$. Dráha $s(t)$, kterou za čas t urazí, je rovna délce brachystochrony od počátečního bodu $(0, 0)$ do bodu $\big(x(t), y(t)\big)$, tedy

$$s(t) = \int\limits_0^{x(t)} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

kde $'$ označuje derivaci podle proměnné x.

Rychlost v pohybujícího se bodu je derivací dráhy podle času,

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Označíme-li m hmotnost pohybujícího se bodu, bude nárůst jeho kinetická energie od začátku pohybu $\Delta W_k = \frac{1}{2}mv^2$ a ztráta energie potenciální $\Delta W_p = mgy$. Ze zákona zachování energie tedy dostaneme

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = mgy,$$

kde g je tíhové zrychlení. Poněvadž dráha s bodu v čase narůstá, je její derivace podle času kladná a tedy z poslední rovnosti dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}.$$

Za levou stranu dosadíme derivaci proměnné s dané rovností (2) podle času. Dostaneme tak obyčejnou diferenciální rovnici

$$\sqrt{1+y'(x)^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}$$

a po separaci proměnných

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Integrací této rovnosti dostaneme celkový čas pohybu uvažovaného bodu jako

$$t[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Tento čas závisí na tvaru křivky $y = y(x)$.

Hledáme tedy minimum funkcionálu t daného rovností (3). Poněvadž funkce

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

nezávisí na nezávisle proměnné x, bude Eulerova rovnice podle 2.1.1 tvaru

$$F - y'F_{y'} = const.$$

Jest

$$F_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \tag{4}$$

takže

$$F - y'F_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy\left(1+y'^2\right)}} = const,$$

a Eulerovu rovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$y\left(1+y'^2\right) = C, \tag{5}$$

kde C je kladná konstanta. Zavedeme substituci $u = \operatorname{arccotg} y'$, tj. $y' = \operatorname{cotg} u$. Proměnnou u budeme považovat za parametr. Z rovnosti (5) vyjádříme

$$y = \frac{C}{1+(\operatorname{cotg} u)^2} = \frac{C(\sin u)^2}{(\sin u)^2 + (\cos u)^2} = \frac{C}{2}(1-\cos 2u). \tag{6}$$

Pak platí
$$\operatorname{cotg} u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{C}{2} 2\sin 2u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2C \sin u \cos u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$
Substituce tedy převádí rovnici (6) na obyčejnou diferenciální rovnici se separovanými proměnnými
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2C(\sin u)^2,$$
jejíž obecné řešení je
$$x = 2C\int(\sin u)^2 \mathrm{d}u = C\int(1-\cos 2u)\mathrm{d}u = \frac{C}{2}(2u - \sin 2u) + D, \tag{7}$$
kde D je integrační konstanta. Tato rovnost spolu s (6) představuje obecné řešení Eulerovy rovnice v parametrickém tvaru.

Počáteční bod je v počátku souřadnic $(0,0)$, tj. $y=0$ pro $x=0$. Podle (6) je $y=0$ pro $u=0$, takže pro $u=0$ musí být $x=0$, což vzhledem k (7) znamená
$$0 = \frac{C}{2}(0 - \sin 0) + D = D. \tag{8}$$
Podle rovnosti (4) je podmínka transverzality tvaru
$$\frac{y'(b)}{\sqrt{2gy(b)\,(1+y'(b)^2)}} = 0$$
a to znamená, že $y'(b) = 0$. Poněvadž
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}} = \frac{2\sin 2u}{2 - 2\cos 2u},$$
je $y' = 0$ pro $u = \frac{\pi}{2}$. Tedy pro $u = \frac{\pi}{2}$ má být $x = b$, takže podle (7) a (8) platí
$$b = \frac{C}{2}\left(\pi - \sin\pi\right),$$
neboli $C = 2b/\pi$. Parametrické vyjádření brachystochrony tedy je
$$\begin{aligned} x &= \frac{b}{\pi}(2u - \sin 2u), \\ y &= \frac{b}{\pi}(1 - \cos 2u), \end{aligned} \qquad u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$
Jedná se o cykloidu s poloměrem kotálející se kružnice $\frac{b}{\pi}$. Koncový bod je tedy o $\frac{2b}{\pi}$ níže, než bod výchozí.

3.2 Bolzova úloha $\Phi\big(x(a),x(b)\big)+\int\limits_a^b F\big(s,x(s),x'(s)\big)\mathrm{d}s\to\mathrm{extr}$

Je-li F dvakrát diferencovatelná funkce tří proměnných a Φ diferencovatelná funkce dvou proměnných, V prostor funkcí definovaných a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a,b]$ s některou z norem

$$\begin{aligned}\|x\|_0 &= \max\{|x(t)| : t\in[a,b]\}\\ \|x\|_1 &= \max\{\max\{|x(t)| : t\in[a,b]\},\max\{|x'(t)| : t\in[a,b]\}\},\end{aligned}$$

pak

$$v[x]=\Phi(x(a),x(b))+\int\limits_a^b F(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V s normou $\|\cdot\|$.

Položme $\mathcal{A}=V$. Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$. V případě normy $\|\cdot\|_1$ mluvíme o *slabých extrémech*, v případě normy $\|\cdot\|_0$ mluvíme o *silných extrémech*. Opět využijeme věty 1 a 2:

$$\varphi(\alpha;x,h) = \Phi\left(x(a)+\alpha h(a),x(b)+\alpha h(b)\right)+\int\limits_a^b F(s,x(s)+\alpha h(s),x'(s)+\alpha h'(s))\mathrm{d}s\,,$$

$$\begin{aligned}\delta v(x)[h] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0;x,h) = \Phi_{x(a)}\left(x(a),x(b)\right)h(a)+\Phi_{x(b)}\left(x(a),x(b)\right)h(b)+\\ &\quad+\int\limits_a^b\big(F_x(s,x(s),x'(s))h(s)+F_{x'}(s,x(s),x'(s))h'(s)\big)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

a budeme integrovat per partes

$$\int\limits_a^b F_{x'}(s,x(s),x'(s))h'(s)\mathrm{d}s = \big[F_{x'}(s,x(s),x'(s))h(s)\big]_a^b-\int\limits_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s,x(s),x'(s))\right)h(s)\mathrm{d}s$$

takže

$$\begin{aligned}0 = \delta v(x)[h] &= \Big(\Phi_{x(a)}\big(x(a),x(b)\big)-F_{x'}\big(a,x(a),x'(a)\big)\Big)h(a)+\\ &\quad+\Big(\Phi_{x(b)}\big(x(a),x(b)\big)+F_{x'}\big(b,x(b),x'(b)\big)\Big)h(b)+\\ &\quad+\int\limits_a^b\left(F_x\big(s,x(s),x'(s)\big)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s,x(s),x'(s))\right)h(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Tato rovnost platí pro každou přípustnou funkci $h\in\mathcal{A}$ právě tehdy, když funkce x splňuje na (a,b) Eulerovu rovnici

$$F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'}$$

a podmínky transverzality

$$F_{x'}\big(a,x(a),x'(a)\big) = \Phi_{x(a)}\big(x(a),x(b)\big),\quad F_{x'}\big(b,x(b),x'(b)\big) = -\Phi_{x(b)}\big(x(a),x(b)\big).$$

Poznamenejme, že volbou $\Phi\equiv 0$ dostaneme úlohu předchozího typu bez omezení $x(a)=x_1$.

3.3 Úlohy typu $\int\limits_a^\tau F\big(s, x(s), x'(s)\big)\mathrm{d}s \to$ extr, $x(a) = x_1$

Nechť F je dvakrát diferencovatelná funkce tří proměnných, $C^1([a,\infty))$ množina funkcí definovaných, ohraničených a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a,\infty)$, $V = C^1([a,\infty)) \times \mathbb{R}$. Na V lze zavést normu

$$\|(x,\tau)\|_0 \;=\; \max\big\{|\tau|, \max\{\sup\{|x(t)| : t \in [a,\infty)\}, \sup\{|x'(t)| : t \in [a,\infty)\}\}\big\}\,.$$

Pak

$$v[(x,\tau)] = \int\limits_a^\tau F\big(s, x(s), x'(s)\big)\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V.

Položme $\mathcal{A} = \{(h,\nu) \in V : h(a) = 0\}$.

Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$ za podmínky $x(a) = x_1$. Opět využijeme věty 1 a 2:

$$\varphi(\alpha; (x,\tau), (h,\nu)) \;=\; \int\limits_a^{\tau+\alpha\nu} F\big(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s) + \alpha h'(s)\big)\mathrm{d}s\,,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi\big(\alpha, (x,\tau), (h,\nu)\big) &= \\
&= \nu F\left(\tau + \alpha\nu, x(\tau+\alpha\nu) + \alpha h(\tau+\alpha\nu), x'(\tau+\alpha\nu) + \alpha h'(\tau+\alpha\nu)\right) + \\
&\quad + \int\limits_a^{\tau+\alpha\nu} F_x\left(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s) + \alpha h'(s)\right) h(s)\mathrm{d}s + \\
&\quad + \int\limits_a^{\tau+\alpha\nu} F_{x'}\left(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s)\alpha h'(s)\right) h'(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v(x,\tau)[(h,\nu)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi\big(0, (x,\tau), (h,\nu)\big) &= \\
= \nu F\left(\tau, x(\tau), x'(\tau)\right) + \int\limits_a^\tau \Big(F_x\left(s, x(s), x'(s)\right) h(s) + F_{x'}\left(s, x(s), x'(s)\right) h'(s)\Big)\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Integrací per partes a s využitím podmínky $h(a) = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^\tau F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s)\mathrm{d}s &= \\
&= \big[F_{x'}(s, x(s), x'(s))h(s)\big]_a^\tau - \int\limits_a^\tau \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}\left(s, x(s), x'(s)\right)\right) h(s)\mathrm{d}s \;= \\
&= \; F_{x'}(\tau, x(\tau), x'(\tau))h(\tau) - \int\limits_a^\tau \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}\left(s, x(s), x'(s)\right)\right) h(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

takže platí

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; \delta v(x,\tau)[(h,\nu)] \;=&\\
=&\; \nu F\big(\tau, x(\tau), x'(\tau)\big) + F_{x'}\big(\tau, x(\tau), x'(\tau)\big)\, h(\tau) + \\
&+ \int_a^\tau \left(F_x\big(s, x(s), x'(s)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x'}\big(s, x(s), x'(s)\big) \right) h(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Tato rovnost je splněna pro každou dvojici $(h,\nu) \in \mathcal{A}$ právě tehdy, když funkce x splňuje Eulerovu rovnici

$$F_x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x'}$$

a podmínky transverzality

$$F\big(\tau, x(\tau), x'(\tau)\big) \;=\; 0\,, \qquad F_{x'}\big(\tau, x(\tau), x'(\tau)\big) \;=\; 0\,.$$

4 Vázané (podmíněné) extrémy

4.1 Úlohy typu $\int_a^b F\big(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{x}'(s)\big)\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$, $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{x_2}$, $(\forall s \in [a,b]) f_j\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$

Nechť $F : \mathbb{R}^{1+2n} \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná funkce a V_n je prostor spojitě diferencovatelných vektorových funkcí $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ s normou

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \max\big\{\max\{|x_i(s)| : s \in [a,b]\}, \max\{|x_i'(s)| : s \in [a,b]\}\big\}\,.$$

Pak $v : V_n \to \mathbb{R}$ definovaný vztahem

$$v[\boldsymbol{x}] = \int_a^b F\big(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{x}'(s)\big)\mathrm{d}s = \int_a^b F\big(s, x_1(s), \dots, x_n(s), x_1'(s), \dots, x_n'(s)\big)\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na vektorovém prostoru V_n s normou $\|\cdot\|_1$.

Nechť dále $f_j : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$ jsou diferencovatelné nezávislé funkce. Položme

$$X = \big\{\boldsymbol{x} \in V_n : (\forall s \in [a,b])(\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}) f_j\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) = 0\big\}\,,$$

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{h} \in V_n : \boldsymbol{h}(a) = 0 = \boldsymbol{h}(b)\}\,,$$

$$\mathcal{A}_X = \{\boldsymbol{h} \in \mathcal{A} : (\forall \boldsymbol{x} \in X)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h} \in X\}\,;$$

poznamenejme, že množina $\mathcal{A}_X \subseteq V_n$ obecně není vektorový podprostor. Řekneme, že *funkcionál v nabývá na $\boldsymbol{x}^* \in V_n$ lokálního maxima* (resp. *minima*) *vzhledem k $\mathcal{A}$ na množině X*, jestliže $\boldsymbol{x}^* \in X$ a existuje $\mathcal{O}$ takové, že pro každou funkci $\boldsymbol{h} \in \mathcal{O} \cap \mathcal{A}_X$ platí $v[\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{h}] \le v[\boldsymbol{x}^*]$ (resp. $v[\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{h}] \ge v[\boldsymbol{x}^*]$). Stručně mluvíme o *extrémech za podmínek $f_j(\boldsymbol{x}) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$* nebo o *vázaných extrémech.*

Uvažujme nyní prostor V_m s normou $\|\cdot\|_1$. Buď $L : \mathbb{R}^{1+2n+m} \to \mathbb{R}$ funkce definovaná vztahem

$$L(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = F(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') + \sum_{j=1}^{m} y_j f_j\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)$$

(složky vektoru $\boldsymbol{y}$ se nazývají *Lagrangeovy multiplikátory*). Pak funkcionál $v^* : V_n \times V_m \to \mathbb{R}$ definovaný vztahem

$$v^*[(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] = \int_a^b L(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) \mathrm{d}s = \int_a^b \left(F\big(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{x}'(s)\big) + \sum_{j=1}^{m} y_j(s) f_j\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) \right) \mathrm{d}s$$

je spojitý. Položíme

$$\mathcal{A}^* = \{\boldsymbol{h} \in V_n \times V_m : \, h_1(a) = h_2(a) = \cdots = h_n(a) = 0 = h_1(b) = h_2(b) = \cdots = h_n(b)\}\,.$$

Prostor $\mathcal{A}$ lze považovat za podprostor prostoru $\mathcal{A}^*$, neboť zobrazení

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n) \mapsto (h_1, h_2, \ldots, h_n, 0, 0, \ldots, 0)$$

je prosté.

Extrémály funkcionálu v^* podle 2.2 splňují Eulerovy rovnice

$$L_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_{x_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad L_{y_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_{y_j'} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Avšak $L_{y_j'} = 0$, neboť hodnota funkce L nezávisí na derivaci funkce y_j, a

$$L_{y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(F(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') + \sum_{k=1}^{m} y_k f_k(s, \boldsymbol{x}) \right) = f_j(\boldsymbol{x}).$$

Extrémály funkcionálu v^* tedy splňují $n + m$ rovnic

$$L_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_{x_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad f_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Odtud plyne, že pro extrémálu $(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{y^*})$ funkcionálu v^* platí

$$v^*[(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{y^*})] = \int_a^b \left(F\big(s, \boldsymbol{x^*}(s), \boldsymbol{x^*}'(s)\big) + \sum_{j=1}^{m} y_j^*(s) f\big(s, \boldsymbol{x^*}(s)\big) \right) \mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^b F\big(s, \boldsymbol{x^*}(s), \boldsymbol{x^*}'(s)\big) = v[\boldsymbol{x^*}].$$

Poněvadž $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$, platí: Pokud na $(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{y^*})$ je lokální extrém funkcionálu v^* vzhledem k $\mathcal{A}^*$, pak na $\boldsymbol{x^*}$ je lokální extrém funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$ na množině X.

4.1.1 Úloha o geodetických čarách

Mezi všemi křivkami, které spojují dva body na ploše o rovnici $f(x,y,z)=0$ se má vybrat ta, která má nejmenší délku.

Délka křivky $\big\{\big(y(x),z(x)\big) : x\in[x_0,x_1]\big\}$ je rovna integrálu

$$\ell[(y,z)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'(x)^2+z'(x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$'$ označuje derivaci podle proměnné x. Hledáme tedy minimum funkcionálu ℓ za podmínky $f(x,y,z)=0$.

Máme

$$L(x,y,z,y',z',\lambda) = \sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x) f(x,y,z),$$

$$L_y = \lambda f_y,\quad L_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\qquad L_z = \lambda f_z,\quad L_{z'} = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.$$

Geodetické čáry tedy splňují rovnice

$$\lambda f_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\quad \lambda f_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\quad f(x,y,z)=0.$$

Eliminací Lagrangeova multiplikátoru λ z prvních dvou rovnic dostaneme

$$f_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = f_y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.$$

Poněvadž

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{y''\sqrt{1+y'^2+z'^2} - y'\dfrac{2y'y''+2z'z''}{2\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{1+y'^2+z'^2} =$$

$$= \frac{y''\left(1+y'^2+z'^2\right) - y'^2y'' - y'z'z''}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{3/2}} = \frac{y''+z'\left(z'y''-z''y'\right)}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{z''+y'\left(y'z''-y''z'\right)}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{3/2}},$$

můžeme poslední rovnici přepsat na tvar

$$f_z\frac{y''+z'\left(z'y''-z''y'\right)}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{3/2}} = f_y\frac{z''+y'\left(y'z''-y''z'\right)}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}.$$

Po úpravě dostaneme, že geodetická čára splňuje rovnice

$$f_zy''-f_yz'' = \left(f_yy'+f_zz'\right)\left(y'z''-y''z'\right),\qquad f(x,y,z)=0.$$