Masarykova univerzita

Zuzana Došlá

Matematika pro chemiky II

Brno 2009

Obsah

Kapitola 1

Plošný integrál

1.1 Plochy v prostoru

Plochou S v prostoru budeme rozumět graf funkce

$$S\colon z = f(x,y), \quad [x,y] \in D,$$

kde $f(x,y)$ je spojitá funkce, která má spojité parciální derivace prvního řádu. Takovýmto plochám budeme říkat *hladké*.

Normálový vektor Máme-li rovnici roviny $\varrho\colon ax+by+cz+d=0$, pak její normálový vektor je $\vec{n}=(a,b,c)$. Připomeňme, že tečná rovina k ploše S v bodě $[x_0,y_0]$ má rovnici

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Odtud vidíme, že tečná rovina má normálový vektor $\vec{n}=(f_x,f_y,-1)$ nebo $\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)$. Pro velikost tohoto vektoru platí $|\vec{n}|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}$.

Velikost plochy Pro obsah $m(S)$ plochy platí následující vztah

$$m(S) = \iint_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 1.1. Vypočtěte obsah povrchu parabolické plochy $z=x^2+y^2$, kde $0\le z\le 9$.

Řešení. Máme

$$f(x,y)=x^2+y^2, \qquad f_x(x,y)=2x, \qquad f_y(x,y)=2y, \qquad \mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

a odtud

$$m(S) = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Rovina $z = 9$ protíná paraboloid v kružnici $x^2 + y^2 = 9$. Proto daná plocha leží nad oblastí D, která je kruhem se středem v počátku a poloměrem $r = 3$ a pro výpočet využijeme s výhodu polárních souřadnic

$$\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = |1+4r^2 = t| =$$

$$= 2\pi\frac{1}{8}\int_1^{37} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left[2\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_1^{37} = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{37^3}-1\right).$$

▲

Orientace plochy Orientaci plochy v daném bodě definujeme volbou směru vektoru normály $\vec{n}$ takto:

a) svírá–li $\vec{n}$ ostrý úhel s kladným směrem osy z, říkáme, že plocha je orientována nahoru a $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$,
b) svírá–li $\vec{n}$ tupý úhel s kladným směrem osy z, říkáme, že plocha je orientována dolů a $\vec{n} = (f_x, f_y, -1)$,
c) pokud je vektor $\vec{n}$ kolmý na osu z, pak $\vec{n} = (f_x, f_y, 0)$ a plocha je rovnoběžná s rovinou xy.

1.2 Plošný integrál prvního druhu

Jedná se o analogii křivkového integrálu prvního druhu, tedy o integrál ze skalární funkce přes plochu S.

Definice 1.2. Nechť S je hladká plocha, která je grafem funkce $z = f(x,y)$ definované na množině D a nechť $F(x,y,z)$ je funkce spojitá na ploše S. Plošným integrálem prvního druhu rozumíme

$$\iint_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V případě, že funkce $F(x,y,z) = 1$ udává daný integrál obsah $m(S)$ plochy S. Fyzikální interpretace opět závisí na významu funkce $F(x,y,z)$. Příkladem aplikace je například určení hmotnosti M plochy S, jestliže známe hustotu $\rho(x,y,z)$ v libovolném bodě (x,y,z) plochy. Ze vzorce

$$\rho = \frac{M}{m(S)} \qquad \text{tj.} \qquad M = \varrho\, m(S),$$

dostáváme

$$M = \iint_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D \varrho\left(x,y,f(x,y)\right)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Příklad 1.3. Vypočtěte integrál $\iint_S xyz\,\mathrm{d}S$, kde S je část roviny $x+y+z=1$ v 1. oktantu (tedy pro $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$).

Řešení. Nejprve vyjádříme plochu S:

$$z = 1 - x - y, \quad \text{kde} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x.$$

Platí

$$f_x(x,y) = -1, \qquad f_y(x,y) = -1, \qquad \mathrm{d}S = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dostáváme tak

$$\iint_S xyz\,\mathrm{d}S = \sqrt{3}\iint_D xy\,(1-x-y)\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy\,(1-x-y)\;\mathrm{d}y =$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{x}{6}\,(1-x)^3\;\mathrm{d}x = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

▲

Příklad 1.4. Vypočtěte hmotnost kuželové plochy $S : z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 2$, je-li hustota plochy ρ konstantní.

Řešení. Platí

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

odtud

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}.$$

Pro hmotnost tak dostáváme

$$M = \iint_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D \rho\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\rho\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\sqrt{2}\pi\rho.$$

Při výpočtu jsme užili skutečnosti, že poslední integrál vyjadřuje obsah oblasti D, tedy kruhu o poloměru 2. ▲

1.3 Plošný integrál druhého druhu

Protože nejdůležitější aplikací plošného integrálu 2. druhu je výpočet toku vektorového pole orientovanou plochou, provedeme výklad tohoto integrálu na výpočtu této veličiny.

Přitom si představíme, že část prostoru je vyplněna nestlačitelnou proudící kapalinou, přičemž rychlost každé částice je určena jen její polohou a nezávisí na čase. Pole rychlosti tohoto proudění je popsáno vektorovou funkcí $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Ve zkoumané části prostoru se nachází orientovaná plocha S. Chceme zjistit, jaké množství tekutiny proteče plochou za jednotku času ve směru její orientace, tj. na tu stranu plochy, kam směřují její normálové vektory určující orientaci. I v tomto případě budeme uvažovat plochu, která je grafem funkce $z = f(x,y)$ na nějaké oblasti D.

Definice 1.5. Nechť S je hladká plocha orientovaná tak, že normálové vektory „směřují nahoru“, tj. svírají s kladným směrem osy z ostrý úhel, pak plošným integrálem druhého druhu rozumíme

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{n}(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy S

$$\vec{n} = \left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right).$$

V případě, že je plocha S orientovaná tak, že normálové vektory „směřují dolů“, tj. svírají s kladným směrem osy z tupý úhel, pak normálový vektor plochy S vezmeme

$$\vec{n} = \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)$$

Vezmeme–li vektorovou funkci $\vec{F}$ ve tvaru $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, dostaneme z předchozí definice pro plochu orientovanou vzhůru:

$$\begin{aligned}
&\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \\
&= \iint_S (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))\cdot \left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\mathrm{d}S = \\
&= \iint_D (P(x,y,f(x,y)), Q(x,y,f(x,y)), R(x,y,f(x,y)))\cdot \frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint_D (P(x,y,f(x,y)), Q(x,y,f(x,y)), R(x,y,f(x,y)))\cdot(-f_x,-f_y,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
&\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \\
&= \iint_D [-P(x,y,f(x,y))f_x(x,y) - Q(x,y,f(x,y))f_y(x,y) + R(x,y,f(x,y))]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Pro plochu orientovanou dolů, dostaneme ve výsledném vzorci opačné znaménko, ale tvar zůstane nezměněn.

Speciální případy plošného integrálu 2. druhu jsou:

a) Vektorové pole $\vec{F} = (0,0,R(x,y))$ a $S\colon z = f(x,y)$, pro $(x,y)\in D$. Pro tok T platí

$$T = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pm\iint_D (0,0,R(x,y,f(x,y))\cdot(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A odtud

$$T = \iint_D R(x, y, f(x, y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

jestliže normála plochy „míří nahoru“ (svírá ostrý úhel s kladným směrem osy z), nebo

$$T = -\iint_D R(x, y, f(x, y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

jestliže normála plochy „míří dolů“ (svírá tupý úhel s kladným směrem osy z).

b) Vektorové pole $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 0)$ a $z =$ konst. V tomto případě $\vec{n} = (0, 0, \pm 1)$ a

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (P(x, y, z), Q(x, y, z), 0) \cdot (0, 0, \pm 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Příklad 1.6. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 2)$ plochou S, která je orientovaná tak, že normálové vektory svírají s kladným směrem osy z ostrý úhel nebo pravý úhel.

Řešení. a) $S\colon z = 2 - y$, kde $0 \le x \le 4$, $y \ge 0$ a $z \ge 0$.

Platí $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 1, 1)$. Dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (0, 0, 2) \cdot (0, 1, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16.$$

Výsledek dvojného integrálu jsme získali úvahou, protože se jedná o obsah plochy D, kterou je obdélník o stranách 4 a 2 délkové jednotky. Tok plochou je tedy 16 jednotek toku.

b) $S : z = \sqrt{4 - y^2}$, $0 \le x \le 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

I v tomto případě svírají normálové vektory plochy ostrý úhel s kladným směrem osy z a platí $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1) = (0, \frac{y}{4-y^2}, 1)$. Dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (0, 0, 2) \cdot (0, \frac{y}{4 - y^2}, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16.$$

Také v tomto případě je oblast D stejný obdélník jako v části a). Tok plochou je tedy opět 16 jednotek toku.

c) S je válcová plocha $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$.

V tomto případě jsou normálové vektory kolmé na kladný směr osy z, a tedy také na vektor $\vec{F} = (0, 0, 2)$ V každém bodě válcové plochy platí

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = 0.$$

Tok vektorového pole plochou je tedy v tomto případě roven nule.

▲

Příklad 1.7. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (2, -1, 1)$ kuželovou plochou $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 4$, která je orientovaná tak, že její normálové vektory svírají s kladným směrem osy z tupý úhel.

Řešení. Platí

$$f_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

odtud

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right).$$

Pro tok T pak dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (2,-1,1)\cdot\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \left(\frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{4x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Získaný dvojný integrál jsme rozdělili na dva integrály pouze z důvodu výpočtu. První integrál vypočteme transformací do polárních souřadnic, ve kterých je oblast D určena nerovnicemi $0 \le \varrho \le 2$ a $0 \le \varphi \le 2\pi$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{4x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \mathrm{d}\varrho \int_0^{2\pi} \frac{4\varrho\cos\varphi - 2\varrho\sin\varphi}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi}}\varrho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^2 \varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} (4\cos\varphi - 2\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^2 [4\sin\varphi + 2\cos\varphi]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Druhý integrál, pokud neuvažujeme znaménko, vyjadřuje obsah kruhu, jehož poloměr je 2. Máme tedy

$$-\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\pi.$$

Celkový tok T přes plochu S je roven -4π jednotek toku. ▲

1.4 Gauss-Ostrogardského věta

Věta 1.8. *Nechť $\vec{F} = (P,Q,R)$ je vektorová funkce definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a $G \subset \Omega$ je uzavřená ohraničená oblast, jejíž hranicí je uzavřená plocha S orientovaná podle vnějších normál. Nechť P, Q, R, P_x, Q_y a R_z jsou na Ω spojité. Pak platí*

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_G (P_x + Q_y + R_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Výpočet toku vektoru přes uzavřenou plochu tedy převádíme na trojný integrál přes vnitřek této plochy.

Interpretujeme-li plošný integrál jako tok T vektorového pole uzavřenou plochou, pak $T = T_1 - T_2$, kde T_1 je množství tekutiny, které z G vyteče za jednotku času, a T_2 je množství tekutiny, které do G za stejný čas přiteče.

Je-li $T = 0$, pak z oblasti vytéká právě tolik tekutiny, kolik do ní vtéká.

Je-li $T > 0$, pak z oblasti vytéká za jednotku času více tekutiny, než kolik do ní vtéká. Dá se to vysvětlit tak, že uvnitř oblasti G se nacházejí tzv. *zřídla*, tj. body, ve kterých nějakým způsobem přibývá tekutiny.

Když $T < 0$, pak z oblasti vytéká méně tekutiny, než kolik do ní vtéká. To se dá vysvětlit tím, že v oblasti se nachází tzv. *nory*, ve kterých se tekutina ztrácí.

Příklad 1.9. Vypočtete tok $T = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F}(P, Q, R) = (y^2, z^2, x^2)$, přes povrch krychle $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ a $-1 \leq z \leq 1$ orientovaný tak, že normála míří zvnitřku ven.

Řešení. Jsou splněny předpoklady Gaussovy-Ostrogradského věty. Přitom

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 0.$$

Platí tedy

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

▲

Cvičení

1. Pomocí plošného integrálu spočtěte obsah plochy S, která je grafem funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ na oblasti $D\colon x^2 + y^2 \leq 4$.

2. Vypočtěte obsah části plochy $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$.

3. Vypočtěte integrál $\iint_S (2x + \frac{4}{3}y + z) \, \mathrm{d}S$, kde S je část roviny v 1. oktantu.

4. Vypočtěte tok vektorového pole $F = (0; 0; 1)$ plochou $S\colon z = \sqrt{1 - y^2}$, kde $0 \leq x \leq 4$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, a která je orientovaná tak, že normálový vektor svírá s osou z ostrý úhel.

5. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ orientovanou plochou S, kterou je část roviny $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ v 1.oktantu a jejíž normálové vektory svírají s osou z ostrý úhel.

6. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ orientovanou plochou S, kterou je kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, jejíž normálové vektory svírají s osou z ostrý úhel.

Výsledky:
1. $4\pi\sqrt{2}$ 2. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$ 3. $4\sqrt{61}$ 4. 4 5. 12 6. 54π

Kapitola 2

Diferenciální operátory matematické fyziky

Do teď jsme se setkávali hlavně s tzv. *skaláry*, tj. funkcemi, které určovali pouze velikost nějaké veličiny. V této části se seznámíme s vektorovou funkcí, která kromě informaci o velikosti, poskytuje i informaci o směru působení nějaké veličiny.

Definice 2.1. Nechť D je otevřená množina v $\mathbb{R}^2$ a nechť $P(x, y)$, $Q(x, y)$ jsou funkce definované v D. Pak tato dvojice definuje *vektorovou funkci* $\vec{F}(x, y)$. Množina D spolu s funkcí $\vec{F}$ se nazývá *vektorové pole*.

Funkce $\vec{F}$ je tak dvousložkový vektor, který můžeme napsat pomocí funkcí $P(x, y)$, $Q(x, y)$, které nazýváme *složky vektorové funkce*:

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle,$$

kde $\vec{i} = \langle 1, 0\rangle$, $\vec{j} = \langle 0, 1\rangle$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadných os.

Nejjednodušší způsob jak si dané pole představit, je v několika bodech nakreslit šipky reprezentující vektor $\vec{F}(x, y)$, který začíná v bodě (x, y).

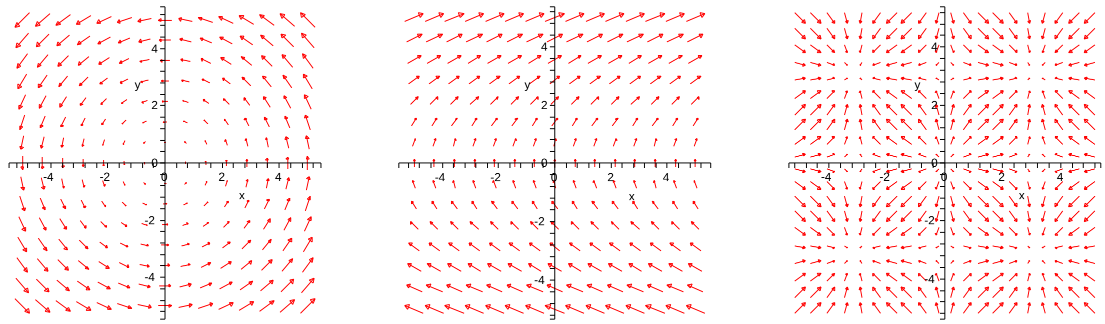
Příklad 2.2. Pomocí nakreslení několika vektorů popište vektorové pole definované funkcí $\vec{F}(x, y) = \langle -y, x\rangle$.

Řešení. Protože například $\vec{F}(1, 0) = \langle 0, 1\rangle$, nakreslíme vektor $\vec{j} = \langle 0, 1\rangle$ začínající v bodě $[1, 0]$. Podobně například $\vec{F}(2, 2) = \langle -2, 2\rangle$, proto v bodě $[2, 2]$ nakreslíme vektor $\langle -2, 2\rangle$. Stejným způsobem vybereme i další reprezentanty a nakreslíme příslušné vektory. ▲

Podobně můžeme definovat *vektorovou funkci* $F(x, y, z)$ na množině $V \subset \mathbb{R}^3$. Bude pak

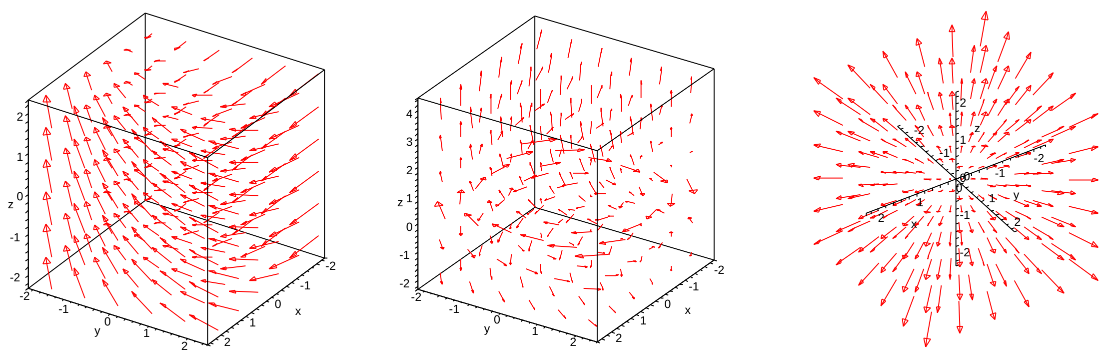
$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

třísložková funkce, která bude bodům v prostoru přiřazovat vektory v prostoru. Vektorová pole v prostoru pak můžeme reprezentovat analogicky jako vektorová pole v rovině.



(a) $\vec{F} = \langle -y, x\rangle$ (b) $\vec{F} = \langle y, 2\rangle$ (c) $\vec{F} = \langle \sin x, \sin y\rangle$

Obrázek 2.1: Příklady vektorových polí



(a) $\vec{F} = \langle -y, -2, x\rangle$ (b) $\vec{F} = \langle \frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, z\rangle$ (c) $\vec{F} = \langle x, y, z\rangle$

Obrázek 2.2: Příklady vektorových polí

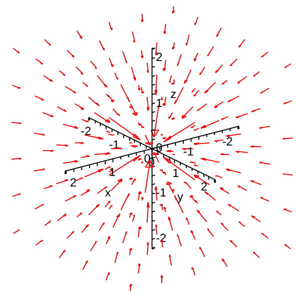
Příklad 2.3. Newtonův gravitační zákon říká, že velikost gravitační síly mezi dvěma tělesy s hmotnostmi m_1 a m_2 je dána vztahem

$$|\vec{F}| = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kde r je vzdálenost mezi tělesy a κ je gravitační konstanta. Popište příslušné vektorové pole.

Řešení. Umístěme jedno z těles do počátku soustavy souřadnic a označme polohový vektor druhého tělesa $\vec{x} = \langle x, y, z\rangle$. Potom vzdálenost r je rovna velikosti tohoto vektoru, tj. $r = |\vec{x}|$. Gravitační síla vztažená k druhému tělesu směřuje do počátku a jednotkový vektor v tomto směru je

$$-\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$



Obrázek 2.3: Gravitační silové pole

Dostaneme tak gravitační sílu, která působí na těleso v $\vec{x} = \langle x, y, z\rangle$ dánu vztahem

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\kappa \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}|^3}\vec{x}.$$

Dostáváme tak příklad vektorového pole, které se nazývá *gravitační silové pole*. Pomocí složek můžeme předcházející rovnici zapsat ve tvaru

$$F(x,y,z) = \kappa \frac{-x m_1 m_2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i} + \kappa \frac{-y m_1 m_2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{j} + \kappa \frac{-z m_1 m_2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k},$$

kde $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ je velikost vektoru $\vec{x}$. ▲

Gradient funkce V kapitole o diferenciálním počtu jsme se setkali s pojmem gradient funkce f, který byl definován pro funkci dvou proměnných

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle,$$

případně pro funkci tří proměnných

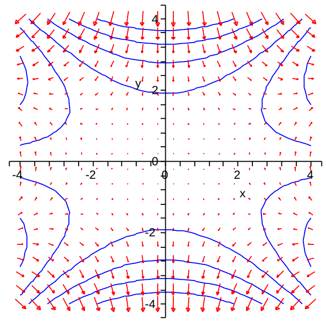
$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle.$$

Gradient funkce je tak příkladem vektorového pole. Toto pole v každém bodě ukazuje směr největšího růstu funkce. Ve fyzice se vektorové pole $\vec{F}$, které je gradientem nějaké skalární funkce f (tj. $\vec{F} = \mathrm{grad} f$), nazývá *konzervativní vektorové pole* a danou funkci f nazýváme *potenciálovou funkci* (potenciálem) pole $\vec{F}$.

Příklad 2.4. Najděte gradientové vektorové pole funkce $f(x,y) = x^2y - y^3$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathrm{grad} f$ je dán vztahem

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle$$



Obrázek 2.4: Gradient a vrstevnice

dostáváme

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \langle 2xy, x^2 - 3y^2 \rangle.$$

Na obrázku 2.4 je příslušné pole společně s vrstevnicemi. Můžeme si povšimnout, že vektory gradientu jsou kolmé na vrstevnice a větší čím jsou vrstevnice blíže. Proč je tomu tak? ▲

Na vektorových polích můžeme definovat dvě operace, které nám umožní popis jejich chování. Jde o *divergenci* a *rotaci* vektorového pole.

Divergence Jestliže $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ je vektorové pole na $\mathbb{R}^3$ a existují parciální derivace P_x, Q_y, R_z, pak **divergencí** vektorového pole $\vec{F}$ rozumíme funkci

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z).$$

Všimněme si, že divergence je skalární veličina, její význam můžeme vysvětlit například takto. Popisuje-li $\vec{F}$ rychlost proudění kapaliny nebo plynu, pak div$\vec{F}$ popisuje míru změny množství této kapaliny (plynu), která proudí z bodu $[x,y,z]$. Jinými slovy, divergence měří schopnost kapaliny divergovat („rozbíhat se“) z bodu $[x,y,z]$. Je-li v nějakém bodě P div$F(P) > 0$, říkáme bodu P zdroj nebo zřídlo (například bod $[0,0,0]$ v 2.2c), v opačném případ, tj. div$F(P) < 0$, říkáme, že bod je propad nebo výpusť (například bod [0,0,0] v 2.3).

Rotace Jestliže $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ je vektorové pole na $\mathbb{R}^3$ a existují všechny parciální derivace 1. řádu, které jsou navíc spojité, pak **rotací** vektorového pole $\vec{F}$ rozumíme funkci

$$\mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z) = \langle R_y(x,y,z) - Q_z(x,y,z), P_z(x,y,z) - R_x(x,y,z), Q_x(x,y,z) - P_y(x,y,z) \rangle.$$

Na rozdíl od divergence je rotace vektorové funkce opět vektorová funkce, její význam je například následující. Uvažujme částici blízko bodu $[x,y,z]$, ta má v kapalině tendenci rotovat kolem osy procházející bodem $[x,y,z]$ ve směru rot$\vec{F}(x,y,z)$. Rychlost této rotace závisí na velikosti vektoru rot$\vec{F}(x,y,z)$. Jestliže v každém bodě platí rot$\vec{F} = 0$, pak toto pole nazýváme *nevírové*.

Rotace nám též umožňuje určit, je-li dané pole konzervativní. V případě, že F je vektorové pole definované na jednoduše souvislé množině $E \in \mathbb{R}^3$, jehož složky jsou spojitě diferencovatelné funkce, pak rot$\vec{F} = 0$ právě tehdy, když $\vec{F}$ je konzervativní.

Hamiltonův operátor Všechny předchozí pojmy (gradient, divergence, rotace) můžeme snadno definovat pomocí tzv. Hamiltonova operátoru ∇:

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle .$$

Tento operátor je tedy vektorem skládajícím se ze tří symbolům pro parciální derivace. Pro gradient platí

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle .$$

Divergenci můžeme definovat jako skalární součin

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle P, Q, R \rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

a rotaci jako vektorový součin

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \times \langle P, Q, R \rangle \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\langle \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R & Q \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ Q & P \end{vmatrix} \right\rangle = \\
&= \langle R_y(x,y,z) - Q_z(x,y,z), P_z(x,y,z) - R_x(x,y,z), Q_x(x,y,z) - P_y(x,y,z) \rangle .
\end{aligned}$$