Komplexní čísla

Při řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ rozhoduje o počtu řešení diskriminant $D = b^2 - 4ac$. Řešíme-li rovnici v množině reálných čísel, pak v případě $D < 0$ tato rovnice nemá řešení. Z mnoha důvodů má ale smysl řešit kvadratickou rovnici i v tomto případě.

Uvažujme speciální případ kvadratické rovnice

$$x^2 + 1 = 0,$$

hledáme tedy číslo x, pro které platí $x^2 = -1$. Takové reálné číslo neexistuje, definujeme proto "nové" číslo i, pro které platí

$$i^2 = -1.$$

Řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$ jsou pak čísla $\pm i$.

Podobně např. rovnice $x^2 + 9 = 0$ má zřejmě řešení $\pm 3i$. Platí totiž

$$(3i)^2 = 9i^2 = 9 \cdot (-1) = -9 \qquad \text{a také} \qquad (-3i)^2 = (-3)^2 \cdot i^2 = 9i^2 = -9.$$

Číslu i, pro které platí $i^2 = -1$, říkáme **imaginární jednotka**. Výraz $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla, pak nazýváme **komplexním číslem**. V komplexním čísle $a + bi$ se číslo a nazývá **reálná část** a číslo b **imaginární část**. Zápis komplexního čísla $z = a + bi$ nazýváme **algebraický tvar** komplexního čísla z. Čísla $a + bi$, kde $a = 0$, nazýváme **ryze imaginární**.

Pro libovolná dvě komplexní čísla $a + bi$ a $c + di$ definujeme součet po složkách

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Násobíme-li komplexní čísla $a + bi$ a $c + di$ jako dvojčleny s ohledem na to, že $i^2 = -1$, dostaneme

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bic + bdi^2 = ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Komplexním číslem sdruženým k číslu $a + bi$ nazýváme číslo

$$\bar{z} = a - bi.$$

Absolutní hodnotu komplexního čísla $z = a + bi$ definujeme jako nezáporné reálné číslo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Řešení kvadratické rovnice v komplexním oboru

Vraťme se nyní k řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ v situaci, kdy $D=b^2-4ac<0$. V tomto případě kořeny rovnice vypočteme ze vzorců

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Vidíme, že kořeny jsou vždy komplexní čísla sdružená.

Příklady

Příklad 1: Řešte kvadratickou rovnici x^2-4x+5.

Diskriminant rovnice $D=-4$. Kořeny rovnice jsou tedy

$$x_1=\frac{4+i\sqrt{4}}{2}=2+i,\qquad x_2=\frac{4-i\sqrt{4}}{2}=2-i.$$

Příklad 2: Řešte kvadratickou rovnici $x^2+5=0$.

Diskriminant rovnice je $D=-20$. Protože $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$ dostáváme

$$x_1=\frac{0+i2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}i,\qquad x_2=\frac{-i2\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}i.$$

Tento příklad bychom ale spíše řešili prostou úvahou, kdy pro $d<0$ bereme

$$\sqrt{d}=i\sqrt{-d}.$$

Protože řešíme rovnici $x^2=-5$, pak řešením jsou $\pm\sqrt{-5}$, tedy $\pm i\sqrt{5}$.

Příklad 3: Najděte příklad kvadratické rovnice, která má kořeny $x_1=1+i$ a $x_2=1-i$.

Předpokládejme řešení ve tvaru $x^2+px+q=0$. Podle Viètových vzorců

$$x_1+x_2=-p,\qquad x_1\cdot x_2=q$$

dostáváme

$$p=-\left[(1+i)+(1-i)\right]=-2,\qquad (1+i)\cdot(1-i)=1-i^2=2.$$

“

Příkladem kvadratické rovnice s kořeny $1+i$ a $1-i$ je tedy rovnice

$$x^2-2x+2=0.$$