Domácí úkoly ke cvičení č. 1

1. Nechť $\mathcal{P}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaný implicitně jako množina všech řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 20, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 16. \end{aligned}$$

Nechť $\mathcal{Q}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaný implicitně jako množina všech řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 9, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 &= 5. \end{aligned}$$

Určete dimenze afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ v $\mathbb{R}^5$ a zjistěte, zda jejich průnik $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ je či není prázdný. Nechť $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$ značí nejmenší afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ obsahující sjednocení uvedených afinních podprostorů $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Najděte implicitní popis tohoto afinního podprostoru $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$ pomocí lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$. Určete dimenzi tohoto afinního podprostoru $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$.

2. Nechť $\mathcal{P}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaný tím, že obsahuje bod $S = [4, -4, 3, 1, -1]$ a že jeho zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{P})$ je generováno vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (1, -1, 1, 0, -1), \\ \mathbf{u}_2 &= (1, -5, -1, 4, 1), \\ \mathbf{u}_3 &= (2, -3, 0, 3, -2). \end{aligned}$$

Nechť $\mathcal{Q}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaný tím, že obsahuje bod $T = [5, -2, 4, 1, -2]$ a že jeho zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ je generováno vektory

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (1, 3, 3, -3, -1),\\ \mathbf{v}_2 &= (1, -5, -1, 5, 3),\\ \mathbf{v}_3 &= (3, -1, 1, 3, -3).\end{aligned}$$

Zjistěte, zda průnik těchto afinních podprostorů $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ je neprázdný, a je-li tomu tak, pak najděte parametrický popis afinního podprostoru $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Najděte tedy alespoň jeden bod ležící v průniku $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, zjistěte, zda zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ tohoto afinního podprostoru je nenulové, a je-li nenulové, najděte nějakou jeho bázi. Pomocí těchto údajů pak užitím parametrů vyjádřete všechny body afinního podprostoru $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ a určete jeho dimenzi.