Domácí úkoly ke cvičení č. 3

1. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 4 nad tělesem $\mathbb{R}$ je dána báze

$$\alpha = \big(1,\, x+1,\, (x+1)^2,\, (x+1)^3,\, (x+1)^4\big).$$

Najděte k ní duální bázi α^* v duálním vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]^*$ pozůstávajícím ze všech lineárních forem na $\mathbb{R}_4[x]$. Každou lineární formu duální báze α^* přitom zadejte předpisem, podle něhož je možno stanovit hodnotu této lineární formy na libovolném polynomu $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ z $\mathbb{R}_4[x]$.

2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]^*$ duálním k vektorovému prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 4 nad tělesem $\mathbb{R}$, který pozůstává ze všech lineárních forem na $\mathbb{R}_4[x]$, je dána báze

$$\Gamma = \big(g_0,\, g_1,\, g_2,\, g_3,\, g_4\big),$$

kde lineární formy $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}$ jsou zadány následujícími předpisy. Pro každý polynom $p \in \mathbb{R}_4[x]$ jsou hodnoty lineárních forem g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 na p dány takto:

$$g_0(p) = p(1),\ g_1(p) = p'(1),\ g_2(p) = p''(1),\ g_3(p) = p'''(1),\ g_4(p) = p''''(1).$$

Najděte polynomy $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}_4[x]$ takové, aby

$$\beta = \big(q_0,\, q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4\big)$$

byla báze vektorového prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ s vlastností, že daná báze Γ vektorového prostoru $\mathbb{R}_4[x]^*$ je bází k ní duální, tedy taková, aby platilo $\Gamma = \beta^*$.