

Domácí úkoly ke cvičení č. 4

1. Necht' symetrická bilineární forma f na vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 má ve standardních souřadnicích prostoru \mathbb{R}^4 vyjádření tvaru

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_2 + 8x_1y_3 + 2x_2y_1 - 2x_2y_3 - 8x_2y_4 \\ + 8x_3y_1 - 2x_3y_2 + 8x_3y_4 - 8x_4y_2 + 8x_4y_3.$$

Metodou stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav matice bilineární formy f upravte tuto bilineární formu na diagonální tvar, v němž budou vystupovat pouze koeficienty 1, -1 , případně 0, a to v tomto uvedeném pořadí. Najděte bázi β prostoru \mathbb{R}^4 takovou, aby v souřadnicích vzhledem k bázi β měla daná bilineární forma f nalezený diagonální tvar.

2. Necht' kvadratické formy F, G, H na vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 mají ve standardních souřadnicích prostoru \mathbb{R}^4 vyjádření tvarů

$$F(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4, \\ G(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4, \\ H(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_4^2.$$

Metodou doplňování na čtverce upravte každou z těchto kvadratických forem na diagonální tvar, v němž budou vystupovat pouze koeficienty 1, -1 , případně 0, a to v tomto uvedeném pořadí. Pro každou z kvadratických forem F, G, H najděte bázi prostoru \mathbb{R}^4 takovou, aby v souřadnicích vzhledem k této bázi měla dotyčná kvadratická forma nalezený diagonální tvar. O každé z kvadratických forem F, G, H rozhodněte, zda je tato forma pozitivně či negativně definitní, případně semidefinitní, anebo zda jde o kvadratickou formu, která je indefinitní.