Bilineární a kvadratické formy

Buď $(\mathbf{V},+,\cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T,+,\cdot)$. Zobrazení $f:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to T$ splňující podmínky

$$(\forall a,b\in T)(\forall\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V})(f(a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{v},\mathbf{w})=a\cdot f(\mathbf{u},\mathbf{w})+b\cdot f(\mathbf{v},\mathbf{w})),$$
$$(\forall a,b\in T)(\forall\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V})(f(\mathbf{u},a\cdot\mathbf{v}+b\cdot\mathbf{w})=a\cdot f(\mathbf{u},\mathbf{v})+b\cdot f(\mathbf{u},\mathbf{w}))$$

se nazývá bilineární forma na vektorovém prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$.

Buď dále $(\mathbf{V},+,\cdot)$ nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T,+,\cdot)$ a buď $\alpha=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n)$ báze vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$. Buď $f:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to T$ bilineární forma na vektorovém prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$. Pak matice

$$A=\big(f(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)\big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

se nazývá matice bilineární formy f v bázi α. V této situaci potom pro libovolné vektory $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ mající v bázi α souřadnice $(\mathbf{u})_\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ a $(\mathbf{w})_\alpha=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ $\big($což znamená, že $\mathbf{u}=\sum_{i=1}^n x_i\cdot\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{w}=\sum_{j=1}^n y_j\cdot\mathbf{v}_j\big)$ platí vztah

$$f(\mathbf{u},\mathbf{w})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\cdot f(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)\cdot y_j=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

Buď dále $\beta=(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_n)$ obecně jiná báze vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$. Uvažme matici

$$B=\big(f(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j)\big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

bilineární formy f v bázi β. Nechť výše uvažované vektory $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ mají v bázi β souřadnice $(\mathbf{u})_\beta=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ a $(\mathbf{w})_\beta=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ $\big($což tentokrát znamená, že $\mathbf{u}=\sum_{i=1}^n s_i\cdot\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{w}=\sum_{j=1}^n t_j\cdot\mathbf{r}_j\big)$. Buď konečně $P=(id_{\mathbf{V}})_{\alpha\beta}$ matice přechodu od báze β k bázi α. Pak pro uvedené souřadnice vektorů $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ v bázích α a β platí vztahy

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\cdot\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_n\end{pmatrix}\quad\text{a}\quad\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=P\cdot\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix}.$$

Potom pro výše zmíněné libovolně zvolené vektory $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ podle shora uvedeného vztahu máme

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

a dále pro ně na základě předchozích vztahů vychází

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \cdot P^\top \cdot A \cdot P \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Z těchto dvou vztahů pak snadno vyplyne rovnost

$$B = P^\top \cdot A \cdot P.$$

Buď znovu $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a buď $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ bilineární forma na vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Řekneme, že bilineární forma f je symetrická, splňuje-li podmínku

$$(\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V})(f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{u})).$$

Řekneme, že bilineární forma f je antisymetrická, splňuje-li podmínku

$$(\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V})(f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{w}, \mathbf{u})).$$

Je-li dále $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ libovolná báze vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a je-li $A = \big(f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)\big)_{i,j=1,\dots,n}$ matice dané bilineární formy f v bázi α, pak platí, že bilineární forma f je symetrická, resp. antisymetrická právě tehdy, když její matice A v bázi α je symetrická, resp. antisymetrická.

V situaci z předchozího odstavce uvažme k dané bilineární formě $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ bilineární formy $g, h : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ definované následujícími předpisy:

$$(\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V})(g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{u})),$$
$$(\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V})(h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - f(\mathbf{w}, \mathbf{u})).$$

Pak očividně g je symetrická bilineární forma a h je antisymetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Navíc, není-li těleso $(T, +, \cdot)$ charakteristiky 2, pak pro tyto bilineární formy platí vztah:

$$(\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V})\Big(f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\, g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2}\, h(\mathbf{u}, \mathbf{w})\Big).$$

Je tedy za uvedeného předpokladu o tělese $(T, +, \cdot)$ každá bilineární forma $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ součtem symetrické bilineární formy a antisymetrické bilineární formy.

Věnujme se dále problematice diagonalizace symetrických bilineárních forem. Buď opět $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Předpokládejme, že těleso $(T, +, \cdot)$ není charakteristiky 2. Pak ke každé symetrické bilineární formě $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ existuje báze β vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ taková, že matice B bilineární formy f v bázi β je diagonální. To znamená, že existují prvky $b_1, b_2, \ldots, b_n \in T$ takové, že pro souřadnice $(\mathbf{u})_\beta = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ a $(\mathbf{w})_\beta = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ libovolně vybraných vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ v bázi β platí

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = b_1 s_1 t_1 + b_2 s_2 t_2 + \cdots + b_n s_n t_n.$$

Poznamenejme, že k dané symetrické bilineární formě f není báze β s uvedenou vlastností určena jednoznačně.

Diagonální matici B z předchozího odstavce můžeme najít metodou souběžného provádění stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav. Tato metoda předpokládá, že těleso $(T, +, \cdot)$ není charakteristiky 2. Nechť symetrická bilineární forma $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ je dána svou maticí A v nějaké bázi α vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Pak matice A je symetrická. Vhodnou posloupností stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} B & P^\top \\ \hline P & \end{array}\right)$$

lze docílit toho, aby matice B byla diagonální. Přitom matice P vyjde regulární. Pak platí $B = P^\top \cdot A \cdot P$ a P je matice přechodu $(id_{\mathbf{V}})_{\alpha\beta}$ od hledané báze β zmíněné v předchozím odstavci k bázi α.

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a buď $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Pak zobrazení $F : \mathbf{V} \to T$ dané předpisem

$$(\forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{V})(F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}))$$

se nazývá kvadratická forma na vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ (určená symetrickou bilineární formou f).

Jestliže v situaci z předchozího odstavce těleso $(T, +, \cdot)$ není charakteristiky 2, pak symetrická bilineární forma f určující kvadratickou formu F na vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je zase naopak sama plně určena touto kvadratickou formou F. Pak se totiž lze snadno přesvědčit, že platí vztah

$$(\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V})\Big(f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\, F(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - \frac{1}{2}\, F(\mathbf{u}) - \frac{1}{2}\, F(\mathbf{w})\Big).$$

Buď dále opět $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Předpokládejme, že těleso $(T, +, \cdot)$ není charakteristiky 2. Buď α některá báze vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Buď $F : \mathbf{V} \to T$ kvadratická forma na vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a buď $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ k ní příslušná symetrická bilineární forma. Pak maticí kvadratické formy $F : \mathbf{V} \to T$ v bázi α rozumíme matici příslušné symetrické bilineární formy f v bázi α. Je-li A matice kvadratické formy $F : \mathbf{V} \to T$ v bázi α, pak A je symetrická matice a pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ mající v bázi α souřadnice $(\mathbf{u})_\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ platí vztah

$$F(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Z výše uvedeného poznatku o možnosti diagonalizace symetrických bilineárních forem pak plyne odpovídající výsledek také pro kvadratické formy. Předpokládejme situaci popsanou v předchozím odstavci. Pak ke každé kvadratické formě $F : \mathbf{V} \to T$ existuje báze β vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ taková, že matice B kvadratické formy F v bázi β je diagonální. To znamená, že existují prvky $b_1, b_2, \ldots, b_n \in T$ takové, že pro souřadnice $(\mathbf{u})_\beta = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ libovolně vybraného vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ v bázi β platí

$$F(\mathbf{u}) = b_1 s_1^2 + b_2 s_2^2 + \cdots + b_n s_n^2.$$

Báze β s právě popsanou vlastností se nazývá polární báze kvadratické formy F. Poznamenejme znovu, že k dané kvadratické formě F není její polární báze β určena jednoznačně.

Existuje ještě jiná metoda diagonalizace kvadratických forem. Je známa jako Lagrangeova metoda nebo též jako metoda úprav na čtverce či metoda doplňování na čtverce.

V závěru si krátce všimneme kvadratických forem na vektorových prostorech konečných dimenzí nad tělesem reálných čísel. Tady je při diagonalizaci možno dospět až ke tvaru, v němž se u kvadrátů souřadnic vektorů objevují jenom koeficienty 1, -1 nebo nuly. Navíc zde platí Sylvestrův zákon setrvačnosti:

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reálných čísel. Potom ke každé kvadratické formě $F : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ existuje báze γ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a nezáporná celá čísla p, q splňující $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$ taková, že pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ a jeho souřadnice $(\mathbf{u})_\gamma = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ v bázi γ platí

$$F(\mathbf{u}) = s_1^2 + \cdots + s_p^2 - s_{p+1}^2 - \cdots - s_q^2.$$

Přitom počty koeficientů 1 a -1 nezávisí na volbě báze γ.