Lineární formy a duální vektorový prostor

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou dva vektorové prostory nad týmž tělesem $(T, +, \cdot)$. Označme symbolem $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ množinu všech lineárních zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Na této množině $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ můžeme definovat binární operaci $+$ sčítání zobrazení a vnější operaci $\cdot$ skalárního násobení zobrazení pro libovolná lineární zobrazení $f, g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ a pro libovolný prvek $s \in T$ předpisy:

$$\text{pro všechna } \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \quad \begin{aligned} (f + g)(\mathbf{u}) &= f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}), \\ (s \cdot f)(\mathbf{u}) &= s \cdot f(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Pak se přímo ověří, že $(\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}), +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Jsou-li navíc $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ nenulové vektorové prostory konečných dimenzí n a m, pak i $(\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}), +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze, a sice dimenze $m \cdot n$.

Nechť nyní $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Poznamenejme, že samo těleso $(T, +, \cdot)$ je vektorovým prostorem dimenze 1 nad sebou samým, tedy též nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Lze proto uvažovat lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to T$. Takové lineární zobrazení f vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do tělesa $(T, +, \cdot)$ se nazývá lineární forma na $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Vektorový prostor $(\mathcal{L}(\mathbf{V}, T), +, \cdot)$ všech lineárních forem na $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ se pak nazývá duální vektorový prostor k prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ anebo krátce duál prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Pro množinu $\mathcal{L}(\mathbf{V}, T)$ všech zmíněných lineárních forem se v této souvislosti užívá též označení $\mathbf{V}^*$, takže duální vektorový prostor k prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ se pak zapisuje ve tvaru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$. Je to opět nenulový vektorový prostor konečné dimenze, totiž zase dimenze n.

Připomeňme znovu, že každá lineární forma je speciálním typem lineárního zobrazení ve smyslu specifikovaném v předchozím odstavci. Podle obecných poznatků o lineárních zobrazeních tedy pro danou bázi $\alpha = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n)$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a pro libovolné prvky $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ existuje jediná lineární forma $f : \mathbf{V} \to T$ taková, že platí $f(\mathbf{g}_1) = t_1$, $f(\mathbf{g}_2) = t_2, \ldots, f(\mathbf{g}_n) = t_n$. Je-li dále $\mathbf{u}$ libovolný vektor z $\mathbf{V}$ a jsou-li $(\mathbf{u})_\alpha = (q_1, q_1, \ldots, q_n)$ souřadnice tohoto vektoru $\mathbf{u}$ v bázi α vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, takže platí $\mathbf{u} = q_1 \cdot \mathbf{g}_1 + q_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + q_n \cdot \mathbf{g}_n$, pak pro výše zmíněnou lineární formu $f : \mathbf{V} \to T$ určenou uvedeným způsobem prvky $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f(q_1 \cdot \mathbf{g}_1 + q_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + q_n \cdot \mathbf{g}_n) \\ &= q_1 \cdot f(\mathbf{g}_1) + q_2 \cdot f(\mathbf{g}_2) + \cdots + q_n \cdot f(\mathbf{g}_n) \\ &= t_1 \cdot q_1 + t_2 \cdot q_2 + \cdots + t_n \cdot q_n = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Buď opět $\alpha = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n)$ báze vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Uvažujme nyní k této bázi α n-tici lineárních forem $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbf{V} \to T$ zadanou následujícím předpisem pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$g_i(\mathbf{g}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Pak lineární formy $g_1, g_2, \ldots, g_n$ tvoří bázi duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$. Skutečně, jelikož duální vektorový prostor $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ má rovněž dimenzi n, stačí si všimnout, že lineární formy $g_1, g_2, \ldots, g_n$ generují celý tento duální vektorový prostor. Ale pro libovolnou lineární formu $f : \mathbf{V} \to T$ platí $f = t_1 \cdot g_1 + t_2 \cdot g_2 + \cdots + t_n \cdot g_n$, kde $t_1 = f(\mathbf{g}_1)$, $t_2 = f(\mathbf{g}_2)$, $\ldots$, $t_n = f(\mathbf{g}_n)$. K ověření této rovnosti stačí zkontrolovat, že lineární formy na obou stranách této rovnosti dávají tytéž hodnoty na všech vektorch báze $\alpha = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n)$. Tvoří tedy lineární formy $g_1, g_2, \ldots, g_n$ opravdu bázi duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$. Tuto bázi nazýváme duální bází k bázi α vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a používáme pro ni označení $\alpha^* = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Buď zase $\alpha = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n)$ báze vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a buď $\alpha^* = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ báze duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ duální k bázi α. Buď opět $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ libovolný vektor a buďte $(\mathbf{u})_\alpha = (q_1, q_1, \ldots, q_n)$ souřadnice tohoto vektoru $\mathbf{u}$ v bázi α, takže máme $\mathbf{u} = q_1 \cdot \mathbf{g}_1 + q_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + q_n \cdot \mathbf{g}_n$. Všimněme si, že pak odtud vychází $g_1(\mathbf{u}) = q_1$, $g_2(\mathbf{u}) = q_2$, $\ldots$, $g_n(\mathbf{u}) = q_n$. To ale znamená, že platí $(\mathbf{u})_\alpha = (g_1(\mathbf{u}), g_2(\mathbf{u}), \ldots, g_n(\mathbf{u}))$. Obdobně pro libovolnou lineární formu $f : \mathbf{V} \to T$ z rovnosti $f = t_1 \cdot g_1 + t_2 \cdot g_2 + \cdots + t_n \cdot g_n$, kde $t_1 = f(\mathbf{g}_1)$, $t_2 = f(\mathbf{g}_2)$, $\ldots$, $t_n = f(\mathbf{g}_n)$, která byla dokázána v předchozím odstavci, vyplývá tento fakt. Pro souřadnice formy f v duální bázi α^* platí $(f)_{\alpha^*} = (f(\mathbf{g}_1), f(\mathbf{g}_2), \ldots, f(\mathbf{g}_n))$.

Nechť opět $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\alpha = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n)$ a $\beta = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$ jsou dvě báze tohoto vektorového prostoru a nechť $\alpha^* = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ a $\beta^* = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ jsou báze duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*, +, \cdot)$ duální k předchozím dvěma bázím. Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ je matice přechodu od báze α k bázi β. Potom transponovaná matice $A^\top = (a_{ji})_{i,j=1,\ldots,n}$ je maticí přechodu od duální báze β^* k duální bázi α^* (v tomto pořadí). Skutečně je tomu tak, neboť podle definice matice přechodu A pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ máme $\mathbf{g}_j = a_{1j} \cdot \mathbf{h}_1 + \cdots + a_{nj} \cdot \mathbf{h}_n$. S použitím tohoto faktu ověříme, že pak pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí rovnost lineárních forem $h_i = a_{i1} \cdot g_1 + \cdots + a_{in} \cdot g_n$, což právě znamená, že transponovaná matice $A^\top$ je maticí přechodu taková, jak bylo uvedeno výše. Zmíněnou rovnost lineárních forem ověříme tak, že zkontrolujeme, zda lineární formy na obou stranách této rovnosti dávají tytéž hodnoty na všech vektorch báze α, to jest na každém vektoru $\mathbf{g}_j$, kde $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ale snadným výpočtem s využitím výše zmíněné definice matice přechodu A se přesvědčíme, že pak na obou stranách uvedené rovnosti vyjde hodnota a_{ij}.

Právě odvozeného faktu se využívá k výpočtům v aritmetických vektorových prostorech nad tělesem $(T, +, \cdot)$, to znamená ve vektorových prostorech tvaru $(T^n, +, \cdot)$, kde n je přirozené číslo. V každém aritmetickém vektorovém prostoru $(T^n, +, \cdot)$ máme k dispozici kanonickou bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, kde pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ je $\mathbf{e}_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, 0, \ldots, 0)$. K této kanonické bázi ε příslušná duální báze ε^* v duálním vektorovém prostoru $(\mathcal{L}(T^n, T), +, \cdot)$ má tvar $\varepsilon^* = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, kde podle dříve uvedené definice duálních bází máme pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$e_i(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Z obecných faktů uvedených v předminulém odstavci pak plynou tyto skutečnosti.Pro každý vektor $\mathbf{x} \in T^n$, $\mathbf{x} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, kde $r_1, r_2, \ldots, r_n \in T$, a pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $e_i(\mathbf{x}) = r_i$. Dále pro každou lineární formu $f : T^n \to T$ máme $f = s_1 \cdot e_1 + s_2 \cdot e_2 + \cdots + s_n \cdot e_n$, kde $s_1 = f(\mathbf{e}_1)$, $s_2 = f(\mathbf{e}_2)$, … , $s_n = f(\mathbf{e}_n)$.

Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ jsou dva vektorové prostory nad týmž tělesem $(T,+,\cdot)$ a nechť $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Definujme zobrazení $\varphi^* : \mathbf{W}^* \to \mathbf{V}^*$ následovně. Pro každou lineární formu $g \in \mathbf{W}^*$ bude $\varphi^*(g)$ zobrazení množiny $\mathbf{V}$ do T dané předpisem:

$$\text{pro každé } \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \quad \varphi^*(g)(\mathbf{u}) = g(\varphi(\mathbf{u})).$$

Je snadné se přesvědčit, že pak $\varphi^*(g)$ je lineární zobrazení vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ do tělesa $(T,+,\cdot)$, takže $\varphi^*(g) \in \mathbf{V}^*$. Je tedy zobrazení φ^* korektně definováno. Navíc lze rovněž snadno ověřit, že takto definované zobrazení φ^* je lineárním zobrazením duálního vektorového prostoru $(\mathbf{W}^*,+,\cdot)$ do duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*,+,\cdot)$. Toto zobrazení $\varphi^* : \mathbf{W}^* \to \mathbf{V}^*$ se nazývá duální lineární zobrazení k lineárnímu zobrazení $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$.

Nechť nyní $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí nad týmž tělesem $(T,+,\cdot)$, nechť α je báze vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$, nechť β je báze vektorového prostoru $(\mathbf{W},+,\cdot)$, nechť α^* je báze duálního vektorového prostoru $(\mathbf{V}^*,+,\cdot)$ duální k bázi α a nechť β^* je báze duálního vektorového prostoru $(\mathbf{W}^*,+,\cdot)$ duální k bázi β. Pak lze ukázat, že pro matici $(\varphi)_{\beta\alpha}$ lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ v bázích α a β a pro matici $(\varphi^*)_{\alpha^*\beta^*}$ duálního lineárního zobrazení $\varphi^* : \mathbf{W}^* \to \mathbf{V}^*$ v bázích β^* a α^* platí vztah $(\varphi^*)_{\alpha^*\beta^*} = (\varphi)_{\beta\alpha}^{\top}$. Tohoto vztahu se využívá, chceme-li k zadanému lineárnímu zobrazení $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ najít k němu duální lineární zobrazení $\varphi^* : \mathbf{W}^* \to \mathbf{V}^*$.