Vzájemná poloha afinních podprostorů

Buď $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Buďte $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ dva afinní podprostory vektorového prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$. Nechť $C \in \mathcal{P}$ a $D \in \mathcal{Q}$ jsou dva libovolně zvolené body a nechť $\mathbf{V} = \mathcal{Z}(\mathcal{P})$ a $\mathbf{W} = \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ jsou zaměření uvedených dvou afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$. Takže pak lze psát $\mathcal{P} = C + \mathbf{V}$ a $\mathcal{Q} = D + \mathbf{W}$.

V této situaci platí následující tvrzení:

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset \quad \text{právě tehdy, když} \quad D - C \notin \mathbf{V} + \mathbf{W}.$$

Rozeznáváme následující vzájemné polohy uvedených dvou afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ vektorového prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$:

- Afinní podprostory $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ jsou totožné: $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.
  Nastává právě tehdy, když platí $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ a $\mathbf{V} = \mathbf{W}$.

- Jeden z afinních podprostorů $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ je podprostorem druhého z těchto afinních podprostorů: například $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$.
  To nastává právě tehdy, když platí $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ a $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$.

- Afinní podprostory $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ jsou různoběžné: $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, avšak $\mathcal{P} \nsubseteq \mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q} \nsubseteq \mathcal{P}$.
  Nastává právě tehdy, když platí $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ a přitom $\mathbf{V} \nsubseteq \mathbf{W}$ a $\mathbf{W} \nsubseteq \mathbf{V}$.

- Afinní podprostory $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ jsou rovnoběžné, ale žádný z nich není podprostorem druhého z nich: $\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$.
  Nastává právě tehdy, když platí $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ a přitom buď $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$ nebo $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$.

- Afinní podprostory $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ jsou mimoběžné: $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ a přitom $\mathcal{P} \nparallel \mathcal{Q}$.
  Nastává právě tehdy, když platí $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ a přitom $\mathbf{V} \nsubseteq \mathbf{W}$ a $\mathbf{W} \nsubseteq \mathbf{V}$.

Jsou-li afinní podprostory $\mathcal{P} = C + \mathbf{V}$ a $\mathcal{Q} = D + \mathbf{W}$ vektorového prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ mimoběžné, můžeme provést ještě jemnější rozlišení. Řekneme, že tyto dva afinní podprostory $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ jsou částečně mimoběžné, jestliže přitom $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} \neq \{\mathbf{o}\}$. Naproti tomu řekneme, že zmíněné dva afinní podprostory $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ jsou úplně mimoběžné, jestliže navíc $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$.

Jsou-li $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ dva vektorové podprostory nenulového vektorového prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$, pak pro zjištění, zda platí například inkluze $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$, je užitečný následující zřejmý fakt:

$$\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V} \quad \text{právě tehdy, když} \quad \mathbf{V} + \mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}.$$

K ověřování těchto a podobných podmínek pak bývá výhodné použít metod ke zjišťování hodností matic.