MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, učitelské studium

26. května 2010

I. část

1. Vyjádřete diferenciál funkce $f(x) = \arcsin x$ v bodě $3/5$ jako funkci přírustku h nezávisle proměnné x. V odpovědi nesmí být goniometrická nebo cyklometrická funkce, ani odmocnina.
2. Určete Taylorův mnohočlen druhého stupně pro funkci $f\colon y = (x^2 - 2)^4$ se středem v bodě -1. (Mocniny příslušného lineárního dvojčlenu neroznásobujte.)
3. Určete první tři nenulové členy v Maclaurinových mnohočlenech pro každou z funkcí $f(x) = \ln(1 - x^3)$ a $g(x) = x^5 \cos(x^2)$.
4. K funkci $f(x) = |x|$ sestavte horní a dolní integrální součet na intervalu $\langle -3, 5\rangle$ pro dělení tvořené dělicími body $-3, -1, 0, 2, 5$.
5. Nechť $\chi(x) = 1$ pro každé racionální x a $\chi(x) = 0$ každé pro iracionální x. Určete dolní a horní integrál pro funkci $f(x) = x \cdot \chi(x)$ přes interval $\langle -2, 2\rangle$. Postup: načrtněte grafy dvou spojitých funkcí g a h, pro něž $s(f, D) = s(g, D)$ a $S(f, D) = S(h, D)$ pro každé dělení D intervalu $\langle -2, 2\rangle$; integrály z funkcí g a h pak můžete určit geometricky.
6. Ukažte výpočtem, že všechny lineární funkce f, pro něž $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 4$, mají tutéž hodnotu $f(1)$. Jakou?
7. Nechť funkce F je primitivní k funkci f na intervalu I. Jaká vlastnost funkce F plyne z podmínky, že $f(x) > 0$ pro každé $x \in I$?
8. K funkci $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ určete jednu primitivní funkci na $(-\infty, +\infty)$.
9. Zapište jedním integrálem obsah rovinného útvaru, který je omezen dvěma křivkami $y = \sin \dfrac{\pi x}{2}$, kde $x \in \langle 0, 1\rangle$, a $x = \sqrt{y}$, kde $y \in \langle 0, 1\rangle$ (integrál nepočítejte).
10. Určete neznámé číslo $a > 0$ a neznámou (spojitou) funkci f, které splňují rovnici $\int\limits_a^x f(t)\,dt = x^2 + 3x - 10$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

II. část

1. Vypočtěte
$$\int \frac{6\,dx}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}.$$
2. Vypočtěte
$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$$
a výsledek určete na dvě desetinná místa pomocí hodnoty $\ln 2 \doteq 0{,}69$.
3. Vypočtěte objem tělesa v $\mathbb{R}^3$ vzniklého rotací podgrafu funkce $f\colon y = \operatorname{tg} x$, kde $x \in \langle 0, \pi/4\rangle$, kolem osy x.