Úvod do obecné topologie

Michal Kunc

12. května 2010

Obsah

Úvod

Cílem tohoto textu je seznámit čtenáře se základními pojmy a nástroji topologie. Přestože pro jeho čtení je postačující znalostí ovládnutí základních matematických pojmů a konstrukcí, k jeho správnému pochopení je nutné se dříve seznámit se základy teorie metrických prostorů, algebry, případně teorie množin.

Cílem topologie je studium vlastností prostorů. Ovšem na rozdíl od teorie metrických prostorů se v topologii nezajímáme o vzdálenosti mezi body prostoru a prostory považujeme za stejné, pokud se na sebe dají vzájemně přeměnit nějakou spojitou deformací. Takže například nerozlišujeme mezi koulí a krychlí; ostatně koule se změní v krychli již při přechodu mezi dvěma ekvivalentními metrikami na $\mathbb{R}^3$.

Základním pojmem, který se proto v topologii studuje, je spojitost zobrazení. Můžeme si všimnout, že k tomu, abychom definovali spojitost zobrazení mezi metrickými prostory, vlastně nepotřebujeme vědět přesně, jak jsou od sebe které body daleko. Zcela si vystačíme s informací, že jisté body se nekonečně blíží k nějakému bodu prostoru. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je totiž spojité, jestliže pro libovolnou posloupnost bodů $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ prostoru X, která konverguje k nějakému bodu x, obrazy těchto bodů $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ konvergují k bodu $f(x)$. Cílem zavedení pojmu topologického prostoru je umožnit formálně pracovat s následující definicí spojitosti, která se liší od obvyklé ε-δ-definice pouze v tom, že místo o jisté vzdálenosti mluví jen o blízkosti k určitému bodu:

> Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité, jestliže pro libovolný bod x prostoru X a pro libovolné okolí $\mathscr{O}$ bodu $f(x)$ existuje nějaké okolí bodu x, jehož všechny body se zobrazí do $\mathscr{O}$.

Tato definice nám tedy ani neurčuje, jakým způsobem musíme blízkost bodů popisovat, ani nás nenutí porovnávat, zda dané dva body jsou od sebe vzdáleny více než jiné dva body ležící v jiné části prostoru. Tento přístup vede ke zobecnění pojmu metrického prostoru na prostor topologický, jehož definice je založena na pozorování, jaké vlastnosti okolí bodů v prostorech mají.

Abstraktnější přístup přináší některé výhody:

(1) Například můžeme provádět elegantní množinové argumenty a vyhnout se tak komplikovaným formulacím využívajícím ε-δ-zápisu.

(2) Na metrických prostorech existuje mnoho ekvivalentních metrik, ovšem většina pojmů studovaných v teorii metrických prostorů na volbě metriky nezávisí; jedná se

totiž o pojmy topologické. Proto je užitečné mít možnost s těmito pojmy pracovat, aniž bychom předtím museli zvolit některou z těchto metrik a naše argumenty, které by stejně fungovaly i pro jinou metriku, provádět jen s touto jednou zvolenou.

(3) Obecný topologický přístup umožňuje provádět s prostory některé konstrukce, které obecně produkují z metrických prostorů prostory pomocí metrik nepopsatelné. Přitom se často jedná o běžně studované přirozené prostory. Příkladem takového prostoru je prostor všech reálných funkcí s bodovou konvergencí, tedy prostor, kde posloupnost funkcí $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ konverguje k nějaké funkci g, jestliže pro každé reálné číslo r posloupnost $(g_i(r))_{i=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $g(r)$.

V následujícím textu se budeme často setkávat s pojmem mírně zobecňujícím pojem metriky, zvaným *pseudometrika*, který se liší od metriky vypuštěním požadavku na nenulovost vzdálenosti dvou různých bodů. Tedy (X,ρ) je *pseudometrický prostor*, jestliže zobrazení $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ splňuje

1. $\forall x,y \in X\colon \rho(x,y) \geq 0$,
2. $\forall x \in X\colon \rho(x,x) = 0$,
3. $\forall x,y \in X\colon \rho(x,y) = \rho(y,x)$,
4. $\forall x,y,z \in X\colon \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Tento prostor je *metrický*, jestliže navíc platí

5. $\forall x,y \in X\colon \rho(x,y) = 0 \implies x = y$.

Kapitola 1

Definice topologického prostoru

Topologický prostor lze definovat mnoha ekvivalentními způsoby, v závislosti na tom, který topologický pojem známý z metrických prostorů (jako třeba otevřená množina, uzavřená množina, okolí či uzávěr) budeme považovat za základní. Vlastnosti prostoru popíšeme pomocí vlastností tohoto pojmu, zbylé topologické pojmy prohlásíme za odvozené a pomocí základního pojmu je definujeme. Poté je samozřejmě třeba ukázat, že všechny takto vzniklé definice topologického prostoru ve skutečnosti popisují tytéž objekty. Tento přístup nám mimo jiné umožní kdykoli používat právě tu definici topologického prostoru, která se nám zrovna nejvíce hodí.

Nejčastěji se za základní definici topologického prostoru považuje následující definice pomocí otevřených množin:

Definice 1.1 (topologického prostoru pomocí otevřených množin)**.** *Topologií* na množině X rozumíme libovolný systém $\mathscr{T} \subseteq \wp(X)$ podmnožin X splňující

1. $\emptyset, X \in \mathscr{T}$,
2. $\forall A, B \in \mathscr{T} : A \cap B \in \mathscr{T}$,
3. pro libovolnou indexovou množinu I a množiny $A_i \in \mathscr{T}$, pro $i \in I$, platí $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathscr{T}$.

Prvky topologie $\mathscr{T}$ se nazývají *otevřené množiny* a dvojice $(X, \mathscr{T})$ se nazývá *topologický prostor*. Prvky množiny X se nazývají *body* prostoru $(X, \mathscr{T})$.

Ekvivalentně můžeme říci, že topologie na X je systém podmnožin X uzavřený na libovolná sjednocení a konečné průniky.

Všimněte si, že množina $A \subseteq X$ je otevřená v prostoru $(X, \mathscr{T})$ právě tehdy, když pro každý její bod $x \in A$ existuje otevřená množina $B \in \mathscr{T}$ taková, že $x \in B \subseteq A$. Je tomu tak proto, že při splnění této podmínky platí $A = \bigcup \{B \in \mathscr{T} \mid B \subseteq A\}$, a tedy je A otevřená díky třetímu axiomu v definici topologie. K důkazu, že množina A je otevřená, stačí tedy ukázat, že libovolný bod množiny A je obsažen v nějaké podmnožině A, která je otevřená. Důkaz otevřenosti množiny se většinou provádí právě tímto způsobem.

Uvědomme si nyní, že každý pseudometrický prostor (X,ρ) lze skutečně chápat jako topologický prostor. Víme, že podmnožina pseudometrického prostoru je otevřená, jestliže s každým svým bodem obsahuje i nějakou kouli se středem v tomto bodě. Pro otevřenou kouli o poloměru ε se středem v bodě x budeme používat značení $\mathrm{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$. Potom můžeme definovat na X *topologii* $\mathscr{T}_\rho$ *indukovanou* pseudometrikou ρ následovně:

$$\mathscr{T}_\rho = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \; \exists \varepsilon > 0\colon \mathrm{B}(x,\varepsilon) \subseteq A\}.$$

Snadno se ověří, že $(X,\mathscr{T}_\rho)$ je skutečně topologický prostor. Na druhou stranu, o topologickém prostoru $(X,\mathscr{T})$ říkáme, že je *(pseudo)metrizovatelný*, jestliže na X existuje (pseudo)metrika ρ taková, že $\mathscr{T} = \mathscr{T}_\rho$.

Pokud máme na množině X dány dvě ekvivalentní metriky, tak indukují tutéž topologii. Topologii indukovanou euklidovskou metrikou na prostoru $\mathbb{R}^n$ (nebo kteroukoli ze standardních euklidovské metrice ekvivalentních metrik) značíme $\mathscr{E}$. Opačně ovšem není pravda, že indukují-li dvě metriky tutéž topologii, potom jsou ekvivalentní. Takovým příkladem jsou třeba metriky ρ a σ na $\mathbb{R}$ definované předpisy $\rho(x,y) = |x-y|$ a $\sigma(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|$.

Příklad 1.2.

1. Pro libovolnou množinu X je $(X,\wp(X))$ topologický prostor, zvaný *diskrétní*. Tento prostor je indukován například metrikou, kde vzdálenost libovolných dvou různých bodů je stejná.

2. Pro libovolnou množinu X je $(X,\{\emptyset,X\})$ topologický prostor, zvaný *indiskrétní*. Snadno se nahlédne, že pro alespoň dvouprvkovou množinu X tento prostor není metrizovatelný, ale je indukovaný pseudometrikou, kde vzdálenost libovolných dvou bodů je nulová.

3. Dvoubodový topologický prostor $(\{a,b\},\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\})$ se nazývá *Sierpinského prostor*. Díky své asymetrii tento prostor není ani pseudometrizovatelný.

4. Asymetrie ovšem nemusí být jediným důvodem, proč topologický prostor není pseudometrizovatelný, jak ukazuje příklad takzvaného *prostoru konečných komplementů* $(X,\mathscr{T})$ na nekonečné množině X, kde

   $$A \in \mathscr{T} \iff A = \emptyset \text{ nebo } X \setminus A \text{ je konečná.}$$

   Pokud by totiž byla jeho topologie indukovaná nějakou pseudometrikou ρ, musela by existovat dvojice bodů $x,y \in X$ s nenulovou vzdáleností. Potom by koule $\mathrm{B}(x,\rho(x,y)/2)$ a $\mathrm{B}(y,\rho(x,y)/2)$ byly díky trojúhelníkové nerovnosti neprázdné otevřené disjunktní podmnožiny X, což je ve sporu s definicí topologie $\mathscr{T}$.

Komplementy otevřených podmnožin topologického prostoru nazýváme *uzavřené*. Díky De Morganovým zákonům je snadné ověřit, že topologické prostory lze ekvivalentně definovat takto:

Definice 1.3 (topologického prostoru pomocí uzavřených množin)**.** Dvojice $(X,\mathscr{F})$ se nazývá topologický prostor, jestliže $\mathscr{F} \subseteq \wp(X)$ a splňuje

1. $\emptyset, X \in \mathscr{F}$,
2. $\forall A,B \in \mathscr{F} : A \cup B \in \mathscr{F}$,
3. pro libovolnou indexovou množinu I a množiny $A_i \in \mathscr{F}$, pro $i \in I$, platí $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{F}$.

Prvky $\mathscr{F}$ se nazývají *uzavřené množiny*.

Mezi definicí pomocí otevřených množin a definicí pomocí množin uzavřených můžeme tedy přecházet takto:

$$\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathscr{T}\}, \qquad \mathscr{T} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathscr{F}\}.$$

Dalšími topologickými pojmy známými z teorie metrických prostorů, které můžeme pomocí otevřených množin zavést, jsou uzávěr, vnitřek a hranice podmnožiny topologického prostoru. Je-li $(X,\mathscr{T})$ topologický prostor a $A \subseteq X$ nějaká množina bodů X, definujeme *uzávěr* $\overline{A}$ (označovaný rovněž $\mathrm{cl}(A)$) množiny A v prostoru X jako nejmenší uzavřenou podmnožinu X obsahující A. Všimněme si, že díky axiomům topologického prostoru má skutečně každá množina A uzávěr, neboť jej můžeme získat jako průnik všech uzavřených množin obsahujících A. Je rovněž užitečné si uvědomit, jaké vyjádření uzávěru získáme, přeneseme-li tuto charakterizaci do duální řeči otevřených množin:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathscr{T} : x \in U \implies A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Podobně definujeme *vnitřek* A° množiny $A \subseteq X$ jako největší otevřenou podmnožinu X obsaženou v A. Všimněte si, že vnitřek je duálním pojmem k uzávěru, tedy že $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$. *Hranicí* (boundary) množiny A rozumíme rozdíl mezi jejím uzávěrem a vnitřkem. Uvědomte si, že právě definované pojmy se vždy vztahují k prostoru X, v němž se množina A nachází; tedy například hranice intervalu $\langle 0,1\rangle$ v euklidovském prostoru $\mathbb{R}$ je $\{0,1\}$, zatímco hranice $\langle 0,1\rangle$ v prostoru $\langle 0,1\rangle$ je prázdná.

Množina A se nazývá *hustá* v prostoru X, jestliže jejím uzávěrem je celý prostor. Říkáme, že topologický prostor je *separabilní*, jestliže obsahuje nějakou nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

Cvičení 1.4.

1. Vyjádřete předchozí pojmy plně v řeči otevřených množin i plně v řeči uzavřených množin.

2. Ukažte, že hranice je vždy uzavřená.

3. Dejte příklad podmnožiny metrického prostoru $\mathbb{R}^2$, jejíž hranicí je celý prostor.

Pojem topologického prostoru můžeme definovat rovněž pomocí vlastností operátoru uzávěru:

Definice 1.5 (topologického prostoru pomocí uzávěru)**.** Dvojice $(X, \overline{\cdot})$ se nazývá topologický prostor, jestliže $\overline{\cdot}\colon \wp(X) \to \wp(X)$ je zobrazení splňující

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

2. $\forall A \subseteq X : A \subseteq \overline{A}$,

3. $\forall A \subseteq X : \overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

4. $\forall A, B \subseteq X : \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Abychom ověřili, že tato definice je ekvivalentní předchozí definici pomocí uzavřených množin, musíme nejprve pomocí uzávěru definovat, kdy je množina uzavřená:

$$\forall A \subseteq X : A \in \mathscr{F} \iff \overline{A} = A. \tag{1.1}$$

Cvičení 1.6.

1. Ověřte, že operátor uzávěru definovaný pomocí uzavřených množin splňuje axiomy v definici 1.5.

2. Ukažte, že z axiomů v definici 1.5 plyne, že zobrazení $\overline{\cdot}$ je monotónní vzhledem k inkluzi, tedy že $\forall A \subseteq B \subseteq X : \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

3. Ověřte, že uzavřené množiny definované předpisem (1.1) splňují axiomy v definici 1.3.

Všimněte si, že k ověření platnosti axiomů definice 1.3 nebylo třeba použít axiom 3 definice 1.5. Pokud bychom tento axiom vypustili, tak by sice nadále každý uzávěrový operátor definoval topologický prostor, ovšem stejný prostor by bylo možné zadat pomocí více různých uzávěrových operátorů, a v tomto smyslu by definice nebyly ekvivalentní. Abychom ověřili, že námi uvedené definice skutečně ekvivalentní jsou, potřebujeme ukázat následující:

1. Uzávěrový operátor určený množinou uzavřených množin $\mathscr{F}$ definovanou předpisem (1.1) je roven původnímu operátoru $\overline{\cdot}$.

2. Je-li $\overline{\cdot}$ uzávěrový operátor určený množinou $\mathscr{F}$ splňující definici 1.3, potom je splněna podmínka (1.1). Jinými slovy, získaný uzávěrový operátor definuje jako uzavřené právě původní uzavřené množiny.

Dokažme si první z těchto tvrzení. Víme, že nový uzávěr množiny A je roven nejmenší množině $F \in \mathscr{F}$ splňující $F \supseteq A$. Ukážeme, že touto množinou je právě $\overline{A}$. Množina $\overline{A}$ skutečně patří do $\mathscr{F}$ díky axiomu 3 a splňuje požadovanou inkluzi díky axiomu 2. Pokud je $F \in \mathscr{F}$ libovolná množina splňující $F \supseteq A$, potom $F = \overline{F}$ podle (1.1) a $\overline{F} \supseteq \overline{A}$ díky monotonii $\overline{\cdot}$ (cvičení 1.6.2). Dohromady tedy dostáváme $F \supseteq \overline{A}$, což ukazuje, že $\overline{A}$ je opravdu mezi těmito množinami nejmenší.

Cvičení 1.7.

1. Dokončete důkaz ekvivalence definic 1.3 a 1.5.

2. Formulujte definici topologického prostoru pomocí vnitřku a zdůvodněte její ekvivalenci s předchozími definicemi.

Dalším užitečným topologickým pojmem, kterému se budeme věnovat, je okolí. Intuitivně, okolím daného bodu myslíme takovou množinu, která pro nějakou úroveň blízkosti obsahuje všechny body, které jsou k tomuto bodu takto blízko. Formálně, říkáme, že množina $A \subseteq X$ je *okolím* (neighbourhood) bodu $x \in X$ v topologickém prostoru $(X, \mathscr{T})$, jestliže existuje otevřená množina $U \in \mathscr{T}$ splňující $x \in U \subseteq A$. Množinu všech okolí bodu x značíme $\mathscr{T}(x)$.

Topologický prostor můžeme ekvivalentně definovat také pomocí vlastností okolí.

Definice 1.8 (topologického prostoru pomocí okolí)**.** Dvojice $(X, \mathscr{T})$ se nazývá topologický prostor, jestliže $\mathscr{T}: X \to \wp(\wp(X))$ je zobrazení, které pro každý bod $x \in X$ splňuje

1. $X \in \mathscr{T}(x)$,

2. $\forall A \in \mathscr{T}(x) : x \in A$,

3. $\forall A \in \mathscr{T}(x)\ \forall B \subseteq X : A \subseteq B \implies B \in \mathscr{T}(x)$,

4. $\forall A, B \in \mathscr{T}(x) : A \cap B \in \mathscr{T}(x)$,

5. $\forall A \in \mathscr{T}(x)\ \exists B \in \mathscr{T}(x)\ \forall y \in B : A \in \mathscr{T}(y)$
(tato podmínka v podstatě říká, že v každém okolí A bodu x existuje nějaké podokolí, které neobsahuje žádné body hranice A).

Ukažme si, že i tato definice je ekvivalentní definici pomocí otevřených množin. Stejně jako v případě uzávěru nejprve zadefinujme původní pojem otevřené množiny pomocí okolí: množina je otevřená, jestliže je okolím každého svého bodu, tedy

$$\forall A \subseteq X : A \in \mathscr{T} \iff (\forall x \in A)(A \in \mathscr{T}(x)). \tag{1.2}$$

Cvičení 1.9.

1. Ověřte, že okolí bodů v topologickém prostoru splňují axiomy v definici 1.8.

2. Ověřte, že otevřené množiny definované předpisem (1.2) splňují axiomy v definici 1.1.

3. Dokažte, že okolí bodů v topologickém prostoru určeném množinou otevřených množin $\mathscr{T}$ splňují podmínku (1.2).

K ověření ekvivalence definic 1.8 a 1.1 zbývá kromě faktů uvedených ve cvičení 1.9 již jen ukázat, že pokud pomocí libovolného zobrazení $\mathscr{T}$ splňujícího axiomy definice 1.8 definujeme otevřené množiny, tak se okolí určená těmito množinami budou shodovat s těmi, která zadává zobrazení $\mathscr{T}$. Ukážeme tedy, že množina A je okolím bodu x právě tehdy, když $A \in \mathscr{T}(x)$.

Je-li A okolím x, existuje otevřená množina $U \in \mathscr{T}$ splňující $x \in U \subseteq A$. Podle (1.2) tedy platí $U \in \mathscr{T}(x)$ a axiom 3 říká, že i $A \in \mathscr{T}(x)$.

Opačně, pokud $A \in \mathscr{T}(x)$, musíme prokázat, že A je okolím x, a to tak, že najdeme otevřenou množinu $U \subseteq A$ obsahující x. Za tuto množinu je přirozené volit vnitřek množiny A, přičemž vnitřek můžeme pomocí okolí popsat následovně:

$$U = \{y \in X \mid A \in \mathscr{T}(y)\}.$$

Takto definovaná množina U je podmnožinou A díky axiomu 2. Zbývá tedy ukázat, že U je otevřená podle předpisu (1.2). Vezmeme-li ovšem libovolný bod $y \in U$, víme o něm, že $A \in \mathscr{T}(y)$, a tedy podle axiomu 5 existuje $B \in \mathscr{T}(y)$, jejíž každý bod z splňuje $A \in \mathscr{T}(z)$. Proto je B podmnožinou U a díky axiomu 3 dostáváme $U \in \mathscr{T}(y)$, čímž je otevřenost U dokázána.

Chceme-li zadat nějaký topologický prostor, není většinou výhodné popsat přímo některý z pojmů zavedených v předchozích definicích. V případě definice pomocí otevřených množin lze využít, na jaké operace je množina $\mathscr{T}$ uzavřená, a popsat pouze dostatek otevřených množin, ze kterých je již možné pomocí těchto operací vygenerovat celou množinu $\mathscr{T}$. Pojmy, které se v této souvislosti používají, jsou báze a subbáze.

Je-li $(X, \mathscr{T})$ topologický prostor, potom o množině otevřených množin $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ říkáme, že je *bází* topologie $\mathscr{T}$, jestliže každý prvek $\mathscr{T}$ je sjednocením nějakých prvků $\mathscr{B}$. Například topologii indukovanou pseudometrikou jsme vlastně definovali pomocí báze složené ze všech koulí $\mathscr{B} = \{\mathrm{B}(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$. Ekvivalentně ji ovšem můžeme definovat pomocí báze $\mathscr{B} = \{\mathrm{B}(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\}$.

Cvičení 1.10. Dejte příklad spočetné báze prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathscr{E})$.

Abychom mohli topologické prostory zadávat pomocí bází, potřebujeme jen vědět, které množiny podmnožin X jsou bází nějaké topologie.

Tvrzení 1.11. *Množina $\mathscr{S} \subseteq \wp(X)$ je bází nějaké topologie na množině X právě tehdy, když $\bigcup \mathscr{S} = X$ a*

$$\forall A, B \in \mathscr{S}\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \mathscr{S} \colon x \in C \subseteq A \cap B. \tag{1.3}$$

Cvičení 1.12. Dokažte tvrzení 1.11.

Podmnožina topologie $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$ se nazývá *subbáze* topologie $\mathscr{T}$, jestliže každý prvek $\mathscr{T}$ je sjednocením konečných průniků prvků $\mathscr{S}$, tedy jestliže konečné průniky prvků $\mathscr{S}$ tvoří bázi $\mathscr{T}$.

Příklad 1.13. Množina intervalů $\{(-\infty, a), (a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ je subbází prostoru $(R, \mathscr{E})$.

Cvičení 1.14. Ukažte, že každá množina $\mathscr{S} \subseteq \wp(X)$ je subbází nějaké topologie na X.

Podobně můžeme mluvit i o *bázi okolí* nějakého bodu x prostoru $(X, \mathscr{T})$, čímž myslíme libovolnou podmnožinu $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}(x)$ takovou, že pro všechna okolí $U \in \mathscr{T}(x)$ existuje $V \in \mathscr{B}$ splňující $V \subseteq U$. Například v libovolném metrickém prostoru má každý bod x spočetnou bázi okolí tvořenou koulemi o poloměru $1/n$, pro $n \in \mathbb{N}$, se středem v x.

Máme-li na množině X definovány dvě topologie $\mathscr{T}_1$ a $\mathscr{T}_2$ splňující $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, říkáme, že $\mathscr{T}_1$ je *hrubší* (*slabší*, coarser) než $\mathscr{T}_2$ a že $\mathscr{T}_2$ je *jemnější* (*silnější*, finer) než $\mathscr{T}_1$.

Tak jako v metrických prostorech, můžeme i v topologických prostorech mluvit o konvergentních posloupnostech. Říkáme, že posloupnost $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ bodů prostoru $(X, \mathscr{T})$ *konverguje* k bodu $x \in X$, jestliže

$$\forall A \in \mathscr{T}(x)\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall i > n \colon x_i \in A,$$

tedy pro každé okolí bodu x existuje index, od kterého již všechny body posloupnosti leží v tomto okolí.

Cvičení 1.15. Charakterizujte konvergentní posloupnosti v prostorech z příkladu 1.2.

Tvrzení 1.16. *Je-li A množina v topologickém prostoru $(X, \mathscr{T})$, potom limity všech konvergentních posloupností bodů množiny A leží v uzávěru A. Proto, je-li A uzavřená, obsahuje limity všech konvergentních posloupností svých bodů.* $\square$

Následující příklad ukazuje, že na rozdíl od metrických prostorů ovšem v obecných topologických prostorech opačná implikace k předchozímu tvrzení neplatí, a uzavřené množiny tedy nelze popsat pomocí konvergentních posloupností. Jak uvidíme v následující kapitole, znamená to, že konvergentní posloupnosti nejsou dostatečně silným nástrojem, aby se s jejich pomocí dala charakterizovat spojitost zobrazení mezi topologickými prostory.

Příklad 1.17. Na nespočetné množině X uvažme topologii

$$\mathscr{T} = \{A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ nebo } X \setminus A \text{ je nejvýše spočetná}\}.$$

Nyní si všimněme, že pokud posloupnost $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ konverguje k x vzhledem k topologii $\mathscr{T}$, tak můžeme uvážit otevřené okolí $(X \setminus \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$ bodu x, které prokazuje, že od jistého přirozeného čísla n pro všechna $i > n$ platí $x_i = x$. Tedy konvergence v prostoru $(X, \mathscr{T})$ je stejná jako konvergence v diskrétním prostoru.

Příklad 1.18. Ukážeme si, že předuspořádané množiny jsou ve skutečnosti speciálním případem topologických prostorů. Přesněji, předuspořádané množiny odpovídají právě topologickým prostorům $(X, \mathscr{T})$, kde množina $\mathscr{T}$ je uzavřená na libovolné průniky. Snadno se nahlédne, že tato podmínka na $\mathscr{T}$ je ekvivalentní požadavku, aby každý bod měl nejmenší okolí. Všimněte si, že tuto podmínku splňuje diskrétní, indiskrétní i Sierpinského prostor.

Na předuspořádané množině $(X, \leq)$ můžeme topologii definovat tak, že za otevřené prohlásíme právě všechny nahoru uzavřené množiny, tedy množiny $A \subseteq X$ splňující podmínku $y \geq x \in A \implies y \in A$. Opačně, je-li $\mathscr{T}$ topologie na X uzavřená na libovolné průniky, můžeme zavést na X předuspořádání předpisem $x \leq y \iff \mathscr{T}(x) \subseteq \mathscr{T}(y)$, tedy bod x je menší nebo roven bodu y, jestliže nejmenší okolí x obsahuje nejmenší okolí y.

Cvičení 1.19.

1. Ukažte, že konstrukce uvedené v předchozím příkladu definují vzájemně inverzní bijekce mezi množinou všech topologií na X uzavřených na libovolné průniky a množinou všech předuspořádání na X.

2. Charakterizujte konvergentní posloupnosti v topologickém prostoru odpovídajícím předuspořádané množině $(X, \leq)$.

Kapitola 2

Spojitá zobrazení

Definice 2.1. Jsou-li $(X,\mathscr{T})$ a $(Y,\mathscr{U})$ topologické prostory, říkáme, že zobrazení $f\colon X\to Y$ je *spojité* (continuous) (vzhledem k topologiím $\mathscr{T}$ a $\mathscr{U}$), jestliže pro všechna $A\in\mathscr{U}$ je $f^{-1}(A)\in\mathscr{T}$.

Příklad 2.2. Zobrazení $\mathrm{id}\colon (X,\mathscr{T})\to(X,\mathscr{U})$ je spojité právě tehdy, když $\mathscr{U}$ je hrubší než $\mathscr{T}$.

Cvičení 2.3. Dokažte, že zobrazení předuspořádaných množin je izotonní právě tehdy, když je spojité vůči příslušným topologiím definovaným v příkladu 1.18.

Spojitost lze samozřejmě charakterizovat i pomocí ostatních pojmů zavedených v předchozí kapitole:

Cvičení 2.4. Dokažte, že spojitost zobrazení $f\colon (X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$ je ekvivalentní každé z následujících podmínek:

1. Vzor každé uzavřené množiny v Y je uzavřená množina v X.
2. Pro každou podmnožinu $A\subseteq X$ platí $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.
3. Pro každou podmnožinu $A\subseteq Y$ platí $f^{-1}(A^\circ)\subseteq f^{-1}(A)^\circ$.
4. Existuje subbáze $\mathscr{S}$ topologie $\mathscr{U}$ taková, že pro všechna $A\in\mathscr{S}$ platí $f^{-1}(A)\in\mathscr{T}$.

Pokusíme-li se popsat spojitost pomocí okolí, obdržíme navíc definici spojitosti v bodě. Říkáme, že zobrazení $f\colon (X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$ je *spojité v bodě* $x\in X$, jestliže pro každé $A\in\mathscr{U}(f(x))$ existuje $B\in\mathscr{T}(x)$ splňující $f(B)\subseteq A$. Jinými slovy, vzor libovolného okolí bodu $f(x)$ je okolím bodu x.

Cvičení 2.5. Dokažte, že zobrazení $f\colon (X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$ je spojité právě tehdy, když je spojité v každém bodě prostoru X.

Snadno se nahlédne, že pro metrické prostory je výše uvedená definice spojitosti v bodě ekvivalentní obvyklé ε-δ-definici, a proto ze cvičení 2.5 vyplývá, že v případě metrických prostorů se topologická definice spojitosti shoduje s ε-δ-definicí.

Je dobře známo, že spojitost zobrazení metrických prostorů lze popsat pomocí konvergence posloupností. Následující tvrzení ukazuje, že tuto charakterizaci je možné použít pro topologické prostory za předpokladu, že topologie $\mathscr{T}$ je indukovaná pseudometrikou.

Tvrzení 2.6 (AC$_\omega$). *Pro libovolný pseudometrický prostor (X,ρ) a topologický prostor $(Y,\mathscr{U})$ je zobrazení $f\colon (X,\mathscr{T}_\rho) \to (Y,\mathscr{U})$ spojité právě tehdy, když pro každou posloupnost $(x_i)_{i=1}^\infty$ v prostoru X konvergující k bodu $x \in X$ posloupnost $(f(x_i))_{i=1}^\infty$ konverguje k bodu $f(x)$.*

Důkaz. "$\Longrightarrow$" Ze spojitosti f víme, že pro libovolné okolí A bodu $f(x)$ je $f^{-1}(A)$ okolím bodu x. Protože posloupnost $(x_i)_{i=1}^\infty$ konverguje k x, existuje přirozené číslo n takové, že pro všechna $i > n$ máme $x_i \in f^{-1}(A)$, a tedy $f(x_i) \in A$, což dokazuje konvergenci posloupnosti $(f(x_i))_{i=1}^\infty$ k bodu $f(x)$.

"$\Longleftarrow$" Obrácenou implikaci dokážeme obměnou. Předpokládáme, že existuje bod $x \in X$, v němž není f spojité, a zkonstruujeme posloupnost konvergující k tomuto bodu, jejíž obraz nekonverguje k $f(x)$. Podle předpokladu existuje okolí A bodu $f(x)$ takové, že pro žádné okolí B bodu x neplatí $f(B) \subseteq A$. Vezmeme-li tedy za B okolí tvaru $\mathrm{B}(x,1/i)$ pro všechna přirozená čísla i, můžeme vybrat pro každé i bod $x_i \in \mathrm{B}(x,1/i)$ splňující $f(x_i) \notin A$. Proto posloupnost $(x_i)_{i=1}^\infty$ konverguje k x, zatímco posloupnost $(f(x_i))_{i=1}^\infty$ k bodu $f(x)$ nekonverguje. □

Vidíme, že k důkazu obrácené implikace jsme využili faktu, že okolí bodu v pseudometrickém prostoru jsou plně zadána posloupností bázových okolí tvořenou koulemi o poloměru $1/n$. Skutečně, pokud báze okolí bodů nejsou spočetné, může být podmínka založená na konvergenci posloupností slabší než požadavek spojitosti, i když cílový prostor je metrizovatelný. Takovou situaci ukazuje následující příklad.

Příklad 2.7. Uvažme zobrazení $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R},\mathscr{T}) \to (\mathbb{R},\mathscr{E})$, kde $\mathscr{T}$ je topologie spočetných komplementů definovaná v příkladu 1.17. Toto zobrazení triviálně splňuje podmínku na konvergenci posloupností. Ovšem rovněž se snadno vidí, že toto zobrazení není spojité, neboť například otevřený interval $(0,1)$ má nespočetný komplement.

Pokud bychom chtěli získat charakterizaci spojitosti a dalších pojmů známých z teorie metrických prostorů analogickou charakterizaci pomocí limit posloupností, museli bychom tedy místo posloupností použít obecnější pojem, který by nám umožnil vybírat body nejen ze spočetné báze okolí bodu jako v předchozím důkazu, ale z libovolné množiny zmenšujících se okolí. V případě metrických prostorů jsme věděli, že bázi okolí tvoří klesající posloupnost, a proto si vystačíme s posloupnostmi bodů, což znamená, že po každém bodu následuje další bod. Obecně ovšem víme jen, že průnik dvou okolí nějakého bodu je opět jeho okolím, a tedy budeme vybírat body tak, že ke každým dvěma bodům budeme mít bod, který následuje po obou. Formálním pojmem zachycujícím tuto myšlenku je síť. *Síť* N v prostoru $(X,\mathscr{T})$ je zobrazení z libovolné usměrněné množiny $(A,\leq)$ (tj. uspořádané množiny, kde každá dvojice prvků má nějakou horní závoru) do X. O síti $N\colon A\to X$ se říká, že *konverguje* k bodu $x\in X$, jestliže pro každé okolí U bodu x existuje $a\in A$ takové, že pro všechna $b\geq a$ platí $N(b)\in U$. Přestože v našem textu nebudeme charakterizaci konvergence pomocí sítí používat, je možné dále popisované vlastnosti prostorů ekvivalentně zavést i pomocí tohoto pojmu analogicky jako pro metrické prostory pomocí posloupností. Uvědomte si jen, že při přechodu mezi charakterizací pomocí otevřených množin a pomocí sítí či posloupností musíme vždy použít axiom výběru.

Cvičení 2.8. Dokažte, že $\mathrm{id}\colon (X,\mathscr{T})\to(X,\mathscr{T})$ je spojité zobrazení a že složením dvou spojitých zobrazení vznikne opět spojité zobrazení.

V úvodu jsme si říkali, že v topologii nebudeme rozlišovat mezi prostory, které se na sebe dají vzájemně převést spojitou deformací. Ve formální definici topologicky stejných prostorů budeme tedy požadovat existenci bijekce mezi těmito prostory, která takovou spojitou deformaci realizuje.

Definice 2.9. Bijekce $f\colon X\to Y$ se nazývá *homeomorfismus* prostorů $(X,\mathscr{T})$ a $(Y,\mathscr{U})$, jestliže jsou f i f^{-1} spojitá zobrazení. Pokud mezi dvěma prostory $(X,\mathscr{T})$ a $(Y,\mathscr{U})$ existuje homeomorfismus, říkáme, že jsou *homeomorfní*, a píšeme $(X,\mathscr{T})\cong(Y,\mathscr{U})$.

Poznámka 2.10. Díky cvičení 2.8 můžeme mluvit o kategorii, jejímiž objekty jsou topologické prostory a morfismy spojitá zobrazení. Přitom homeomorfismy jsou právě izomorfismy v této kategorii.

Příklad 2.11.

1. Zobrazení metrických prostorů $f\colon \langle 0,1)\to\{c\in\mathbb{C}\mid |c|=1\}$ dané předpisem $f(x)=\mathrm{e}^{2\pi x\mathrm{i}}$ je spojitá bijekce intervalu na kružnici, jejíž inverze ovšem spojitá není. Skutečně si později ukážeme, že interval a kružnice nejsou homeomorfní.

2. Pro libovolná přirozená čísla $m\neq n$ nejsou euklidovské prostory $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ homeomorfní. Důkaz tohoto tvrzení ovšem není snadný; lze jej nalézt například v paragrafu X.1 skript [1].

3. Metrické prostory $(0,1)$ a $\mathbb{R}$ jsou homeomorfní, což dokazuje například zobrazení $x\mapsto\operatorname{cotg}(\pi x)$. Přitom si všimněte, že prostor $\mathbb{R}$ je úplný (tedy v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje), kdežto interval $(0,1)$ úplný není. Tedy homeomorfismy nezachovávají úplnost metrických prostorů, což znamená, že úplnost není topologická vlastnost.

Kapitola 3

Základní konstrukce topologických prostorů

Z univerzální algebry víme, že z daných algeber je vždy možné získávat nové algebry pomocí jistých základních konstrukcí jako jsou podalgebry, součiny, součty či kvocienty (homomorfní obrazy). Mnohé z těchto konstrukcí ovšem nelze aplikovat na metrické prostory; to je případ jak obecných součinů, tak kvocientů. Situace se ovšem mění, pokud místo metrických prostorů uvážíme obecné topologické prostory. Přestože topologické prostory a algebry se v mnoha ohledech chovají značně odlišně, ukážeme si, že všechny výše uvedené operace jsou definovatelné a užitečné i v případě topologických prostorů.

3.1 Podprostory

Nechť $(X,\mathscr{T})$ je topologický prostor a Y je libovolná podmnožina X. V případě algeber je jediný způsob, jak definovat strukturu algebry na podmnožině Y algebry X tak, aby vnoření $\iota\colon Y \hookrightarrow X$ bylo homomorfismem, a to navíc pouze v případě, že podmnožina Y je uzavřená na všechny operace. Po topologickém podprostoru budeme analogicky požadovat, aby vnoření bylo spojité zobrazení. Ovšem tato podmínka většinou neurčuje topologii na Y jednoznačně, neboť pouze vyžaduje, aby pro každou otevřenou podmnožinu $A \subseteq X$ byla množina $\iota^{-1}(A) = A \cap Y$ otevřená v podprostoru Y. Existuje tedy nejhrubší topologie na Y, která podmínku spojitosti ι splňuje, a právě tato topologie, označovaná $\mathscr{T}|_Y$, je topologií podprostoru Y. Díky této volbě potom vzniklý podprostor má očekávanou univerzální vlastnost, že každé spojité zobrazení z libovolného prostoru do $(X,\mathscr{T})$, jehož obraz je podmnožinou Y, je současně spojitým zobrazením do prostoru $(Y,\mathscr{T}|_Y)$. Tvoříme-li topologii na nějaké množině tímto způsobem, tedy jako nejhrubší topologii takovou, že daná zobrazení do jistých topologických prostorů jsou spojitá, mluvíme o *projektivní topologii* vzhledem k těmto zobrazením.

Tvrzení 3.1. *Je-li $(X,\mathcal{T})$ topologický prostor a $Y \subseteq X$, tak $\mathcal{T}|_Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{T}\}$ je topologií na množině Y. Tato topologie je nejhrubší topologií $\mathcal{U}$ na Y takovou, že vnoření $(Y,\mathcal{U})$ do $(X,\mathcal{T})$ je spojité.* □

Topologický prostor $(Y,\mathcal{T}|_Y)$ definovaný v tvrzení 3.1 se nazývá *podprostor* prostoru $(X,\mathcal{T})$ určený podmnožinou Y.

Příklad 3.2. V prostoru konečných komplementů je každý konečný podprostor diskrétní a každý nekonečný podprostor je opět prostorem konečných komplementů.

Cvičení 3.3. Dokažte, že pro topologický prostor $(X,\mathcal{T})$ a podmnožinu $Y \subseteq X$ je splněna podmínka

$$\forall A \subseteq Y : A \in \mathcal{T}|_Y \iff A \in \mathcal{T}$$

právě tehdy, když $Y \in \mathcal{T}$.

Protože podprostor je dobře definovaným pojmem i v případě metrických prostorů, měli bychom ověřit, že námi definovaný pojem podprostoru topologického prostoru skutečně zobecňuje pojem podprostoru prostoru metrického. Vezměme tedy libovolný metrický prostor (X,ρ) a jeho podmnožinu $Y \subseteq X$. Metrika na podprostoru Y je dána zúžením ρ na $Y \times Y$, a tedy jí indukovaná topologie $\mathcal{T}_{\rho|_{Y^2}}$ má bázi tvořenou koulemi $\{z \in Y \mid \rho(z,y) < \varepsilon\}$, kde $y \in Y$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Použijeme-li k definování topologie na Y topologickou definici aplikovanou na prostor $(X,\mathcal{T}_\rho)$, dostaneme topologii $\mathcal{T}_\rho|_Y$ s bází tvořenou množinami tvaru $\{z \in Y \mid \rho(z,x) < \varepsilon\}$, kde $x \in X$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Tato báze tedy obsahuje všechny množiny z báze topologie $\mathcal{T}_{\rho|_{Y^2}}$. Na druhou stranu se dá snadno ověřit, že každá množina z této báze je vygenerována množinami báze $\mathcal{T}_{\rho|_{Y^2}}$, a tedy $\mathcal{T}_{\rho|_{Y^2}} = \mathcal{T}_\rho|_Y$.

Cvičení 3.4. Dokažte, že když (X,ρ) je metrický prostor a $Y \subseteq X$, tak každá množina tvaru $\{z \in Y \mid \rho(z,x) < \varepsilon\}$, kde $x \in X$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, je sjednocením nějakých množin tvaru $\{z \in Y \mid \rho(z,y) < \varepsilon\}$, kde $y \in Y$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

V dalším textu se budeme často setkávat se dvěma významnými podprostory prostoru $(\mathbb{R}^n,\mathcal{E})$, a to s n-rozměrnou koulí $\mathrm{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ a s její hranicí, kterou je $n-1$-rozměrná sféra $\mathrm{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$.

3.2 Kvocienty

Duální konstrukcí k podprostoru je kvocient. V případě algeber je pro danou algebru A a relaci ekvivalence $\sim$ na A možné přirozeně definovat operaci na $A/\sim$, pouze pokud $\sim$ je kongruencí algebry A. V případě topologických prostorů lze přirozeně definovat topologii na $X/\sim$ pro každý topologický prostor $(X,\mathcal{T})$ a libovolnou relaci ekvivalence

$\sim$ na X. Jak ovšem uvidíme, mnoho pěkných vlastností původního prostoru se touto konstrukcí obecně nezachovává. Při definici topologie na $X/\sim$ budeme chtít, aby přirozená projekce $\nu\colon X \twoheadrightarrow X/\sim$ byla spojitá. To znamená, že za otevřené množiny v $X/\sim$ lze brát pouze takové, jejichž vzor v tomto zobrazení (tedy sjednocení příslušných tříd $\sim$) je otevřená množina v X. Definujeme-li tedy jako otevřené všechny množiny v $X/\sim$, které tuto podmínku splňují, získáme nejjemnější topologii, pro niž je zobrazení ν spojité. Topologie získaná tímto způsobem, tedy nejjemnější topologie splňující, že jistá zobrazení do vzniklého prostoru jsou spojitá, se nazývá *induktivní*. Při této volbě topologie bude mít zobrazení ν rovněž očekávanou vlastnost, že každé spojité zobrazení z $(X,\mathscr{T})$ do libovolného prostoru $(Y,\mathscr{U})$, jehož jádro obsahuje $\sim$, je složením ν a nějakého jednoznačně určeného spojitého zobrazení z $X/\sim$ do Y. Pro zjednodušení zápisu využijeme faktu, že relace ekvivalence odpovídají surjektivním zobrazením, a celou definici formulujeme pouze v řeči zobrazení.

Tvrzení 3.5. *Je-li $(X,\mathscr{T})$ topologický prostor a $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ surjektivní zobrazení, tak $\mathscr{U} = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathscr{T}\}$ je topologií na množině Y. Je-li navíc $g\colon (X,\mathscr{T}) \to (Z,\mathscr{V})$ libovolné spojité zobrazení splňující $\ker f \subseteq \ker g$, tak existuje jediné spojité zobrazení $h\colon (Y,\mathscr{U}) \to (Z,\mathscr{V})$ takové, že $h \circ f = g$.* □

Topologický prostor $(Y,\mathscr{U})$ definovaný v tvrzení 3.5 se nazývá *kvocient* prostoru $(X,\mathscr{T})$.

Příklad 3.6.

1. Je-li $\sim$ relace ekvivalence na uzavřeném intervalu $\langle 0,1\rangle$ s jedinou netriviální třídou rozkladu $\{0,1\}$ obsahující právě krajní body intervalu, pak $\langle 0,1\rangle/\sim \,\cong \mathrm{S}_1$.

2. Ztotožníme-li ve čtverci $X = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ protilehlé body dvou protilehlých stran, tedy $[0,x] \sim [1,x]$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$, bude $X/\sim$ válcová plocha. Ztotožníme-li navíc i protilehlé body zbylých dvou stran, tedy $[x,0] \sim [x,1]$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$, bude $X/\sim$ homeomorfní toru.

3. Pokud v předchozím příkladu ztotožníme jednu dvojici stran v opačném směru, to jest $[x,0] \sim [1-x,1]$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$, bude výsledný kvocient $X/\sim$ homeomorfní Kleinově láhvi.

Významným speciálním případem kvocientu je situace, kdy ztotožňujeme jistou podmnožinu A prostoru $(X,\mathscr{T})$ do jednoho bodu, tedy $\sim\, = \mathrm{id}_X \cup (A \times A)$. Kvocient $X/\sim$ se v tomto případě označuje X/A.

Cvičení 3.7. Ukažte, že $\mathrm{B}_n/\mathrm{S}_{n-1} \cong \mathrm{S}_n$. Využijte tohoto faktu k důkazu, že S_n je kvocientem B_{n+1}.

Příklad 3.8. Ukážeme si příklad jednoduchého kvocientu metrického prostoru, který není metrizovatelný. Uvážíme euklidovský prostor $\mathbb{R}^2$ a ztotožníme všechny body některé přímky, tedy $X = \mathbb{R}^2/(\mathbb{R}\times\{0\})$. Dokážeme, že bod $b = \mathbb{R}\times\{0\}$ prostoru X nemá spočetnou bázi okolí, což není v metrickém prostoru možné. Předpokládejme tedy, že množiny $A_n \subseteq X$, pro $n \in \mathbb{N}$, tvoří spočetnou bázi otevřených okolí bodu b. To znamená, že vzory všech těchto množin v přirozené projekci $\nu^{-1}(A_n)$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^2$ a obsahují přímku $\mathbb{R}\times\{0\}$. Nyní dojdeme ke sporu tak, že zkonstruujeme okolí A bodu b, které nebude obsahovat žádnou z množin A_n. Přitom pro každé n zajistíme vlastnost $A_n \not\subseteq A$ tím, jak A definujeme v rámci přímky $\{n\}\times\mathbb{R}$. Za tímto účelem zvolíme libovolné $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$ splňující $[n,\alpha_n] \in \nu^{-1}(A_n)$; jelikož množina $\nu^{-1}(A_n)$ je okolím bodu $[n,0]$, můžeme takové α_n získat například jako

$$\frac{\sup\{\varepsilon \in (0,1) \mid \mathrm{B}([n,0],\varepsilon) \subseteq \nu^{-1}(A_n)\}}{2}.$$

Položme $A = \nu(B)$, kde

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big((n-1,n+1)\times(-\alpha_n,\alpha_n)\big) \cup \big((-\infty,1)\times(-1,1)\big).$$

Protože $\nu^{-1}(A) = B$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^2$, je A otevřeným okolím bodu b. Ovšem pro každé $n \in \mathbb{N}$ bod $[n,\alpha_n] \notin B$ leží v $\nu^{-1}(A_n)$, a tedy $A_n \not\subseteq A$, což je ve sporu s tím, že množiny A_n tvoří bázi okolí b.

Jak uvidíme v kapitole o kompaktnosti, v tomto důkazu jsme využili toho, že přímka $\mathbb{R}\times\{0\}$ není kompaktní, neboť ji lze pokrýt pomocí nekonečně mnoha otevřených množin tvaru $(n-1,n+1)\times(-\alpha_n,\alpha_n)$, přičemž po odstranění kterékoli z nich některý bod přímky pokryt nebude. Proto také tento důkaz nemůžeme aplikovat v případě kvocientu

$$X = \big(\langle 0,1\rangle\times\mathbb{R}\big)/\big(\langle 0,1\rangle\times\{0\}\big).$$

Tento kvocient je nejen metrizovatelný, ale dokonce homeomorfní podprostoru

$$\{[x,y] \mid y \in (-1,1),\ x \in \langle 0,|y|\rangle\}$$

euklidovského prostoru $\mathbb{R}^2$.

3.3 Retrakty

Cvičení 3.9. Nechť X a Y jsou topologické prostory a $f\colon X\to Y$ a $g\colon Y\to X$ jsou spojitá zobrazení splňující $f\circ g = \mathrm{id}_Y$. Ukažte, že potom Y je kvocient prostoru X a g je homeomorfismus prostoru Y na podprostor X.

Vztah mezi prostory popsaný v předchozím cvičení je v topologii velmi důležitý, neboť prostor Y má vždy s prostorem X mnoho společných vlastností, které se obecně nedědí na podprostory ani na kvocienty. Přitom se většinou předpokládá, že Y je přímo podprostorem prostoru X a zobrazení g je vnoření podprostoru:

Definice 3.10. Pokud Y je podprostor topologického prostoru X a současně existuje spojité zobrazení $r\colon X \to Y$ splňující $r(y) = y$ pro všechna $y \in Y$, říkáme, že Y je *retraktem* prostoru X, a zobrazení r nazýváme *retrakcí* X na Y.

Příklad 3.11.

1. Libovolný oblouk je retraktem kružnice.

2. V kapitole **??** si ukážeme, že n-rozměrná sféra S_n není retraktem (n+1)-rozměrné koule B_{n+1}, přestože je jejím podprostorem i kvocientem.

3.4 Součiny

Další konstrukcí, kterou definujeme, je součin. Pro jednoduchost se nejprve podívejme na případ součinu dvou prostorů, který umíme definovat i v případě metrických prostorů. Vybereme-li si z ekvivalentních metrik na součinu metrických prostorů (X_1,ρ_1) a (X_2,ρ_2) metriku

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{\rho(x_1,y_1),\rho(x_2,y_2)\},$$

bude koule o poloměru r se středem v bodě (x_1,x_2) součinem koulí o poloměru r se středy v bodech x_1 a x_2. Takže bázi topologie součinu budou tvořit právě součiny bázových množin v prostorech X_1 a X_2. Takto se také obecně zadefinuje součin dvou topologických prostorů $(X_1,\mathscr{T}_1)$ a $(X_2,\mathscr{T}_2)$: na množině $X_1 \times X_2$ zadáme topologii bází

$$\{U \times V \mid U \in \mathscr{T}_1,\ V \in \mathscr{T}_2\}.$$

Všimněme si nyní, že tutéž topologii můžeme rovněž zadat pomocí subbáze

$$\{U \times X_2 \mid U \in \mathscr{T}_1\} \cup \{X_1 \times V \mid V \in \mathscr{T}_2\}.$$

Přitom množiny $U \times X_2$ a $X_1 \times V$ jsou vlastně právě vzory otevřených množin z prostorů X_1 a X_2 v projekcích $p_1\colon X_1 \times X_2 \to X_1$ a $p_2\colon X_1 \times X_2 \to X_2$. Tedy topologie součinu je definována jako nejhrubší topologie na $X_1 \times X_2$ taková, že obě projekce jsou spojité. Jedná se tedy, stejně jako v případě podprostorů, o projektivní topologii. Touto definicí se rovněž zaručí očekávaná univerzální vlastnost součinu: libovolná spojitá zobrazení z nějakého prostoru do X_1 a X_2 jednoznačně určují spojité zobrazení z tohoto prostoru do $X_1 \times X_2$.

Příklad 3.12. Součin dvou kružnic je homeomorfní toru.

Nyní stejným způsobem zavedeme topologii i na nekonečných součinech topologických prostorů.

Definice 3.13. Pro libovolný systém topologických prostorů $(X_i, \mathscr{T}_i)$, pro $i \in I$, je jejich *součinem* prostor $\prod_{i\in I}(X_i, \mathscr{T}_i) = (\prod_{i\in I} X_i, \mathscr{T})$, kde $\mathscr{T}$ je topologie generovaná subbází

$$\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I,\ U \in \mathscr{T}_i\}.$$

Báze součinové topologie generovaná subbází v definici obsahuje právě množiny

$$\bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(U_j), \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}_0,\ i_j \in I,\ U_j \in \mathscr{T}_{i_j}. \tag{3.1}$$

To například znamená, že pro každé okolí A libovolného bodu součinu $\prod X_i$ se na všech složkách s výjimkou konečně mnoha musejí v prvcích množiny A vyskytovat všechny body příslušného prostoru X_i.

Cvičení 3.14. Ukažte, že topologie indukovaná standardními ekvivalentními metrikami na součinu konečně mnoha metrických prostorů je právě součinová topologie.

V dalším textu se často setkáme s užitím následující univerzální vlastnosti součinu.

Tvrzení 3.15. *Nechť $(Y, \mathscr{U})$ a $(X_i, \mathscr{T}_i)$, pro $i \in I$, jsou topologické prostory a $(X, \mathscr{T}) = \prod_{i\in I}(X_i, \mathscr{T}_i)$. Jsou-li $f_i \colon (Y, \mathscr{U}) \to (X_i, \mathscr{T}_i)$, pro $i \in I$, spojitá zobrazení, pak existuje právě jedno spojité zobrazení $f \colon (Y, \mathscr{U}) \to (X, \mathscr{T})$ splňující $p_i \circ f = f_i$ pro všechna $i \in I$. Toto zobrazení je dáno předpisem $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$.*

Důkaz. Nejprve si všimněme, že uvedený předpis zobrazení f jednoznačně vyplývá z podmínky na složení s projekcemi. K dokončení důkazu tvrzení tedy stačí ověřit, že toto zobrazení f je spojité. Proto vezměme libovolnou množinu patřící do standardní subbáze prostoru $(X, \mathscr{T})$ a ukažme, že její vzor v f je otevřená množina v $(Y, \mathscr{U})$. Množina ze subbáze je tvaru $p_i^{-1}(U)$, kde $U \in \mathscr{T}_i$, a její vzor je $f^{-1}(p_i^{-1}(U)) = f_i^{-1}(U)$, což je ovšem otevřená množina v prostoru $(Y, \mathscr{U})$ díky spojitosti f^{-1}. □

Spojité zobrazení f z tvrzení 3.15 se obvykle značí $(f_i)_{i\in I}$. Toto zobrazení je tedy definováno jako jediné zobrazení takové, že všechny diagramy

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathscr{U}) \arrow[r, "(f_i)_{i\in I}"] \arrow[dr, "f_j"'] & \prod_{i\in I}(X_i, \mathscr{T}_i) \arrow[d, "p_j"] \\
 & (X_j, \mathscr{T}_j)
\end{tikzcd},$$

pro $j \in I$, komutují.

Důležitým speciálním případem tvrzení 3.15 je situace, kdy prostor $(Y, \mathscr{U})$ je rovněž součinem nějakých prostorů $(Y_i, \mathscr{U}_i)$, pro $i \in I$, a pro každé $i \in I$ je dáno spojité zobrazení $g_i \colon (Y_i, \mathscr{U}_i) \to (X_i, \mathscr{T}_i)$. Potom můžeme za f_i brát složení $g_i \circ \bar{p}_i$, kde $\bar{p}_j$ značí přirozenou projekci z $\prod_{i \in I}(Y_i, \mathscr{U}_i)$ na prostor $(Y_j, \mathscr{U}_j)$. Vzniklé zobrazení, obvykle označované $\prod_{i \in I} g_i$, je tedy určeno komutativitou následujících diagramů pro všechna $j \in I$:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}(Y_i, \mathscr{U}_i) \arrow[r, "\prod_{i\in I} g_i"'] \arrow[d, "\bar{p}_j"] & \prod_{i\in I}(X_i, \mathscr{T}_i) \arrow[d, "p_j"] \\
(Y_j, \mathscr{U}_j) \arrow[r, "g_j"'] & (X_j, \mathscr{T}_j)\,.
\end{tikzcd}$$

Nyní si ukážeme, že součinová topologie charakterizuje právě bodovou konvergenci, tedy konvergenci probíhající na všech složkách součinu nezávisle.

Tvrzení 3.16. *Nechť $(X_i, \mathscr{T}_i)$, pro $i \in I$, jsou topologické prostory a $x = (x_i)_{i \in I}$ a $x_k = (x_{k,i})_{i \in I}$, pro $k \in \mathbb{N}$, libovolné body prostoru $\prod_{i \in I}(X_i, \mathscr{T}_i)$. Potom posloupnost $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu x právě tehdy, když pro všechna $i \in I$ posloupnost $(x_{k,i})_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu x_i.*

Důkaz. "$\Longrightarrow$" Předpokládejme, že posloupnost $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ konverguje k x, a uvažme libovolné $i \in I$. Pro libovolnou otevřenou množinu $U \subseteq X_i$ obsahující bod x_i potřebujeme ukázat, že od určitého indexu patří již všechny členy posloupnosti $(x_{k,i})_{k=1}^{\infty}$ do U. K tomu si stačí povšimnout, že podle definice součinové topologie je množina $p_i^{-1}(U)$ otevřená v prostoru $\prod_{i \in I}(X_i, \mathscr{T}_i)$ a obsahuje bod x, a tedy od určitého indexu patří všechny body posloupnosti $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ do $p_i^{-1}(U)$. Proto od tohoto indexu i body $x_{k,i} = p_i(x_k)$ patří do množiny $p_i(p_i^{-1}(U)) = U$.

"$\Longleftarrow$" Nechť nyní posloupnost $(x_{k,i})_{k=1}^{\infty}$ konverguje k x_i, pro všechna $i \in I$. Stačí nám ukázat, že pro libovolnou bázovou otevřenou množinu $U = \bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(U_j)$ v $\prod_{i \in I}(X_i, \mathscr{T}_i)$ obsahující x, kde U_j je otevřená v $(X_{i_j}, \mathscr{T}_{i_j})$, existuje index, od kterého již všechny body posloupnosti $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ patří do U. Protože pro každé $j = 1, \ldots, k$ patří bod $x_{i_j} = p_{i_j}(x)$ do množiny U_j, z předpokladu víme, že existuje $k_j \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k > k_j$ platí $x_{k,i_j} \in U_j$. Protože indexů k_j je jen konečně mnoho, můžeme za k_0 zvolit největší z nich, a potom pro libovolné $k > k_0$ dostáváme $p_{i_j}(x_k) = x_{k,i_j} \in U_j$, pro všechna $j = 1, \ldots, k$. Jinými slovy, pro $k > k_0$ máme $x_k \in U$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Následující příklad vysvětluje, proč není možné v definici otevřených množin v součinu topologických prostorů povolit omezování na otevřené množiny na nekonečně mnoha složkách současně.

Příklad 3.17. Podmnožina $A = (-1,1)^{\mathbb{N}}$ prostoru posloupností reálných čísel $(\mathbb{R},\mathscr{E})^{\mathbb{N}}$ není otevřená. Všimněte si, že například posloupnost posloupností $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, kde $x_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je dána předpisem

$$(x_k)_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } i < k, \\ 1 & \text{pro } i \geq k, \end{cases}$$

konverguje bodově ke konstantní posloupnosti $(0)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Přitom všechny posloupnosti x_k leží mimo A, ale jejich limita do A patří, což znamená, že množina $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus A$ není uzavřená podle tvrzení 1.16.

Pokud místo konvergence bodové uvažujeme na součinu metrických prostorů konvergenci stejnoměrnou, je snadné zavést metriku, která tuto konvergenci popisuje. Stačí definovat vzdálenost $\rho((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})$ jako supremum hodnot $\rho(x_i,y_i)$ pro $i \in I$, případně rovnu 1, pokud toto supremum neexistuje nebo je větší než 1. Přitom si uvědomte, že k popisu stejnoměrné konvergence na součinu není postačující znát topologii na jednotlivých prostorech X_i, neboť musíme být schopni porovnávat vzdálenosti bodů použitých v různých složkách.

Ukážeme si nyní, že bodovou konvergenci na součinu metrických prostorů obecně metrikou popsat nelze, pokud indexová množina je nespočetná.

Příklad 3.18. Uvažujme topologický prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, tedy prostor reálných funkcí reálné proměnné s bodovou konvergencí. Ukážeme, že konstantní funkce $(0)_{r\in\mathbb{R}}$ nemá spočetnou bázi okolí, a proto tento prostor nemůže být metrizovatelný. Za tímto účelem vezmeme libovolná okolí V_j, pro $j \in \mathbb{N}$, bodu $(0)_{r\in\mathbb{R}}$ a nalezneme nějaké okolí tohoto bodu, v němž není ani jedno z okolí V_j obsaženo. Protože každé okolí V_j musí obsahovat nějakou otevřenou množinu tvaru (3.1), existuje pouze konečně mnoho $r_{j,1},\ldots,r_{j,n_j} \in \mathbb{R}$ takových, že na příslušné složce se v prvcích V_j neobjevují všechna reálná čísla, tedy $p_r(V_j) = \mathbb{R}$ pro všechna $r \notin \{r_{j,1},\ldots,r_{j,n_j}\}$. Jelikož čísel $r_{j,k}$ je dohromady jen spočetně mnoho, můžeme si zvolit $s \in \mathbb{R}$ různé od všech čísel $r_{j,k}$, a tudíž splňující $p_s(V_j) = \mathbb{R}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Potom ovšem množina $p_s^{-1}((-1,1))$ je hledaným otevřeným okolím bodu $(0)_{r\in\mathbb{R}}$ neobsahujícím ani jednu z množin V_j.

Pro nejvýše spočetné indexové množiny je součin metrických prostorů vždy metrizovatelný, neboť spočetně mnoho nezáporných reálných čísel jsme schopni sečíst takovým způsobem, aby se změna na libovolné složce projevila na celkovém součtu.

Tvrzení 3.19. *Jsou-li (X_i,ρ_i), pro $i \in \mathbb{N}$, metrické prostory, je topologie součinu $(X,\mathscr{T}) = \prod_{i\in\mathbb{N}} (X_i,\mathscr{T}_{\rho_i})$ indukovaná metrikou ρ definovanou formulí*

$$\rho((x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}.$$

Poznámka 3.20. Všimněte si, že v definici metriky ρ je každá metrika ρ_i upravena tak, aby vzdálenost žádných dvou bodů nepřekročila hodnotu 1, ale přitom se nezměnila příslušná indukovaná topologie. Tato úprava spolu s volbou váhy i-té složky $\frac{1}{2^i}$ zajišťují, aby vzniklá řada byla shora omezená absolutně konvergentní řadou $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, a tedy byla sama konvergentní.

Důkaz. Ukážeme, že každé bázové okolí libovolného bodu $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ v prostoru $(X, \mathscr{T})$ obsahuje nějaké bázové okolí bodu x v prostoru $(X, \mathscr{T}_\rho)$, a opačně, že každé bázové okolí x v prostoru $(X, \mathscr{T}_\rho)$ obsahuje nějaké bázové okolí x v prostoru $(X, \mathscr{T})$.

Každé bázové okolí (3.1) bodu x v $(X, \mathscr{T})$ obsahuje okolí tvaru

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i, r_i) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\,,$$

pro nějaká $n \in \mathbb{N}$ a $r_i \in \mathbb{R}$. Ovšem toto okolí obsahuje okolí

$$\mathrm{B}\Big(x, \min\Big\{\frac{1}{2^i} \cdot \frac{r_i}{1+r_i} \mid i = 1, \dots, n\Big\}\Big)$$

bodu x v prostoru $(X, \mathscr{T}_\rho)$.

Naopak, pro každé bázové okolí $\mathrm{B}(x,r)$ bodu x v $(X, \mathscr{T}_\rho)$ můžeme zvolit $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$. Potom okolí

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}\Big(x_i, \frac{r}{2n-r}\Big) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$$

bodu x v $(X, \mathscr{T})$ je obsaženo v $\mathrm{B}(x,r)$, neboť

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\frac{r}{2n-r}}{1+\frac{r}{2n-r}} < n \cdot \frac{r}{2n} = \frac{r}{2}$$

a současně

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}\,.$$

□

Příklad 3.21. Důležitým příkladem spočetného součinu metrických prostorů je *Cantorovo diskontinuum* (Cantor set), což je podprostor intervalu $\langle 0, 1\rangle$ obsahující právě ta čísla, pro která existuje zápis ve trojkové soustavě využívající pouze číslice 0 a 2. Tento prostor je totiž homeomorfní prostoru $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, kde $\{0,2\}$ je dvoubodový diskrétní prostor, přičemž příslušný homeomorfismus zobrazuje posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na číslo mající v trojkové soustavě zápis $0, a_1a_2a_3\dots$

Cvičení 3.22. Dokažte, že zobrazení definované v předcházejícím příkladu je homeomorfismus.

Cvičení 3.23. Dokažte, že všechny projekce ze součinu neprázdných topologických prostorů jsou retrakce.

3.5 Součty

Poslední základní konstrukcí, kterou si v této kapitole popíšeme, je součet topologických prostorů. Tato konstrukce vlastně znamená, že všechny původní prostory dohromady začneme chápat jako jediný prostor, v němž se žádné dva původní prostory k sobě nikde nepřibližují. Poněvadž se jedná o duální konstrukci k součinu, příslušná topologie bude definována jako induktivní.

Definice 3.24. Pro libovolný systém topologických prostorů $(X_i, \mathscr{T}_i)$, pro $i \in I$, je jejich *součtem* topologický prostor definovaný na disjunktním sjednocení všech X_i, tedy na množině $\bigcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})$, bází $\{U \times \{i\} \mid i \in I,\ U \in \mathscr{T}_i\}$.

Příklad 3.25. Každý diskrétní prostor je součtem všech svých jednobodových podprostorů.

Cvičení 3.26. Ukažte, že pro libovolné topologické prostory $(X_i, \mathscr{T}_i)$ je pro všechna $j \in I$ vnoření $\iota_j \colon X_j \to \bigcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})$, definované předpisem $\iota_j(x) = (x, j)$, spojité zobrazení prostoru $(X_j, \mathscr{T}_j)$ do součtu.

Cvičení 3.27. Ukažte, že jsou-li (X_i, ρ_i), pro $i \in I$, pseudometrické prostory, potom předpis

$$\rho((x,i),(y,j)) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i \neq j, \\ \min\{\rho_i(x,y), 1\}, & \text{pokud } i = j, \end{cases}$$

kde $i, j \in I$, $x \in X_i$ a $y \in X_j$, definuje pseudometriku na disjunktním sjednocení X_i, která indukuje topologii součtu prostorů $(X_i, \mathscr{T}_{\rho_i})$.

Součet topologických prostorů má následující univerzální vlastnost, která je duální k vlastnosti součinu.

Tvrzení 3.28. *Nechť $(Y, \mathscr{U})$ a $(X_i, \mathscr{T}_i)$, pro $i \in I$, jsou topologické prostory, $(X, \mathscr{T})$ je součet prostorů $(X_i, \mathscr{T}_i)$, kde $X = \bigcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})$, a $\iota_i \colon X_i \to X$ je přirozené vnoření. Jsou-li $f_i \colon (X_i, \mathscr{T}_i) \to (Y, \mathscr{U})$, pro $i \in I$, spojitá zobrazení, pak existuje právě jedno spojité zobrazení $f \colon (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{U})$ splňující $f \circ \iota_i = f_i$ pro všechna $i \in I$. Toto zobrazení je dáno předpisem $f((x,i)) = f_i(x)$.*

Cvičení 3.29. Dokažte tvrzení 3.28.

Literatura

[1] Pultr, Aleš. Úvod do topologie a geometrie I. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1982.

Rejstřík