

M4140 Vybrané partie z matematické analýzy

Přírodovědecká fakulta MU

jaro 2010

Rozsah 4/2/0. 6 kr. Ukončení: zk.

1) Obyčejné diferenciální rovnice:

- 1.1. Úvod – základní pojmy, přímé metody řešení některých rovnic 1.řádu
- 1.2. Lineární systémy
- 1.3. Lineární rovnice n-tého řádu
- 1.4. Nelineární systémy - Cauchyova úloha, existence, jednoznačnost a spojitá závislost na změnách počátečních podmínek a parametrů
- 1.5. Autonomní systémy
- 1.6. Stabilita
- 1.7. Lineární rovnice 2. řádu.

2) Základy analýzy v komplexním oboru:

- 2.1. Komplexní čísla a funkce
- 2.2. Limita a spojitost
- 2.3. Posloupností a řady
- 2.4. Elementární funkce
- 2.5. Derivace a holomorní funkce
- 2.6. Křivkový integrál a Cauchyho věta
- 2.7. Vlastnosti holomorfních funkce a Taylorova řada
- 2.8. Laurentova řada, izolované singularity a teorie residuí

3) Základy lineární funkcionální analýzy:

- 3.1. Prostory se skalárním součinem
- 3.2. Fourierovy řady
- 3.3. Lineární ohraničené operátory,
- 3.4. Kompaktní operátory.

Okruhy otázek ke zkoušce:

1. Obyčejné diferenciální rovnice:

- 1.1 Úvod** – základní pojmy, přímé metody řešení některých rovnic 1.řádu - rovnice se separovanými proměnnými, homogenní, lineární /homogenní a homogenní, metoda variace konstanty/, exaktní diferenciální rovnice
- 1.2 Lineární systémy** – Gronwallovo lemma, věta o existenci a jednoznačnosti (Pikardova metoda postupných aproximací), homogenní systém (lin. nezávislost, dimenze prostoru řešení, fundamentální systém, Jacobiho vzorec, věta o řešení ve tvaru řady, nehomogenní systém, metoda variace konstant, systém s konstantními koeficienty
- 1.3 Lineární rovnice n-tého řádu** – a její vztah k lineárním systémům, věta o jednoznačné existenci na intervalu, homogenní rovnice, wronskián, lin.nezávislá řešení, nehomogenní rovnice, obecné řešení, rovnice s konstantními koeficienty
- 1.4 Nelineární systémy** - Cauchyova úloha, lokální a globální vlastnosti řešení, Banachova věta o pevném bodu a věta Pikardova-Lindelofova, (další věty o existenci a jednoznačnosti, závislost řešení na poč. podmínkách a parametrech
- 1.5 Autonomní systémy** – věta o množině řešení, vzájemné poloze trajektorií, klasifikace trajektorií (sing. body, cykly, samy sebe neprotínající trajektorie), typy sing. bodů (střed, ohnisko, uzel) , v rovině – kriterium /determinant, diskriminant, stopa/, sing. body nelineárních autonomních systémů ($n=2$) – věta o kvazilineárním systému

1.6 Stabilita – Ljapunovská stabilita /lin. systém/, stejnoměrná stabilita /lin. a kvazilin. systém/, asymptotická stabilita /lin. systém, kořeny charakteristické rovnice, Hurwitzovo kritérium, kvazilin. systém/, exponenciální stabilita /lin. a kvazilin. systém/, přímá Ljapunovova metoda – Ljapunovská funkce, věta o stejnom. stabilitě triv. řešení autonomního systému

1.7 Lineární rovnice 2. řádu – Borůvkova teorie...

2. Základy analýzy v komplexním oboru:

- 2.1 Komplexní čísla a funkce** - algebr. a goniometr. tvar k.čísla, geometrické interpretace a vzájemné vztahy, pravidla pro počítání s komplex.čísly, stereografická projekce
- 2.2 Limita a spojitost** - okolí bodu, konvergence posloupností, úplnost, topologické charakteristiky v rovině a sféře, nekonečno, komplexní funkce komplexní proměnné a její složky /v alg. i goniom. tvaru/, limita, spojitost /Cauchy, Heine/, pravidla pro počítání, věty o spojitém obrazu kompaktní a souvislé množiny, elementární funkce v k.oboru 1. /polynom, rac.lomená funkce, $\text{Arg } z$ a $\text{arg } z$ /
- 2.3 Řady v komplexním oboru** - posloupnost část. součtů, konv. a div., Cauchy-Bolzanovo kritérium, nutná podmínka, abs. a relat. konvergence a postačující podmínky, role reál. a imag. složky, posloupnosti a řady funkcí - bodová a stejnoměrná konvergence, C-B podmínka, Weierstrasseovo krit., mocninné řady v komplex.oboru a jejich vlastnosti – poloměr konvergence a Cauchy-Hadamardova věta, vlastnosti, 2.Abelova věta
- 2.4 Elementární funkce 2.** - $\text{Arg } z$ a $\text{arg } z$, lineární, lin.lomená, exp. funkce a Eulerův vzorec, \sin , \cos , tg a cotg a jejich vlastnosti, Ln a ln , obecná mocnina – jednoznačnost a mnohoznačnost, společné a odlišné vlastnosti s takovými funkcemi v \mathbb{R}
- 2.5 Derivace a holomorní funkce** – derivace funkce v bodě, C-R podmínky a jejich důsledky /rekonstrukce komplex.funkce/, holomorfní funkce, věta o derivaci mocninné řady, derivace a holomorfnost elementárních funkcí, celé funkce, holom. v nekonečnu

2.6 Křivkový integrál a Cauchyho věta – křivkový integrál a jeho základní vlastnosti,

C- věta pro holomorfní funkci a jednoduchou uzavřenou křivku, C-vzorec, důsledky

2.7 Vlastnosti holomorfních funkce a Taylorova řada – věta o diferencovatelnosti

holomorfní funkce, důsledek o polynomu, základní věta algebry, další důsledky C-věty

2.8 Laurentova řada, izolované singularity a teorie residuí – L- řada a její obor

konvergence, klasifikace singularit /podle tvaru L-řady, tvrzení o vlastnostech funkce a

limit v okolí singularity, integrál přes oblast obsahující singularitu a jeho výpočet,

reziduum a jeho výpočet, věta o reziduích její aplikace

3. Základy lineární funkcionální analýzy:

- 3.1 Prostory se skalárním součinem** (lineární vektorový prostor, lineární nezávislost, lineární obal, báze, normovaný prostor, konvergence a Cauchyovskost, úplnost, pravidla pro počítání limit posloupností a spojitost normy, prostory se skalárním součinem, Schwarzova nerovnost, indukovaná norma, spojitost sk.součinu, ortogonalita a ortonormalita, Besselova nerovnost, hustá podmnožina a separabilita, Riesz-Fischerova věta a Fourierovy koeficienty, věta o projekci a její důsledky, Parsevalova identita, Gramm-Smithův ortogonalizační proces, Gilbertův prostor)
- 3.2 Fourierovy řady** (prostor L^2 ... a v něm funkce $\exp(ix)$ – jejich ortogonalita, ortonormální systém a Fourierovy koeficienty, Fourierovy koeficienty v reálném oboru, amplitudově fázový tvar Fourierovy řady, věta o konvergenci Fourierovy řady, Gibbsův jev)
- 3.3 Lineární operátory** (lineární operátor v lineárním prostoru, jeho spojitost v metrickém prostoru, lineární operátor v normovaném prostoru, lineární prostor a okruh lineárních operátorů, pravý a levý inverzní operátor, inverzní operátor a věta o jeho existenci, ohraničený operátor a věta o sp. a ohr., věta o spojitosti lineárního operátoru v konečně dimenzionálním Banachově prostoru, norma operátoru a věty o úplnosti prostoru lineárních operátorů a normě součinu operátorů, věta o existenci inverzního operátoru a konvergenci Neumannovy řady, Fredholmovost)
- 3.4 Kompaktní operátory** (kompaktní operátor, věta o konečnědimenzionálních množinách nulových bodů mocnin operátoru a její důsledky)

Literatura

Ráb, Miloš *Diferenciální rovnice*

1. vyd. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980. 196 s.

Ráb, Miloš - [Kalas, Josef](#) *Obyčejné diferenciální rovnice*

1. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 1995, 207 s. ISBN 80-210-1130-0.

2. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 2001, 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

Novák, Vítězslav *Analýza v komplexním oboru*

1.vyd. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1984, 103 s.

[Kalas, Josef](#) *Analýza v komplexním oboru.*

1. vyd. Masarykova univerzita v Brně, 2006. 202 s. ISBN 80-210-4045-9.

.....

OBSAH

Předmluva

I. Diferenciální rovnice 1. řádu	1
1. Základní pojmy	1
2. Geometrická interpretace rovnice 1. řádu	2
3. Rovnice se separovanými proměnnými	3
4. Jiné typy integrovatelných rovnic	8
5. Exaktní rovnice	12
6. Cvičení	14
II. Systémy lineárních diferenciálních rovnic	16
1. Norma vektoru a matice	16
2. Vektorové a maticové funkce	18
3. Systém lineárních diferenciálních rovnic	19
4. Homogenní systém rovnic	25
5. Nehomogenní systém rovnic	29
6. Systém rovnic s konstantními koeficienty	31
7. Cvičení	39
III. Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů	41
1. Úvod	41
2. Homogenní rovnice	42
3. Nehomogenní rovnice	44
4. Homogenní rovnice s konstantními koeficienty	46
5. Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty	51
6. Cvičení	54
7. Řešení lineárního systému s konstantními koeficienty	55

IV. Systémy nelineárních diferenciálních rovnic	62
1. Úvod	62
2. Existence a jednoznačnost řešení	63
3. Diferenciální rovnice n -tého řádu	71
4. Globální jednoznačnost řešení	72
5. Prodlužování řešení	73
6. Závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech	79
7. Cvičení	84
V. Diferenciální nerovnosti	86
1. Diniho derivace	86
2. Maximální a minimální řešení	88
3. Srovnávací věta a některé její aplikace	90
4. Cvičení	93
VI. Autonomní systémy	95
1. Geometrická interpretace	95
2. Typy singulárních bodů v rovině	98
3. Lineární autonomní systémy v rovině	98
4. Transformace do komplexně konjugovaných souřadnic	106
5. Geometrické vlastnosti trajektorií	108
6. Singulární body nelineárních autonomních rovnic	114
7. Periodická řešení Liénardovy rovnice	119
8. Cvičení	122
VII. Stabilita	124
1. Úvod	124
2. Ljapunovská stabilita	124
3. Stejněměrná stabilita	126
4. Asymptotická stabilita	128
5. Exponenciální stabilita	131
6. Nestabilita	133
7. Variační rovnice	136
8. Příklady	139
9. Přímá Ljapunovova metoda	141
10. Stabilita systému diferenciálních rovnic v rovině	145
11. Cvičení	150

VIII. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	152
1. Transformace	153
2. Základní vlastnosti lineární rovnice 2. řádu	155
3. Sturmovy srovnávací věty	158
4. Sturmův-Liouvilleův problém	162
5. Oscilatorická rovnice	166
6. Neoscilatorická rovnice	173
7. Asymptotické vzorce. Metoda perturbace	179
8. Řešení diferenciální rovnice pomocí mocninných řad	184
9. Rovnice Fuchsova typu	186
10. Cvičení	192
IX. Doplnky	194
1. Komplexní funkce reálné proměnné	194
2. Kanonický tvar matice	196
Symbolika	200
Literatura	202
Věcný rejstřík	206

Obsah

Předmluva	iii
1 Úvod do předmětu	1
1.1 Komplexní čísla	1
1.2 Přímka, kružnice, zobecněná kružnice	6
1.3 Některá zobrazení \mathbb{C} do \mathbb{C}	8
1.4 Gaussova a rozšířená Gaussova rovina jako metrické prostory	13
1.5 Konvergentní a absolutně konvergentní řady	18
1.6 Cvičení	21
2 Funkce komplexní proměnné	26
2.1 Derivace funkce	26
2.2 Parciální derivace podle x, y, z, \bar{z}	31
2.3 Holomorfní funkce, geometrický význam derivace	33
2.4 Funkční řady	37
2.5 Mocninné řady	39
2.6 Elementární funkce	46
2.7 Cvičení	59

3	Integrál, Cauchyova teorie	63
3.1	Křivky v \mathbb{C}	63
3.2	Křivkový integrál	67
3.3	Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě	72
3.4	Cauchyova věta	74
3.5	Cvičení	86
4	Vlastností holomorfních funkcí	89
4.1	Liouvilleova věta	89
4.2	Moreroova věta	91
4.3	Řady a posloupnosti holomorfních funkcí	93
4.4	Taylorova věta	96
4.5	Věta o jednoznačnosti	98
4.6	Singulární body	99
4.7	Věta o otevřeném zobrazení, princip maxima modulu	101
4.8	Logaritmická derivace	104
4.9	Cvičení	105

5	Laurentova řada a teorie reziduí	106
5.1	Laurentova řada	106
5.2	Izolované singularity	110
5.3	Teorie reziduí	117
5.4	Aplikace teorie reziduí	122
5.4.1	Výpočet integrálů $\int_0^{2\pi} Q(\cos x, \sin x) dx$	123
5.4.2	Výpočet integrálů $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	123
5.4.3	Integrály $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos mx dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin mx dx$	125
5.4.4	Výpočet integrálů $\int_0^{\infty} f(x)x^{a-1} dx$	127
5.4.5	Výpočet integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f(e^x)e^{ax} dx$, kde $a \in (0, 1)$	130
5.4.6	Výpočet integrálů $\int_0^{\infty} f(x) \ln x dx$, $\int_0^{\infty} f(x) dx$	131
5.5	Cvičení	133
6	Celé funkce	137
6.1	Nekonečné součiny	137
6.2	Rozklad celé funkce na nekonečný součin	143
6.3	Cvičení	149

7	Meromorfní funkce	151
7.1	Princip argumentu, Rouchéova věta	151
7.2	Funkce meromorfní v oblasti a v bodě	153
7.3	Funkce meromorfní v \mathbb{C}	155
7.4	Cvičení	164
8	Úvod do teorie konformního zobrazení	165
8.1	Homografie	165
8.2	Konformní zobrazení a jeho vlastnosti	175
8.3	Cvičení	185
	Seznam označení	188
	Literatura	191
	Rejstřík	192