

Téma 5: Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z normálního rozložení

Úkol 1.: Vlastnosti výběrového průměru z normálního rozložení

Předpokládejme, že velký ročník na vysoké škole má výsledky ze statistiky normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 bodů se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Najděte pravděpodobnost, že průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude větší než 80 bodů.

Návod:

X_1, \dots, X_{10} je náhodný výběr z $N(72, 81)$. Počítáme $P(M > 80)$, přičemž výběrový průměr M má normální rozložení se střední hodnotou $E(M) = \mu = 72$ a rozptylem $D(M) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{81}{10} =$

8,1 (viz skripta Základní statistické metody, věta 6.1.1.1., bod 2).

Tedy $P(M > 80) = 1 - P(M \leq 80) = 1 - \Phi(80)$, kde $\Phi(80)$ je hodnota distribuční funkce rozložení $N(72; 8,1)$ v bodě 80.

Vytvoříme datový soubor o jedné proměnné a o jednom případě. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme $= 1 - \text{INormal}(80;72;\text{sqrt}(8,1))$. Zjistíme, že $1 - \Phi(80) = 0,00247005$.

Funkce $\text{INormal}(x;\mu;\sigma)$ počítá hodnotu distribuční funkce rozložení $N(\mu,\sigma^2)$ v bodě x .

		1
	Prom1	
1		0,00247

Úkol 2.: Intervaly spolehlivosti pro parametry μ, σ^2 normálního rozložení

Z populace stejně starých selat téhož plemene bylo vylosováno šest selat a po dobu půl roku jim byla podávána táž výkrmná dieta. Byly zaznamenávány průměrné denní přírůstky hmotnosti v Dg. Z dřívějších pokusů je známo, že v populaci mívají takové přírůstky normální rozložení, avšak střední hodnota i rozptyl se měnívají. Přírůstky v Dg: 62, 54, 55, 60, 53, 58.

- Najděte 95% empirický levostranný interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ při neznámé směrodatné odchylce σ .
- Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku σ .

Návod:

Vytvoříme datový soubor o 4 proměnných a 6 případech. První proměnnou nazveme hmotnost, druhou dm1, třetí dm2 a čtvrtou hm2. Do proměnné hmotnost zapíšeme zjištěné údaje. Pomocí Popisných statistik zjistíme realizace výběrového průměru a výběrové směrodatné odchylky.

Proměnná	Popisné statistiky	
	Průměr	Sm. odch.
hmotnost	57,00000	3,577709

ad a) Dolní mez $100(1-\alpha)\%$ empirického levostranného intervalu spolehlivosti pro μ při neznámém σ je $m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha; n-1}$ (viz skripta Základní statistické metody, věta 6.1.2.1., bod

2 b), tedy v našem případě $57 - \frac{3,577709}{\sqrt{6}} t_{0,95; 5} = 54,06$

Do Dlouhého jména proměnné dm1 zapíšeme výraz $= 57 - 3,577709 * \text{VStudent}(0,95;5)/\text{sqrt}(6)$ Funkce $\text{VStudent}(x;df)$ počítá x -kvantil rozložení $t(df)$.

Dostaneme výsledek 54,05682, tedy $\mu > 54,06$ Dg s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b) Meze 100(1- α)% empirického oboustranný intervalu spolehlivosti pro σ při neznámém

μ jsou $\left(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}}; \frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}} \right)$ (viz skripta Základní statistické metody, věta 6.1.2.1.,

bod 3 a – nutno odmocnit).

Do Dlouhého jména proměnné dm2 zapíšeme výraz $=3,577709*\sqrt{5}/\sqrt{V\text{Chi2}(0,975;5)}$.

Vyjde 2,233235. Podobně do Dlouhého jména proměnné hm2 zapíšeme výraz

$=3,577709*\sqrt{5}/\sqrt{V\text{Chi2}(0,025;5)}$ Vyjde 8,774739 . Funkce VChi2(x;nu) počítá x- kvantil rozložení $\chi^2(nu)$.

Dostaneme výsledek: 2,23 g < σ < 8,77 g s pravděpodobností aspoň 0,95.

	1	2	3
	dm1	dm2	hm2
1	54,05683	2,233235	8,774739

Úkol 3.: Testování hypotézy o parametru μ normálního rozložení

Systematická chyba měřicího přístroje se eliminuje nastavením přístroje a měřením etalonu, jehož správná hodnota je $\mu = 10,00$. Nezávislémi měřeními za stejných podmínek byly získány hodnoty: 10,24 10,12 9,91 10,19 9,78 10,14 9,86 10,17 10,05, které považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 9 z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Je možné při riziku 0,05 vysvětlit odchylky od hodnoty 10,00 působením náhodných vlivů?

Návod:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu $H_0: \mu = 10$ proti oboustranné alternativě $H_1: \mu \neq 10$. Jde o úlohu na jednovýběrový t-test (viz skripta Základní statistické metody, návod 6.1.4.2.). Ten je ve STATISTICE implementován. Vytvoříme datový soubor o jedné proměnné a devíti případech, kam zapíšeme naměřené hodnoty. V Základních statistikách/tabulkách vybereme t-test, samostatný vzorek. Do Referenčních hodnot zapíšeme 10. Ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu. Pokud p-hodnota bude menší nebo rovna 0,05, zamítneme hypotézu $H_0: \mu = 10$ ve prospěch oboustranné alternativní hypotézy $H_1: \mu \neq 10$ na hladině významnosti 0,05. V opačném případě H_0 nezamítáme. V našem případě je

Proměnná	Test průměrů v úči referenční konstantě (hodnotě)							
	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
Prom1	10,05111	0,162669	9	0,054223	10,00000	0,942611	8	0,373470

Protože p-hodnota 0,373470 > 0,05 nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% lze tedy odchylky od hodnoty 10 vysvětlit působením náhodných vlivů.

Všimněme si ještě hodnoty testového kritéria: $t_0 = 0,942611$. Kritický obor

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1) \right) \cup \left(t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty \right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(8) \right) \cup \left(t_{0,975}(8), \infty \right) = \left(-\infty, -2,306 \right) \cup \left(2,306, \infty \right)$$

Protože $t_0 \notin W$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 .

Úkol 4.: Interval spolehlivosti pro rozdíl parametrů $\mu_1 - \mu_2$ dvourozměrného rozložení

Bylo vylosováno 6 vrhů selat a z nich vždy dva sourozenci. Jeden z nich vždy dostal náhodně dietu č. 1 a druhý dietu č. 2. Přírůstky v Dg jsou následující: (62,52), (54,56), (55,49), (60,50), (53,51), (58,50). Za předpokladu, že rozdíly uvedených dvojic tvoří náhodný výběr z normálního rozložení se střední hodnotou $\mu_1 - \mu_2$, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot.

Návod:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky, do proměnné v3 uložíme rozdíly v1 - v2.

Ve STATISTICE je implementován výpočet oboustranného intervalu spolehlivosti pro μ , když σ neznáme (viz skripta Základní statistické metody, věta 6.1.2.1., bod 2 a). Pomocí Popisných statistik zjistíme meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu proměnné v3 tak, že zaškrtneme Meze spoleh. prům.

Proměnná	Popisné statistiky	
	Int. spolehl.	Int. spolehl.
	-95,000%	+95,000%
Prom3	0,626461	10,70687

Dostaneme výsledek: $0,63 \text{ Dg} < \mu < 10,71 \text{ Dg}$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Úkol 5.: Testování hypotézy o rozdíl parametrů $\mu_1 - \mu_2$ dvourozměrného rozložení

Pro data z úkolu 4. testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že obě výkrmné diety mají stejný vliv.

Návod:

Označme $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu $H_0: \mu = 0$ proti oboustranné alternativě $H_1: \mu \neq 0$. Jde o úlohu na párový t-test (viz skripta Základní statistické metody, odstavec 6.2.2.). Ten je ve STATISTICE implementován. Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky. V menu Základní statistiky/tabulky vybereme t-test, závislé vzorky. Zadáme názvy obou proměnných a ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu.

Proměnná	t-test pro závislé vzorky							
	Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílů	t	sv	p
Prom1	57,00000	3,577709						
Prom2	51,33333	2,503331	6	5,666667	4,802777	2,890087	5	0,034183

Protože p-hodnota $0,034183 < 0,05$, zamítáme hypotézu $H_0: \mu = 0$ ve prospěch alternativní hypotézy $H_1: \mu \neq 0$ na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že jsme s rizikem omylu nejvýše 5% prokázali rozdíl v účinnosti obou výkrmných diet.

Všimněme si ještě hodnoty testového kritéria: $t_0 = 2,890087$. Kritický obor

$$W = \left\{ x, -t_{1-\alpha/2} \leq x \leq t_{1-\alpha/2} \right\} = \left\{ x, -t_{0,975} \leq x \leq t_{0,975} \right\} \\ = \left\{ x, -2,5706 \leq x \leq 2,5706 \right\}$$

Protože $t_0 \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 .

Příklady k samostatnému řešení

Příklad 1.: Měřením délky deseti válečků byly získány hodnoty (v mm): 5,38 5,36 5,35 5,40 5,41 5,34 5,29 5,43 5,42 5,32. Těchto deset hodnot považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 10 z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

- Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ
- Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou směrodatnou odchylku σ .
- Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že střední hodnota délky válečků je 5,3 mm proti oboustranné alternativě.

Výsledky:

ad a)

$5,3248 \text{ mm} < \mu < 5,4152 \text{ mm}$ s pravděpodobností aspoň 0,99

ad b)

$0,0272 \text{ mm} < \sigma < 0,1002 \text{ mm}$ s pravděpodobností aspoň 0,99.

ad c) Testujeme $H_0: \mu = 5,3$ proti $H_1: \mu \neq 5,3$ na hladině významnosti 0,01. Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,01 a přijímáme alternativní hypotézu.

Příklad 2.: Bylo náhodně vybráno 15 desetiletých chlapců a byla zjištěna jejich výška (v cm). Výsledky měření 130, 140, 136, 141, 139, 133, 149, 151, 139, 136, 138, 142, 127, 139, 147 považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 15 z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Podle názoru odborníků by střední hodnoty výšky desetiletých chlapců měla být 136,1 cm. Testujte tuto hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Pomocí N-P plotu a S-W testu ověřte normalitu dat.

Výsledky:

S-W test poskytl p-hodnotu 0,7998, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Dále testujeme $H_0: \mu = 136,1$ proti $H_1: \mu \neq 136,1$ na hladině významnosti 0,05. Protože $p = 0,0947 > 0,05$, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 3.: Pět mužů se rozhodlo, že budou hubnout. Zjistili svou hmotnost před zahájením diety a po ukončení diety.

Číslo osoby	1	2	3	4	5
Hmotnost před dietou	84	77,5	91,5	84,5	97,5
Hmotnost po dietě	78,5	73,5	88,5	80	97

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že dieta neměla vliv na hmotnost.

Výsledky:

Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Testová statistika nabývá hodnoty 4,1105, odpovídající p-hodnota je 0,0174, tedy nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% jsme tedy prokázali, že dieta má vliv na střední hodnotu hmotnosti.