Parametrické úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních a alternativních rozložení

Motivace: Máme-li k dispozici dva nezávislé náhodné výběry z normálních rozložení, je naším úkolem porovnat střední hodnoty či rozptyly těchto rozložení. Zpravidla konstruujeme intervaly spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot respektive hodnotíme shodu středních hodnot pomocí dvouvýběrového t-testu či dvouvýběrového z-testu a shodu rozptylů pomocí F-testu. V situaci, kdy máme dva nezávislé náhodné výběry z alternativních rozložení, porovnáváme parametry těchto dvou rozložení.

Věta: Rozložení statistik odvozených z výběrových průměrů a výběrových rozptylů normálních rozložení

Nechť $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry, S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly a $S_*^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ vážený průměr výběrových rozptylů. Pak platí:

a) Statistiky $M_1 - M_2$ a $S_*^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ jsou stochasticky nezávislé.

b) $U = \frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$.

(Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 známe.)

c) Jestliže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $K = \frac{(n_1+n_2-2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$.

(Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o neznámém společném rozptylu σ^2.)

d) Jestliže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $T = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

(Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné.)

e) $F = \dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

(Pivotová statistika F slouží k řešení úloh o σ_1^2 / σ_2^2.)

Důkaz:

ad a) Nebudeme provádět.

ad b) $M_1 - M_2$ je lineární kombinace náhodných veličin s normálním rozložením, má tedy normální rozložení s parametry

$E(M_1 - M_2) = \mu_1 - \mu_2$,

$D(M_1 - M_2) = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$.

U se získá standardizací $M_1 - M_2$.

ad c) $K_1 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$ a $K_2 = \dfrac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy

$K = K_1 + K_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$.

ad d) $U = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$, $K = \dfrac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$ jsou stochasticky nezávislé, protože

$M_1 - M_2$ a S_*^2 jsou stochasticky nezávislé. $T = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{K}{n_1 + n_2 - 2}}} = \dfrac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

ad e) $K_1 = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$ a $K_2 = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy

$$F = \frac{\frac{K_1}{n_1-1}}{\frac{K_2}{n_2-1}} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

Příklad: Nechť jsou dány dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení N(0,28; 0,09) a má rozsah 16, druhý pochází z rozložení N(0,25; 0,04) a má rozsah 25. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový průměr 1. výběru bude větší než výběrový průměr 2. výběru?

Řešení:

$$P(M_1 > M_2) = P(M_1 - M_2 > 0) = 1 - P(M_1 - M_2 \leq 0) = 1 - P\left(\frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) =$$

$$= 1 - P\left(U \leq \frac{-0,28 + 0,25}{\sqrt{\frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25}}}\right) = 1 - P(U \leq -0,35294) = 1 - \Phi(-0,35) = \Phi(0,35) = 0,63683$$

S pravděpodobností přibližně 63,7% je výběrový průměr 1. výběru větší než výběrový průměr 2. výběru.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistika M_1 - M_2 se podle bodu (a) řídí rozložením $N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$,

kde $\mu_1 - \mu_2 = 0{,}28 - 0{,}25 = 0{,}03$, $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{0{,}09}{16} + \frac{0{,}04}{25} = 0{,}007225$, tj. statistika M_1 - $M_2 \sim N(0{,}03;0{,}007225)$.

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme

= 1-INormal(0;0,03;sqrt(0,007225)).

V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,637934:

	1 Prom1
1	0,637934

Věta: Intervaly spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1-\mu_2$, σ_1^2/σ_2^2

Uvedeme přehled vzorců pro meze 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2.

a) Interval spolehlivosti pro $\mu_1-\mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 známe (využití pivotové statistiky U)

Oboustranný: $(d, h) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2},\ m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2}\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha},\ \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha}\right)$

b) Interval spolehlivosti pro $\mu_1-\mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné (využití pivotové statistiky T)

Oboustranný:

$(d, h) = \left(m_1 - m_2 - s_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),\ m_1 - m_2 + s_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(m_1 - m_2 - s_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2),\ \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, m_1 - m_2 + s_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\right)$

c) Interval spolehlivosti pro společný neznámý rozptyl σ^2 (využití pivotové statistiky K)

Oboustranný: $(d, h) = \left(\dfrac{(n_1+n_2-2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)}, \dfrac{(n_1+n_2-2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)} \right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(\dfrac{(n_1+n_2-2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)}, \infty \right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, \dfrac{(n_1+n_2-2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha}(n_1+n_2-2)} \right)$

d) Interval spolehlivosti pro podíl rozptylů $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (využití pivotové statistiky F)

Oboustranný: $(d, h) = \left(\dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(\dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)}, \infty \right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, \dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)} \right)$

Upozornění: Není-li v bodě (b) splněn předpoklad o shodě rozptylů, lze sestrojit aspoň přibližný $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro $\mu_1-\mu_2$.

V tomto případě má statistika T přibližně rozložení $t(\nu)$, kde počet stupňů volnosti $\nu = \dfrac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1} + \dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$. Není-li ν celé číslo, použijeme v tabulkách kvantilů Studentova rozložení lineární interpolaci.

Příklad: Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru (v g/l). Z první nádrže bylo odebráno 25 vzorků, z druhé nádrže 10 vzorků. Byly vypočteny realizace výběrových průměrů a rozptylů: $m_1 = 34{,}48$, $m_2 = 35{,}59$, $s_1^2 = 1{,}7482$, $s_2^2 = 1{,}7121$. Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$.

Řešení:

Úloha vede na vzorec (b) s využitím statistiky T. Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů a najdeme odpovídající kvantily Studentova rozložení:

$$s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{24 \cdot 1{,}7482 + 9 \cdot 1{,}7121}{33} = 1{,}7384 \text{ , } t_{0{,}975}(33) = 2{,}035$$

Dosadíme do vzorců pro dolní a horní mez intervalu spolehlivosti:

$$d = m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) =$$

$$= 34{,}48 - 35{,}59 - \sqrt{1{,}7384} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10}} \cdot 2{,}035 = -2{,}114$$

$$h = m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) =$$

$$= 34{,}48 - 35{,}59 + \sqrt{1{,}7384} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10}} \cdot 2{,}035 = -0{,}106$$

$-2{,}114$ g/l $< \mu_1 - \mu_2 < -0{,}106$ g/l s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

=34,48-35,59-sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt((1/25)+(1/10))*VStudent(0,975;33)

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

=34,48-35,59+

sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt((1/25)+(1/10))*VStudent(0,975;33)

	1 d	2 h
1	-2,11368	-0,10632

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy $-2{,}114$ g/l $< \mu_1 - \mu_2 < -0{,}106$ g/l.

Příklad: V předešlém příkladě nyní předpokládáme, že dané dva náhodné výběry pocházejí z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.

Řešení:

Úloha vede na vzorec (d) s využitím statistiky F.

$$d = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} = \frac{1{,}7482 / 1{,}7121}{F_{0{,}975}(24{,}9)} = \frac{1{,}7482 / 1{,}7121}{3{,}6142} = 0{,}28$$

$$h = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} = \frac{1{,}7482 / 1{,}7121}{F_{0{,}025}(24{,}9)} = \frac{1{,}7482 / 1{,}7121}{1 / F_{0{,}975}(9{,}24)} = \frac{1{,}7482 / 1{,}7121}{1 / 2{,}7027} = 2{,}76$$

$0{,}28 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}76$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

=(1,7482/1,7121)/VF(0,975;24;9)

(Funkce VF(x;ný;omega) počítá x-kvantil Fisherova – Snedecorova rozložení F(ný, omega).)

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

=(1,7482/1,7121)/VF(0,025;24;9)

	1 d	2 h
1	0,282521	2,759698

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy platí: $0{,}28 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 2{,}76$.

Definice: Jednotlivé typy testů o parametrických funkcích μ_1-μ_2, σ_1^2/σ_2^2

a) Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ_1^2, σ_2^2 známe. Nechť c je konstanta.

Test H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá dvouvýběrový z-test.

b) Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.

Test H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá dvouvýběrový t-test.

c) Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Test H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ se nazývá F-test.

Provedení testů o parametrických funkcích $\mu_1-\mu_2$, σ_1^2/σ_2^2 pomocí kritického oboru

a) Provedení dvouvýběrového z-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \dfrac{(M_1 - M_2) - c}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$.

b) Provedení dvouvýběrového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \dfrac{(M_1 - M_2) - c}{S_* \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$. Kritický obor má tvar:
$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \infty)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2), \infty)$.

c) Provedení F-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$. Stanovíme kritický obor W. Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Kritický obor má tvar:

$$W = \left(0, F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\rangle \cup \left\langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right).$$

Levostranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$. Kritický obor má tvar: $W = \left(0, F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$. Kritický obor má tvar: $W = \left\langle F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right)$.

Příklad: V restauraci "U bílého koníčka" měřili ve 20 případech čas obsluhy zákazníka. Výsledky v minutách: 6, 8, 11, 4, 7, 6, 10, 6, 9, 8, 5, 12, 13, 10, 9, 8, 7, 11, 10, 5. V restauraci "Zlatý lev" bylo dané pozorování uskutečněno v 15 případech s těmito výsledky: 9, 11, 10, 7, 6, 4, 8, 13, 5, 15, 8, 5, 6, 8 ,7. Za předpokladu, že uvedené hodnoty pocházejí ze dvou normálních rozložení, na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnoty doby obsluhy jsou v obou restauracích stejné.

Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Je to úloha na dvouvýběrový t-test. Před provedením tohoto testu je však nutné pomocí F-testu ověřit shodu rozptylů. Na hladině významnosti 0,05 tedy testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Nejprve vypočteme $m_1 = 8{,}25$, $m_2 = 8{,}13$, $s_1^2 = 6{,}307$, $s_2^2 = 9{,}41$, $s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{19 \cdot 6{,}307 + 14 \cdot 9{,}41}{33} = 7{,}623$. Podle vzorce (c) vypočteme realizaci testové statistiky:

$t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6{,}307}{9{,}41} = 0{,}6702$. Stanovíme kritický obor:

$$W = \langle 0, F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\rangle \cup \langle F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), \infty) = \langle 0, F_{0,025}(19,14)\rangle \cup \langle F_{0,975}(19,14), \infty) =$$

$$= \langle 0, 1/F_{0,975}(14,19)\rangle \cup \langle F_{0,975}(19,14), \infty) = \langle 0, 1/2{,}649\rangle \cup \langle 2{,}8607, \infty) = \langle 0; 0{,}3778\rangle \cup \langle 2{,}8607, \infty)$$

Protože se testová statistika nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Rozptyly tedy můžeme považovat za shodné.

Nyní se vrátíme k dvouvýběrovému t-testu. Podle vzorce (b) vypočteme realizaci testové statistiky:

$t_0 = \frac{m_1 - m_2 - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{8{,}25 - 8{,}13}{\sqrt{7{,}623}\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}}} = 0{,}124$. Stanovíme kritický obor:

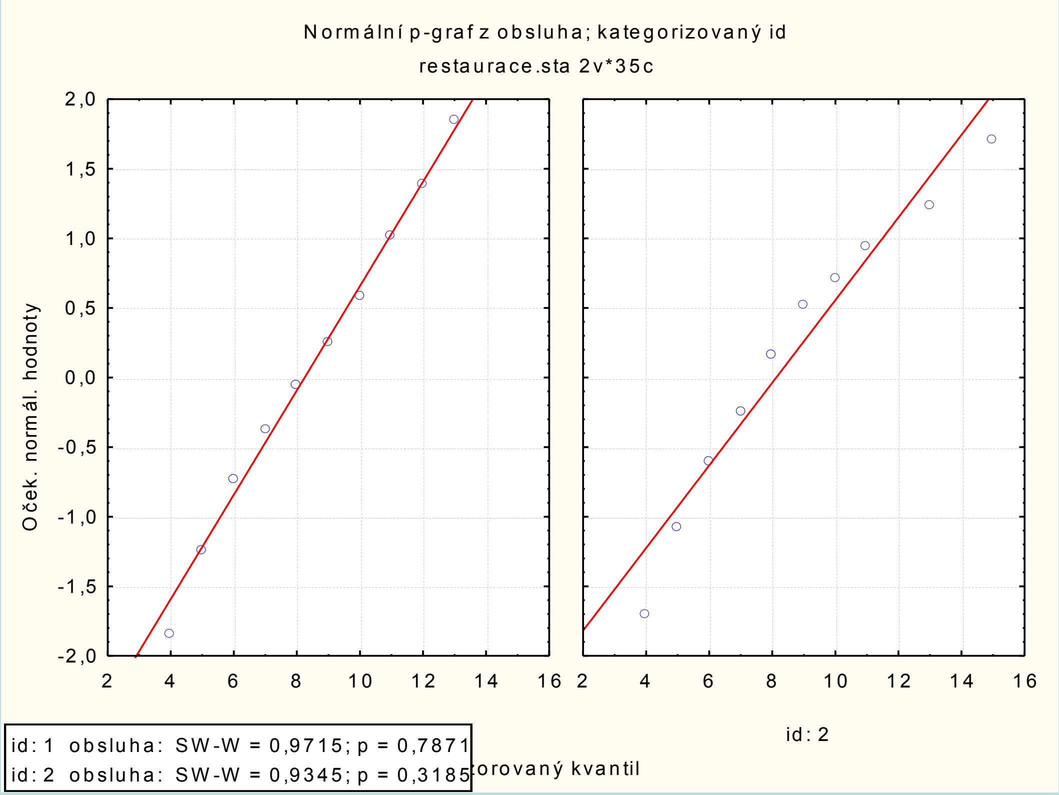
$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2), \infty) = (-\infty, -t_{0,975}(33)\rangle \cup \langle t_{0,975}(33), \infty) = (-\infty, -2{,}035\rangle \cup \langle 2{,}035, \infty)$$

Protože testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných a 35 případech. První proměnnou nazveme OBSLUHA, druhou ID. Do proměnné OBSLUHA napíšeme nejprve doby obsluhy v první restauraci a poté doby obsluhy ve druhé restauraci. Do proměnné ID, která slouží k rozlišení první a druhé restaurace, napíšeme 20 krát jedničku a 15 krát dvojku.

Pomocí NP-grafu ověříme normalitu dat v obou skupinách. Grafy – 2D Grafy – Normální pravděpodobnostní grafy – zaškrtneme S-W test - Proměnné OBSLUHA, OK, Kategorizovaný – Kategorie X, zaškrtneme Zapnuto, Změnit proměnnou – ID, OK. Dostaneme graf



V obou případech se tečky odchylují od přímky jenom málo a p-hodnoty S-W testu převyšují 0,05. Předpoklad o normálním rozložení dat v obou skupinách je oprávněný.

Nyní provedeme dvouvýběrový t-test současně s testem o shodě rozptylů:

Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK, Proměnné –Závislé proměnné OBSLUHA, Grupovací proměnná ID – OK.

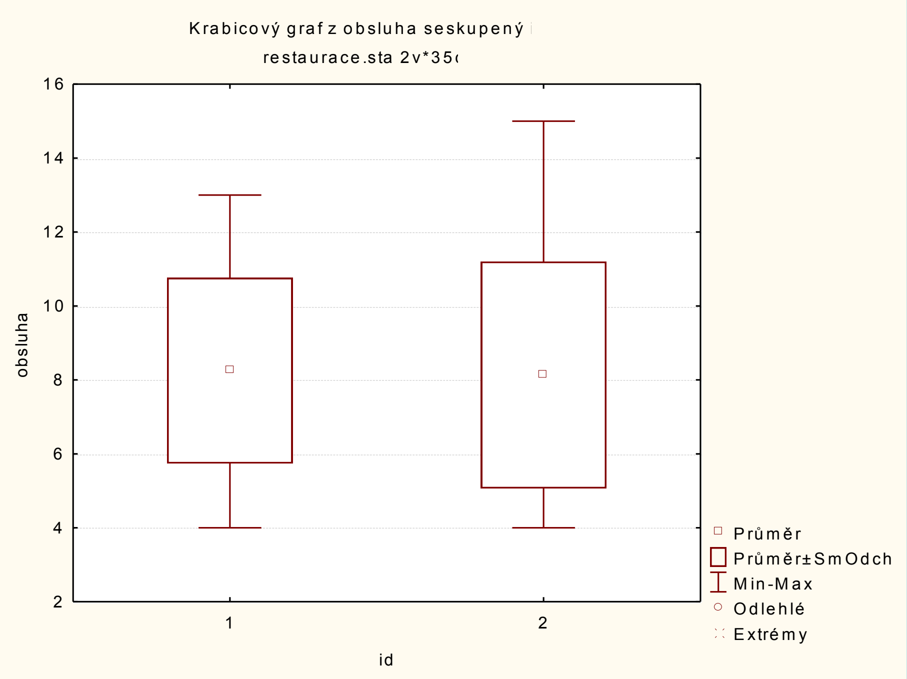
Po kliknutí na tlačítko Souhrn dostaneme tabulku

	t-testy; grupováno: ID (restaurace) Skup. 1: 1 Skup. 2: 2										
Proměnná	Průměr 1	Průměr 2	t	sv	p	Poč.plat 1	Poč.plat. 2	Sm.odch. 1	Sm.odch. 2	F-poměr rozptyly	p rozptyly
OBSLUHA	8,250000	8,133333	0,123730	33	0,902279	20	15	2,510504	3,067495	1,492952	0,410440

Vidíme, že testová statistika pro test shody rozptylů se realizuje hodnotou 1,492952 (je to převrácená hodnota k číslu 0,6702, které jsme vypočítali při ručním postupu), odpovídající p-hodnota je 0,41044, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů. (Upozornění: v případě zamítnutí hypotézy o shodě rozptylů je zapotřebí v tabulce t-testu pro nezávislé vzorky dle skupin zaškrtnout volbu Test se samostatnými odhady rozptylu.)

Dále z tabulky plyne, že testová statistika pro test shody středních hodnot se realizuje hodnotou 0,12373, počet stupňů volnosti je 33, odpovídající p-hodnota 0,902279, tedy hypotézu o shodě středních hodnot nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5% se neprokázal rozdíl ve středních hodnotách dob obsluhy v restauracích "U bílého koníčka" a „Zlatý lev“.

Tabulku ještě doplníme krabicovými diagramy. Na záložce Detaily zaškrtneme krabicový graf a vybereme volbu Průměr/SmOdch/Min-Max.



Z grafu je vidět, že průměrná doba obsluhy v první restauraci je nepatrně delší a má menší variabilitu než ve druhé restauraci. Extrémní ani odlehlé hodnoty se zde nevyskytují.

Nepovinná část: Cohenův koeficient věcného účinku – doplnění významu dvouvýběrového t-testu:

Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení N(μ_1, σ^2) a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení N(μ_2, σ^2), přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.

Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$. Označme m_1, m_2 realizace výběrových průměrů hodnot dané veličiny v těchto dvou skupinách, s_1^2, s_2^2 realizace výběrových rozptylů a $s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$ realizaci váženého průměru výběrových rozptylů.

Cohenův koeficient d vypočteme podle vzorce: $d = \frac{|m_1 - m_2|}{s_*}$.

Tento koeficient slouží k posouzení velikosti rozdílu průměrů, který je standardizován pomocí odmocniny z váženého průměru výběrových rozptylů. Jedná se o tzv. věcnou významnost neboli velikost účinku skupiny na variabilitu hodnot sledované náhodné veličiny. Velikost účinku hodnotíme podle následující tabulky:

Hodnota d	účinek
aspoň 0,8	velký
mezi 0,5 až 0,8	střední
mezi 0,2 až 0,5	malý
pod 0,2	zanedbatelný

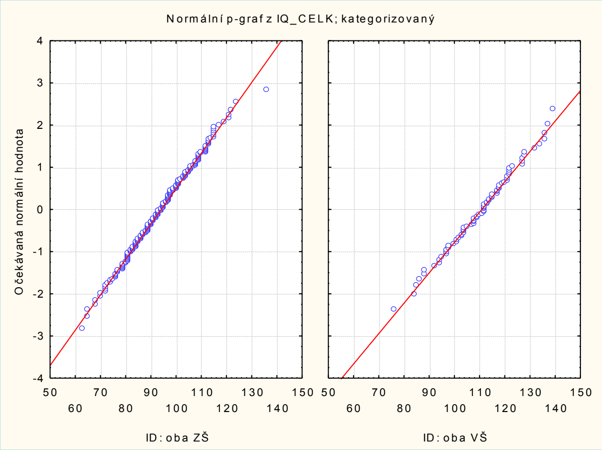
(Uvedené hodnoty nemají samozřejmě absolutní platnost, posouzení, jaký účinek považujeme za velký či malý, závisí na kontextu.)

Je zapotřebí si uvědomit, že při dostatečně velkých rozsazích náhodných výběrů i malý rozdíl ve výběrových průměrech způsobí zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti α, i když z věcného hlediska tak malý rozdíl nemá význam. Naopak, máme-li výběry malých rozsahů, pak i značně velký rozdíl ve výběrových průměrech nemusí vést k zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti α.

Příklad:

Máme k dispozici údaje o celkovém IQ 856 žáků ZŠ. Zajímáme se jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají pouze základní vzdělání (je jich 296) a jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají vysokoškolské vzdělání (těch je 75). Na hladině významnosti 0,05 budeme testovat hypotézu, že střední hodnota celkového IQ je v obou skupinách stejná a také vypočteme Cohenův koeficient věcného účinku.

Řešení: Normalitu dat v obou skupinách posoudíme pomocí N-P plotu:



Vzhled N- P plotů v obou skupinách podporuje domněnku o normalitě dat.

Provedeme dvouvýběrový t-test:

Proměnná	t-testy; grupováno: ZŠ a VŠ (IQ) Skup. 1: oba ZŠ Skup. 2: oba VŠ										
	Průměr oba ZŠ	Průměr oba VŠ	t	sv	p	Poč.plat oba ZŠ	Poč.plat. oba VŠ	Sm.odch. oba ZŠ	Sm.odch. oba VŠ	F-poměr Rozptyly	p Rozptyly
IQ_CELK	94,13851	110,9067	-10,6295	369	0,000000	296	75	11,82604	13,60164	1,322829	0,110124

Hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05, protože odpovídající p-hodnota je velmi blízká 0 (hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05, p-hodnota F-testu je 0,110124, což je větší než 0,05).

Krabicový diagram:

Vidíme, že průměrné celkové IQ dětí v 1. skupině je 94,1, zatímco ve 2. skupině 110,9. Vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ posoudíme pomocí Cohenova koeficientu.

	1 n1	2 n2	3 m1	4 m2	5 s1	6 s2	7 d
1	296	75	94,13851	110,9067	11,82604	13,60164	1,374117

Cohenův koeficient nabývá hodnoty 1,37, tudíž vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ lze považovat za velký.

Věta: Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů alternativních rozložení

Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry.

Pak statistika $U = \dfrac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\dfrac{\vartheta_1(1-\vartheta_1)}{n_1} + \dfrac{\vartheta_2(1-\vartheta_2)}{n_2}}} \approx N(0,1)$.

Důkaz: Analogicky jako v případě jednoho náhodného výběru z alternativního rozložení.

Věta: Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2},\quad h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2}$$

Důkaz: Pokud rozptyl $D(M_i) = \dfrac{\vartheta_i(1-\vartheta_i)}{n_i}$ nahradíme odhadem $\dfrac{M_i(1-M_i)}{n_i}$, i = 1, 2, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall\, \vartheta_1 - \vartheta_2 \in \Xi:\ 1 - \alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\dfrac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \dfrac{M_2(1-M_2)}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$P\left(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2} < \vartheta_1 - \vartheta_2 < M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2}\right)$$

Příklad: Management supermarketu vyhlásil týden slev a sledoval, zda toto vyhlášení má vliv na podíl větších nákupů (nad 500 Kč). Na základě náhodného výběru 200 zákazníků v týdnu bez slev bylo zjištěno 97 velkých nákupů, zatímco v týdnu se slevou z 300 náhodně vybraných zákazníků učinilo velký nákup 162 zákazníků. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností uskutečnění většího nákupu v týdnu bez slevy a v týdnu se slevou.

Řešení:

Zavedeme náhodnou veličinu X_{1i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu bez slevy i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 200. Náhodné veličiny $X_{1,1}, \dots, X_{1,200}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_1)$. Dále zavedeme náhodnou veličinu X_{2i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu se slevou i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 300. Náhodné veličiny $X_{2,1}, \dots, X_{2,300}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_2)$.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200 = 0,485$, $m_2 = 162/300 = 0,54$.

Ověření podmínek $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2, tedy 97.(1-97/200) = 49,955 > 9, 162.(1-162/300) = 74,52 > 9.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} - \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1,96 = -0,1443$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1,96 = 0,0343$$

Zjistili jsme tedy, že s pravděpodobností přibližně 0,95: $-0,1443 < \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0,0343$.

Věta: Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení A(ϑ_1) a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení A(ϑ_2) a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = c$ proti alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 \neq c$

(resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < c$ resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 > c$).

Testovým kritériem je statistika

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2 - c}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}},$$

která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$

(resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$ resp. $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ lze provést též pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Poznámka: Postup při testování hypotézy $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$

Je-li c = 0, pak označme $M_* = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2}$ vážený průměr výběrových průměrů. Jako testová statistika slouží

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1 - M_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$ resp. $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$).

Testová statistika T_0 vznikne standardizací statistiky $M_1 - M_2$, kde neznámé parametry ϑ_1, ϑ_2 nahradíme společným odhadem M_*.

Příklad: Pro údaje z příkladu o slevách v supermarketu testujte na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu, že týden se slevami nezvýší pravděpodobnost uskutečnění většího nákupu.

Řešení:

Testujeme hypotézu $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti levostranné alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < 0$ na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200$, $m_2 = 162/300$, $m_* = (97 + 162)/500 = 0{,}518$.

Podmínky dobré aproximace byly ověřeny v předešlém příkladu.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti:

Pro levostrannou alternativu používáme pravostranný interval spolehlivosti:

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1{,}645 = 0{,}02$$

Protože číslo $c = 0$ je obsaženo v intervalu $(-\infty, 0{,}02\rangle$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{97}{200} - \frac{162}{300}}{\sqrt{0{,}518(1-0{,}518)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300}\right)}} = -1{,}2058\ .$$

Kritický obor je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle = (-\infty, -u_{0,95}\rangle = (-\infty, -1{,}645\rangle$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí p-hodnoty:

Pro levostrannou alternativu se p-hodnota počítá podle vzorce $p = P(T_0 \le t_0)$:

$$p = P(T_0 \le -1{,}2058) = \Phi(-1{,}2058) = 1 - \Phi(1{,}2058) = 1 - 0{,}8861 = 0{,}1139$$

Protože p-hodnota je větší než 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,485, do políčka N1 napíšeme 200, do políčka P 2 napíšeme 0,54, do políčka N2 napíšeme 300 – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1142, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.