# 11. Úvod do časových řad

**Pojem časové řady**: Časovou řadou rozumíme řadu hodnot $y_{t_1}, \ldots, y_{t_n}$ určitého ukazatele uspořádanou podle přirozené časové posloupnosti $t_1 < \ldots < t_n$. Jsou-li časové intervaly $(t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$ stejně dlouhé (ekvidistantní), zjednodušeně zapisujeme časovou řadu jako $y_1, \ldots, y_n$. Přitom ukazatel je veličina, která charakterizuje nějaký sociálně ekonomický jev v určitém prostoru a v určitém čase (okamžiku či intervalu).

## Druhy časových řad

a) Časová řada okamžiková: příslušný ukazatel udává, kolik jevů existuje v daném časovém okamžiku (např. počet obyvatelstva k určitému dnu).
b) Časová řada intervalová: příslušný ukazatel udává, kolik jevů vzniklo či zaniklo v určitém časovém intervalu (např. počet sňatků během roku). Nejsou-li jednotlivé časové intervaly ekvidistantní, musíme provést očištění časové řady od důsledků kalendářních variací.

**Příklad**: Máme k dispozici údaje o tržbě obchodní organizace (v tis. Kč) v jednotlivých měsících roku 1995: 2400, 2134, 2407, 2445, 2894, 3354, 3515, 3515, 3225, 3063, 2694, 2600. Vypočtěte očištěné údaje.

**Řešení**: Průměrná délka měsíce je 365/12 dne. Očištěná hodnota pro leden je tedy $y_1^{(o)} = 2400 \cdot \frac{365}{12 \cdot 31} = 2354{,}84$, pro únor $y_2^{(o)} = 2134 \cdot \frac{365}{12 \cdot 28} = 2318{,}18$. Pro ostatní měsíce analogicky dostaneme 2361,71; 2478,96; 2839,54; 3400,58, 3448,86; 3448,86; 3269,79; 3005,36; 2731,42; 2551,08.

## Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných: trzba, dm (délky jednotlivých měsíců) a ot (očištěná tržba) a 12 případech. Do proměnné trzba zapíšeme zjištěné hodnoty. Do proměnné dm vložíme délky jednotlivých měsíců, tj. 31, 28, 30, …, 31. Do Dlouhého jména proměnné ot napíšeme =trzba*365/(12*dm).

| | 1<br>trzba | 2<br>dm | 3<br>ot |
|---|---|---|---|
| 1 | 2400 | 31 | 2354,839 |
| 2 | 2134 | 28 | 2318,185 |
| 3 | 2407 | 31 | 2361,707 |
| 4 | 2445 | 30 | 2478,958 |
| 5 | 2894 | 31 | 2839,543 |
| 6 | 3354 | 30 | 3400,583 |
| 7 | 3515 | 31 | 3448,858 |
| 8 | 3515 | 31 | 3448,858 |
| 9 | 3225 | 30 | 3269,792 |
| 10 | 3063 | 31 | 3005,363 |
| 11 | 2694 | 30 | 2731,417 |
| 12 | 2600 | 31 | 2551,075 |

## Grafické znázornění časové řady

a) Okamžikovou časovou řadu graficky znázorňujeme pomocí spojnicového diagramu. Na vodorovnou osu vynášíme časové okamžiky $t_1, ..., t_n$, na svislou osu odpovídající hodnoty $y_1, ..., y_n$. Dvojice bodů $(t_i, y_i)$, $i = 1, ..., n$ spojíme úsečkami.

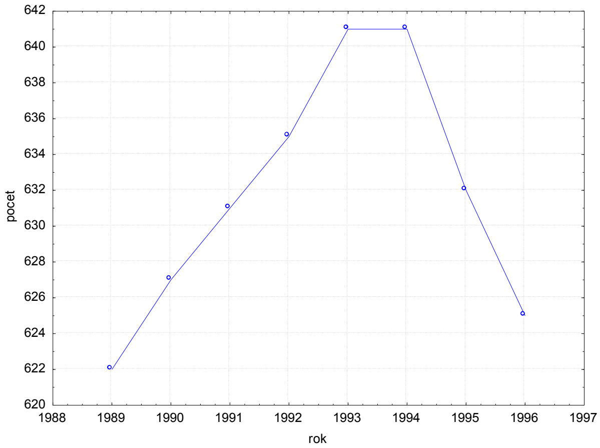
**Příklad**: Časová řada obsahuje údaje o počtu zaměstnanců určité akciové společnosti v letech 1989 – 1996 vždy k 31.12.

| 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 622 | 627 | 631 | 635 | 641 | 641 | 632 | 625 |

Znázorněte tuto časovou řadu graficky.

**Řešení pomocí systému STATISTICA:**

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných nazvaných rok a pocet a 8 případech.
Grafy – Bodové grafy – odškrtneme Lineární proložení – Proměnné X – rok, Y – počet – OK – OK. 2x klikneme na pozadí grafu – vybereme Graf: obecné – zaškrtneme Spojnice – OK.




b) Intervalovou časovou řadu nejčastěji znázorňujeme sloupkovým diagramem. Je to soustava obdélníků, kde šířka obdélníku je rovna délce intervalu a výška odpovídá hodnotě ukazatele v daném intervalu. Ke znázornění intervalové časové řady lze použít i spojnicový diagram, přičemž na vodorovnou osu vynášíme středy příslušných intervalů.

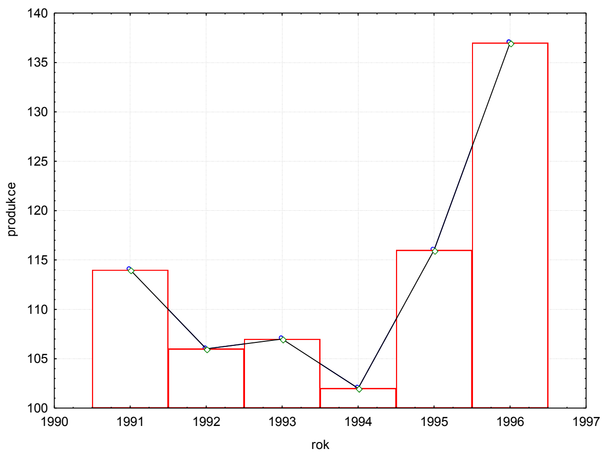
**Příklad:** Máme k dispozici údaje o produkci určitého podniku (v tisících výrobků) v letech 1991-1996.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 |
| 114 | 106 | 107 | 102 | 116 | 137 |

Znázorněte tuto časovou řadu graficky.

### Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných nazvaných rok a produkce a 6 případech.
Grafy – Bodové grafy – odškrtneme Lineární proložení – Proměnné X – rok, Y – produkce – OK – OK. 2x klikneme na pozadí grafu – vybereme Graf: obecné – zaškrtneme Spojnice – Přidat nový graf – typ Sloupcový graf – OK. Do sloupců označených jako Nový1, Nový2 okopírujeme hodnoty proměnných rok a produkce. Ve Všech možnostech: Sloupce upravíme šířku sloupce na 1.




## Popisné charakteristiky časových řad

### Průměr okamžikové časové řady

Nejprve vypočteme průměry pro jednotlivé dílčí intervaly $(t_1, t_2)$, $(t_2, t_3)$, ..., $(t_{n-1}, t_n)$: $\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \dots, \frac{y_{n-1}+y_n}{2}$. Jsou-li všechny tyto intervaly stejně dlouhé, vypočteme prostý chronologický průměr okamžikové časové řady:

$$\bar{y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{y_1}{2}+\sum_{i=2}^{n-1}y_i+\frac{y_n}{2}\right).$$

Nemají-li intervaly stejnou délku, vypočteme $d_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$ a použijeme vážený chronologický průměr okamžikové časové řady:

$$\bar{y} = \frac{1}{\sum_{i=2}^{n} d_i}\sum_{i=2}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\cdot d_i\,.$$

**Příklad:** Časová řada vyjadřuje počet obyvatelstva ČSSR (v tisících) v letech 1965 až 1974 vždy ke dni 31.12.

| Rok | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| počet | 14194 | 14271 | 14333 | 14387 | 14443 | 14345 | 14419 | 14576 | 14631 | 14738 |

Charakterizujte tuto časovou řadu chronologickým průměrem.

**Řešení:** $\bar{y} = \frac{1}{9}\left(\frac{14194}{2} + 14271 + \ldots + 14631 + \frac{14738}{2}\right) = 14430$.

**Výpočet pomocí systému STATISTICA:**
Vytvoříme datový soubor o 11 proměnných a jednom případu. Do prvních 10 proměnných vložíme zjištěné hodnoty, do Dlouhého jména poslední proměnné napíšeme
=(v1/2+sum(v2:v9)+v10/2)/9
Dostaneme výsledek 14430,11.

Průměr intervalové časové řady

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

**Příklad:** Vypočtěte průměrnou hodnotu roční časové řady HDP ČR (v miliardách Kč) v letech 1994 až 2000.

| 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1303,6 | 1381,1 | 1447,7 | 1432,8 | 1401,3 | 1390,6 | 1433,8 |

**Řešení:** $\bar{y} = \frac{1}{7}(1303{,}6 + \ldots + 1433{,}8) = 1398{,}7$.

**Výpočet pomocí systému STATISTICA:**
Použijeme Popisné statsitiky z nabídky Základní statistiky/tabulky.

**Dynamické charakteristiky časových řad**

**Absolutní přírůstky**

1. diference: $\Delta_1 y_i = y_i - y_{i-1}, i = 2,\ldots,n$

2. diference: $\Delta_2 y_i = \Delta_1 y_i - \Delta_1 y_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}, i = 3,\ldots,n$

atd.

(Diferencování má velký význam při odhadu trendu časové řady regresními metodami.)

Průměrný absolutní přírůstek: $\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \Delta_1 y_i}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$

## Relativní přírůstek

$$\delta_i = \frac{\Delta_i}{y_{i-1}}, i = 2, \ldots, n$$

(Relativní přírůstek po vynásobení 100 udává, o kolik procent se změnila hodnota v čase $t_i$ oproti času $t_{i-1}$.)

## Koeficient růstu (tempo růstu)

$$k_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}, i = 2, \ldots, n$$

(Koeficient růstu po vynásobení 100 udává, na kolik procent hodnoty v čase $t_{i-1}$ vzrostla či poklesla hodnota v čase $t_i$.)

## Průměrný koeficient růstu

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

## Průměrný relativní přírůstek

$$\bar{\delta} = \bar{k} - 1$$

**Příklad**: Pro časovou řadu HDP ČR v letech 1994 až 2000 (v miliardách Kč) vypočtěte základní charakteristiky dynamiky a graficky znázorněte relativní přírůstky a koeficienty růstu.

**Řešení**:

| rok | HDP | $\Delta y_i$ | $k_i$ | $\delta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1994 | 1303,6 | x | x | x |
| 1995 | 1381,1 | 1381,1-1303,6=77,5 | 1381,1/1303,6=1,059 | 77,5/1303,6=0,059 |
| 1996 | 1447,7 | 1447,7-1381,1=66,6 | 1447,7/1381,1=1,048 | 66,6/1381,10,048 |
| 1997 | 1432,8 | 1432,8-1447,7=-14,7 | 1432,8/1447,7=0,990 | -14,7/1447,7=-0,010 |
| 1998 | 1401,3 | 1401,3-1432,8=-31,5 | 1401,3/1432,8=0,978 | -31,5/1432,8=-0,022 |
| 1999 | 1390,6 | 1390,6-1401,3=-10,7 | 1390,6/1401,3=0,992 | -10,7/1401,3=-0,008 |
| 2000 | 1433,8 | 1433,8-1390,6=43,2 | 1433,8/1390,6=1,031 | 43,2/1390,6=0,031 |

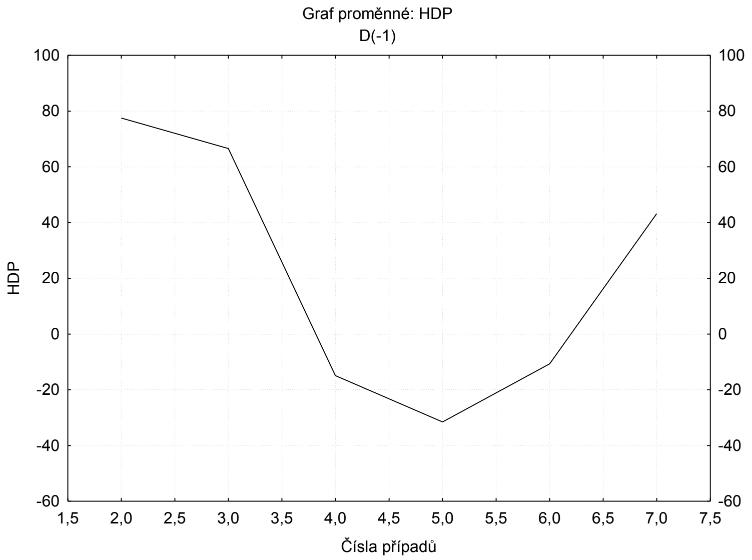
Průměrný absolutní přírůstek: $\bar{\Delta} = \frac{1433{,}8 - 1303{,}6}{6} = 21{,}7$, tzn., že v období 1994 – 2000 rostl HDP průměrně o 21,7 miliard Kč ročně.

Průměrný koeficient růstu: $\bar{k} = \sqrt[6]{\frac{1433{,}8}{1303{,}6}} = 1{,}016$, tzn., že v období 1994 – 2000 rostl HDP průměrně o 1,6% ročně.

## Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o dvou proměnných a sedmi případech. První proměnnou nazveme ROK, druhou HDP.

Výpočet 1. diferencí: $\Delta = y_i - y_{i-}$ pro i = 2,...,n
Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Časové řady/predikce – Proměnné Y – OK – OK (transformace, autokorelace, kříž. korelace, grafy) – Oddělit-sloučit - OK (transformovat vybrané řady) – vykreslí se graf.




Vrátíme se do Transformace proměnných – Uložit proměnné. Otevře se nové datové okno, kde v proměnné HDP_1 jsou uloženy 1. diference.

| | HDP | HDP_1 |
|---|---|---|
| 1 | 1303,600 | |
| 2 | 1381,100 | 77,500 |
| 3 | 1447,700 | 66,600 |
| 4 | 1432,800 | -14,900 |
| 5 | 1401,300 | -31,500 |
| 6 | 1390,600 | -10,700 |
| 7 | 1433,800 | 43,200 |

Výpočet relativních přírůstků: $\delta = \frac{\Delta}{y_{i-}}$ pro i = 2,...,n

Vrátíme se do Transformace proměnných – označíme proměnnou, kterou chceme transformovat (HDP) – vybereme Posun – OK, (Transformovat vybrané řady) – vykreslí se graf.
Vrátíme se do Transformace proměnných – Uložit proměnné. Tato transformovaná veličina se uloží do tabulky pod názvem HDP_1 (proměnná s 1. diferencemi se přejmenuje na HDP_2). Přidáme novou proměnnou RP a do jejího Dlouhého jména napíšeme vzorec =HDP_2/HDP_1.

Výpočet koeficientů růstu: $k_i = \frac{y_i}{y_{i-}}$ pro i = 2,...,n

Do tabulky přidáme proměnnou KR a do jejího Dlouhého jména napíšeme vzorec =HDP/HDP_1.
Získáme tabulku

| | HDP | HDP_2 | HDP_1 | RP | KR |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1303,600 | | | | |
| 2 | 1381,100 | 77,500 | 1303,600 | 0,059451 | 1,059451 |
| 3 | 1447,700 | 66,600 | 1381,100 | 0,048222 | 1,048222 |
| 4 | 1432,800 | -14,900 | 1447,700 | -0,010292 | 0,989708 |
| 5 | 1401,300 | -31,500 | 1432,800 | -0,02198 | 0,978015 |
| 6 | 1390,600 | -10,700 | 1401,300 | -0,00764 | 0,992364 |
| 7 | 1433,800 | 43,200 | 1390,600 | 0,031066 | 1,031066 |
| 8 | | | 1433,800 | | |

Pomocí Grafy - 2D Grafy – Spojnicové grafy (Proměnné) vykreslíme průběh relativních přírůstků a koeficientů růstu.

Graf relativních přírůstků


Graf koeficientů růstu


Průměrný absolutní přírůstek a průměrný koeficient růstu vypočteme na kalkulačce pomocí vzorců $\Delta = \frac{1433,8 - 1303,6}{6} = 21,7$ a $\bar{k} = \sqrt{\frac{1433,8}{1303,6}} = 1,016$.

## Aditivní model časové řady

Předpokládejme, že pro časovou řadu $y_1, \ldots, y_n$ platí model

$y_t = f(t) + \varepsilon_t$, $t = 1, \ldots, n$, kde

f(t) je neznámá trendová funkce (trend), kterou považujeme za systematickou (deterministickou) složku časové řady (popisuje hlavní tendenci dlouhodobého vývoje časové řady),
$\varepsilon_t$ je náhodná složka časové řady zahrnující odchylky od trendu. Náhodná složka splňuje předpoklady

$E(\varepsilon_t) = 0$,
$D(\varepsilon_t) = \sigma^2$,
$C(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$,
$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ (říkáme, že $\varepsilon_t$ je bílý šum).

### Cíl regresní analýzy trendu

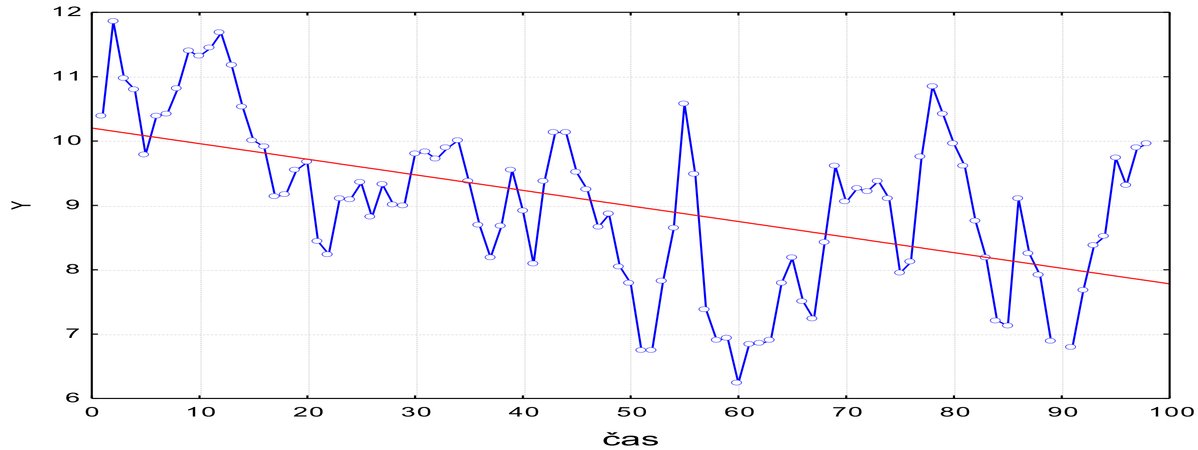
Regresní analýza trendu má objasnit vztah mezi závisle proměnnou veličinou Y a časem t. Předpokládáme, že trend f(t) závisí (lineárně či nelineárně) na neznámých parametrech $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ a známých funkcích $\varphi_0(t), \varphi_1(t), ...., \varphi_k(t)$, které již neobsahují žádné neznámé parametry, tj. $f(t) = g(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k; \varphi_0(t), \varphi_1(t), ...., \varphi_k(t))$. Odhady $b_0, b_1, ..., b_k$ neznámých parametrů $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ lze získat např. metodou nejmenších čtverců a pak vyjádřit odhad $\hat{f}(t)$ neznámého trendu v bodě t pomocí odhadů $b_0, b_1, ..., b_k$ a funkcí $\varphi_0(t), \varphi_1(t), ...., \varphi_k(t)$, tj.
$\hat{f}(t) = g(b_0, b_1, ..., b_k; \varphi_0(t), \varphi_1(t), ...., \varphi_k(t))$.

### Nejdůležitější typy trendových funkcí

Volba typu trendové funkce se provádí
- na základě teoretických znalostí a zkušeností se zkoumanou veličinou $Y_t$
- pomocí grafu časové řady
- pomocí informativních testů založených na jednoduchých charakteristikách časové řady

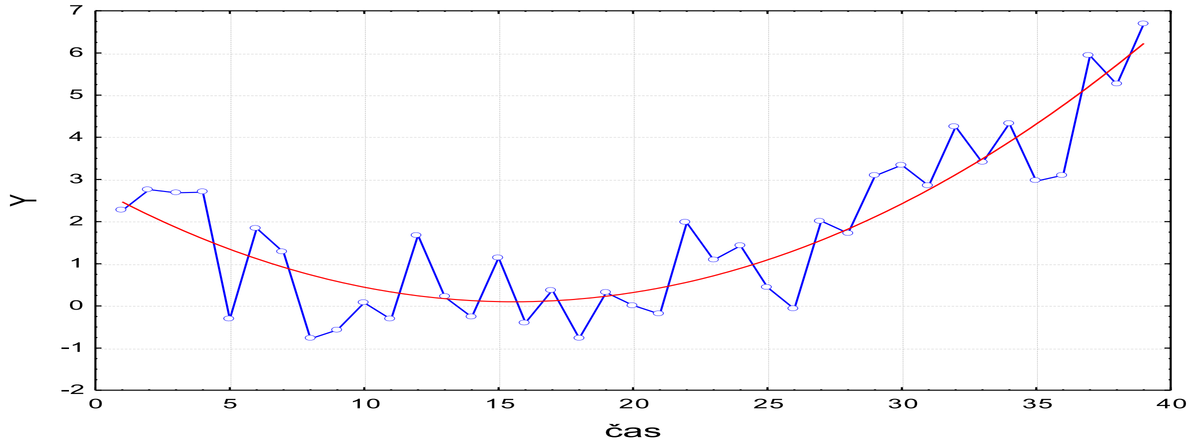
a) Lineární trend
Analytické vyjádření: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t$
Informativní test: 1. diference jsou přibližně konstantní.

Příklad lineárního trendu:




b) Kvadratický trend
Analytické vyjádření: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$
Informativní test: 1. diference mají přibližně lineární trend, 2. diference jsou přibližně konstantní.

Příklad kvadratického trendu:



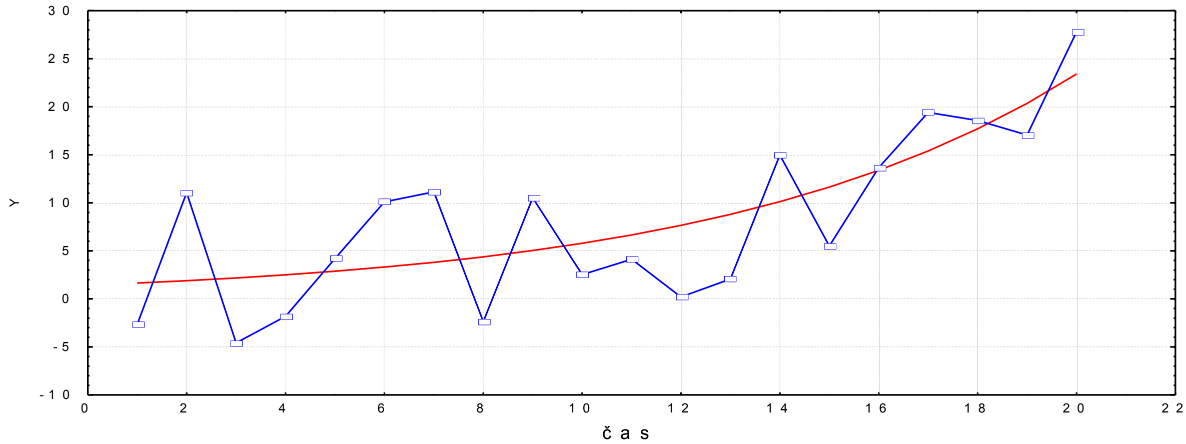

c) Exponenciální trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \beta\,\beta$ .

Model lze linearizovat logaritmickou transformací: $\ln f(t) = n\beta + \ln\beta$

Informativní test: koeficienty růstu jsou přibližně konstantní.

Příklad exponenciálního trendu:

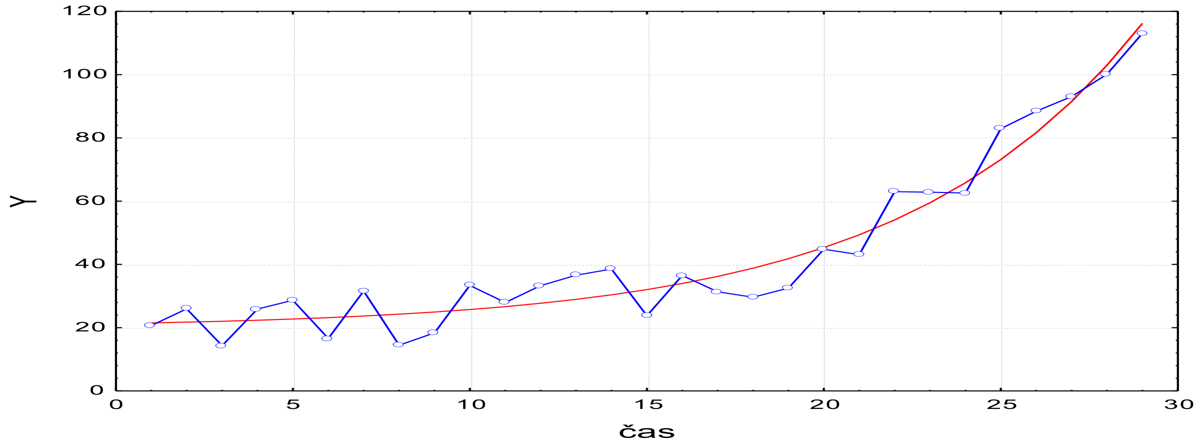



d) Modifikovaný exponenciální trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \alpha \quad \beta$ .

Informativní test: řada podílů sousedních 1. diferencí je přibližně konstantní.

Příklad modifikovaného exponenciálního trendu

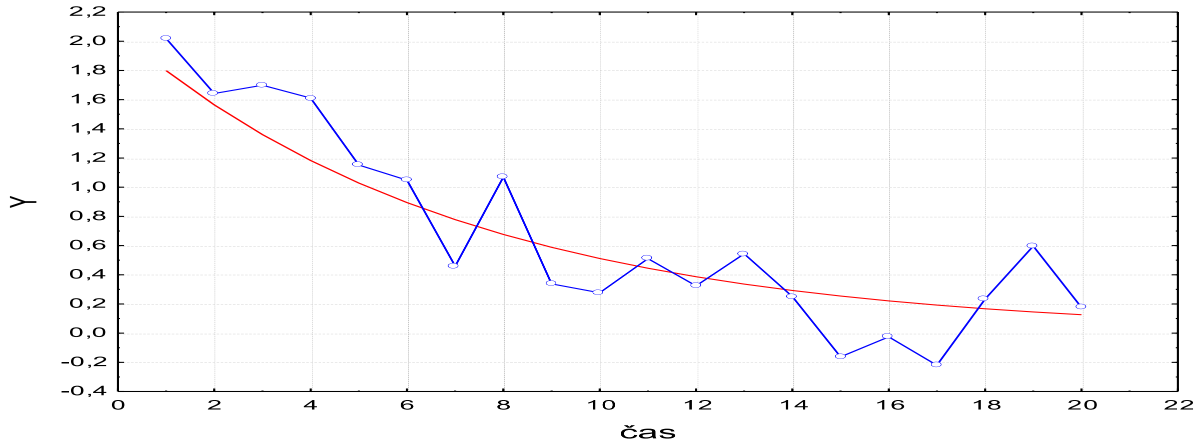



e) Logistický trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \dfrac{\alpha}{1+ \quad \beta}$

Informativní test: průběh 1. diferencí je podobný Gaussově křivce a podíly $\dfrac{1/y_{t+} \; - \; /y_{t+}}{1/y_{t+} \; - \; /y_{t}}$ jsou přibližně konstantní.

Příklad logistického trendu:

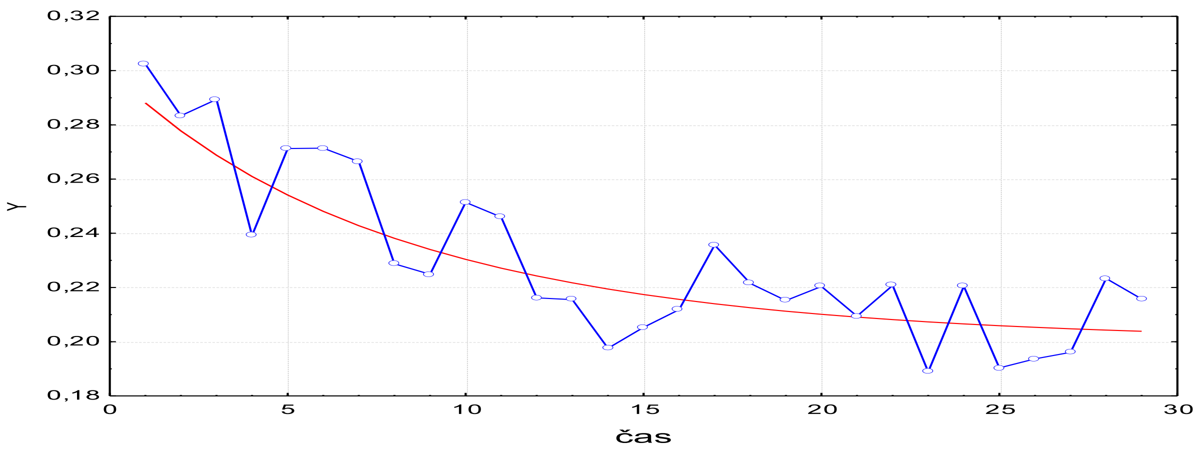



f) Gompertzova křivka

Analytické vyjádření: $f(t) = \iota\beta$

Informativní test: podíly $\dfrac{\ln y_{t+} \; - \; n\, y_{t+}}{\ln y_{t+} \; - \; n\, y_{t}}$ jsou přibližně konstantní.

Příklad Gompertzovy křivky




Modely (a), (b), (c) jsou lineární nebo se dají linearizovat a odhady parametrů získáme metodou nejmenších čtverců. Modely (d), (e), (f) jsou nelineární a odhady parametrů se získávají speciálními numerickými metodami.

## Orientační ověřování kvality modelu

- Index determinace (tj. podíl vysvětlené a celkové variability závisle proměnné veličiny) by měl být blízký 1.
- Body grafu $(y_t, \hat{f}(t))$, t = 1, 2, ..., n by se měly řadit do přímky se směrnicí 1.

## Příklad:

Časová řada 112, 149, 238, 354, 580, 867 udává zisk (v tisících dolarů) jisté společnosti v prvních šesti letech její existence.

a) Graficky znázorněte průběh této časové řady.

b) Vypočtěte koeficienty růstu a graficky je znázorněte.

c) Z grafu časové řady a chování koeficientů růstu lze usoudit, že časová řada má exponenciální trend $f(t) = \beta_0 \beta_1^t$. Odhadněte jeho parametry.

d) Najděte odhad zisku společnosti v 7. a 8. roce její existence.

e) Zjistěte index determinace a sestrojte graf $(y_t, \hat{f}(t))$ t = 1, ..., 6.

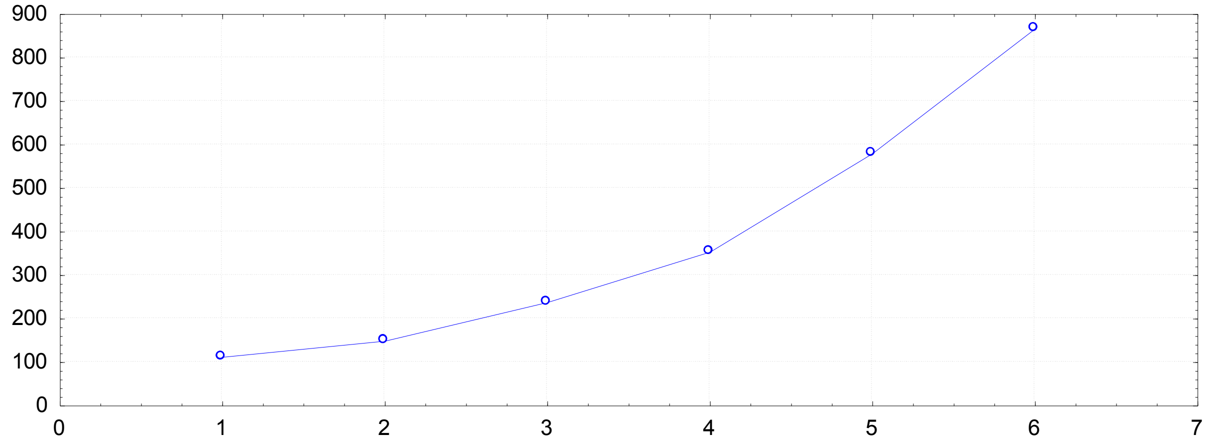
## Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor se dvěma proměnnými čas a Y a 6 případy.

| | 1<br>čas | 2<br>Y |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 112 |
| 2 | 2 | 149 |
| 3 | 3 | 238 |
| 4 | 4 | 354 |
| 5 | 5 | 580 |
| 6 | 6 | 867 |

ad a) Graficky znázorníme průběh této časové řady:

Grafy – Bodové grafy – Proměnné čas, Y – OK – vypneme proložení – OK.



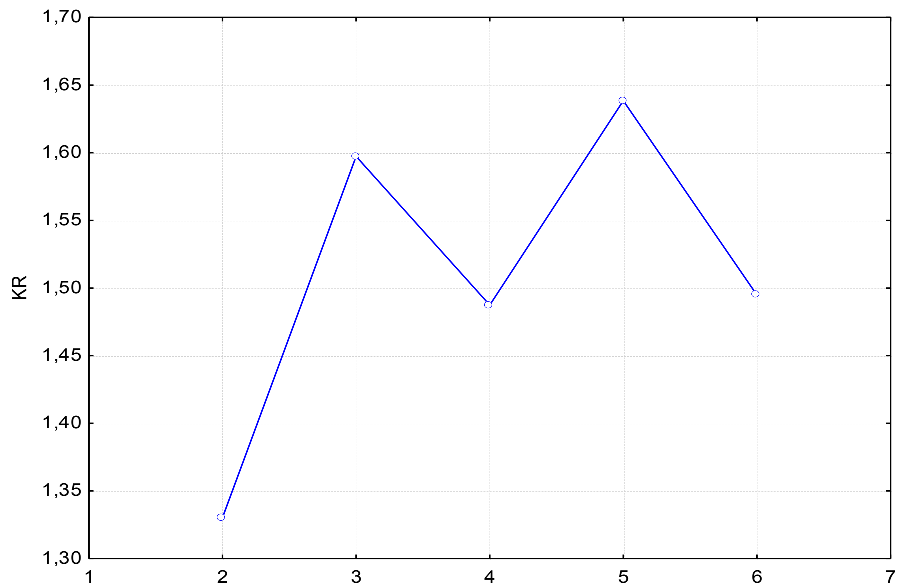

ad b) Výpočet koeficientů růstu:
Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Časové řady/predikce – Proměnné Y – OK – OK (transformace, autokorelace, kříž. korelace, grafy) – Posun – Posun řad vzad - OK (transformovat vybrané řady) – návrat do transformace proměnných – Uložit proměnné.
Ve výstupní tabulce máme proměnné Y a Y_1:

| | 1<br>Y | 2<br>Y_1 |
|---|---|---|
| 0 | | 112,000 |
| 1 | 112,000 | 149,000 |
| 2 | 149,000 | 238,000 |
| 3 | 238,000 | 354,000 |
| 4 | 354,000 | 580,000 |
| 5 | 580,000 | 867,000 |
| 6 | 867,000 | |
| 7 | | |

Za proměnnou Y_1 přidáme proměnnou KR a do jejího Dlouhého jména napíšeme =v2/v1.

| | 1<br>Y | 2<br>Y_1 | 3<br>KR |
|---|---|---|---|
| 0 | | 112,000 | |
| 1 | 112,000 | 149,000 | 1,330357 |
| 2 | 149,000 | 238,000 | 1,597315 |
| 3 | 238,000 | 354,000 | 1,487395 |
| 4 | 354,000 | 580,000 | 1,638418 |
| 5 | 580,000 | 867,000 | 1,494828 |
| 6 | 867,000 | | |
| 7 | | | |

Vytvoření grafu koeficientů růstu:
Klikneme pravým tlačítkem na název proměnné KR – Grafy bloku dat – Spojnicový graf: celé sloupce




Vidíme, že koeficienty růstu jsou přibližně konstantní.

ad c) Model $f(t) =$ linearizujeme a metodou nejmenších čtverců získáme odhady ln $b_0$, ln $b_1$. Odlogaritmováním dostaneme $b_0 = 68{,}57875$, $b_1 = 1{,}522265$. K datovému souboru přidáme proměnnou ln Y. Do jejího Dlouhého jména napíšeme =log(Y).

| | 1<br>čas | 2<br>Y | 3<br>lnY |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 112 | 4,718499 |
| 2 | 2 | 149 | 5,003946 |
| 3 | 3 | 238 | 5,472271 |
| 4 | 4 | 354 | 5,869297 |
| 5 | 5 | 580 | 6,363028 |
| 6 | 6 | 867 | 6,765039 |

Provedeme regresní analýzu se závisle proměnnou ln Y a nezávisle proměnnou čas.

| | Výsledky regrese se závislou proměnnou : lnY (Tabulka4)<br>R= ,99801042 R2= ,99602479 Upravené R2= ,99503099<br>F(1,4)=1002,2 p<,00001 Směrod. chyba odhadu : ,05553 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N=6 | Beta | Sm.chyba beta | B | Sm.chyba B | t(4) | Úroveň p |
| Abs.člen | | | 4,227983 | 0,051691 | 81,79336 | 0,000000 |
| čas | 0,998010 | 0,031525 | 0,420199 | 0,013273 | 31,65812 | 0,000006 |

Vidíme, že ln $b_0 = 4{,}\ 227983$, ln $b_1 = 0{,}420199$.
K této tabulce přidáme proměnnou expB a do jejího Dlouhého jména napíšeme =exp(B).

| N=6 | Výsledky regrese se závislou proměnnou : lnY (Tabulka4)<br>R= ,99801042 R2= ,99602479 Upravené R2= ,99503099<br>F(1,4)=1002,2 p<,00001 Směrod. chyba odhadu : ,05553 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Beta | Sm.chyba beta | B | Sm.chyba B | t(4) | Úroveň p | expB =exp(B) |
| Abs.člen | | | 4,227983 | 0,051691 | 81,79336 | 0,000000 | 68,57875 |
| čas | 0,998010 | 0,031525 | 0,420199 | 0,013273 | 31,65812 | 0,000006 | 1,522265 |

Získáme odhady $b_0$ = 68,57875, $b_1$ = 1,522265.

ad d) Odhad zisku společnosti v 7. roce existence: Pro výpočet predikované hodnoty zvolíme Rezidua/předpoklady/předpovědi - Předpovědi závisle proměnné čas: 7 - OK. Ve výstupní tabulce je hledaná hodnota označena jako Předpověď: 7,169377. K výstupní tabulce přidáme novou proměnnou a do jejího Dlouhého jména napíšeme =exp(v3).

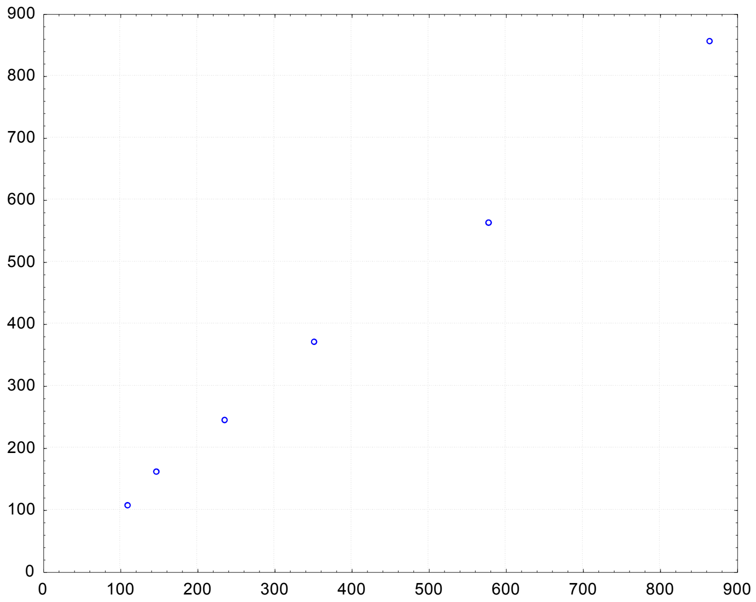
| Proměnná | B-váž. | Hodnota | B-váž. * Hodnot | NProm =exp(v3) |
|---|---|---|---|---|
| čas | 0,420199 | 7,000000 | 2,941394 | 18,94224 |
| Abs. člen | | | 4,227983 | 68,57875 |
| Předpověď | | | 7,169377 | 1299,035 |
| -95,0%LS | | | 7,025860 | 1125,362 |
| +95,0%LS | | | 7,312894 | 1499,511 |

Předpověď zisku v 7. roce existence společnosti je tedy 1299,035 tisíc dolarů. Analogicky pro 8. rok zjistíme, že predikce zisku je 1977,47567

ad e) Index determinace je $ID^2$ = 0,996, jak je uvedeno v záhlaví výstupní tabulky regresní analýzy.
Graf závislosti predikovaných hodnot na hodnotách časové řady vytvoříme tak, že uložíme předpovězené hodnoty. K datovému souboru s předpovězenými hodnotami přidáme novou proměnnou predikce a do jejího Dlouhého jména napíšeme =exp(v3).

| | 1 čas | 2 Y | 3 Předpovědi | 4 predikce |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 112 | 4,65 | 104,395 |
| 2 | 2 | 149 | 5,07 | 158,9169 |
| 3 | 3 | 238 | 5,49 | 241,9135 |
| 4 | 4 | 354 | 5,91 | 368,2565 |
| 5 | 5 | 580 | 6,33 | 560,584 |
| 6 | 6 | 867 | 6,75 | 853,357 |

Pak pomocí Bodového grafu vykreslíme závislost predikce na Y.




Jak index determinace, tak graf $\left(y_t, \hat{f}(t)\right)$ svědčí o tom, že model byl zvolen správně.

## Odhad trendu časové řady pomocí klouzavých průměrů

### Podstata klouzavých průměrů

Předpokládáme, že časová řada se řídí aditivním modelem
$y_t = f(t) + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, n$. Odhad trendu v bodě t získáme určitým zprůměrováním původních pozorování z jistého okolí uvažovaného časového okamžiku t. Můžeme si představit, že podél dané časové řady klouže okénko, v jehož rámci se průměruje. Nechť toto okénko zahrnuje d členů nalevo od bodu t a d členů napravo od bodu t. Hovoříme pak o vyhlazovacím okénku šířky h = 2d + 1. Prvních a posledních d hodnot trendu neodhadujeme, protože pro
$t \in \{1,\dots,d\} \cup \{n-d+1,\dots,n\}$ není vyhlazovací okénko symetrické. Odhad trendu ve středu vyhlazovacího okénka je dán vztahem:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2d+1}\left(y_{t-d} + y_{t-d+1} + \dots + y_{t+d}\right) = \frac{1}{2d+1}\sum_{k=0}^{2d} y_{t-d+k}, \quad t = d+1, \dots, n-d.$$

### Šířka vyhlazovacího okénka

Velmi důležitou otázkou je stanovení šířky vyhlazovacího okénka. Je-li okénko příliš široké, bude se odhad trendu blížit přímce (říkáme, že je přehlazen) a zároveň se ztratí velký počet členů na začátku a na konci časové řady. Je-li naopak okénko úzké, bude se odhad trendu blížit původním hodnotám (říkáme, že odhad je podhlazen). Nejčastěji se volí šířka okénka h = 3, 5, 7.

**Příklad**: Časová řada 215, 219, 222, 235, 202, 207, 187, 204, 174, 172, 201, 272 udává roční objemy vývozu piva (v miliónech litrů) z Československa v letech 1980 až 1991.

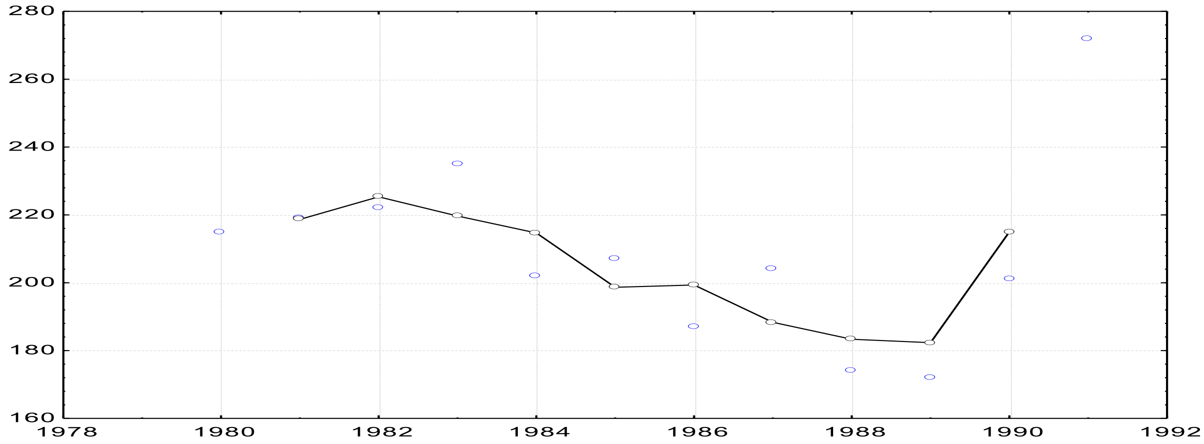
a) Odhadněte trend této časové řady pomocí klouzavých průměrů s vyhlazovacím okénkem šířky 3 a poté 5.
b) Graficky znázorněte průběh časové řady s odhadnutým trendem.

**Řešení pomocí systému STATISTICA:**

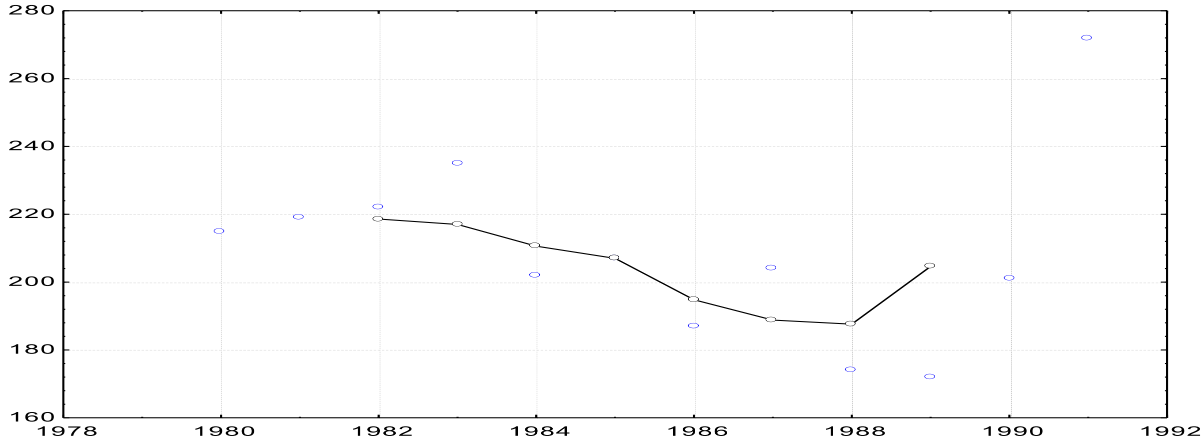
Vytvoříme datový soubor export_piva.sta o dvou proměnných ROK a VYVOZ a dvanácti případech.
Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Časové řady/predikce – Proměnné Y – OK– OK (transformace, autokorelace, kříž. korelace, grafy) – Vyhlazování – zaškrtneme N-bod. klouzavý průměr, N = 3 – OK (Transformovat vybrané řady) – vykreslí se graf, vrátíme se do Transformace proměnných – Uložit proměnné. Otevře se nový spreadsheet, kde v proměnné VYVOZ_1 jsou uloženy klouzavé průměry pro N = 3. Totéž uděláme pro případ N = 5. Ve spreadsheetu se proměnná VYVOZ_1 přepíše na VYVOZ_2 a nová proměnná se uloží jako VYVOZ_1. Nově vzniklé proměnné nazveme KP3 a KP5.
K datovému souboru přidáme proměnnou ROK, do jejíhož Dlouhého jména napíšeme =1979+v0.

| | export_piva.sta | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 rok | 2 VYVOZ | 3 KP3 | 4 KP5 |
| 1 | 1980 | 215,000 | | |
| 2 | 1981 | 219,000 | 218,667 | |
| 3 | 1982 | 222,000 | 225,333 | 218,600 |
| 4 | 1983 | 235,000 | 219,667 | 217,000 |
| 5 | 1984 | 202,000 | 214,667 | 210,600 |
| 6 | 1985 | 207,000 | 198,667 | 207,000 |
| 7 | 1986 | 187,000 | 199,333 | 194,800 |
| 8 | 1987 | 204,000 | 188,333 | 188,800 |
| 9 | 1988 | 174,000 | 183,333 | 187,600 |
| 10 | 1989 | 172,000 | 182,333 | 204,600 |
| 11 | 1990 | 201,000 | 215,000 | |
| 12 | 1991 | 272,000 | | |

Grafické znázornění časové řady s odhadnutým trendem provedeme pomocí vícenásobných bodových grafů.



280
260
240
220
200
180
160
1978
1980
1982
1984
1986
1988
1990
1992

280
260
240
220
200
180
160
1978
1980
1982
1984
1986
1988
1990
1992