Příklady na systémy hromadné obsluhy

Následující příklady řešte v MATLABu pomocí programů na SHO.

Příklad 1.: Do půjčovny aut, která vlastní pět vozidel, přijde za den průměrně 3,8 zákazníků, kteří si chtějí půjčit auto. Poku není volné auto, zákazník je odmítnut. Průměrná doba vypůjčení auta je 1,6 dne. Vypočtěte, na kolik procent je půjčovna využívaná.

Řešení:

Jedná se o systém M/M/5/5/FIFO,

kde
$$\lambda = 3{,}8, \mu = \frac{1}{1{,}6} = \frac{5}{8}, \beta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{152}{25}, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{152}{125}$$

$$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{5} \frac{(152/25)^j}{j!}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{152}{25} + \frac{(152/25)^2}{2} + \frac{(152/25)^3}{6} + \frac{(152/25)^4}{24} + \frac{(152/25)^5}{120}\right]^{-1} = 0{,}0053$$

$$P_Z = \frac{n^n}{n!}\rho^m a_0 = \frac{5^5}{5!} \cdot \left(\frac{152}{125}\right)^5 \cdot 0{,}0053 = 0{,}3649$$

$$\kappa = \rho(1 - P_Z) = \frac{152}{125}(1 - 0{,}3649) = 0{,}771$$

Půjčovna aut je využita na 77,1%.

Příklad 2.:V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?
b) Vypočtěte střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.
c) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání ve frontě.
d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?
e) Vypočtěte využití systému.

Řešení:

Jde o systém M/M/1/3/FIFO,

kde
$$\lambda = 3, \mu = 5, \beta = \frac{3}{5}, \rho = \frac{3}{5}$$

ad a)
$$a_0 = \frac{125}{272}, a_1 = \frac{75}{272}, a_2 = \frac{45}{272}, a_3 = \frac{27}{272}$$

ad b)
$$E(N) = \frac{246}{272}, E(N_Q) = \frac{99}{272}$$

ad c)
$$E(W_Q) = \frac{33}{272} = 7\,\text{min}\,18\text{s}$$

ad d)
$$1 - a_3 = \frac{245}{272}$$

ad e)
$$\kappa = \frac{147}{272} = 0{,}54$$

Příklad 3.: V dílně je 6 strojů, které v náhodných okamžicích vyžadují seřízení. Doba mezi výskyty požadavků na seřízení se řídí exponenciálním rozložením, přičemž během jedné hodiny vyžaduje každý ze strojů průměrně jedno seřízení. K seřízení strojů je určen jeden opravář. Doba, kterou opravář potřebuje k seřízení jednoho stroje, se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 6 minut. V kolika procentech své pracovní doby je opravář průměrně využit?

Řešení:

Jedná se o uzavřený systém M/M/1/6/FIFO, kde

$$\lambda = 1, \mu = \frac{60}{6} = 10, n = 1, m = 6, \beta = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}1, \rho = \frac{\beta}{n} = 0{,}1$$

$$a_1 = \binom{6}{1} 0{,}1 a_0 = 0{,}6 a_0$$

$$a_2 = \frac{6!}{(6-2)!} 0{,}1^2 a_0 = 0{,}3 a_0$$

$$a_3 = \frac{6!}{(6-3)!} 0{,}1^3 a_0 = 0{,}12 a_0$$

$$a_4 = \frac{6!}{(6-4)!} 0{,}1^4 a_0 = 0{,}036 a_0$$

$$a_5 = \frac{6!}{(6-5)!} 0{,}1^5 a_0 = 0{,}0072 a_0$$

$$a_6 = \frac{6!}{(6-6)!} 0{,}1^6 a_0 = 0{,}00072 a_0$$

$a_0(1+0{,}6+0{,}3+0{,}12+0{,}036+0{,}0072+0{,}00072) = 1$,

$a_0 = 0{,}4845$, $a_1 = 0{,}2907$, $a_2 = 0{,}1454$, $a_3 = 0{,}0581$, $a_4 = 0{,}0174$, $a_5 = 0{,}0035$, $a_6 = 0{,}0003$

$E(N) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 = 0{,}8447$

$E(N_R) = 6 - E(N) = 5{,}1553$

$\kappa = \rho\, E(N_R) = 0{,}5155$

Opravář je průměrně využit v 51,55% své pracovní doby.

Příklad 4.: Do pokladny na železniční stanici přichází v průměru 1 zákazník za 2 min. Obsluha trvá v průměru 1 min. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, řešte následující úlohy:

a) Na kolik procent je pokladna využita?

b) Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě?

c) Vypočtěte všechny střední hodnoty.

Řešení: viz příklad 11.2. z přednášek

Příklad 5.: V laboratoři pracují 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za 1 h. Zpracování jednoho požadavku trvá v průměru 10 min. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba zpracování jednoho požadavku se řídí exponenciálním rozložením.

a) Může se systém, stabilizovta?

b) Jaký je průměrný počet požadavků čekajících na zpracování?
c) Jaká je průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování?
Řešení: viz příklad 11.4. z přednášek

Příklad 6.: Na parkoviště s maximální kapacitou 40 míst přijíždí v období ustáleného provozu průměrně 20 aut za 1 h. Střední hodnota doby pobytu na parkovišti je 2,5 h. Za předpokladu, že příjezdy aut na parkoviště tvoří Poissonův proces a doba pobytu na parkovišti se řídí exponenciálním rozložením, vyřešte následující úlohy:
a) Na kolik procent je parkoviště využíváno?
b) Jaký je průměrný počet volných parkovacích míst?
c) Jaký je průměrný počet odmítnutých vozidel za 1 h provozu parkoviště?
Řešení: viz příklad 12.2. z přednášek

Příklad 7.: V uzavřeném systému M/M/1/2/FIFO, kde $\lambda = 3, \mu = 2$ vypočtěte stacionární rozložení a základní charakteristiky systému.
Řešení: viz příklad 12.4. z přednášek