

3. Kongruence

Pojem kongruence byl zaveden Gaussem. Ačkoliv je to pojem velice jednoduchý, jeho důležitost a užitečnost v teorii čísel je nedocenitelná; projevuje se zejména ve stručných a přehledných zápisech některých i velmi komplikovaných úvah.

DEFINICE. Jestliže dvě celá čísla a, b mají při dělení přirozeným číslem m týž zbytek r , kde $0 \leq r < m$, nazývají se a, b *kongruentní modulo m* (též *kongruentní podle modulu m*), což zapisujeme takto:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

V opačném případě řekneme, že a, b nejsou kongruentní modulo m , a píšeme

$$a \not\equiv b \pmod{m}.$$

LEMMA. Pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) $a \equiv b \pmod{m}$,
- (2) $a = b + mt$ pro vhodné $t \in \mathbb{Z}$,
- (3) $m \mid a - b$.

DŮKAZ. „(1) \Rightarrow (3)“ Jestliže $a = q_1m + r$, $b = q_2m + r$, pak $a - b = (q_1 - q_2)m$.

„(3) \Rightarrow (2)“ Jestliže $m \mid a - b$, pak existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $m \cdot t = a - b$, tj. $a = b + mt$.

„(2) \Rightarrow (1)“ Jestliže $a = b + mt$, pak z vyjádření $b = mq + r$ plyne $a = m(q + t) + r$, tedy a i b mají při dělení číslem m týž zbytek r , tj. $a \equiv b \pmod{m}$. \square

3.1. Základní vlastnosti kongruencí. Přímo z definice plyne, že kongruence podle modulu m je reflexivní (tj. $a \equiv a \pmod{m}$) platí pro každé $a \in \mathbb{Z}$), symetrická (tj. pro každé $a, b \in \mathbb{Z}$ z $a \equiv b \pmod{m}$ plyne $b \equiv a \pmod{m}$) a tranzitivní (tj. pro každé $a, b, c \in \mathbb{Z}$ z $a \equiv b \pmod{m}$ a $b \equiv c \pmod{m}$ plyne $a \equiv c \pmod{m}$) relace, jde tedy o *ekvivalenci*. Dokážeme nyní další vlastnosti:

VĚTA 12. (*Základní vlastnosti kongruencí*)

- (1) **Kongruence podle téhož modulu můžeme sčítat.** Libovolný sčítanec můžeme přenést s opačným znaménkem z jedné strany kongruence na druhou. **Na libovolnou stranu kongruence můžeme přičíst jakýkoliv násobek modulu.**

DŮKAZ. Je-li $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ a $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, existují podle lemmatu $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ tak, že $a_1 = b_1 + mt_1$, $a_2 = b_2 + mt_2$. Pak ovšem $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(t_1 + t_2)$ a opět podle lemmatu $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$. Sečteme-li kongruenci $a + b \equiv c \pmod{m}$ s kongruencí $-b \equiv -b \pmod{m}$, která zřejmě platí, dostaneme $a \equiv c - b \pmod{m}$. Sečteme-li

kongruenci $a \equiv b \pmod{m}$ s kongruencí $mk \equiv 0 \pmod{m}$, jejíž platnost je zřejmá, dostaneme $a + mk \equiv b \pmod{m}$. \square

- (2) **Kongruence podle téhož modulu můžeme násobit.** Obě strany kongruence je možné **umocnit na totéž přirozené číslo**. Obě strany kongruence je možné **vynásobit stejným celým číslem**.

DŮKAZ. Je-li $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ a $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, existují podle $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ tak, že $a_1 = b_1 + mt_1$, $a_2 = b_2 + mt_2$. Pak ovšem

$$a_1 a_2 = (b_1 + mt_1)(b_2 + mt_2) = b_1 b_2 + m(t_1 b_2 + b_1 t_2 + mt_1 t_2),$$

odkud podle dostáváme $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$.

Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, dokážeme indukcí vzhledem k přirozenému číslu n , že platí $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. Pro $n = 1$ není co dokazovat. Platí-li $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ pro nějaké pevně zvolené n , vynásobením této kongruence a kongruence $a \equiv b \pmod{m}$ dostáváme $a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \pmod{m}$, tedy $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{m}$, což je tvrzení pro $n + 1$. Důkaz indukcí je hotov.

Jestliže vynásobíme kongruenci $a \equiv b \pmod{m}$ a kongruenci $c \equiv c \pmod{m}$, dostaneme $ac \equiv bc \pmod{m}$. \square

- (3) **Obě strany kongruence můžeme vydělit jejich společným dělitelem**, jestliže je tento dělitel **nesoudělný s modulem**.

DŮKAZ. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ a $(m, d) = 1$. Podle lemmatu je rozdíl $a - b = (a_1 - b_1) \cdot d$ dělitelný číslem m . Protože $(m, d) = 1$, je podle věty 5 číslo $a_1 - b_1$ také dělitelné číslem m , odtud podle lemmatu plyne $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$. \square

- (4) **Obě strany kongruence i její modul můžeme současně vynásobit tímtož přirozeným číslem**.

DŮKAZ. Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, existuje podle lemmatu celé číslo t tak, že $a = b + mt$, odkud pro $c \in \mathbb{N}$ platí $ac = bc + mc \cdot t$, odkud opět podle lemmatu plyne $ac \equiv bc \pmod{mc}$. \square

- (5) **Obě strany kongruence i její modul můžeme vydělit jejich společným kladným dělitelem**.

DŮKAZ. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$, $m = m_1 \cdot d$, kde $d \in \mathbb{N}$. Podle lemmatu existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = b + mt$, tj. $a_1 \cdot d = b_1 \cdot d + m_1 dt$, odkud $a_1 = b_1 + m_1 t$, což podle lemmatu znamená, že $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$. \square

- (6) **Jestliže kongruence $a \equiv b$ platí podle různých modulu m_1, \dots, m_k , platí i podle modulu, kterým je nejmenší společný násobek $[m_1, \dots, m_k]$ těchto čísel.**

DŮKAZ. Jestliže $a \equiv b \pmod{m_1}, a \equiv b \pmod{m_2}, \dots, a \equiv b \pmod{m_k}$, podle lemmatu je rozdíl $a - b$ společný násobek čísel m_1, m_2, \dots, m_k a tedy je dělitelný jejich nejmenším společným násobkem $[m_1, m_2, \dots, m_k]$, odkud plyne $a \equiv b \pmod{[m_1, \dots, m_k]}$. \square

- (7) **Jestliže kongruence platí podle modulu m , platí podle libovolného modulu d , který je dělitelem čísla m .**

DŮKAZ. Jestliže $a \equiv b \pmod{m}$, je $a - b$ dělitelné m , a proto také dělitelem d čísla m , odkud $a \equiv b \pmod{d}$. \square

- (8) **Jestliže je jedna strana kongruence a modul dělitelný nějakým celým číslem, musí být tímto číslem dělitelná i druhá strana kongruence.**

DŮKAZ. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $b = b_1d$, $m = m_1d$. Pak podle lemmatu existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = b + mt = b_1d + m_1dt = (b_1 + m_1t)d$, a tedy $d \mid a$. \square

POZNÁMKA. Některé vlastnosti kongruencí jsme již používali, aniž bychom si toho povšimli – například příklad ze strany 7 lze přeformulovat do tvaru „jestliže $a \equiv 1 \pmod{m}, b \equiv 1 \pmod{m}$, pak také $ab \equiv 1 \pmod{m}$ “, což je speciální případ tvrzení věty 12 (2). Nejde o náhodu. Libovolné tvrzení používající kongruence můžeme snadno přepsat pomocí dělitelnosti. Užitečnost kongruencí tedy netkví v tom, že bychom pomocí nich mohli řešit úlohy, které bez nich řešit nejsme schopni, ale v tom, že jde o velmi vhodný způsob zápisu. Osvojíme-li si ho, výrazně tím zjednodušíme jak vyjadřování, tak i některé úvahy. Je to typický jev: v matematice hraje vhodná symbolika velmi závažnou úlohu.

PŘÍKLAD. Nalezněte zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26.

ŘEŠENÍ. Protože $5^2 = 25 \equiv -1 \pmod{26}$, platí podle věty 12 (2)

$$5^{20} \equiv (-1)^{10} = 1 \pmod{26},$$

a tedy zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26 je jedna. \square

PŘÍKLAD. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ dělitelné sedmi.

ŘEŠENÍ. Platí $37 \equiv 16 \equiv 23 \equiv 2 \pmod{7}$, a tedy podle 12 (2) a (1) platí

$$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n = 2^n(4+2+1) = 2^n \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7},$$

což jsme chtěli dokázat. \square

PŘÍKLAD. Dokažte, že číslo $n = (835^5 + 6)^{18} - 1$ je dělitelné číslem 112.

ŘEŠENÍ. Rozložíme $112 = 7 \cdot 16$. Protože $(7, 16) = 1$, stačí ukázat, že $7 \mid n$ a $16 \mid n$. Platí $835 \equiv 2 \pmod{7}$, a tedy podle 12
 $n \equiv (2^5 + 6)^{18} - 1 = 38^{18} - 1 \equiv 3^{18} - 1 = 27^6 - 1 \equiv (-1)^6 - 1 = 0 \pmod{7}$,
 proto $7 \mid n$. Podobně $835 \equiv 3 \pmod{16}$, a tedy

$$\begin{aligned} n &\equiv (3^5 + 6)^{18} - 1 = (3 \cdot 81 + 6)^{18} - 1 \equiv (3 \cdot 1 + 6)^{18} - 1 = \\ &= 9^{18} - 1 = 81^9 - 1 \equiv 1^9 - 1 = 0 \pmod{16}, \end{aligned}$$

proto $16 \mid n$. Celkem tedy $112 \mid n$, což jsme měli dokázat. \square

PŘÍKLAD. Dokažte, že pro libovolné prvočíslo p a libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^p + b^p \equiv (a + b)^p \pmod{p}.$$

ŘEŠENÍ. Podle binomické věty platí

$$(a + b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + b^p.$$

Podle příkladu za větou 6 pro libovolné $k \in \{1, \dots, p-1\}$ platí $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$, odkud plyne tvrzení. \square

Následující tvrzení je další užitečnou vlastností kongruencí:

LEMMA. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo m a libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ taková, že $a \equiv b \pmod{m^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí, že $a^m \equiv b^m \pmod{m^{n+1}}$.

DŮKAZ. Platí

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}) \quad (12)$$

a protože $m \mid m^n$, tak podle 12 (7) platí i $a \equiv b \pmod{m}$. Jsou tedy všechny sčítance ve druhé závorce v (12) kongruentní s a^{m-1} modulo m , a tedy

$$a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1} \equiv m \cdot a^{m-1} \equiv 0 \pmod{m},$$

proto je $a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}$ dělitelné m . Z $a \equiv b \pmod{m^n}$ plyne, že m^n dělí $a - b$, a tedy m^{n+1} dělí jejich součin, což vzhledem k (12) vede k závěru, že $a^m \equiv b^m \pmod{m^{n+1}}$. \square

3.2. Aritmetické funkce. Aritmetickou funkcí zde rozumíme funkci, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel.

DEFINICE. Rozložíme přirozené číslo n na prvočísla: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Hodnotu Möbiovy funkce $\mu(n)$ definujeme rovnu 0, pokud pro některé i platí $\alpha_i > 1$ a rovnu $(-1)^k$ v opačném případě. Dále definujeme $\mu(1) = 1$.

PŘÍKLAD. $\mu(4) = \mu(2^2) = 0$, $\mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = (-1)^2$, $\mu(2) = \mu(3) = -1$.

Dokážeme nyní několik důležitých vlastností Möbiovy funkce, zejména tzv. *Möbiovu inverzní formuli*.

LEMMA. Pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$

DŮKAZ. Zapišeme-li n ve tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, pak všechny dělitele d čísla n jsou tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, kde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, k\}$. Proto

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{\substack{(\beta_1, \dots, \beta_k) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k \\ 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i}} \mu(p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}) = \\ &= \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_k) \in \{0, 1\}^k} \mu(p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}) \\ &= \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \cdot (-1) + \binom{k}{2} \cdot (-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k} \cdot (-1)^k \\ &= (1 + (-1))^k = 0. \end{aligned}$$

□

S Möbiovou funkcí úzce souvisí pojem *Dirichletův součin*:

DEFINICE. Buďte f, g aritmetické funkce. Jejich *Dirichletův součin* je definován předpisem

$$(f \circ g)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) \cdot g(d_2).$$

LEMMA. *Dirichletův součin je asociativní.*

DŮKAZ.

$$((f \circ g) \circ h)(n) = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1) \cdot g(d_2) \cdot h(d_3) = (f \circ (g \circ h))(n)$$

□

PŘÍKLAD. Definujme dvě pomocné funkce \mathbb{I} a I předpisem $\mathbb{I}(1) = 1$, $\mathbb{I}(n) = 0$ pro všechna $n > 1$, resp. $I(n) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každou aritmetickou funkci f platí:

$$f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f = f$$

a

$$(I \circ f)(n) = (f \circ I)(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Dále platí $I \circ \mu = \mu \circ I = \mathbb{I}$, neboť

$$\begin{aligned} (I \circ \mu)(n) &= \sum_{d|n} I(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} I\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) = \\ &= \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad \text{pro všechna } n > 1 \end{aligned}$$

podle lemmatu za definicí Möbiovy funkce (pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé).

VĚTA 13. (*Möbiova inverzní formule*) *Nechť je aritmetická funkce F definovaná pomocí aritmetické funkce f předpisem $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Pak lze funkci f vyjádřit ve tvaru*

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot F(d).$$

DŮKAZ. Vztah $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ lze jiným způsobem zapsat jako $F = f \circ I$. Proto $F \circ \mu = (f \circ I) \circ \mu = f \circ (I \circ \mu) = f \circ \mathbb{I} = f$, což je tvrzení věty. \square

DEFINICE. Multiplikativní funkcí přirozených čísel rozumíme takovou aritmetickou funkci, která splňuje, že pro všechny dvojice nesoudělných čísel $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

PŘÍKLAD. Multiplikativními funkcemi jsou např. funkce $f(n) = \sigma(n)$, $f(n) = \tau(n)$, či $f(n) = \mu(n)$ nebo, jak brzy dokážeme i tzv. Eulerova funkce $f(n) = \varphi(n)$.

3.3. Eulerova funkce φ .

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme Eulerovu funkci φ předpisem

$$\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{N} \mid 0 < a \leq n, (a, n) = 1\}|$$

PŘÍKLAD. $\varphi(1) = 1, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$, je-li p prvočíslo, je zřejmé $\varphi(p) = p - 1$.

Nyní dokážeme několik důležitých tvrzení o funkci φ :

LEMMA. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.*

DŮKAZ. Uvažme n zlomků

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}.$$

Zkrátíme-li zlomky na základní tvar a seskupíme podle jmenovatelů, snadno dostaneme právě uvedené tvrzení. \square

VĚTA 14. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, jehož rozklad je tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Pak*

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

DŮKAZ. S využitím předchozího lemmatu a Möbiovy inverzní formule dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n - \frac{n}{p_1} - \dots - \frac{n}{p_k} + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \cdots p_k} = \\ &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}\tag{13}$$

□

POZNÁMKA. Předchozí výsledek lze obdržet i bez použití Möbiovy inverzní formule pomocí principu inkluze a exkluze na základě zjištění počtu čísel soudělných s n .

DŮSLEDEK. *Nechť $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Pak*

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

DŮKAZ. Zřejmý. □

POZNÁMKA. Rovněž toto tvrzení lze odvodit nezávisle na základě poznatku $(n, ab) = 1 \iff (n, a) = 1 \wedge (n, b) = 1$. Spolu se snadno odvoditelným výsledkem

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = (p-1) \cdot p^{\alpha-1}\tag{14}$$

pak lze odvodit vztah (13) již třetím způsobem.

PŘÍKLAD. Vypočtete $\varphi(72)$.

ŘEŠENÍ. $72 = 2^3 \cdot 3^2 \implies \varphi(72) = 72 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24$, alternativně $\varphi(72) = \varphi(8) \cdot \varphi(9) = 4 \cdot 6 = 24$. □

PŘÍKLAD. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(4n+2) = \varphi(2n+1)$.

ŘEŠENÍ. $\varphi(4n+2) = \varphi(2 \cdot (2n+1)) = \varphi(2) \cdot \varphi(2n+1) = \varphi(2n+1)$. □

3.4. Malá Fermatova věta, Eulerova věta. Tvrzení v tomto odstavci patří mezi nejdůležitější výsledky teorie čísel.

VĚTA 15 (Fermatova, Malá Fermatova). *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, p prvočíslo, $p \nmid a$. Pak*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.\tag{15}$$

DŮKAZ. Tvrzení vyplyne jako snadný důsledek Eulerovy věty 16. □

DŮSLEDEK. *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, p prvočíslo. Pak*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

DŮKAZ. Pokud $p \mid a$, pak jsou obě strany kongruentní s $0 \pmod{p}$, jinak tvrzení snadno plyne vynásobením obou stran kongruence (15) číslem a . □

DEFINICE. *Úplná soustava zbytků modulo m* je libovolná m -tice čísel po dvou nekongruentních modulo m (nejčastěji $0, 1, \dots, m-1$).
Redukovaná soustava zbytků modulo m je libovolná $\varphi(m)$ -tice čísel nesoudělných s m a po dvou nekongruentních modulo m .

POZNÁMKA. Snadno lze vidět, že jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod{m}$, a $(a, m) = 1$, pak i $(b, m) = 1$.

LEMMA. *Nechť $x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(m)}$ tvoří redukovanou soustavu zbytků modulo m . Je-li $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ pak i čísla $a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_{\varphi(m)}$ tvoří redukovanou soustavu zbytků modulo m .*

DŮKAZ. Protože $(a, m) = 1$ a $(x_i, m) = 1$, platí $(a \cdot x_i, m) = 1$. Kdyby pro nějaká i, j platilo $a \cdot x_i \equiv a \cdot x_j \pmod{m}$, po vydělení obou stran kongruence číslem a nesoudělným s m dostaneme $x_i \equiv x_j \pmod{m}$. \square

VĚTA 16 (Eulerova). *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $(a, m) = 1$. Pak*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}. \quad (16)$$

DŮKAZ. Buď $x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(m)}$ libovolná redukovaná soustava zbytků modulo m . Podle předchozího lemmatu je i $a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_{\varphi(m)}$ redukovaná soustava zbytků modulo m . Platí tedy, že pro každé i existuje j (oba indexy jsou z množiny $\{1, 2, \dots, \varphi(m)\}$) tak, že $a \cdot x_i \equiv x_j \pmod{m}$. Vynásobením čísel obou redukovaných soustav zbytků dostáváme

$$(a \cdot x_1) \cdot (a \cdot x_2) \cdots (a \cdot x_{\varphi(m)}) \equiv x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Po úpravě

$$a^{\varphi(m)} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \equiv x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \pmod{m}$$

a protože $(x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)}, m) = 1$, můžeme obě strany kongruence vydělit číslem $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)}$ a dostaneme $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. \square

POZNÁMKA. Eulerova věta je rovněž důsledkem Lagrangeovy věty uplatněným na grupu $(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$.

PŘÍKLAD. Nalezněte všechna prvočísla p , pro která $5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$.

ŘEŠENÍ. Snadno se přesvědčíme, že $p = 5$ úloze nevyhovuje. Pro $p \neq 5$ platí $(p, 5) = 1$, a tedy podle Fermatovy věty $5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Umocněním na $p+1$ dostaneme $5^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}$, odkud $5^{p^2} \equiv 5 \pmod{p}$. Z podmínky $5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ plyne $5^{p^2} \equiv -1 \pmod{p}$, celkem tedy $5 \equiv -1 \pmod{p}$, a proto $p \mid 6$. Je tedy buď $p = 2$, nebo $p = 3$. Pro $p = 2$ však $5^4 + 1 \equiv 1^4 + 1 = 2 \not\equiv 0 \pmod{4}$. Pro $p = 3$ dostáváme $5^9 + 1 = 5^6 \cdot 5^3 + 1 \equiv 5^3 + 1 = 126 \equiv 0 \pmod{9}$, kde jsme užili důsledek Eulerovy věty $5^6 \equiv 1 \pmod{9}$. Jediným prvočíslem, vyhovujícím úloze je tedy $p = 3$. \square

PŘÍKLAD. Pro liché číslo $m > 1$ nalezněte zbytek po dělení čísla $2^{\varphi(m)-1}$ číslem m .

ŘEŠENÍ. Z Eulerovy věty plyne $2^{\varphi(m)} \equiv 1 \equiv 1 + m = 2r \pmod{m}$), kde $r = \frac{1+m}{2}$ je přirozené číslo, $0 < r < m$. Podle 12 (3) platí $2^{\varphi(m)-1} \equiv r \pmod{m}$, a tedy hledaný zbytek po dělení je $r = \frac{1+m}{2}$. \square

TVRZENÍ 3.1. *Je-li p prvočíslo, $p \equiv 3 \pmod{4}$, pak pro libovolná celá čísla a, b z kongruence $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ plyne $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že pro $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Jestliže $p \mid a$, platí $a \equiv 0 \pmod{p}$, proto $b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, tedy $p \mid b^2$, odkud vzhledem k tomu, že p je prvočíslo, dostáváme $p \mid b$, a proto $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$, což jsme chtěli dokázat.

Zbývá prošetřit případ, kdy a není dělitelné prvočíslem p . Odtud dostáváme, že p nedělí ani b (kdyby $p \mid b$, dostali bychom $p \mid a^2$). Vynásobíme-li obě strany kongruence $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$ číslem b^{p-3} , dostaneme podle Fermatovy věty

$$a^2 b^{p-3} \equiv -b^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Protože $p \equiv 3 \pmod{4}$, je $p-3$ sudé číslo, a proto $\frac{p-3}{2} \in \mathbb{N}_0$. Označme

$$c = ab^{\frac{p-3}{2}}.$$

Pak c není dělitelné p a platí $c^2 = a^2 b^{p-3} \equiv -1 \pmod{p}$. Umocníme-li poslední kongruenci na $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$c^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Protože $p \equiv 3 \pmod{4}$, existuje celé číslo t tak, že $p = 3+4t$. Pak ovšem $\frac{p-1}{2} = 1 + 2t$, což je číslo liché a proto $(-1)^{(p-1)/2} = -1$. Podle Fermatovy věty naopak platí $c^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, odkud $1 \equiv -1 \pmod{p}$ a $p \mid 2$, spor. \square

S Eulerovou funkcí a Eulerovou větou úzce souvisí důležitý pojem *řád čísla modulo m* - jde přitom pouze o jinak nazvaný řád prvku v grupě invertibilních zbytkových tříd modulo m :

DEFINICE. Nechť $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ (a, m) = 1. *Řádem čísla a modulo m* rozumíme nejmenší přirozené číslo n splňující

$$a^n \equiv 1 \pmod{m}.$$

PŘÍKLAD. Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ má číslo 1 modulo m řád 1. Číslo -1 má řád

- 1 pro $m = 1$ nebo $m = 2$
- 2 pro $m > 2$

PŘÍKLAD. Určete řád čísla 2 modulo 7.

ŘEŠENÍ.

$$2^1 = 2 \not\equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^2 = 4 \not\equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$$

Řád čísla 2 modulo 7 je tedy roven 3. \square

Uvedme nyní několik zásadních tvrzení udávajících možné hodnoty řádu čísla modulo m :

LEMMA. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = (b, m) = 1$. Jestliže $a \equiv b \pmod{m}$, pak obě čísla a, b mají stejný řád modulo m .*

DŮKAZ. Umocněním kongruence $a \equiv b \pmod{m}$ na n -tou dostaneme $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, tedy $a^n \equiv 1 \pmod{m} \iff b^n \equiv 1 \pmod{m}$. \square

LEMMA. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Je-li řád čísla a modulo m roven $r \cdot s$, (kde $r, s \in \mathbb{N}$), pak řád čísla a^r modulo m je roven s .*

DŮKAZ. Protože žádné z čísel $a, a^2, a^3, \dots, a^{r \cdot s - 1}$ není kongruentní s 1 modulo m , není ani žádné z čísel $a^r, a^{2r}, a^{3r}, \dots, a^{(s-1)r}$ kongruentní s 1. Platí ale $(a^r)^s \equiv 1 \pmod{m}$, proto je řád a^r modulo m roven s . \square

POZNÁMKA. Opak obecně neplatí – z toho, že řád čísla a^r modulo m je roven s ještě neplyne, že řád čísla a modulo m je $r \cdot s$.

Př: $m = 13$

$a = 3$, $a^2 = 9 \pmod{13}$, $a^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3$ má řád 3 mod 13.
 $b = -4$, $b^2 = 16 \not\equiv 1 \pmod{13}$, $b^3 = -64 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow -4$ má řád 3 modulo 13.

Přitom $(-4)^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$ má stejný řád 3 jako číslo 3, ale číslo -4 nemá řád $2 \cdot 3$.

Přesný popis závislosti řádu na exponentu dávají následující 2 věty:

VĚTA 17. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Označme r řád čísla a modulo m . Pak pro libovolná $t, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí*

$$a^t \equiv a^s \pmod{m} \iff t \equiv s \pmod{r}.$$

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $t \geq s$. Vydělíme-li číslo $t - s$ číslem r se zbytkem, dostaneme $t - s = q \cdot r + z$, kde $q, z \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq z < r$.

„ \Leftarrow “ Protože $t \equiv s \pmod{r}$, máme $z = 0$, a tedy $a^{t-s} = a^{qr} = (a^r)^q \equiv 1^q \pmod{m}$. Vynásobením obou stran kongruence číslem a^s dostaneme tvrzení.

„ \Rightarrow “ Z $a^t \equiv a^s \pmod{m}$ plyne $a^s \cdot a^{qr+z} \equiv a^s \pmod{m}$. Protože je $a^r \equiv 1 \pmod{m}$, je rovněž $a^{qr+z} \equiv a^z \pmod{m}$. Celkem po vydělení

obou stran kongruence číslem a^s (které je nesoudělné s modulem), dostáváme $a^z \equiv 1 \pmod{m}$. Protože $z < r$, plyne z definice řádu, že $z = 0$, a tedy $r \mid t - s$. \square

Zřejmým důsledkem předchozí věty a Eulerovy věty je následující tvrzení (jehož druhá část je přeformulováním Lagrangeovy věty z Algebry pro naši situaci):

DŮSLEDEK. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Označme r řád čísla a modulo m .*

(1) *Pro libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí*

$$a^n \equiv 1 \pmod{m} \iff r \mid n.$$

(2) *$r \mid \varphi(m)$*

DŮKAZ.

(1) stačí v předchozí větě volit $t = n$, $s = r$.

(2) zřejmé z (1) díky Eulerově větě volbou $n = \varphi(m)$. \square

Následující věta je zobecněním předchozího Lemmatu.

VĚTA 18. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Je-li řád čísla a modulo m roven $r \in \mathbb{N}$, je řád čísla a^n modulo m roven $\frac{r}{(n,r)}$.*

DŮKAZ. Protože $\frac{r \cdot n}{(r,n)} = [r, n]$, což je zřejmě násobek r , máme

$$(a^n)^{\frac{r}{(n,r)}} = a^{[r,n]} \equiv 1 \pmod{m}$$

(plyne z předchozího Důsledku neboť $r \mid [r, n]$). Na druhou stranu, je-li $k \in \mathbb{N}$ libovolné takové, že $(a^n)^k = a^{n \cdot k} \equiv 1 \pmod{m}$, dostáváme (r je řád a), že $r \mid n \cdot k$ a dále z Věty 5 plyne, že $\frac{r}{(n,r)} \mid \frac{n}{(n,r)} \cdot k$ a díky nesoudělnosti čísel $\frac{r}{(n,r)}$ a $\frac{n}{(n,r)}$ dostáváme $\frac{r}{(n,r)} \mid k$. Proto je $\frac{r}{(n,r)}$ řádem čísla a^n modulo m . \square