

Hodnocení							Σ	

Jméno:

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Minimum (včetně semestrální písemky a DÚ) je 30 bodů.

Na práci máte 90 minut.

- (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):
 - ano** — **ne** Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $27k + 4$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
 - ano** — **ne** Mezi čísly 1 až 50 existuje $\varphi(\varphi(50)) = 8$ primitivních kořenů modulo 50.
 - ano** — **ne** Lineární kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, má vždy řešení modulo m , platí-li $a \mid b$.
 - ano** — **ne** Libovolná redukovaná soustava zbytků modulo číslo m obsahuje stejný počet kvadratických zbytků a nezbytků modulo m .
 - ano** — **ne** Diofantická rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ s neznámými $x, y, z \in \mathbb{N}$ má za předpokladu $(x, y, z) = 1$ pouze konečně mnoho řešení.
 - ano** — **ne** Výraz $k^2 - 2$ není pro žádné přirozené číslo k násobkem 13.
 - ano** — **ne** Je-li $m \in \mathbb{N}$, pak pro každé přirozené číslo d takové, že $d \mid \varphi(m)$ existuje $x \in \mathbb{Z}$ řádu d modulo m .
 - ano** — **ne** Každé přirozené číslo dává při dělení libovolnou mocninou 3 stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
 - ano** — **ne** Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{Z}$ po dvou nesoudělná, pak jsou také nesoudělná.
 - ano** — **ne** Grupa $(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$ je cyklická pouze, je-li m prvočíslo.
- (6 bodů) Dokažte, že 4 není primitivní kořen modulo žádné prvočíslo p .
(Návod: uvažte možné hodnoty řádu čísla 2 a vztah mezi řádem čísel 2 a 4).
- (6 bodů) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n je číslo $2^{2^n} - 2^{n^2}$ dělitelné sedmi.
- (6 bodů) Určete počet řešení kongruence $x^2 \equiv 280 \pmod{2295}$.
(Malá nápověda: modul je dělitelný třemi prvočísly).
- (8 bodů) Učitel matematiky se zmínil, že dnes mají narozeniny obě jeho děti. Když se ho žáci zeptali na jejich věk, odpověděl hádankou: „Součet trojnásobku druhé mocniny dceřina věku a sedminásobku součinu věků obou dětí je o 16 větší než šestinásobek druhé mocniny synova věku.“
Určete věk obou dětí (všechny možnosti).
- (4 body) Kolik je přirozených čísel menších než 1000, která jsou nesoudělná s 35?