1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

1.1 Lineární homogenní parciální diferenciální rovnice ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

Řešením je funkce $u = u(x,y)$.

Hledáme vrstevnice funkce u. Nechť mají parametrické vyjádření $x = x(s)$, $y = y(s)$. Pak $u\big(x(s), y(s)\big) = const$ a tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u\big(x(s), y(s)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 0.$$

Porovnáním s (1) vidíme, že pokud funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$ jsou řešeními systému autonomních obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(x,y), \\ y' &= b(x,y), \end{aligned} \tag{2}$$

kde $'$ označuje obyčejnou derivaci podle nezávisle proměnné s, pak jsou parametrickými rovnicemi vrstevnic řešení rovnice (1). Systém (2) se nazývá *charakteristická soustava rovnic rovnice* (1), jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (1).

Nechť rovnice $\varphi(x,y) = c$ je implicitním popisem charakteristik rovnice (1), tj. vrstevnic řešení této rovnice, a Φ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Pak $u = u(x,y) = \Phi\big(\varphi(x,y)\big)$ je obecným řešením rovnice (1).

D.: Podle „řetězového pravidla“ pro parciální derivaci složené funkce je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \Phi'\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \Phi'\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, na charakteristikách $x = x(s)$, $y = y(s)$ platí $\varphi\big(x(s), y(s)\big) = c$ a tedy

$$\begin{aligned} a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= \Phi'\big(\varphi(x,y)\big)\left(a\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\right) = \\ &= \Phi'\big(\varphi(x,y)\big)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \Phi'\big(\varphi(x,y)\big)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) = \\ &= \Phi'\big(\varphi(x,y)\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi\big(x(s), y(s)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

1.2 Okrajová úloha pro lineární homogenní parciální diferenciální rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Nechť $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$ je parametrický popis rovinné křivky, která protíná každou z charakteristik rovnice (1) právě jednou, a nechť f je funkce se stejným definičním oborem jako φ a ψ. Podmínka

$$u\big(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)\big) = f(\sigma) \tag{3}$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici* (1).

Heuristická úvaha: Podmínku (3) si lze představit jako prostorovou křivku. Dále si lze představit, že máme vrstevnice řešení, tj. charakteristiky, vytvořené např z drátu. Tyto vrstevnice umisťujeme na křivku vyjadřující okrajovou podmínku.

Nechť charakteristiky rovnice (1), tj. trajektorie systému (2), mají obecné parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x(s, c_1, c_2), \\ y &= y(s, c_1, c_2), \end{aligned} \tag{4}$$

kde c_1, c_2 jsou integrační konstanty. Dále nechť okrajová podmínka je parametricky vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\sigma), \\ y &= \psi(\sigma), \\ u &= f(\sigma). \end{aligned} \tag{5}$$

Pro jednu hodnotu parametru s, řekněme pro $s = 0$, vrstevnice protíná křivku, na níž je zadána okrajoví podmínka, tedy

$$\begin{aligned} x(0, c_1, c_2) &= \varphi(\sigma), \\ y(0, c_1, c_2) &= \psi(\sigma). \end{aligned}$$

Z těchto rovnic vypočítáme konstanty c_1, c_2 v závislosti na parametru σ, tedy $c_1 = c_1(\sigma)$, $c_2 = c_2(\sigma)$. Toto vyjádření dosadíme do (4) a dostaneme soustavu dvou rovic pro dvě neznámé s a σ:

$$\begin{aligned} x &= x\big(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma)\big), \\ y &= y\big(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma)\big). \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme; zejména vyjádříme σ pomocí x a y, tj. $\sigma = \sigma(x, y)$ a dosadíme do poslední z rovnic (5). Tím dostaneme řešení úlohy (1), (3) ve tvaru $u(x, y) = f\big(\sigma(x, y)\big)$.

1.3 Quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \tag{6}$$

Řešením je opět funkce $u = u(x, y)$. Předpokládejme, že toto řešení je implicitně dáno rovnicí $F(x, y, u) = 0$, tedy

$$F\big(x, y, u(x, y)\big) = 0.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\big(x, y, u(x, y)\big) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F\big(x, y, u(x, y)\big) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

První z těchto rovnic vynásobíme funkcí a, druhou z nich funkcí b, sečteme je a upravíme s využitím (6):

$$0 = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Pokud funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$ a $u = u(s)$ jsou řešením následující *charakteristické soustavy rovnic rovnice* (6)

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y, u), \\ y' &= b(x, y, u), \\ u' &= c(x, y, u), \end{aligned} \tag{7}$$

pak podle předchozí rovnosti platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F\big(x(s), y(s), u(s)\big) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial y}b + \frac{\partial F}{\partial u}c = 0.$$

Trajektorie systému autonomních obyčejných diferenciálních rovnic (7) — prostorové křivky — se nazývají *charakteristiky rovnice* (6). Z provedeného výpočtu plyne, že podél charakteristik je funkce F konstantní.

Nechť rovnice $\varphi_1(x, y, u) = c_1$ a $\varphi_2(x, y, u) = c_2$ jsou implicitním popisem charakteristik rovnice (6) (jednorozměrné variety v třírozměrném prostoru) a Φ je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. Pak funkce $u = u(x, y)$ implicitně zadaná rovnicí

$$\Phi\big(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)\big) = 0 \tag{8}$$

je obecným řešením rovnice (6).

D.: Rovnici (8), v níž u považujeme za funkci proměnných x a y, derivujme parciálně podle proměnné x:

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Označíme-li $A = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}$, dostaneme z předchozí rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right).$$

Analogickým postupem bychom dostali

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right).$$

Poněvadž na charakteristikách platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_1\bigl(x(s), y(s), u(s)\bigr) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_2\bigl(x(s), y(s), u(s)\bigr) = 0$$

dostaneme vzhledem k (7):

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}a + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}b\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}a + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}b\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_1\bigl(x(s), y(s), u(s)\bigr) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_2\bigl(x(s), y(s), u(s)\bigr) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = c.$$

□

Nechť $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$ je parametrický popis nějaké rovinné křivky, a nechť f je reálná funkce se stejným definičním oborem jako funkce φ, ψ. Podmínka

$$u\bigl(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)\bigr) = f(\sigma) \tag{9}$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici* (6). Okrajovou úlohu řešíme analogicky jako okrajovou úlohu (1), (3):

Nechť charakteristiky rovnice (6) mají parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x(s, c_1, c_2, c_3), \\ y &= y(s, c_1, c_2, c_3), \\ u &= u(s, c_1, c_2, c_3), \end{aligned} \tag{10}$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou nějaké konstanty. Má-li soustava rovnic

$$\begin{aligned} x(0, c_1, c_2, c_3) &= \varphi(\sigma), \\ y(0, c_1, c_2, c_3) &= \psi(\sigma), \\ u(0, c_1, c_2, c_3) &= f(\sigma) \end{aligned} \tag{11}$$

pro neznámé c_1, c_2, c_3 řešení $c_1 = c_1(\sigma)$, $c_2 = c_2(\sigma)$, $c_3 = c_3(\sigma)$, dosadíme je do prvních dvou rovnic soustavy (10):

$$\begin{aligned} x &= x\big(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma), c_3(\sigma)\big), \\ y &= y\big(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma), c_3(\sigma)\big). \end{aligned}$$

Má-li tato soustava rovnic řešení $\sigma = \sigma(x, y)$, $s = s(x, y)$, dosadíme je do třetí z rovnic (10). Tím dostaneme řešení úlohy (6), (9) ve tvaru

$$u = u\Big(s(x, y), c_1\big(\sigma(x, y)\big), c_2\big(\sigma(x, y)\big), c_3\big(\sigma(x, y)\big)\Big).$$

1.4 Quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnici

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u)\,, \quad (12)$$

kde $a_1, \dots, a_n, f$ jsou funkce $n+1$ proměnných a u je (hledaná) funkce n proměnných, nazýváme *quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu*; v případě $f \equiv 0$ *homogenní*, v opačném *nehomogenní.* Pokud funkce $a_1, \dots, a_n$ nezávisí na poslední proměnné a funkce f závisí na poslední proměnné lineárně, nazýváme tuto rovnici *lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu.*

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x_1(s) &= a_1\big(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)\big)\,, \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x_n(s) &= a_n\big(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)\big)\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(t) &= f\big(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)\big), \end{aligned}$$

nazýváme *(rozšířená) charakteristická soustava rovnice* (12). Trajektorie $\big(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)\big)$ řešení charakteristické soustavy (křivky v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$) nazýváme *charakteristiky rovnice* (12).

Buď $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená množina a

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, x_n = \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in D\}$$

regulární $(n-1)$-rozměrná nadplocha v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$. Dále buď $u_0 = u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ spojitá funkce definovaná na D. Podmínka

$$u(\varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})) = u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})\,, \qquad (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in D \quad (13)$$

se nazývá *okrajová podmínka* pro rovnici (12).

Jsou-li funkce $a_1, \dots, a_n$, f diferencovatelné, pak charakteristická soustava s Cauchyovými podmínkami

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})\,, \\ &\vdots \\ x_n(0) &= \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})\,, \\ u(0) &= u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})\,, \end{aligned}$$

má pro každé $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in D$ jediné řešení (podle Picardovy-Lindelöfovy věty, viz např. Kalas J., Ráb M.: Obyčejné diferenciální rovnice, MU 2001, str. 64). Označme toto řešení

$$\big(\psi_1(s, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, \psi_n(s, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \psi_{n+1}(s, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})\big)\,.$$

Platí

$$\psi_1(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\ \dots,\psi_n(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),$$
$$\psi_{n+1}(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=u_0(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$$

tedy

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\sigma_j}(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=\frac{\partial\varphi_i}{\partial\sigma_j}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\ i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots n-1,$$
$$\text{pro každé } (\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\in D$$

a dále

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial s}(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=a_i\big(\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),u_0(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\big)\,.$$

Funkcemi $\psi_1,\dots,\psi_n$ je určeno zobrazení $\Psi:\mathbb{R}\times D\to\mathbb{R}^n$. Jacobián $J=J(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$ zobrazení Ψ v bodě $(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$ je

$$\begin{vmatrix} a_1(\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) & \dots & a_n(\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma_1}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\sigma_1}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma_{n-1}}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\sigma_{n-1}}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Je-li $J(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\neq 0$ pro každé $(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\in D$, existuje inversní zobrazení $\Psi^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\times D$ (podle věty o existenci inversního zobrazení, viz např. Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU 1999, str. 84).

Položme $u(x_1,\dots,x_n)=\psi_{n+1}\left(\Psi^{-1}(x_1,\dots,x_n)\right)$. Pak u je řešení úlohy (12), (13):

$$\sum_{k=1}^n a_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\partial s}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\sigma_j}\frac{\partial\sigma_j}{\partial x_k}\right)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\sum_{k=1}^n\frac{\partial s}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\sigma_j}\sum_{k=1}^n\frac{\partial\sigma_j}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}=$$
$$=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\partial s}{\partial s}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\sigma_j}\frac{\partial\sigma_j}{\partial s}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=f\,.$$

Toto řešení je jediné.

1.5 Kanonický tvar parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných lineární v prvních derivacích

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y,u), \tag{14}$$

funkce a, b jsou definovány na množině $G\subseteq\mathbb{R}^2$, funkce f je definována na množině $G\times\mathbb{R}$, pro funkce a, b platí $a(x,y)\neq 0\neq b(x,y)$ pro $(x,y)\in G$. Parciální rovnici (14) přiřadíme její obyčejnou *charakteristickou rovnici*

$$y'=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}, \tag{15}$$

kde $'$ označuje obyčejnou derivaci podle x. Předpokládejme, že charakteristická rovnice (15) má řešení, které lze implicitně zapsat ve tvaru

$$\varphi(x,y)=C, \tag{16}$$

kde C je integrační konstanta. Pak je $\varphi_x(x,y) + y'\varphi_y(x,y) = 0$, tj.

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0. \tag{17}$$

Poznamenejme, že charakteristická rovnice lineární homogenní rovnice ve dvou nezávisle proměnných (1) je podílem jednotlivých rovnic charakteristické soustavy (2) této rovnice a tedy rovnost (16) vyjadřuje charakteristiky rovnice (1) také ve smyslu oddílu 1.1.

Položme

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = y.$$

Pak $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \varphi_x(x,y)$, tedy na množině $H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_x(x,y) \neq 0\big\} \subseteq G$ je zobrazení $(\xi,\eta) : H \to \mathbb{R}^2$ prosté. Toto zobrazení na množině H transformuje rovnici (14) na rovnici

$$au_\xi\varphi_x + b(u_\xi\varphi_y + u_\eta) = f.$$

Tuto rovnici lze upravit na tvar

$$(a\varphi_x + b\varphi_y)\,u_\xi + bu_\eta = f,$$

takže vzhledem k (17) a předpokládané nenulovosti funkce b platí

$$u_\eta(\xi,\eta) = F(\xi,\eta,u),$$

kde $F = f/b$. Tato rovnice je *kanonickým tvarem* rovnice (14). Poněvadž se v ní vyskytuje pouze jedna parciální derivace, lze ji považovat za rovnici obyčejnou takovou, že hledaná funkce u je funkcí jedné nezávisle proměnné η a závisí na parametru ξ.

2 Cvičení

Najděte obecné řešení rovnice

1) $u_x = 6x^2u_y$

2) $(z+y-x)u_x + (z+x-y)u_y + zu_z = 0$

3) $u_x + 2u_y = 3$

4) $u_x + xu_y = u$

Najděte řešení rovnice, které splňuje danou podmínku

5) $u_x + yu_y = 0$, $u(0,y) = \dfrac{1}{y}$

6) $u_t + au_x = 0$, $u(x,0) = \sin x$

7) $u_t + au_x = x^2t + 1$, $u(x,0) = x + 2$

8) $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$, $u(x,a) = x^2 - a^2$

9) $xzu_x + yzu_y + xy = 0$, $u\left(x, \dfrac{1}{x}\right) = 1$

10) $2xu_x + yu_y = 4u + 1$, $u(x,1) = x^2$

Výsledky: **1)** $u(x,y) = \Phi(2x^3+y)$ **2)** $u(x,y,z) = \Phi\big(x+y-2z, z^2(x-y)\big)$ **3)** $u(x,y) = \frac{3}{2}+\Phi(2x-y)$ **4)** $u(x,y) = \mathrm{e}^x\Phi(x^2-2y)$ **5)** $u(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{y}$ **6)** $u(x,t) = \sin(x-at)$ **7)** $u(x,t) = \frac{a^2}{12}t^4 - \frac{ax}{3}t^3 + \frac{x^2}{2}t^2 - (a-1)t + x + 2$ **8)** $u(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2a^2 - a\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ **9)** $u(x,y) = \sqrt{2-xy}$ **10)** $u(x,y) = x^2 + \frac{1}{4}(y^4-1)$