Téma 2: Jednoduchá korelační analýza

Úkol 1.: **Testování nezávislosti ordinálních veličin**
12 různých softwarových firem nabízí speciální programové vybavení pro vedení účetnictví. Jednotlivé programy byly posouzeny odbornou komisí složenou z počítačových odborníků a komisí složenou z profesionálních účetních. Úkolem bylo doporučit vhodný program na základě stanovení pořadí jednotlivých programů. Výsledky posouzení:

Produkt firmy číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pořadí dle odborníků	6	7	1	8	4	2,5	9	12	10	2,5	5	11
Pořadí dle účetních	4	5	2	10	6	1	7	11	8	3	12	9

Vypočtěte Spearmanův koeficient pořadové korelace a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že hodnocení obou komisí jsou nezávislá.
Návod:
Testujeme vlastně nulovou hypotézu, že koeficient pořadové korelace je roven nule proti oboustranné alternativě.
Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných X (hodnocení 1. komise), Y (hodnocení 2. komise) a 12 případech. Do proměnných X a Y zapíšeme zjištěná hodnocení.
Statistiky - Neparametrické statistiky - Korelace - OK - vybereme Vytvořit detailní report - Proměnné X, Y - OK - Spearmanův koef. R. Dostaneme tabulku

	Spearmanovy korelace (Tabulka1) ChD vynechány párově Označ. korelace jsou významné na hl. p <,0500(			
Dvojice proměnných	Počet plat.	Spearman R	t(N-2)	Úroveň p
X & Y	12	0,714537	3,229806	0,009024

Spearmanův koeficient pořadové korelace nabývá hodnoty 0,7145, testová statistika se realizuje hodnotou 3,2298, odpovídající p-hodnota je 0,009024, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o pořadové nezávislosti hodnocení dvou komisí ve prospěch oboustranné alternativy.
Upozornění: Systém STATISTICA používá při testování hypotézy o pořadové nezávislosti veličn X, Y asymptotickou variantu testu bez ohledu na rozsah náhodného výběru. Pokud rozsah výběru nepřesáhne 20, měli bychom systém STATISTCA použít jen k výpočtu r_S a testování bychom měli provést pomocí tabelované kritické hodnoty. V našem případě pro $n = 12$ a $\alpha = 0,05$ je kritická hodnota 0,5804. Vidíme, že nulovou hypozézu zamítáme na hladině významnosti 0,05, protože $0,7145 \geq 0,5804$.

Úkol k samostatnému řešení: Bylo sledováno 10 žáků. Na základě psychologického vyšetření byli tito žáci seřazeni podle nervové lability (čím byl žák labilnější, tím dostal vyšší pořadí R_i). Kromě toho sledování žáci dostali pořadí Q_i na základě svých výsledků v matematice (nejlepší žák v matematice dostal pořadí 1). Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

Pořadí R_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pořadí Q_i	9	3	8	5	4	2	10	1	7	6

Vypočtěte Spearmanův koeficient pořadové korelace a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že nervová labilita a výsledky v matematice jsou nezávislé.
Výsledek: $r_S = -0{,}127$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

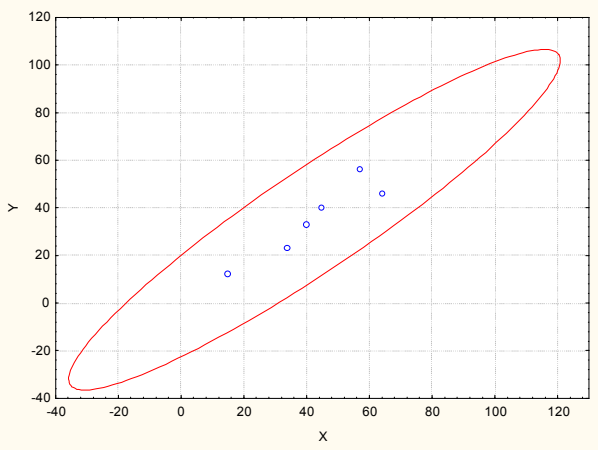
Úkol 2.: **Testování nezávislosti intervalových a poměrových veličin**

Zjišťovalo se, kolik mg kyseliny mléčné je ve 100 ml krve matek provorodiček (veličina X) a u jejich novorozenců (veličina Y) těsně po porodu. Byly získány tyto výsledky:

Číslo matky	1	2	3	4	5	6
x_i	40	64	34	15	57	45
y_i	33	46	23	12	56	40

Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram, vypočtěte výběrový korelační koeficient, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro korelační koeficient a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti výsledků obou měření.

Návod: Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných X a Y a šesti případech. Obvyklým způsobem zobrazíme dvourozměrný tečkový diagram, s jehož pomocí posoudíme dvourozměrnou normalitu dat. Tedy:
Grafy - Bodové grafy - vypneme lineární proložení - Proměnné X, Y - OK - Detaily - Elipsa normální - OK. Ve vzniklém grafu upravíme měřítka na vodorovné a svislé ose:



Testování hypotézy o nezávislosti: Statistiky - Základní statistiky/tabulky - Korelační matice - OK - 1 seznam proměn. - X, Y - OK - na záložce Možnosti vybereme Zobrazit detailní tabulku výsledků - Výpočet.

Prom. X & prom. Y	Korelace (Tabulka3) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 (Celé případy vynechány u ChD) Průměr	Sm.Odch.	r(X,Y)	r2	t	p	N	Konst. záv.: Y	Směr. záv: Y	Konst. záv.: X	Směrnic záv.: X
X	42,50000	17,39828									
Y	35,00000	15,89969	0,934832	0,873912	5,265339	0,006232	6	-1,30823	0,854311	6,696994	1,022943

Ve výstupní tabulce je mj. hodnotu výběrového korelačního koeficientu R_{12} (r=0,9348), tzn. že mezi X a Y existuje silná přímá lineární závislost), hodnota testové statistiky (t = 5,2653) a p-hodnotu pro test hypotézy o nezávislosti (p=0,006232), H_0 tedy zamítáme na hladině významnosti

0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% jsme tedy prokázali, že mezi oběma koncentracemi existuje závislost.
Pro testování pomocí intervalu spolehlivosti zopakujme nejprve teori:
Nechť dvourozměrný náhodný výběr rozsahu n pochází z dvourozměrného normálního rozložení s koeficientem korelace ρ. Meze 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro ρ jsou:

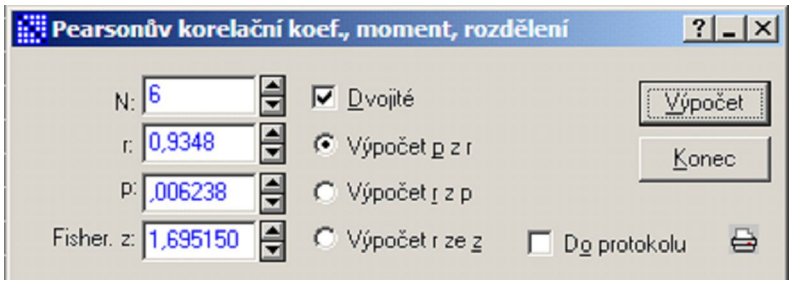
$$d = \mathrm{tgh}\left(Z - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right), \quad h = \mathrm{tgh}\left(Z + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right) \quad \text{přičemž} \quad \mathrm{tgh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R_{12}}{1-R_{12}}.$$

Výpočet mezí intervalu spolehlivosti: vytvoříme nový datový soubor s proměnnými DM a HM.
Do Dlouhého jména proměnné DM zapíšeme příkaz
= TanH(0,5*log((1+0,9348)/(1-0,9348))-VNormal(0,975;0;1)/sqrt(6-3))
a do Dlouhého jména proměnné HM zapíšeme příkaz
= TanH(0,5*log((1+0,9348)/(1-0,9348))+VNormal(0,975;0;1)/sqrt(6-3))

	1 DM	2 HM
1	0,510617	0,993014

95% interval spolehlivosti pro ρ má tedy meze 0,5106 a 0,9930, nepokrývá hodnotu 0
a tudíž hypotézu o nezávislosti veličin X, Y zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Poznámka: Pokud známe výběrový koeficient korelace a rozsah výběru, můžeme test nezávislosti veličin X, Y provést pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru**.**
Statistiky - Pravděpodobnostní kalkulátor - Korelace - zadáme n a r, zaškrtneme Výpočet p z r - Výpočet.



Úkol k samostatnému řešení: V náhodném výběru 10 dvoučlenných domácností byl zjišťován měsíční příjem (veličina X, v tisících Kč) a vydání za potraviny (veličina Y, v tisících Kč).

x_i	15	21	34	35	39	42	58	64	75	90
y_i	3	4,5	6,5	6	7	8	9	8	9,5	10,5

Vypočtěte výběrový koeficient korelace. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti veličin X, Y. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro ρ
Výsledek: $r_{12} = 0{,}9405$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05, s pravděpodobností aspoň 0,95 platí: $0{,}7623 < \rho < 0{,}9862$

Úkol 3.: **Porovnání dvou korelačních koeficientů**
V psychologickém výzkumu bylo vyšetřeno 426 hochů a 430 dívek. Ve skupině hochů činil výběrový koeficient korelace mezi verbální a performační složkou IQ 0,6033, ve skupině dívek činil 0,5833. Za předpokladu dvourozměrné normality dat testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že korelační koeficienty se neliší.
Návod: Nejprve zopakujeme teorii:
Nechť jsou dány dva nezávislé náhodné výběry o rozsazích n a n^* z dvourozměrných normálních rozložení s korelačními koeficienty ρ a ρ^*. Testujeme H_0: $\rho = \rho^*$ proti H_1: $\rho \neq \rho^*$. Označme R_{12} výběrový korelační koeficient 1. výběru a R_{12}^* výběrový korelační koeficient 2. výběru. Položme $Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R_{12}}{1-R_{12}}$ a $Z^* = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R_{12}^*}{1-R_{12}^*}$. Platí-li H_0, pak testová statistika $U = \frac{Z - Z^*}{\sqrt{\frac{1}{n-3}+\frac{1}{n^*-3}}}$ má asymptoticky rozložení N(0,1). Kritický obor pro test H_0 proti oboustranné alternativě tedy je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$. H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U \in W$.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Statistiky - Základní statistiky a tabulky - Testy rozdílů: r, %, průměry - OK - vybereme Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty. Do políčka r1 napíšeme 0,6033, do políčka N1 napíšeme 426, do políčka r2 napíšeme 0,5833, do políčka N2 napíšeme 430 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,6528, tedy nezamítáme nulovou hypotézu o shodě dvou koeficientů korelace na asymptotické hladině významnosti 0,05.