Lineární diskriminační analýza

Motivace:

Diskriminační analýza patří k vícerozměrným statistickým metodám a zabývá se klasifikací objektů do $r \geq 2$ skupin na základě znalosti vektorů pozorování těchto objektů. Zakladatelem DA je R. A. Fisher

Uveďme příklad z technické praxe: u výrobku daného typu potřebujeme rozhodnout, zda snese určitou zátěž. Na výrobku můžeme změřit hodnoty p kvantitativních znaků, např. hmotnost, odchylky rozměrů od normy, chemické složení apod., které tvoří vektor pozorování $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_p)'$. Jestliže výrobek vystavíme zátěži, může to znamenat jeho poškození nebo dokonce zničení. Proto vystavíme zátěži jen omezené množství výrobků, řekněme n výrobků, které tvoří tzv. informativní výběr. Pokud výrobek zátěž vydrží, zařadíme ho do 1. skupiny (nechť takových výrobků je n_1) , jinak do 2. skupiny (těchto výrobků je n_2). Na základě znalosti chování informativního výběru pak rozložíme prostor $\mathbf{R}_p$ na množiny B_1, B_2. Máme-li k dispozici nějaký další výrobek téhož druhu s vektorem pozorování $\mathbf{x}$, zařadíme ho do 1. skupiny, když $\mathbf{x} \in B_1$ a do 2. skupiny, když $\mathbf{x} \in B_2$. Výrobek tedy nemusíme vystavovat zátěži a riskovat jeho poškození nebo dokonce zničení.

Úkol diskriminační analýzy spočívá v nalezení takového rozkladu prostoru $\mathbf{R}_p$ na množiny $B_1, \ldots, B_r$, který umožní optimální rozhodnutí o příslušnosti objektu ke skupině.

Náhodný výběr z vícerozměrného rozložení

Nechť je dáno n objektů a na každém z těchto objektů měříme p znaků. Znamená to, že i-tý objekt je charakterizován p-rozměrným vektorem pozorování $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})'$, který považujeme za realizaci náhodného vektoru

$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ip})'$, i = 1, …, n. Všechny vektory pozorování uspořádáme do datové matice typu n x p: $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$.

Předpokládáme, že náhodný vektor $\mathbf{X}_i$ má
vektor středních hodnot

$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}$

a varianční matici

$\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,p}$.

Lze dokázat, že nestranným odhadem vektoru $\boldsymbol{\mu}$ je vektor výběrových průměrů

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}$, kde $M_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$ je výběrový průměr j-tého znaku, j = 1, …, p

a nestranným odhadem matice $\boldsymbol{\Sigma}$ je výběrová varianční matice

$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{X}_i - \mathbf{M})(\mathbf{X}_i - \mathbf{M})'$ řádu p.

Testy hypotéz o variančních maticích a vektorech středních hodnot

Nechť jsou dány dva p-rozměrné náhodné výběry o rozsazích n_1 a n_2 z p-rozměrných normálních rozložení $N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ a $N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$. Označme $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ vektory výběrových průměrů, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ výběrové varianční matice a $\mathbf{S}$ vážený průměr výběrových variančních matic, tj. $\mathbf{S} = \frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2}$.

a) **Test shody variančních matic (Boxův test)**

Testujeme hypotézu H_0: $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$ proti alternativní hypotéze H_1: $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ na hladině významnosti α. Test je založen na Boxově statistice:

$M = (n_1 + n_2 - 2) \ln (\det \mathbf{S}) - (n_1 - 1) \ln (\det \mathbf{S}_1) - (n_2 - 1) \ln (\det \mathbf{S}_2)$.

Označme konstantu $c_p = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)} \left(\frac{1}{n_1 - 1} + \frac{1}{n_2 - 1} - \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \right)$. (Tato konstanta zlepšuje aproximaci.)

Platí-li H_0, pak testová statistika MC_p má asymptoticky rozložení $\chi^2\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$.

Kritický obor: $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{p(p+1)}{2}\right), \infty \right)$.

Pokud $MC_p \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α.

b) **Test shody vektorů středních hodnot**

Nezamítneme-li na zvolené hladině významnosti hypotézu o shodě variančních matic, můžeme přistoupit k testování hypotézy H_0: $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ proti alternativní hypotéze H_1: $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ na hladině významnosti α.

Označme $T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$.

Nulovou hypotézu zamítneme na hladině významnosti α, když testová statistika

$\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{p(n_1 + n_2 - 2)} T^2 \geq F_{1-\alpha}(p, n_1+n_2-p-1)$.

Poznámka:

Zamítneme-li hypotézu o shodě vektorů středních hodnot, je vhodné provést testy dílčích hypotéz

H_{0j}: $\mu_{j1} = \mu_{j2}$ proti H_{1j}: $\mu_{j1} \neq \mu_{j2}$, j =1, ..., p. K tomu slouží dvouvýběrový t-test.

Hypotézu H_{0j} zamítneme na hladině významnosti α ve prospěch oboustranné alternativy, když

$$|T_i| = \frac{|M_{j1} - M_{j2}|}{\sqrt{s_{jj}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \geq t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$$, kde s_{jj} je j-tý diagonální prvek matice **S**.

Odvození bayesovského rozhodovacího pravidla pro dvě skupiny objektů

Nechť v 1. skupině je n_1 objektů, ve 2. skupině n_2 objektů, přičemž každý objekt je charakterizován p-rozměrným náhodným vektorem $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$.

Předpokládáme, že v i-té skupině má náhodný vektor $\mathbf{X}$ hustotu $\varphi_i(\mathbf{x})$, i = 1, 2.

Nechť H_i je jev „objekt patří do i-té skupiny“.

Apriorní pravděpodobnost $P(H_i)$ příslušnosti objektu k i-té skupině označíme π_i, i = 1, 2.

Známe-li u nějakého objektu vektor pozorování $\mathbf{x}$, můžeme podle Bayesova vzorce vypočítat aposteriorní pravděpodobnost příslušnosti objektu ke skupině:

$$P(H_i/\mathbf{X}=\mathbf{x}) = \frac{\pi_i \varphi_i(\mathbf{x})}{\pi_1 \varphi_1(\mathbf{x}) + \pi_2 \varphi_2(\mathbf{x})}, \quad i = 1, 2.$$

Nabízí se jednoduché rozhodovací pravidlo: zařadit nový objekt do té skupiny, u níž je aposteriorní pravděpodobnost větší.

Tedy objekt s vektorem pozorování $\mathbf{x}$ zařadíme do 1. skupiny, když $\pi_1\varphi_1(\mathbf{x}) > \pi_2\varphi_2(\mathbf{x})$, jinak ho zařadíme do 2. skupiny.

Součin $\pi_i\varphi_i(\mathbf{x})$ se nazývá diskriminační skór pro i-tou skupinu.

Lze ukázat, že bayesovské rozhodovací pravidlo je optimální v tom smyslu, že minimalizuje celkovou pravděpodobnost mylné klasifikace.

Konstrukce Fisherovy lineární diskriminační funkce pro dvě skupiny objektů

Předpokládejme nyní, že hustota pravděpodobnosti v i-té skupině je normální a má parametry $\boldsymbol{\mu}_i$, $\boldsymbol{\Sigma}_i$, tj.

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\boldsymbol{\Sigma}_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)'\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)\right),\ i = 1, 2.$$

Jestliže zlogaritmujeme diskriminační skór $\pi_i\varphi_i(\mathbf{x})$ a vynecháme člen $-\frac{p}{2}\ln(2\pi)$, který je společný pro obě skupiny,

dostaneme tzv. kvadratický diskriminační skór pro i-tou skupinu ve tvaru $-\frac{1}{2}\ln(\det\boldsymbol{\Sigma}_i) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)'\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i) + \ln\pi_i$, i = 1, 2.

Jsou-li varianční matice v obou skupinách stejné (společnou varianční matici označíme $\boldsymbol{\Sigma}$), obsahují oba kvadratické diskriminační skóry týž člen $-\frac{1}{2}\ln(\det\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{2}\mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}$. Po jeho vynechání obdržíme lineární diskriminační skór pro i-tou skupinu

– tzv. Andersonovu diskriminační statistiku - ve tvaru $\lambda_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}_i'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_i'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_i + \ln\pi_i$, i = 1, 2.

Objekt s vektorem pozorování $\mathbf{x}$ tedy zařadíme do 1. skupiny, když $\lambda_1(\mathbf{x}) > \lambda_2(\mathbf{x})$, jinak ho zařadíme do 2. skupiny.
Vzhledem k tomu, že máme jen dvě skupiny objektů, lze rozhodnutí o zařazení objektu do skupiny učinit na základě rozdílu

$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x}) - \lambda_2(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_1'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2) + \ln\pi_1 - \ln\pi_2$.

Funkce $\lambda(\mathbf{x})$ se nazývá Fisherova lineární diskriminační funkce. Označíme-li

$\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, $\gamma = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2) + \ln\pi_1 - \ln\pi_2$,

můžeme Fisherovu lineární diskriminační funkci psát ve tvaru
$\lambda(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x} + \gamma$.
Znamená to, že jsme našli takovou lineární kombinaci vektoru pozorování $\mathbf{x}$, která nám umožní minimalizovat celkovou pravděpodobnost mylného zařazení objektu do skupiny. Objekt s vektorem pozorování $\mathbf{x}$ tedy zařadíme do 1. skupiny, když $\lambda(\mathbf{x}) > 0$, jinak ho zařadíme do 2. skupiny.

Posouzení účinnosti diskriminace resubstituční metodou

Resubstituční metoda spočívá v uplatnění zkonstruovaného rozhodovacího pravidla na informativní výběr. Uvažujeme postupně všechny objekty z informativního výběru a jejich zařazení podle rozhodovacího pravidla porovnáme se skutečnou příslušností ke skupině. Stanovíme podíl správně a mylně zařazených objektů.

skutečnost	zařazení		součet
	1. skupina	2. skupina	
1. skupina	n_{11}	n_{12}	$n_{1.} = n_1$
2. skupina	n_{21}	n_{22}	$n_{2.} = n_2$
součet	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

Podíl správně zařazených objektů:

$$\frac{n_{11} + n_{22}}{n}$$

Podíl mylně zařazených objektů:

$$\frac{n_{12} + n_{21}}{n}$$

Modifikace pro případ neznámých parametrů

Při praktickém použití diskriminační analýzy většinou neznáme parametry $\boldsymbol{\mu}_1$, $\boldsymbol{\mu}_2$, $\boldsymbol{\Sigma}$ ani apriorní pravděpodobnosti π_1, π_2.

V takovém případě používáme odhady:

$\boldsymbol{\mu}_i \rightarrow \mathbf{M}_i$, i = 1, 2

$$\boldsymbol{\Sigma} \rightarrow \mathbf{S} = \frac{(n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$\pi_i \rightarrow \frac{n_i}{n}$, i = 1, 2.

Odhad Fisherovy lineární diskriminační funkce $\lambda(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x} + \gamma$:

$L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}'\mathbf{x} + g$, kde

$\mathbf{b}' = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)'\mathbf{S}^{-1}$, $g = -\frac{1}{2}\,\mathbf{b}'(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) + \ln p_1 - \ln p_2$.

Postup při lineární diskriminační analýze

1. Vzhledem k povaze úlohy určíme veličiny $X_1, ..., X_p$ a pořídíme $n_1 + n_2$ p-rozměrných pozorování tak, aby n_1 objektů pocházelo z 1. skupiny a n_2 objektů z 2. skupiny.
2. Na zvolené hladině významnosti α testujeme hypotézy o normalitě rozložení v obou skupinách.
3. Vypočteme odhady $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}$, p_1, p_2.
4. Na zvolené hladině významnosti α testujeme hypotézy o shodě variančních matic a vektorů středních hodnot v obou skupinách.
5. Vypočteme odhad $L(\mathbf{x})$ Fisherovy lineární diskriminační funkce. Objekt s vektorem pozorování $\mathbf{x}$ přiřadíme k 1. skupině, když $L(\mathbf{x}) > 0$, jinak ho přiřadíme ke 2. skupině.
6. Účinnost diskriminace posoudíme metodou resubstituce.

Příklad

V souboru 50 rodin byly zjišťovány tyto údaje:

- zda v posledních dvou letech rodina navštívila jistou rekreační oblast (veličina ID, nabývá hodnoty 0 pro odpověď „ne“, hodnoty 1 pro odpověď „ano“)
- roční příjem v tisících dolarů (veličina X_1)
- postoj k cestování (veličina X_2, devítibodová škála, 1 = naprosto odmítavý, 9 = veskrze kladný)
- význam přičítaný rodinné dovolené (veličina X_3, devítibodová škála, 1 = nejnižší, 9 = nejvyšší)
- počet členů rodiny (veličina X_4)
- věk nejstaršího člena rodiny (veličina X_5).

Pro uvedená data sestrojte Fisherovu lineární diskriminační funkci, která pomocí veličin X_1, …, X_5 umožní rozlišit rodiny navštěvující uvedenou rekreační oblast od rodin, které do této oblasti nejezdí.

Datový soubor:

číslo	ID	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	číslo	ID	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1.	0	32,1	5	4	6	58,0	26.	0	48,2	3	5	4	43,0
2.	0	40,0	4	4	3	42,0	27.	0	54,5	7	3	3	37,0
3.	0	36,2	4	3	2	55,0	28.	0	38,2	2	5	3	49,0
4.	0	43,2	2	5	2	57,0	29.	0	41,7	4	2	3	40,0
5.	0	50,4	5	2	4	37,0	30.	1	50,2	5	8	3	43,0
6.	0	45,2	4	4	4	42,0	31.	1	70,3	6	7	4	61,0
7.	0	44,1	6	6	3	42,0	32.	1	62,9	7	5	6	52,0
8.	0	38,3	6	6	2	45,0	33.	1	48,5	7	5	5	36,0
9.	0	55,0	1	5	4	57,0	34.	1	52,7	6	6	4	55,0
10.	0	56,1	3	5	5	51,0	35.	1	75,0	8	7	5	68,0
11.	0	48,2	4	3	6	47,0	36.	1	46,2	5	3	3	62,0
12.	0	35,0	6	4	5	64,0	37.	1	57,0	2	4	6	51,0
13.	0	37,3	2	7	3	54,0	38.	1	64,1	4	5	4	57,0
14.	0	41,8	5	1	5	56,0	39.	1	68,1	4	6	5	45,0
15.	0	57,0	8	3	4	36,0	40.	1	73,4	6	7	5	44,0
16.	0	33,4	6	8	4	50,0	41.	1	71,6	5	8	4	64,0
17.	0	41,5	5	6	3	38,0	42.	1	56,2	1	8	6	54,0
18.	0	39,8	4	5	4	42,0	43.	1	49,3	4	2	3	56,0
19.	0	37,5	3	2	3	48,0	44.	1	62,0	5	6	2	58,0
20.	0	41,3	3	3	2	42,0	45.	1	50,8	4	7	3	45,0
21.	0	35,0	4	3	4	54,0	46.	1	63,6	7	4	7	55,0
22.	0	49,6	5	5	5	39,0	47.	1	54,0	6	7	4	58,0
23.	0	45,5	4	4	4	41,0	48.	1	49,0	5	4	3	60,0
24.	0	39,4	6	5	3	44,0	49.	1	68,0	6	6	6	46,0
25.	0	37,0	2	6	5	51,0	50.	1	62,1	5	6	3	56,0

Řešení:

Testování normality náhodných veličin $X_1, \ldots, X_5$ v daných dvou skupinách rodin pomocí S - W testu:

Pro skupinu rodin, které danou rekreační oblast nenavštěvují: Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Select cases – ID=0 – OK – Tabulky četností – Proměnné X1 až X5 – OK – Normalita – zaškrtneme S-W test – Testy normality

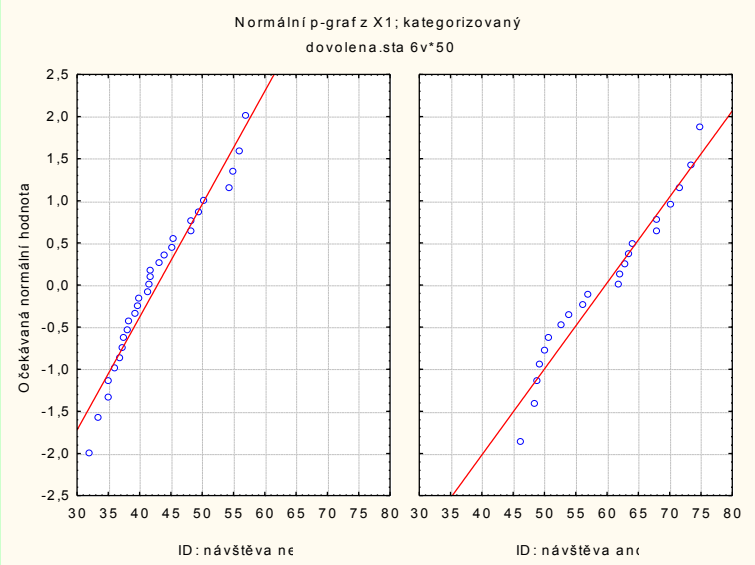
	Testy normality (dovolena.sta) Zhrnout podmínku: ID=0		
Proměnná	N	W	p
X1: roční příjem v tisících dolarů	29	0,940188	0,101411
X2: postoj k cestování (škála 9 bodů)	29	0,964071	0,412187
X3: význam rodinné dovolené (škála 9 bodů)	29	0,964432	0,420319
X4: počet členů rodiny	29	0,917696	0,026668
X5: věk nejstaršího člena	29	0,944508	0,131598

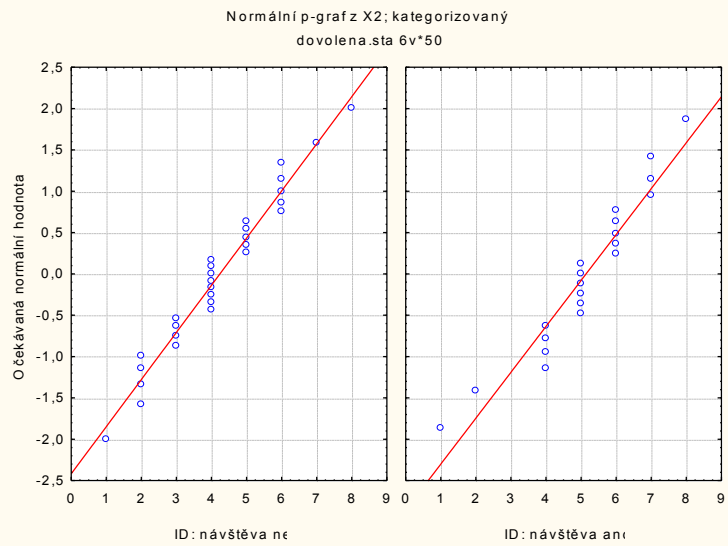
Pro skupinu rodin, které danou rekreační oblast navštěvují: Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Select cases – ID=1 – OK – Tabulky četností – Proměnné X1 až X5 – OK – Normalita – zaškrtneme S-W test – Testy normality

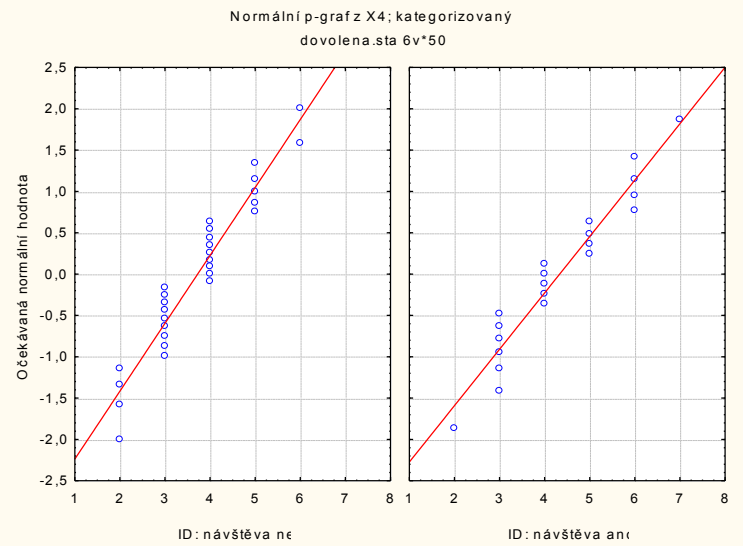
	Testy normality (dovolena.sta) Zhrnout podmínku: ID=1		
Proměnná	N	W	p
X1: roční příjem v tisících dolarů	21	0,935874	0,180430
X2: postoj k cestování (škála 9 bodů)	21	0,930271	0,139382
X3: význam rodinné dovolené (škála 9 bodů)	21	0,934717	0,171087
X4: počet členů rodiny	21	0,928224	0,126815
X5: věk nejstaršího člena	21	0,967589	0,679311

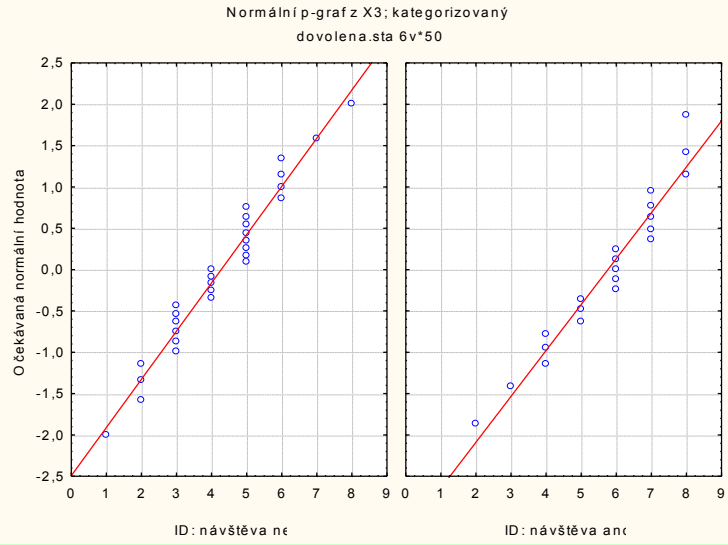
Na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o normalitě u veličiny X_4 ve skupině rodin, které danou rekreační oblast nenavštěvují.

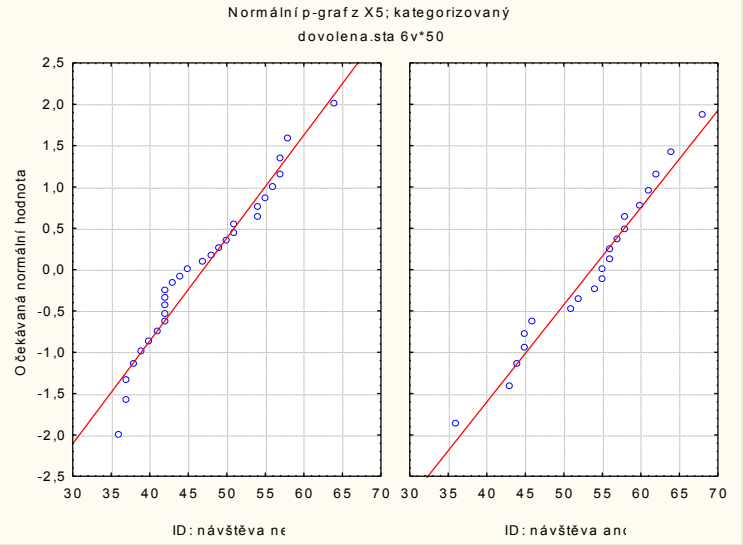
N-P ploty:
Grafy – 2D Grafy – Normální pravděpodobnostní grafy – Proměnné X1 až X5 – OK – na záložce Kategorizovaný zaškrtneme Kategorie X Zapnuto – Změnit proměnnou – ID – OK – OK




Normální p-graf z X2; kategorizovaný
dovolena.sta 6v*50
Očekávaná normální hodnota
ID: návštěva ne
ID: návštěva an


Normální p-graf z X4; kategorizovaný
dovolena.sta 6v*50
Očekávaná normální hodnota
ID: návštěva ne
ID: návštěva an

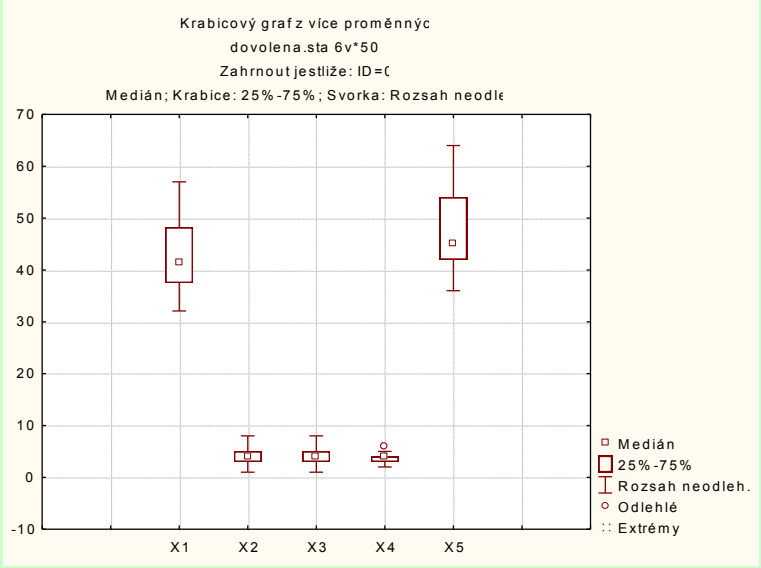

Normální p-graf z X3; kategorizovaný
dovolena.sta 6v*50
Očekávaná normální hodnota
ID: návštěva ne
ID: návštěva an


Normální p-graf z X5; kategorizovaný
dovolena.sta 6v*50
Očekávaná normální hodnota
ID: návštěva ne
ID: návštěva an

Odhad vektorů středních hodnot $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ lze získat více způsoby, uvedeme např. tento:
Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Select cases – ID=0 - Popisné statistiky – Proměnné X1 až X5 – Grupovací proměnná ID=0 – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme pouze N a průměr – Souhrn

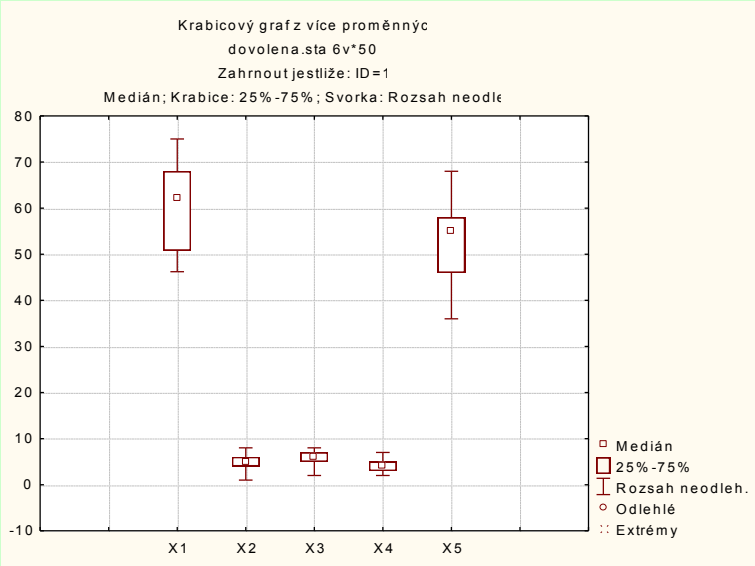
	Popisné statistiky (dovolena.sta) Zhrnout podmínku: ID=0	
Proměnná	N platných	Průměr
X1	29	42,84483
X2	29	4,24138
X3	29	4,27586
X4	29	3,72414
X5	29	46,93103

Krabicové grafy:
Grafy – 2D Grafy – Krabicové grafy – Vícenásobný – Závisle proměnné X1 až X5 – OK – OK



Nyní změníme podmínku ID = 1

	Popisné statistiky (dovolena.sta) Zhrnout podmínku: ID=1	
Proměnná	N platných	Průměr
X1	21	59,76190
X2	21	5,14286
X3	21	5,76190
X4	21	4,33333
X5	21	53,61905



Odhad varianční matice $\mathbf{S}_1$:
Statistiky – Vícerozměrná regrese – Select cases ID=0 – OK – Proměnné - Závislá proměnná X5, Seznam nezávisle proměnných X1 až X4 – OK – OK - Residua/předpoklady/předpovědi – Popisné statistiky – Další statistiky - Kovariance

	Kovariance (dovolena.sta) Zhrnout podmínku: ID=0				
Proměnná	X1	X2	X3	X4	X5
X1	49,1947	0,99594	-2,24138	1,094951	-24,1647
X2	0,9959	2,76108	-0,31897	0,140394	-4,7328
X3	-2,2414	-0,31897	2,63547	-0,171182	1,1268
X4	1,0950	0,14039	-0,17118	1,278325	1,9446
X5	-24,1647	-4,73276	1,12685	1,944581	57,2808

Odhad varianční matice $\mathbf{S}_2$: Změníme podmínku ID=1

	Kovariance (dovolena.sta) Zhrnout podmínku: ID=1				
Proměnná	X1	X2	X3	X4	X5
X1	83,59048	4,300714	6,39048	4,70333	16,25476
X2	4,30071	2,728571	0,03571	0,20000	1,05714
X3	6,39048	0,035714	2,79048	0,03333	-1,04524
X4	4,70333	0,200000	0,03333	1,83333	-2,46667
X5	16,25476	1,057143	-1,04524	-2,46667	63,84762

Odhad společné varianční matice $\mathbf{S}$:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X1	63,53	2,37	1,36	2,60	-7,32
X2	2,37	2,75	-0,17	0,17	-2,32
X3	1,36	-0,17	2,70	-0,09	0,22
X4	2,60	0,17	-0,09	1,51	0,11
X5	-7,32	-2,32	0,22	0,11	60,02

V systému STATISTICA tento odhad nelze získat přímo, matice $\mathbf{S}$ se musí počítat podle vzorce $\mathbf{s} = \frac{(n_1 - 1)\tilde{\mathbf{S}}_1 + (n_2 - 1)\tilde{\mathbf{S}}_2}{n_1 + n_2 - 2}$.

V systému SPSS postupujeme takto:
Analyze – Classify – Discriminant – Grouping Variable ID – Define Range 0, 1 – Continue – Statistics – v Matrices zaškrtneme Within –group covariances – Continue – OK

Pooled Within-Groups Matrices[a]

		roční příjem v tisících dolarů	postoj k cestování (škála 9 bodů)	význam rodinné dovolené (škála 9 bodů)	počet členů rodiny	věk nejstaršího člena
Covariance	roční příjem v tisících dolarů	63,526	2,373	1,355	2,598	-7,323
	postoj k cestování (škála 9 bodů)	2,373	2,748	-,171	,165	-2,320
	význam rodinné dovolené (škála 9 bodů)	1,355	-,171	2,700	-,086	,222
	počet členů rodiny	2,598	,165	-,086	1,510	,107
	věk nejstaršího člena	-7,323	-2,320	,222	,107	60,017

a. The covariance matrix has 48 degrees of freedom.

Boxův test shody variančních matic:

Statistika $M = (n_1 + n_2 - 2) \ln(\det \mathbf{S}) - (n_1 - 1) \ln(\det \mathbf{S}_1) - (n_2 - 1) \ln(\det \mathbf{S}_2) = 26{,}6179$

Konstanta zlepšující aproximaci $C_p = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)} \left(\frac{1}{n_1 - 1} + \frac{1}{n_2 - 1} - \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \right) = 0{,}8847$

Testová statistika $MC_p = 23{,}5468$

Kritický obor: $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{p(p+1)}{2}\right), \infty \right) = \left\langle \chi^2_{0,95}(10), \infty \right) = \langle 24{,}9958, \infty \rangle$.

Protože testová statistika neleží v kritickém oboru, nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu o shodě variančních matic $\mathbf{\Sigma}_1$, $\mathbf{\Sigma}_2$.

Tento test není v systému STATISTICA implementován. Lze ho provést pomocí systému SPSS:

Analyze – Classify – Discriminant – Grouping Variable ID – Define Range 0, 1 – Continue – Statistics – v Descriptives zaškrtneme Box's M – Continue – OK

Test Results

Box's M		26,617
F	Approx.	1,566
	df1	15
	df2	7425,637
	Sig.	,075

Tests null hypothesis of equal population covariance matrices.

Test shody vektorů středních hodnot:

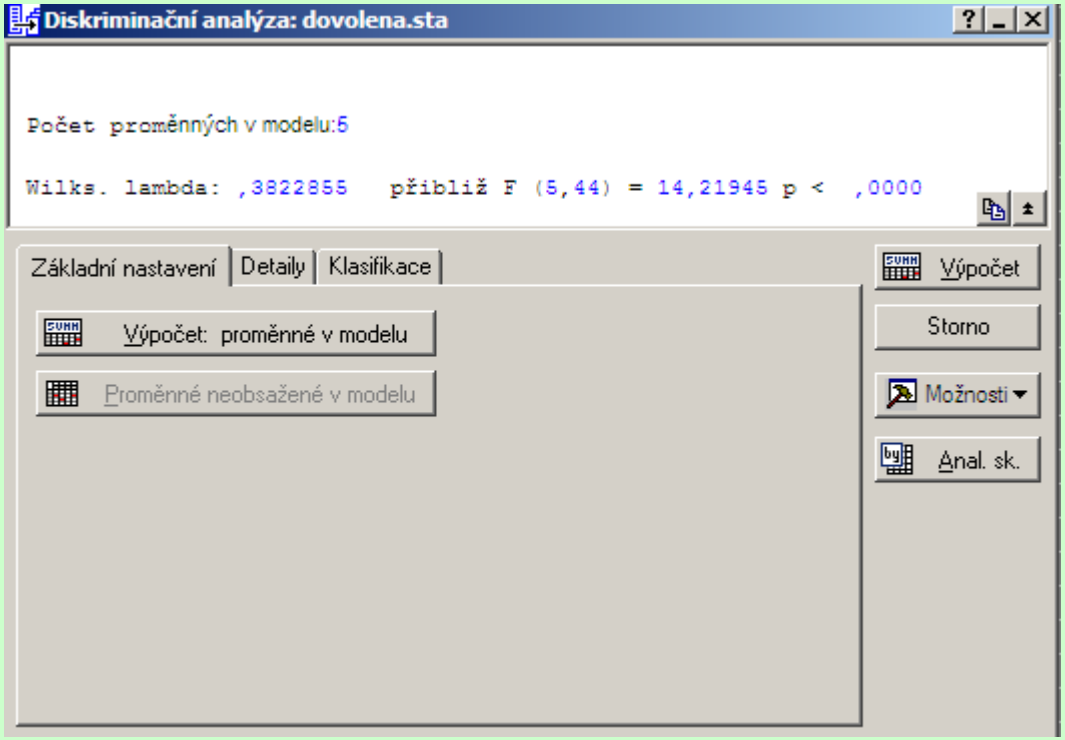
Testová statistika $\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{p(n_1 + n_2 - 2)} \cdot \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) = 14{,}2194$

Kvantil $F_{1-\alpha}(p, n_1+n_2-p-1) = F_{0,95}(5,44) = 2{,}427$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o shodě vektorů středních hodnot $\boldsymbol{\mu}_1$, $\boldsymbol{\mu}_2$.

Výpočet testové statistiky v systému STATISTICA:

Statistiky – Vícerozměrné průzkumné techniky – Diskriminační analýza - Proměnné – Grupovací proměnná ID, Seznam nezávislých proměnných X1 až X5 — OK – OK



Upozornění: Test shody vektorů středních hodnot lze v systému STATISTICA provést i jinak:
Statistiky – Základní statistiky/tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK – Proměnné – Závisle proměnné X1 až X5, Grupovací proměnná ID – OK – na záložce Možnosti zaškrtneme Vícerozměrný test. V záhlaví výstupní tabulky se zobrazí realizace testové statistiky a příslušná p-hodnota.

Individuální t-testy

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK – Proměnné – Závisle proměnné X1 až X5, Grupovací proměnná ID – OK - Výpočet

t-testy; grupováno: ID (dovolena)
Skup. 1: návštěva ne
Skup. 2: návštěva ano

Proměnná	Průměr návštěva ne	Průměr návštěva ano	t	sv	p	Poč.plat návštěva ne	Poč.plat. návštěva ano	Sm.odch. návštěva ne	Sm.odch. návštěva ano
X1	42,84483	59,76190	-7,40751	48	0,000000	29	21	7,013894	9,142783
X2	4,24138	5,14286	-1,89805	48	0,063712	29	21	1,661651	1,651839
X3	4,27586	5,76190	-3,15623	48	0,002760	29	21	1,623412	1,670472
X4	3,72414	4,33333	-1,73042	48	0,089980	29	21	1,130630	1,354006
X5	46,93103	53,61905	-3,01289	48	0,004122	29	21	7,568407	7,990471

Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 jsou odlišné střední hodnoty proměnných X_1, X_3, X_5. U proměnných X_2 a X_4 se odlišnost neprokázala, z dalšího zpracování je však vyřazovat nebudeme.

Stanovení odhadů apriorních pravděpodobností:

$p_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{29}{50} = 0{,}58$, $p_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{21}{50} = 0{,}42$

Stanovení odhadu Fisherovy lineární diskriminační funkce:

$\mathbf{b}' = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)'\mathbf{S}^{-1} = (-0{,}2865 \;\; -0{,}2556 \;\; -0{,}4169 \;\; 0{,}0736 \;\; -0{,}1527)$

$g = -\frac{1}{2}\,\mathbf{b}'(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) + \ln p_1 - \ln p_2 = 24{,}7666$

$L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}'\mathbf{x} + g = -0{,}2685X_1 - 0{,}2556X_2 - 0{,}4169X_3 + 0{,}0736X_4 - 0{,}1527X_5 + 24{,}7666$

Statistiky – Vícerozměrné průzkumné techniky – Diskriminační analýza - Proměnné – Grupovací proměnná ID, Seznam nezávislých proměnných X1 až X5 — OK – OK – na záložce Klasifikace zvolíme Klasifikační funkce. Dostaneme tabulku tvaru:

	Klasifikační funkce; grupovací : ID (dovolena)	
Proměnná	návštěva ne p=,58000	návštěva ano p=,42000
X1	0,6369	0,9054
X2	1,7840	2,0395
X3	1,3391	1,7560
X4	1,1866	1,1130
X5	0,9216	1,0743
Konstant	-44,6709	-69,4375

Abychom získali odhad Fisherovy lineární diskriminační funkce, přidáme do této tabulky novou proměnnou a do jejího Dlouhého jména napíšeme =v1-v2

	Klasifikační funkce; grupovací : ID (dovolena)		
Proměnná	návštěva ne p=,58000	návštěva ano p=,42000	NProm =v1-v2
X1	0,6369	0,9054	-0,26847
X2	1,7840	2,0395	-0,25557
X3	1,3391	1,7560	-0,41694
X4	1,1866	1,1130	0,073566
X5	0,9216	1,0743	-0,15266
Konstant	-44,6709	-69,4375	24,76658

Posouzení účinnosti diskriminace resubstituční metodou:

skutečnost	zařazení		součet
	návštěva ne	návštěva ano	
návštěva ne	27	2	29
návštěva ano	5	16	21
součet	32	18	50

Podíl správně zařazených objektů:

$$\frac{n_{11} + n_{22}}{n} = \frac{27 + 16}{50} = 0,86$$

Podíl mylně zařazených objektů:

$$\frac{n_{12} + n_{21}}{n} = \frac{5 + 2}{50} = 0,14$$

Na záložce Klasifikace zvolíme Klasifikační matice.

Skup.	Klasifikační matice (dovolena) Řádky: pozorované klasifikace Sloupce: předpovězené klasifikace % správných	návštěva ne p=,58000	návštěva ano p=,42000
návštěva ne	93,10345	27	2
návštěva ano	76,19048	5	16
Celkem	86,00000	32	18

Pro určení chybně zařazených případů zvolíme na záložce Klasifikace možnost Klasifikace případů. Zjistíme, že v 1. skupině došlo k mylnému zařazení u rodin č. 9 a 10, ve 2. skupině u rodin číslo 30, 33, 36, 43, 45.

Klasifikace nového případu

Předpokládejme nyní, že jsme prozkoumali další rodinu, která má roční příjem 51,8 tisíc dolarů, k cestování zaujímá postoj ohodnocený 6 body, rodinné dovolené přičítá význam ohodnocený 7 body, má 4 členy a nejstaršímu členovi je 51 let. Na základě těchto údajů se pokusíme pomocí Fisherovy lineární diskriminační funkce zařadit tuto rodinu do skupiny rodin, které buď navštěvují nebo nenavštěvují danou rekreační oblast.

$L(\mathbf{x}) = -0,2685X_1 - 0,2556X_2 - 0,4169X_3 + 0,0736X_4 - 0,1527X_5 + 24,7666 =$

$= -0,2685.51,8 - 0,2556.6 - 0,4169.7 + 0,0736.4 - 0,1527.51 + 24,7666 = -1,0836.$

Protože $L(\mathbf{x}) < 0$, zařadíme tuto rodinu do skupiny rodin, které navštěvují danou rekreační oblast.

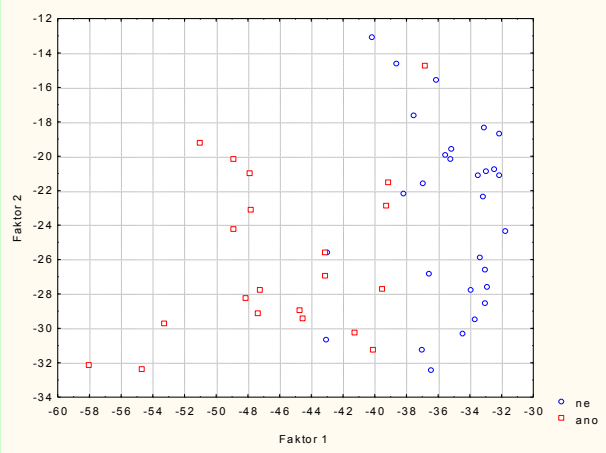
Porovnání s náhodnou klasifikací

Kdybychom zařazovali rodiny do skupin náhodně, pouze s ohledem na apriorní pravděpodobnosti π_1, π_2, tak bychom s pravděpodobností π_1 našli rodinu patřící do 1. skupiny, avšak s pravděpodobností π_2 bychom ji mylně zařadili do 2. skupiny. Naopak s pravděpodobností π_2 najdeme rodinu patřící do 2. skupiny, kterou s pravděpodobností π_1 mylně zařadíme do 1. skupiny. Celková pravděpodobnost mylné klasifikace je tedy: $\pi_1\pi_2 + \pi_2\pi_1 = 2\pi_1(1- \pi_1)$. Nahradíme-li apriorní pravděpodobnosti π_1, π_2 jejich odhady p_1, p_2 , dostaneme odhad celkové pravděpodobnosti mylné klasifikace $2p_1(1- p_1) = 2 \cdot \frac{29}{50} \cdot \frac{21}{50} = 0{,}4872$.

Použitím diskriminační analýzy jsme tedy dosáhli výrazného zlepšení, pravděpodobnost mylné klasifikace klesla na 0,14.

Grafické znázornění případů na ploše prvních dvou hlavních komponent

Jako aktivní vstup použijeme Faktorová skóre podle korelací z analýzy hlavních komponent. Grafy – Kategorizované grafy – Bodové grafy – Rozložení Přes sebe – Proměnné X: Faktor 1, Y: Faktor 2, X_Kategorie: ID - OK



Literatura

[1] J. Anděl: Matematická statistika, SNTL/Alfa, Praha 1978
[2] J. Anděl: Statistické metody, Matfyzpress, Praha 1993
[3] P. Hebák, J. Hustopecký, E. Jarošová, I. Pecáková: Vícerozměrné statistické metody (1), Informatorium, Praha 2004