

4. cvičení ATOM

„Atoms are completely impossible from the classical point of view.”

Richard Feynman

- Elektronová struktura atomů
- Kvantování momentu hybnosti
- Spin
- Atomy a magnetismus
- Pauliho vylučovací princip
- Periodická soustava prvků
- Charakteristické rtg záření
- Lasery

Prostudujte: HRW- kap. 41 *Vše o atomech* a zodpovězte otázky k této kapitole

Z historie

- ⇒ 1860–1885 spektroskopická měření (*G. R. Kirchhoff, R. W. von Bunsen*)
- ⇒ 1862 *A. J. Ångström*: přesné měření spektrálních čar H_{α} , H_{β} , H_{γ} , H_{δ}
- ⇒ 1885 *J. J. Balmer* odvodil empirickou formuli, která přesně dávala vlnové délky čtyř čar H_{α} , H_{β} , H_{γ} , H_{δ} (Balmerova formule), a předpověděl, že mohou existovat další serie
- ⇒ 1896 *P. Zeeman*: štěpení spektrálních čar v magnetickém poli (Zeemanův jev)
- ⇒ 1897 *J. J. Thomson*: objev elektronu
- ⇒ 1911 *E. Rutherford*: objev jádra
- ⇒ 1913 *N. Bohr*: model atomu vodíku
- ⇒ 1913 *H. G. J. Moseley*: zařazení prvků podle charakteristického rtg záření
- ⇒ 1913 *Franckův-Hertzův* experiment
- ⇒ 1922 *O. Stern, W. Gerlach*: prostorové kvantování
- ⇒ 1925 *G. Uhlenbeck, S. Goudsmit*: spin
- ⇒ 1925 *W. Pauli*: vylučovací princip
- ⇒ 1926 výpočet energiového spektra atomu vodíku pomocí maticové (*W. Pauli*) a vlnové (*E. Schrödinger*) mechaniky
- ⇒ 1926 *W. Heisenberg*: energiové spektrum atomu helia
- ⇒ 1929 vysvětlení jemné struktury – výsledek Diracovy rovnice
- ⇒ 1928–1930 Hartreeho-Fockova metoda autokonzistentního pole – nástroj pro mnohaelektronové atomy
- ⇒ 1947 Lambův posuv ve spektru atomu vodíku – důsledek interakce s elektromagnetickým vakuem (vysvětlení v rámci kvantové elektrodynamiky)
- ⇒ po roce 1959 iontové a atomové pasti
- ⇒ po roce 1975 laserové chlazení atomů (Nobelova cena za fyziku za rok 1997: http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1997/)
- ⇒ 1995 dosažení Boseho-Einsteinovy kondenzace v plynech atomů (Nobelova cena za fyziku za rok 2001: (http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2001/))

Problém č. 1 *Atom a magnetické pole*

- a) Sternův-Gerlachův experiment: HRW - kap. 41: 18 Ú
- b) Hyperjemná struktura základního stavu atomu vodíku: HRW - kap. 41: 20 C
- c) Spin-orbitální interakce: HRW - kap. 41: 22 Ú
- d) Paramagnetismus: HRW - kap. 32: 27 Ú (použijete zde Boltzmannův faktor jako v dodatku ke 2. cvičení)

Problém č. 2 *Jemná struktura (*)*

Konstanta jemné struktury je definována vztahem $\alpha = \frac{v_1}{c}$, kde v_1 je rychlost elektronu v základním stavu v Bohrově modelu atomu vodíku, a že hodnota konstanty α je přibližně rovna 1/137. Tato konstanta se poprvé objevila v teorii Arnolda Sommerfelda¹ (1916), který se snažil vysvětlit jemnou strukturu spektrálních čar (několik blízkých čar místo jedné čáry) na základě předpokladu, že v Bohrově modelu jsou možné nejen kruhové, ale i eliptické orbity. Sommerfeldův přístup založený na klasické představě dráhy elektronu se nepotvrdil, ale konstanta α se stala užitečnou konstantou v atomové fyzice (vybudované později na základě kvantové elektrodynamiky).

- (a) Ukažte, že $\alpha = v_1/c$, kde v_1 je rychlost elektronu v základním stavu v Bohrově modelu atomu vodíku, a že hodnota konstanty α je přibližně rovna 1/137.

V roce 1928 našel Dirac relativistickou vlnovou rovnici pro elektron. Její řešení pro atom vodíku dává energetické hladiny, které závisí nejen na hlavním kvantovém čísle n , ale i na kvantovém čísle $j = l \pm \frac{1}{2}$ vyjadřujícím celkový moment hybnosti elektronu $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$:

$$E_{n,j} = E_n + \frac{E_n \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right).$$

Zde E_n jsou energie, které plynou z řešení (nerelativistické) Schrödingerovy rovnice, a druhý člen vyjadřuje korekce jemné struktury, dané relativistickou změnou hmotnosti a spin-orbitální interakcí.

- (b) Určete rozdíl energií hladin $2p_{3/2}$ a $2p_{1/2}$ v atomu vodíku. Srovnajte toto rozštěpení s rozdílem energií mezi hladinami $3p_{3/2}$ a $3p_{1/2}$ v atomu sodíku (viz bod c v problému 1).

Problém č. 3 *Zeemanův jev (*)*

Říká se, že paní Bohrová potkala viditelně smutného mladého Wolfganga Pauliho v zahradě Bohrova institutu v Kodani, kde v akademickém roce 1922/1923 na pozvání N. Bohra působil. Na její starostlivou otázku, zda je opravdu nešťastný, Pauli odpověděl: „Samozřejmě, že jsem nešťastný. Nerozumím anomálnímu Zeemanovu jevu.“ My už nešťastní být nemusíme, víme z kvantové teorie už dost, abychom Zeemanovu jevu porozuměli.

¹ A. Sommerfeld je autorem proslulé knihy *Atombau und Spektrallinien* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig) z roku 1919.

M. Faraday (1791–1867) známý svou obdivuhodnou intuicí vyslovil myšlenku, že spektrum zářícího atomu by se mělo změnit, když jej umístíme do silného magnetického pole. Potvrzení této myšlenky vyžadovalo zdokonalení experimentálního zařízení, takže až na sklonku 19. století mohl holandský fyzik P. Zeeman² (1865–1943) experimentálně zjistit změnu spektrálních čar vyzařovaných zdrojem umístěným v magnetickém poli. Přesná měření ukazují, že spektrální čáry se vlivem magnetického pole štěpí do několika komponent. Tento jev, nazvaný po P. Zeemanovi, snadno vysvětlíme, uvažíme-li, že moment hybnosti, a tedy i magnetický dipólový moment jsou kvantovány.

Vložíme-li atom do vnějšího magnetického pole ($\vec{B} = B \vec{e}_z$), jeho energie se změní, protože

$$\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

kde

$$\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m} \vec{L} + \frac{e\hbar}{2m} \vec{S}$$

je magnetický dipólový moment atomu (μ_B je Bohrov magneton). Zdůrazněme, že gyromagnetický poměr charakterizující spin \vec{S} elektronu je roven dvojnásobku gyromagnetického poměru pro jeho orbitální moment hybnosti \vec{L} . Vzhledem ke spin-orbitální interakci je prostorově kvantován celkový moment hybnosti

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

a nikoli odděleně orbitální moment hybnosti \vec{L} a spin \vec{S} . To znamená, že magnetický dipólový moment atomu musíme vyjádřit pomocí celkového momentu hybnosti \vec{J} . Tato úloha se řeší v kvantové mechanice s tímto výsledkem³:

$$\mu_z = -\frac{e\hbar}{2m} g m_j \quad (*)$$

kde

$$J_z = \hbar m_j, \quad J = \sqrt{j(j+1)} \hbar$$

a

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

je Landého faktor. Víme-li, jak se štěpí energiové hladiny atomu vloženého do magnetického pole, můžeme již snadno nalézt frekvence $\omega_k = \frac{E_k - E_0}{\hbar}$ jednotlivých komponent spektrální čáry s frekvencí $\omega_0 = \frac{E_0 - E_n}{\hbar}$:

$$\omega_k = \omega_0 + \frac{e\hbar}{2m} B g m_j$$

² Za výzkum vlivu magnetismu na záření P. Zeeman a H. A. Lorentz (oba Holanďané) obdrželi roku 1902 Nobelovu cenu.

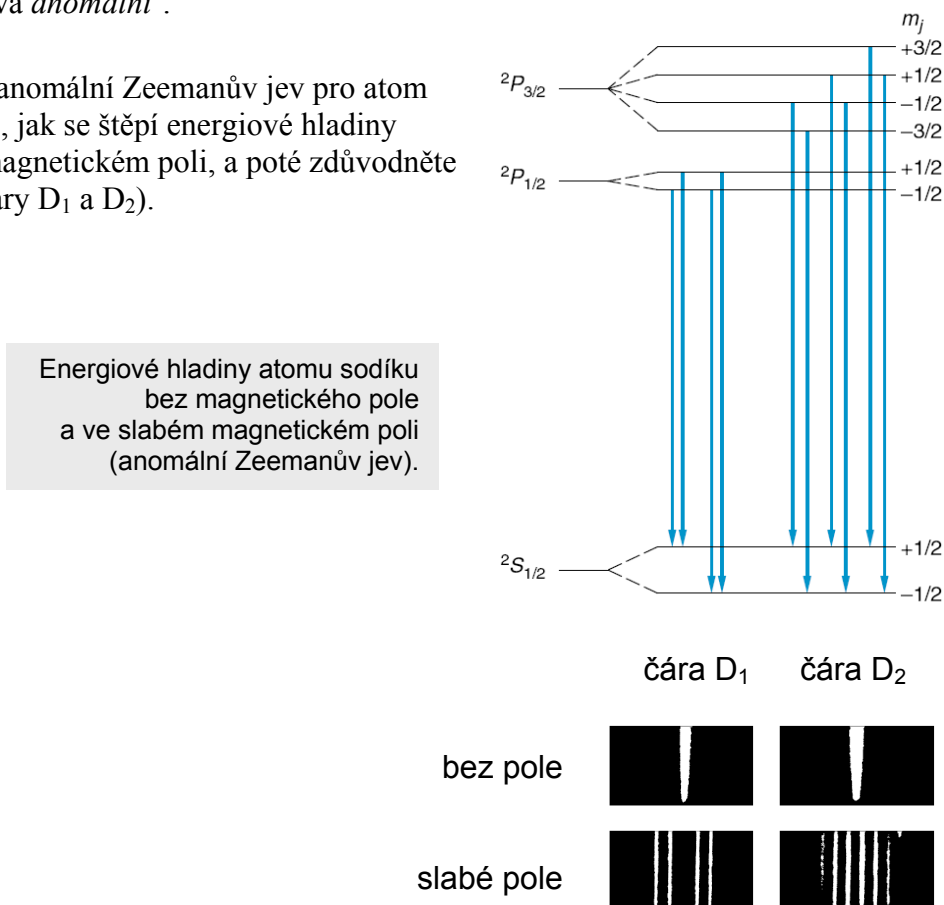
³ μ_z v rovnici (*) je rovno z-ové složce $\vec{\mu}_{e11}$ na obr. 41.7 v HRW.

přičemž pro optické dipólové přechody⁴ musí být splněno *výběrové pravidlo* pro magnetické kvantové číslo

$$\Delta m_j = 0, \pm 1.$$

Dále budeme uvažovat atom s jedním valenčním elektronem, takže $s = 1/2$. Připomeňme, že potom také kvantová čísla j a m_j jsou poločíselná. V tomto případě se Zeemanův jev nazývá *anomální*⁵.

Úkol 1: Vysvětlete anomální Zeemanův jev pro atom sodíku (tj. nalezněte, jak se štěpí energiové hladiny atomu ve slabém⁶ magnetickém poli, a poté zdůvodněte štěpení spektrální čáry D₁ a D₂).



Úkol 2: *Magnetické pole Slunce.* Magnetické pole Slunce a jiných hvězd lze určit ze zeemanovského rozštěpení spektrálních čar. Sodíková spektrální čára D₁ se štěpí na čtyři komponenty. Jaká je velikost indukce magnetického pole ve Slunci, pokud rozdíl vlnových délek krajních čar je 0.022 nm? (Vlnová délka čáry D₁ je 589.8 nm.)

⁴ Krásná diskuse dipólového záření je v 18. kapitole (resp. v 16. kapitole českého vydání) 3. dílu Feynmanových přednášek o fyzice.

⁵ Normální Zeemanův jev, kdy se čára štěpí v triplet ($k_{\max} = 1$), nastává v případě, že (výsledný) spin je roven nule. To je možné u atomů se dvěma valenčními elektrony jako je např. $\text{Zn}(3d^{10}4s^2)$. Názvy normální a anomální, které jsou poněkud zavádějící, vznikly historicky. Nejprve (na konci 19. století H. A. Lorenzem pomocí klasické fyziky, před vznikem kvantové teorie) bylo objasněno štěpení v triplet. Složitější štěpení spektrální čáry, které se objevuje např. u sodíku, se dlouho nedařilo objasnit. Tento jev, který byl proto označen jako anomální (i když je zcela normální), se stal jedním z podnětů pro zavedení spinu.

⁶ Vnější pole musí být výrazně slabší než vnitřní magnetické pole, které je zodpovědné za spin-orbitální štěpení (viz bod c Problému 1). Například pole o velikosti 3T je „slabé“ pro sodík, ale „silné“ pro lithium. V silném poli je zeemanovské rozštěpení podstatně větší než rozštěpení vlivem spin-orbitální interakce. To vede ke vzniku tripletu. Tento limitní případ se nazývá Paschenův-Backův jev.

Problém č. 4 *Pasti s více elektrony*

- a) HRW - kap. 41: 27 Ú
- b) HRW - kap. 41: 28 Ú

Problém č. 5 *Periodická struktura prvků*

- a) HRW - kap. 41: 29 Ú
- b) HRW - kap. 41: 35 Ú

Problém č. 6 *Alkalické kovy*

Valenční elektron v atomu alkalického kovu se nachází v poli, které vytváří jádro atomu se Z protony a $Z - 1$ elektronů z vnitřních slupek atomu, které stíní jádro. Působení jádra a elektronů z vnitřních slupek na valenční elektron lze popsat efektivním potenciálem

$$U_{ef} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{ef} e^2}{r},$$

kde $1 < Z_{ef} < Z$. $Z_{ef} = Z$ by znamenalo žádné stínění, naproti tomu dokonalé stínění $Z - 1$ elektrony z vnitřních slupek atomu by dalo $Z_{ef} = Z - (Z - 1) = 1$. Hodnotu Z_{ef} lze určit z měření ionizační energie atomu. *Určete Z_{ef} pro 3s elektron v atomu sodíku, je-li ionizační energie tohoto elektronu 5,14 eV.*

Problém č. 7 *Zpomalování atomů fotony*

- a) *Vypočítejte střední kvadratickou rychlost atomů argonového plynu při pokojové teplotě.*
- b) *Atom argonu se pohybuje proti laserovému paprsku o vlnové délce 105 nm. Jak se změní rychlost atomu, jestliže absorbuje foton z tohoto paprsku.*

Problém č. 8 *Dopplerův jev*

Atom sodíku může emitovat foton o vlnové délce 589 nm (D čára sodíku, která vzniká přechodem elektronu z excitovaného stavu 3p do základního stavu 3s). *Určete vlnovou délku, kterou naměří detektor, pokud se atom pohybuje proti němu rychlostí 500 m/s.*

Problém č. 9 Profil spektrální čáry – „přirozené rozšíření“ (*)

Atomy mohou samovolně přecházet z excitovaného stavu do základního (jedná se o tzv. *spontánní emisi*). To znamená, že tyto excitované stavy mají konečnou dobu života, s níž je (podle Heisenbergova principu neurčitosti) spojena „neostrost“ jejich energie. Konečná šířka energiové hladiny způsobuje, že také příslušná spektrální čára má konečnou šířku (nazývá se *přirozená šířka čáry*). Její profil můžeme nalézt nejen kvantověmechanickým výpočtem, ale také pomocí názorného *klasického modelu* vycházejícího z představy, že zářící atom je *kmitající elektrický dipól*. Vzhledem ke konečné době života jde o tlumené kmity, takže časová závislost elektrického dipólového momentu zní⁷:

$$p(t) = p_0 e^{-t/\tau} e^{-i\omega_0 t}, \quad \text{pro } t > 0, \quad (9.1)$$

kde τ je doba života excitovaného stavu a frekvence ω_0 je dána rozdílem energie E_i počátečního (excitovaného) a E_f koncového stavu: $\omega_0 = (E_i - E_f)/\hbar$. Tlumené kmity dipólu lze vyjádřit jako *superpozici monochromatických složek* $p(\omega)$:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (9.2a)$$

kde

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{i\omega t} dt \quad (9.2b)$$

je *Fourierova integrální transformace* funkce $p(t)$ ⁸.

Úkol 1: Výpočtem posledního integrálu se přesvědčte, že⁹

$$p(\omega) = -\frac{p_0 \tau}{1 - i(\omega - \omega_0)\tau} \quad (9.3)$$

Kmitající elektrický dipól vyzařuje elektromagnetické záření, jehož intenzita je dána kvadrátem druhé derivace jeho dipólového momentu¹⁰. Spektrální hustota intenzity je potom dána amplitudami $p(\omega)$:

$$I(\omega) \propto |p(\omega)|^2 \quad (9.4)$$

⁷ Jde o řešení pro tlumený harmonický oscilátor s malým útlumem, kdy $\gamma \ll \omega_0$, kde $\gamma = 1/\tau$ (srov. (11.1)).

⁸ Rovnice (9.2a) je „zobecněním“ Fourierovy řady na případ neperiodické funkce definované na nekonečném intervalu $-\infty, \infty$. S *Fourierovou transformací* se nejen ve fyzice setkáte často.

⁹ Dosadíme-li (9.3) do (9.2a), musíme integraci dostat opět (9.1). Integrál v (9.2a) spočítáte snadno a rychle pomocí užitečné a krásné reziduové věty, se kterou se seznámíte v kursu Funkce komplexní proměnné.

¹⁰ Srovnajte se vztahem pro výkon vyzařování elektromagnetické energie v problému 5 v 1. cvičení. Ze (9.4) je vidět, že za dobu života klesne energie vyzařovaná kmitajícím dipólem na $1/e$.

Úkol 2: Provedete-li normování intenzity k jedničce, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega = 1$, přesvědčte se, že emisní čára má *lorentzovský profil*,

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1/\tau}{\omega - \omega_0 + i/\tau} \quad (9.5)$$

Načrtněte závislost $I(\omega)$ a diskutujte případ $\tau \rightarrow \infty$ (který vede k delta „funkci“¹¹). Získanou závislost $I(\omega)$ srovnajte s rezonanční křivkou pro nucené kmity¹².

Úkol 3: Určete pološířku¹³ lorentzovského profilu.

Problém č. 10 Dopplerovo rozšíření spektrální čáry (*)

K rozšíření spektrální čáry atomu dochází také vlivem vnějších podnětů, jakými jsou srážky nebo tepelný pohyb atomu. Vlivu tepelného pohybu atomu na jeho záření se budeme věnovat. K tomu je potřeba znát (i) rozdělení rychlostí atomů v plynu (HRW čl. 20.7), (ii) vliv pohybu atomu na detekovanou frekvenci (*Dopplerův jev* pro světlo, HRW čl. 38.10).

(i) Počet atomů $n(v) dv$, které mají při teplotě T rychlost v v intervalu $v, v + dv$ je určen Boltzmannovým faktorem¹⁴ $\exp(-\frac{1}{2} M v^2 / kT)$, kde k je Boltzmannova konstanta. V případě pohybu atomů (o hmotnosti M) v 1D platí¹⁵

$$n(v) dv = N \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} M v^2 / kT\right) dv \quad (10.1)$$

Úkol 1: Z podmínky $\int_{-\infty}^{\infty} n(v) dv = N$, kde N je celkový počet atomů plynu, určete $A(T)$.

(ii) (Úhlová) frekvence záření ω emitovaného atomem, který se pohybuje vůči pozorovateli rychlostí v , se liší od frekvence záření ω_0 emitovaného atomem v klidu. Je-li $v \ll c$, platí

$$\omega = \omega_0 \left(1 \pm \frac{v}{c} \right) \quad (10.2)$$

Frekvence záření se zvyšuje/snižuje, pokud se atom a pozorovatel přibližují/vzdalují.

¹¹ Používáme označení delta funkce, i když víme, že o funkci se nejedná.

¹² Srov. Problém č. 11, vztah (11.2).

¹³ V angličtině se označuje FWHM (Full Width at Half Maximum).

¹⁴ Viz dodatek k 2. cvičení. S Boltzmannovým faktorem se setkáme ještě mnohokrát: prostupuje celou fyzikou, a proto si jej dobře zapamatujte.

¹⁵ V HRW čl. 20.7 je uvedeno (Maxwellovo) rozdělení rychlostí atomů/molekul pro 3D.

Úkol 2: S užitím (10.1) a (10.2) zdůvodněte, že spektrální hustota intenzity záření emitovaného tepelně se pohybujícím atomem je dána vztahem

$$I(\omega) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\omega'}{d\omega} \right) I'(\omega') \quad (10.3)$$

Zatímco přirozeně rozšířená čára má *loretzovský profil* (9.5), *dopplerovsky* rozšířená čára má *gaussovský profil* (10.3).

Úkol 3: Určete pološířku¹⁶ gaussovského profilu.

Úkol 4: Srovnajte pološířky pro přirozené a dopplerovské rozšíření spektrální D čáry sodíku (vznikající přechodem elektronu z excitovaného stavu 3p do základního stavu 3s, excitovaný stav není stabilní, jeho doba života je 16.2 ns) pro teplotu 500 K.

Problém č. 11 Laserové chlazení atomů^{17,18} (*)

Laserová manipulace s atomy umožňuje výrazně zpomalit jejich pohyb, snížit jejich rychlost na několik centimetrů za sekundu, což odpovídá teplotě několika desetin mikrokkelvinů. Aby nedošlo ke kondenzaci, atomový obláček musí mít nízkou hustotu a být zachycen v atomové pasti (tvořené elektrickým a magnetickým polem). Chytání a chlazení atomů jdou tedy ruku v ruce. Zde pojednáme o procesu chlazení. Použijeme přitom znalosti z kmitání a vlnění (buzené kmity harmonického oscilátoru, Dopplerův jev /HRW čl. 38.10/) a něco základních poznatků o atomech a fotonech (foton má energii a hybnost).

Ozáříme-li atom laserovým světlem o frekvenci blízké frekvenci optického přechodu v atomu, dojde k absorpci fotonu, který předá atomu nejen energii (atom přejde do vyššího energetického stavu), ale i hybnost (tlak záření). Například rychlost atomu sodíku, který absorbuje foton žlutého světla 589 nm, změní svou rychlost o 3 cm/s (srov. Problém 7). Ačkoli typická rychlost atomů je řádově 10^5 cm/s, laserové záření namířené proti svazku letících atomů lze efektivně užít pro jejich chlazení, protože může způsobit absorpci 10^7 fotonů za sekundu.

Nejprve se budeme zabývat *tlakem záření*. Přitom pro atom použijeme Lorentzův model. Atom budeme reprezentovat klasickým tlumeným harmonickým oscilátorem, který je buzen elektrickým polem $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ (zde a v dalším se omezíme na 1D):

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} + m \omega_0^2 x = q E_0 \cos(\omega t) \quad (11.1)$$

Zde q a m jsou pořadě náboj a hmotnost elektronu, γ popisuje tlumení¹⁹ a ω_0 je vlastní (rezonanční) frekvence oscilátoru.

¹⁶ Viz poznámka pod čarou 13.

¹⁷ P. Gould: „*Laser cooling of atoms to the Doppler limit*“. Am. J. Phys. **65** (1997), 1120-1123.

¹⁸ Pokročilý výklad např. v C. J. Foot: *Atomic Physics*, (Oxford Master Series in Physics). Oxford University Press, 2005.

Úkol 1: Ukažte, že střední výkon absorbovaný oscilátorem při frekvenci ω blízké rezonanční ω_0 je²⁰

$$\langle P \rangle = \frac{\hbar^2 \omega^2}{2m} \frac{\gamma}{4\Delta + \gamma} E^2, \quad (11.2)$$

kde $\Delta = \omega - \omega_0$ je rozladění.

Vezmeme-li v úvahu kvantový charakter světla, můžeme nalézt *rychlost absorpce fotonů*, tj. počet fotonů absorbovaných za jednu sekundu:

$$R = \frac{\langle P \rangle}{\hbar \omega}, \quad (11.3)$$

kde $\hbar \omega$ je energie fotonu. *Síla*, kterou působí záření na atom v důsledku absorpce, je pak dána součinem rychlosti absorpce fotonů R a hybnosti fotonu $\hbar k$. Atom pohybující se proti laserovému svazku bude touto silou zpomalován. Po jistě době tlak záření atom zastaví a následně jej začne urychlovat v opačném směru. Aby se atom nezačal urychlovat, ozáříme jej současně dvěma stejnými laserovými svazky (o téže intenzitě E_0 a frekvenci ω), které se šíří v opačných směrech. Pro další výpočty je klíčový *Dopplerův posuv* frekvence záření způsobený vzájemným pohybem zdroje záření a atomu.

Úkol 2: (a) Za předpokladu, že oba svazky (šířící se v opačných směrech) působí nezávisle, zdůvodněte, že výsledná síla působící na atom pohybující se rychlostí v je

$$F_V = \frac{\hbar^2 \omega^2}{2mc} \left(\frac{1}{4\Delta + \gamma} - \frac{1}{4\Delta' + \gamma} \right) E^2, \quad (11.4)$$

(b) Pokud platí $\omega \ll \omega_0$, ukažte, že

$$F_V = -\frac{\hbar^2 \omega^2}{2mc^2} \alpha, \quad \text{kde } \alpha = -\frac{\gamma \omega \Delta}{4\Delta + \gamma}. \quad (11.5)$$

Vztah (11.5) vyjadřuje tlumící sílu, pokud $\Delta < 0$, tj. pokud laser je naladěn pod frekvenci atomového přechodu ω_0 (s užitím obrázku 11.1²² fyzikálně interpretujte tento výsledek!).

¹⁹ $\gamma = 1/\tau$, kde τ je doba života (srov. Problém č. 9).

²⁰ Jde o rezonanční křivku, srov. (9.5).

²¹ Výraz pro R získaný s užitím (11.2) neomezeně roste se zvyšující se intenzitou záření. Náš model však platí pro malé intenzity záření. Při intenzitách vyšších je nutné vzít v úvahu i stimulovanou emisi, což omezuje velikost R na hodnotu γ . Zavádí se tzv. *saturační intenzita* $I_s = \frac{\hbar \omega_0}{4\pi \tau}$, která je pro sodík rovna 6 mW/cm^2 , a E_0^2 se pak začasté vyjadřuje pomocí podílu I/I_s .

Obr. 11.1. Dopplerovské chlazení atomů

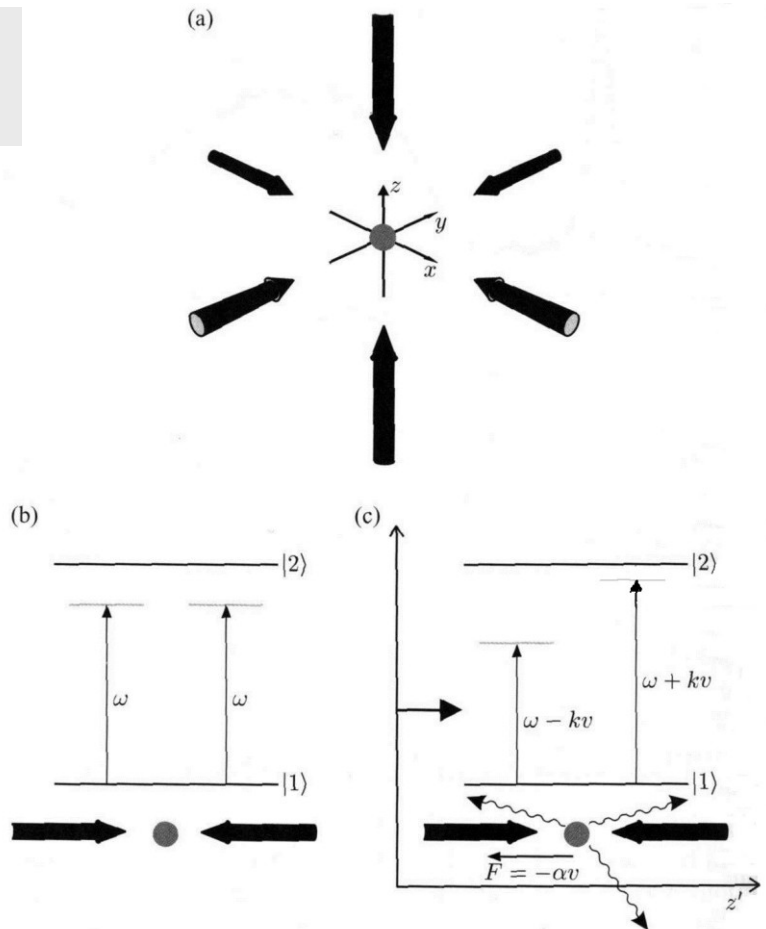


Fig. 9.5 ‘Optical molasses’ is the name given to the laser cooling technique that uses the configuration of three orthogonal pairs of counter-propagating laser beams along the Cartesian axes shown in (a). The laser beams are derived from the same laser and have a frequency ω that is slightly below the transition frequency between the two atomic levels 1 and 2. (b) A stationary atom in a pair of counter-propagating laser beams experiences no resultant force because the scattering is the same for each laser beam, but for a moving atom, as in (c), the Doppler effect leads to more scattering of the light propagating in the direction opposite to the atom’s velocity. (Part (c) is drawn in the rest frame of an atom moving at velocity v .) The imbalance in the forces occurs for all directions and damps the atomic motion.

Protože působí tlumicí síla, snižuje se kinetická energie atomu (vzhledem k podstatné roli Dopplerova posuvu se tento proces nazývá *dopplerovské chlazení*).

Úkol 4: Ukažte, že pro rychlost poklesu (kinetické) energie atomu v důsledku působení tlumicí síly (11.5) platí

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{kin}} = -\alpha v^2 \quad (11.6)$$

kde M je hmotnost atomu. (11.6) vypovídá o tom, že energie klesá exponenciálně s časem. *Vypočítejte* časovou konstantu, tj. dobu, za níž energie klesne na hodnotu E/e , pro sodík (uvažujte přechod mezi základním stavem 3s a excitovaným stavem 3p) pro $I = 10^4 \text{ W/m}^2$ a rozladění $\Delta = -10^6 \text{ s}^{-1}$.

Při absorpci záření atom přechází ze základního do excitovaného stavu. Atom v excitovaném stavu má krátkou dobu života $\tau = 10^{-8} \text{ s}$, a proto vzápětí po absorpci záření atomem následuje spontánní emise fotonu, který je vyslán náhodně do kteréhokoli směru [v 1D ve směru osy x (+) nebo proti směru osy x (-)]. Při emisi fotonu dochází ke zpětnému rázu, při němž se

²² Obrázek je převzat z knihy v poznámce 18.

hybnost atomu změní o \hbar . Vzhledem k tomu, že při spontánní emisi se foton vyzáří náhodně do kteréhokoli směru, je střední hodnota změny hybnosti souboru atomů (v důsledku spontánní emise) nulová. Střední hodnota čtverce změny hybnosti je však nenulová:

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \hbar^2 R_+ R_- \quad (11.7)$$

kde $R_+ = R_- = R$ je dáno vztahem (11.3). Zdůvodněte vztah (11.7)!

Úkol 5: S užitím (11.7) ukažte, že rychlost růstu (kinetické) energie atomu v důsledku zahřívání zpětným rozptylem, k němuž dochází při emisi fotonu, je

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{zahřívání}} = \frac{\hbar^2}{M} \frac{R_+ R_-}{4\Delta + \hbar k} \quad (11.8)$$

Při ozáření souboru atomů dvěma laserovými svazky v něm dochází k *ochlazení* vlivem tlumicí síly (11.5), která je důsledkem absorpce fotonů, a současně k *zahřívání* v důsledku zpětného rázu atomů vyvolaného spontánní emisí fotonu, která následuje vzápětí po absorpci záření. V ustáleném stavu je rychlost poklesu energie v důsledku ochlazování rovna rychlosti nárůstu energie v důsledku zahřívání, tedy

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{ochlazení}} + \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{zahřívání}} = 0 \quad (11.9)$$

Úkol 6: S užitím (11.9) najděte energii atomu v ustáleném stavu a potom s užitím ekvipartičního teorému (HRW čl. 20.5) určete teplotu atomů o energii.

Úkol 7: Určete minimální teplotu, kterou lze dosáhnout dopplerovským chlazením. Vypočtete tuto teplotu a odpovídající střední kvadratickou rychlost pro atomy sodíku (uvažujte přechod mezi základním stavem 3s a excitovaným stavem 3p).

Tip: Teplota nalezená v úkolu 6 závisí pro daný atom na rozladění Δ .

Existují další způsoby laserového chlazení, které umožňují získat teploty nižší než je dopplerovská mez. Například teplota rubidiových pár byla snížena na 0,17 μK , kdy se systém „zhroutí“ do jediného ostře definovaného stavu, kdy vlnové funkce atomů se významně překrývají a celý soubor atomů je možné považovat za jediný kvantový systém, nazývaný *Boseho-Einsteinův kondenzát* (často označovaný jako Svatý Grál atomové fyziky)²³.

Za vývoj metod pro ochlazování a záchyt atomů laserovým světlem byla udělena třem fyzikům, S. Chu, C. Cohen-Tanoudji²⁴ a W. D. Phillips, Nobelova cena za fyziku za rok 1997 (viz <http://www.vesmir.cz/clanek/laserove-chlazení-atomu>).

²³ Viz HRW str. 1176 a obr. 45.2.

²⁴ C. Cohen-Tanoudji je znám také jako autor známé a inspirativní učebnice kvantové mechaniky, C. Cohen-Tanoudji, B. Diu, F. Laloë: *Quantum Mechanics, Part One and Two*. J. Wiley, 1977 (překlad z francouzštiny).

Problém č. 12 *Rentgenové záření*

- a) Brzdné rtg záření: HRW - kap. 41: 39 Ú
- b) Záření volného elektronu: HRW - kap. 41: 41 Ú
- c) Moseleyho zákon: HRW - kap. 41: 47 Ú
- d) Rentgenová difrakce: HRW - kap. 41: 50 Ú

Problém č. 13 *Lasery*

- a) Záporná absolutní teplota: HRW – kap. 41: 58 C
- b) Energie laserového pulsu: HRW – kap. 41: 66 Ú
- c) CO₂ laser na Marsu: HRW – kap. 41: 69



Dodatek k 4. cvičení Více o spinu