Kapplerov experiment (1931)

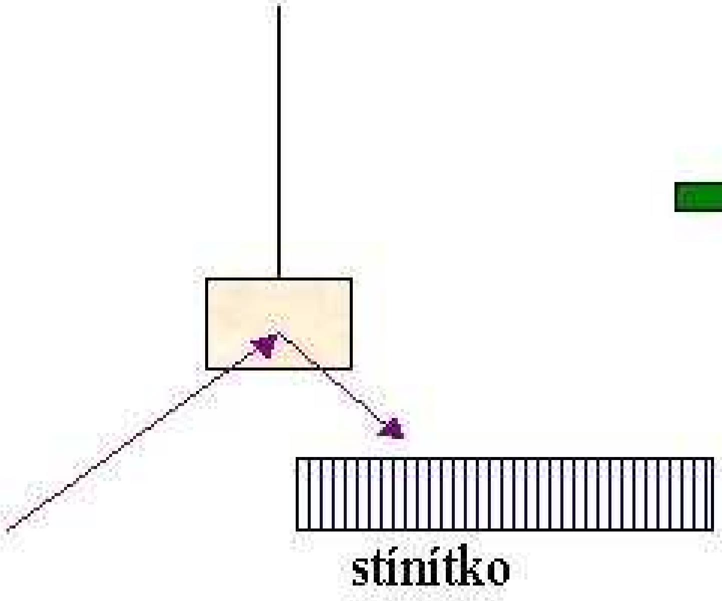
Naviazal na Einsteinove myšlienky o súvise kynetickej teórie plynov a kvantitatívnych vlastnostiach hmoty

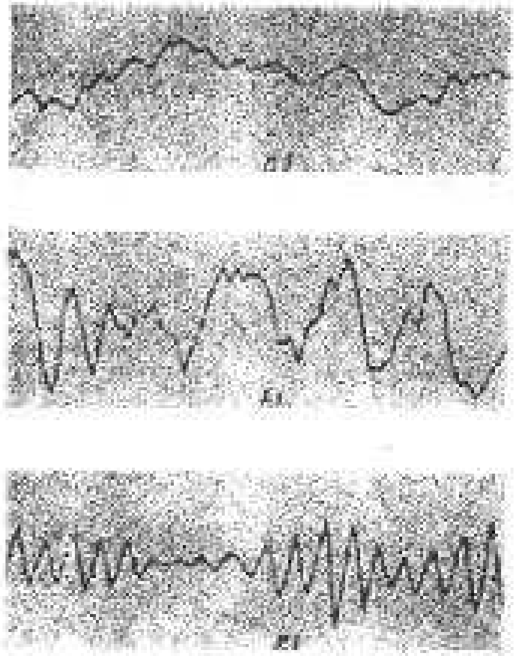
(objasnenie Brownovho pohybu)

… spousta experimentů

http://gemini.tntech.edu/~tfurtsch/scihist/loschmid.html

1931 Kappler





atmosférický tlak

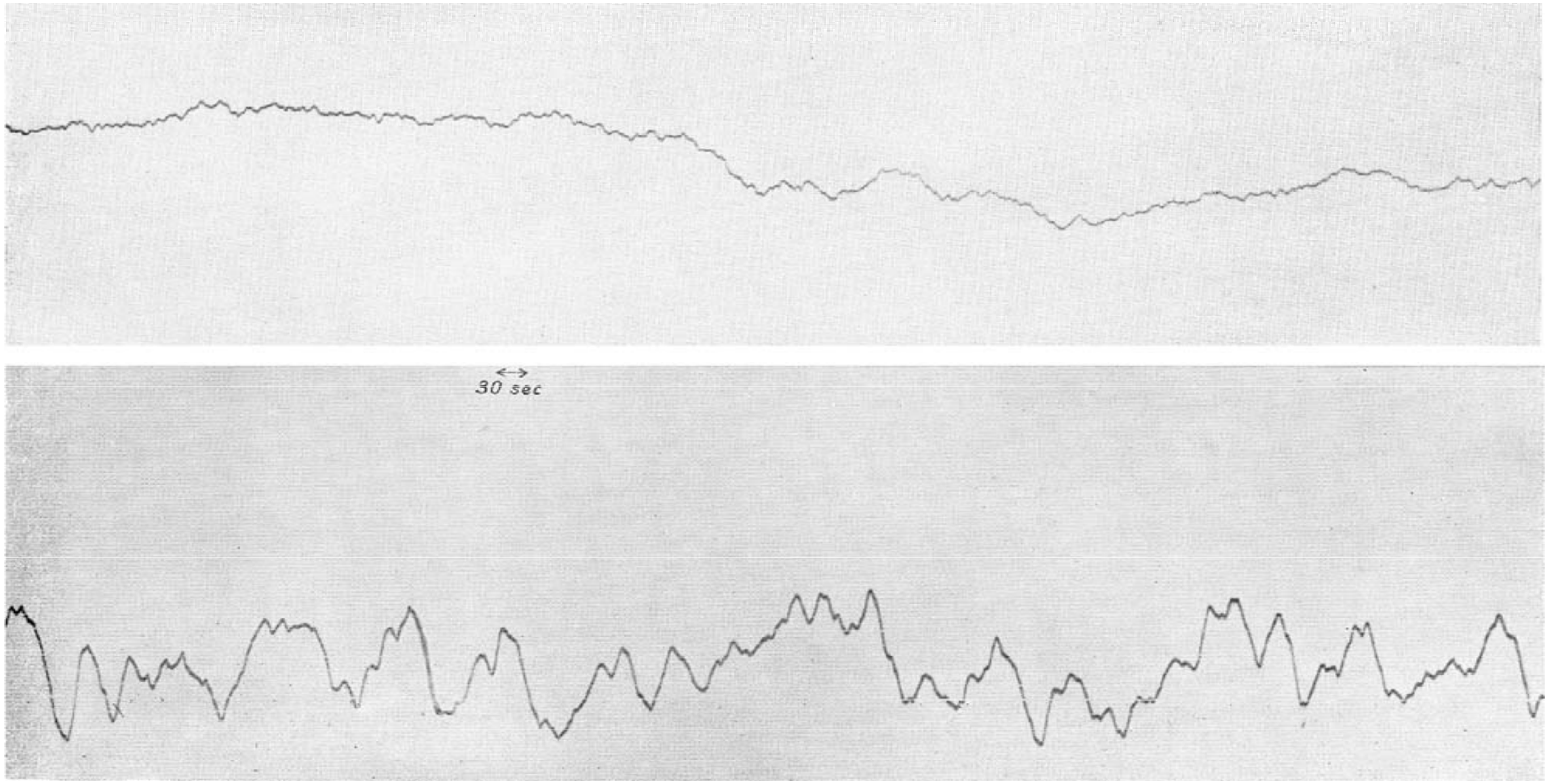
tlak klesá

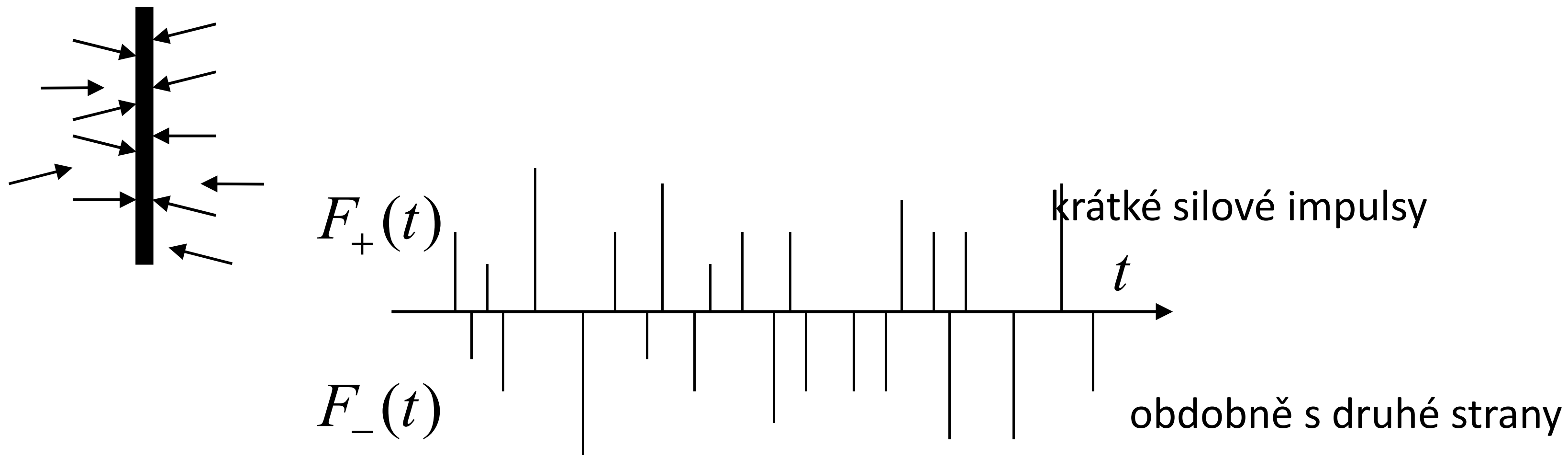
pot. energie $V = \frac{1}{2} A \varphi^2$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} A \langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \qquad R = k_B N_A$$

$$N_A = 6.057 * 10^{23} \mathrm{mol}^{-1}$$

Kapplerov experiment





Síla na stojící destičku $\qquad F_+(t) - F_-(t)$

$\sim 10^{16}$ nárazů/μs

Impuls síly za dobu makroskopicky krátkou, pro molekuly dlouhou

$$\int_t^{t+\tau} \mathrm{d}\bar{t} \cdot F_+(\bar{t}) \approx \sum \tau \cdot v_x \times 2mv_x \xrightarrow{\langle\ \rangle} \tau \cdot n \cdot \tfrac{1}{3} m \left\langle v^2 \right\rangle \cdot S \equiv \tau \cdot p \cdot S$$

Střední síla na stojící destičku

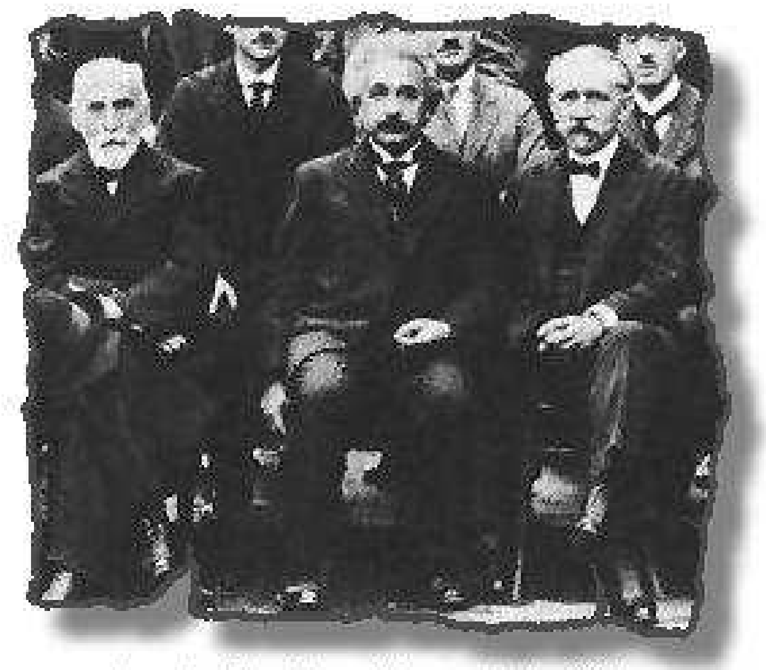
$$\left\langle F_+(t) - F_-(t) \right\rangle = pS - pS = 0$$

Kapplerov experiment teoreticky

- Základom bol Brownov pohyb (1827) objasnený Einsteinom (1905)
- Tu sa skor hodí upravená furmulácia, ktorú navrhol Pierre Langevin (1908)

Kapplerov experiment

- **Paul Langevin** (1872 -- 1946)



Lorentz, Einstein and Langevin in 1927

1907 navrhl pohybovou rovnici pro částici propojenou s termostatem

$$m\ddot{x} = -\eta\dot{x} + F_S + F(t)$$

tření

působící síla (nenáhodná)

NÁHODNÁ LANGEVINOVA SÍLA

Náhodná síla spolu s třením odrážejí účinek termostatu na systém

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} = f(t)}$$

Původní Langevinův postup

❶ Středovat … ale co

$$x\ddot{x} = (x\dot{x})^{\cdot} - \dot{x}\dot{x}$$

$$\langle x\dot{x}\rangle^{\cdot} = \langle \dot{x}\dot{x}\rangle - \gamma\langle x\dot{x}\rangle + \langle xf(t)\rangle$$

❷ Použít ekvipartičního teorému

$$\langle x\dot{x}\rangle^{\cdot} = \frac{k_B T}{m} - \gamma\langle x\dot{x}\rangle + \langle xf(t)\rangle$$

❸ Zbavit se náhodné síly !!!

$$\langle x\dot{x}\rangle^{\cdot} = \frac{k_B T}{m} - \gamma\langle x\dot{x}\rangle + 0$$

Motivace

$$\langle f(t)\rangle = 0$$

$$\langle f(t) f(t')\rangle = \mathrm{const} \times \delta(t - t')$$

$$\langle xf(t)\rangle \approx \langle x\rangle\langle f(t)\rangle = 0$$

- Výsledná LODR 1. řádu (nenáhodná)

$$\langle x\dot{x}\rangle^{\cdot} + \gamma\langle x\dot{x}\rangle = \frac{k_B T}{m} \qquad \text{neznámá} \ \ldots \ \langle x\dot{x}\rangle$$

$$\langle x^2\rangle = 2\frac{k_B T}{m\gamma}\left(t - \frac{1}{\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t})\right)$$

$$\boxed{\left\langle x^2\right\rangle = 2\frac{k_BT}{m\gamma}\left(t-\frac{1}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t})\right) \equiv 2\frac{k_BT}{m\gamma}\left(t-\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\right)}$$

-

♠ Pro $t\to\infty$ $\quad t \gg \tau$

$$\left\langle x^2\right\rangle \to 2\frac{k_BT}{m\gamma}(t-\tau)$$

$$\approx 2\frac{k_BT}{m\gamma}t$$

$\Rightarrow$ identifikace $\dfrac{k_BT}{m\gamma} \equiv D$ .... $\boxed{k_BT\cdot B = D}$ EINSTEINŮV VZTAH

♠ Pro $t\to 0$ $\quad t \ll \tau$

$$\left\langle x^2\right\rangle = 2\frac{k_BT}{m\gamma}\left(t-\frac{1}{\gamma}(1-1+\gamma t-\tfrac{1}{2}\gamma^2t^2+\cdots)\right) \approx \frac{k_BT}{m}\cdot t^2 = \left\langle (\dot{x}t)^2\right\rangle$$

BALISTICKÝ ROZLET

$$m\ddot{x} = -\eta\,\dot{x} - A\,x + F(t)$$

- tření
- vratná síla
- NÁHODNÁ SÍLA

Náhodná síla spolu s třením

odrážejí účinek termostatu na systém

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = f(t)}$$

<u>tlumený lineární oscilátor</u>

parametry empiricky dostupné

<u>hnán vtištěnou silou</u>

síla náhodná, Gaussovský bílý šum

středování

$$\langle \ddot{x} \rangle + \gamma \langle \dot{x} \rangle + \omega_0^2 \langle x \rangle = \langle f(t) \rangle$$

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle x \rangle^{\cdot}, \quad \langle \ddot{x} \rangle = \langle x \rangle^{\cdot\cdot}$$

$$\boxed{\langle x \rangle^{\cdot\cdot} + \gamma \langle x \rangle^{\cdot} + \omega_0^2 \langle x \rangle = 0}$$

středovaný pohyb

je za chvíli utlumen

LODR 2. řádu s pravou stranou

- obecné řešení= obecné ř. homog. rovnice+
  partikulární řešení nehomog. rovnice

$$x(t) = C_1 \cdot \exp(-\lambda_1 t) + C_2 \cdot \exp(-\lambda_2 t) + \tilde{x}(t)$$

sekulární rovnice

$$\lambda^2 - \gamma \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0{}^2}}$$

kritická hodnota

podtlumené kmity

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\gamma = \omega_0}$$

přetlumené kmity

- S použitím ekvipartičného teorému

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle = \left\langle \iint \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t''\,G(t-t')G(t-t'')f(t')f(t'')\right\rangle =$$

$$= 2\Gamma \int \mathrm{d}t'\,G^2(t-t') = \frac{\Gamma}{\gamma}\cdot\frac{1}{\omega_0^2}$$

$$= \frac{k_\mathrm{B}T}{m\omega_0^2}$$

$$\tfrac{1}{2} m\omega_0^2 \left\langle x^2(t)\right\rangle$$

$$= \tfrac{1}{2} k_\mathrm{B} T$$

Výsledek

(připomíná Einsteinův vztah)

$$\frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{k_\mathrm{B}T}{m}$$

- $$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0$$
  $$x(t) = 0 + 0 + \int_0^t \mathrm{d}t' \, G(t-t') f(t')$$

formální řešení

$$G(t-t') = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left\{\exp(-\lambda_1 (t-t')) - \exp(-\lambda_2 (t-t'))\right\} \cdot \vartheta(t-t')$$

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^{\,2}}$$

$$\langle f(t) f(t') \rangle = 2\Gamma\delta(t-t') \qquad \frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{k_\mathrm{B}T}{m}$$

- $$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \int \mathrm{d}t' G(t-t') f(t') \\ &= \sum_n \int_{\Delta_n} \mathrm{d}t' G(t-t') f(t') \\ &\approx \sum_n G(t-t_n) \int_{\Delta_n} \mathrm{d}t' f(t') \\ &\equiv \sum_n G(t-t_n) \breve{f}_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \breve{f}^2 \right\rangle &= \left\langle \int_\Delta \mathrm{d}t' f(t') \int_\Delta \mathrm{d}t'' f(t'') \right\rangle \\ &= \int_\Delta \mathrm{d}t' \int_\Delta \mathrm{d}t'' \left\langle f(t') f(t'') \right\rangle \\ &= \int_\Delta \mathrm{d}t' \int_\Delta \mathrm{d}t'' 2\Gamma\delta(t'-t'') = 2\Gamma\Delta t\end{aligned}$$

diskrétní Gaussův náhodný proces

rozdělení pravděpodobnosti

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-X^2/2\sigma^2\right)$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{2\Gamma\Delta t}}$$

Záver

- pochopenie efektu tepelného pohybu atómov na citlivé meracie prístroje (v equilibriu)
- Malý systém v rovnováhe s termostatom od neho preberá stav dynamickej tepelnej aktivity

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{Tk}{A}$$