

F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2010 - 2011

IV.
Elektronová optika

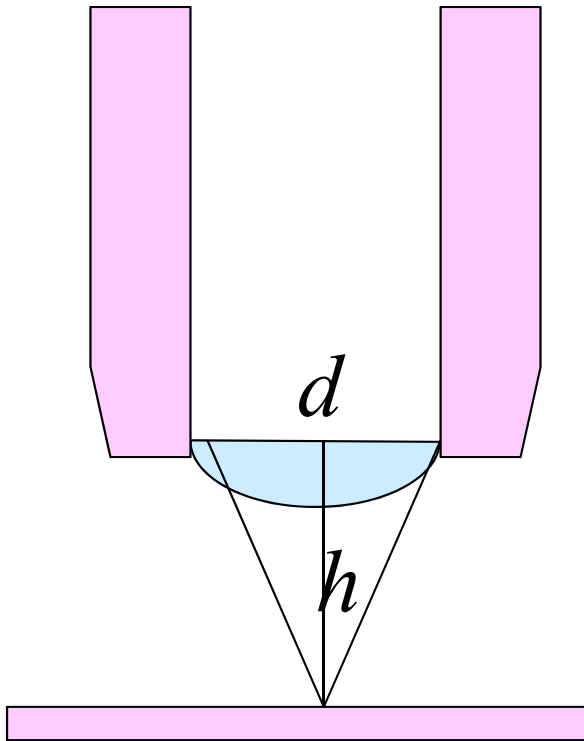
KOTLÁŘSKÁ 16. BŘEZNA 2011

F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2010 - 2011

IV.
Elektronová mikroskopie

KOTLÁŘSKÁ 16. BŘEZNA 2011

Preludium: rozlišovací mez (optického) mikroskopu



Rozlišovací mez mikroskopu je dána vlnovou délkou použitého světla ... **Projeví se vlnové vlastnosti**

$$\delta = \frac{0.61\lambda}{\text{NA}} \quad \text{poloměr prvního difrakčního peaku}$$

NA numerická apertura

$$\text{NA} = \sin \vartheta = d / 2\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}d^2}$$

Grafické znázornění difrakčních obrazců

Numerical Aperture and Airy Disc Size

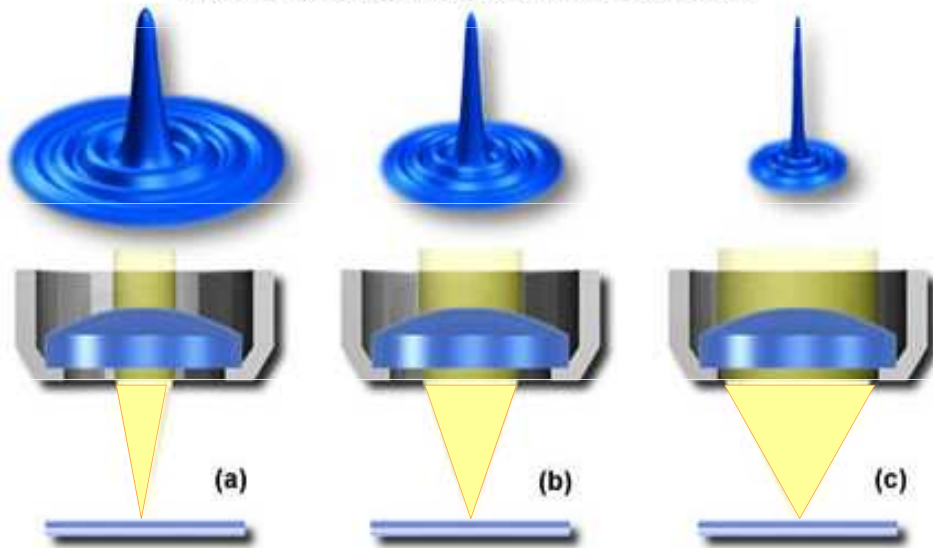
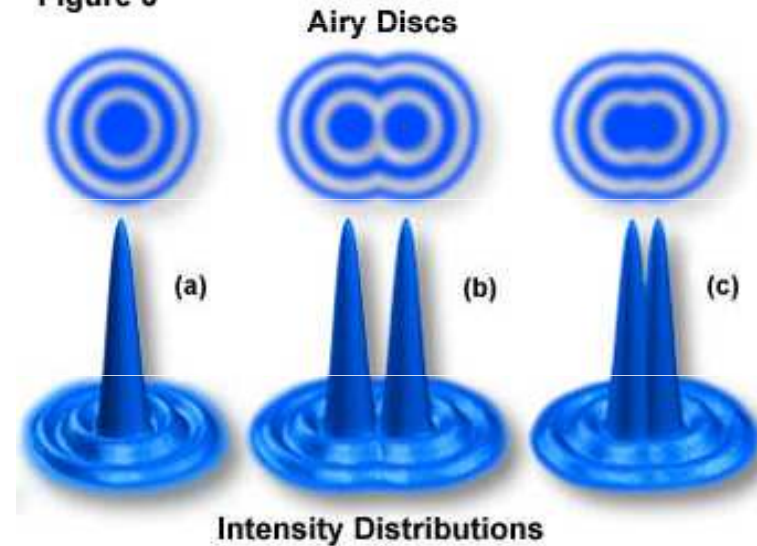


Figure 4

Figure 3



Intensity Distributions

$$\delta = \frac{0.61\lambda}{NA} \quad \text{poloměr prvního difrakčního peaku}$$

NA numerická apertura

$$NA = \sin \vartheta = d / 2\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}d^2}$$

Rozlišení:

Kdy ještě dva difrakční
obrazce nesplývají

Lidské oko rozliší 0,2 mm
Optický mikroskop 0,2 μm
... Zkrátit vlnovou délku

Začátky elektronové mikroskopie

1924	De Broglie postuluje vlnové vlastnosti částic
1927	Busch – teorie magnetické čočky
1931	Knoll a Ruska – první elektronový mikroskop
1933	Zvětšení lepší než u optických mikroskopů
193?	Ruska – patentuje magnetické nastavce čoček
1936	Scherzer – teorém o neodstranitelné otvorové vadě
1938	První komerční TEM -- Siemens
1942	Prototyp SEM (v USA)

DALŠÍ ROZVOJ AŽ V POVÁLEČNÝCH LETECH

Hodně opožděná Nobelova cena



The Nobel Prize in Physics 1986

"for his fundamental work in electron optics, and for the design of the first electron microscope"

"for their design of the scanning tunneling microscope"



Ernst Ruska

🕒 1/2 of the prize

Federal Republic of Germany

Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft
Berlin, Federal Republic of Germany

b. 1906
d. 1988



Gerd Binnig

🕒 1/4 of the prize

Federal Republic of Germany

IBM Zurich Research Laboratory
Rüschlikon, Switzerland

b. 1947



Heinrich Rohrer

🕒 1/4 of the prize

Switzerland

IBM Zurich Research Laboratory
Rüschlikon, Switzerland

b. 1933

Úvodem k vlastní přednášce

- S elektrony lze pracovat v přiblížení geometrické optiky, pokud se pohybují v dostatečně plyných polích
- Na příkladu elektrostatických polí prozkoumáme konstrukci centrovaných soustav v paraxiální aproximaci
- Magnetické čočky jsou ale mnohem zajímavější
- I elektronové optické soustavy trpí vadami zobrazení ...
- ale ty se dnes daří překonat

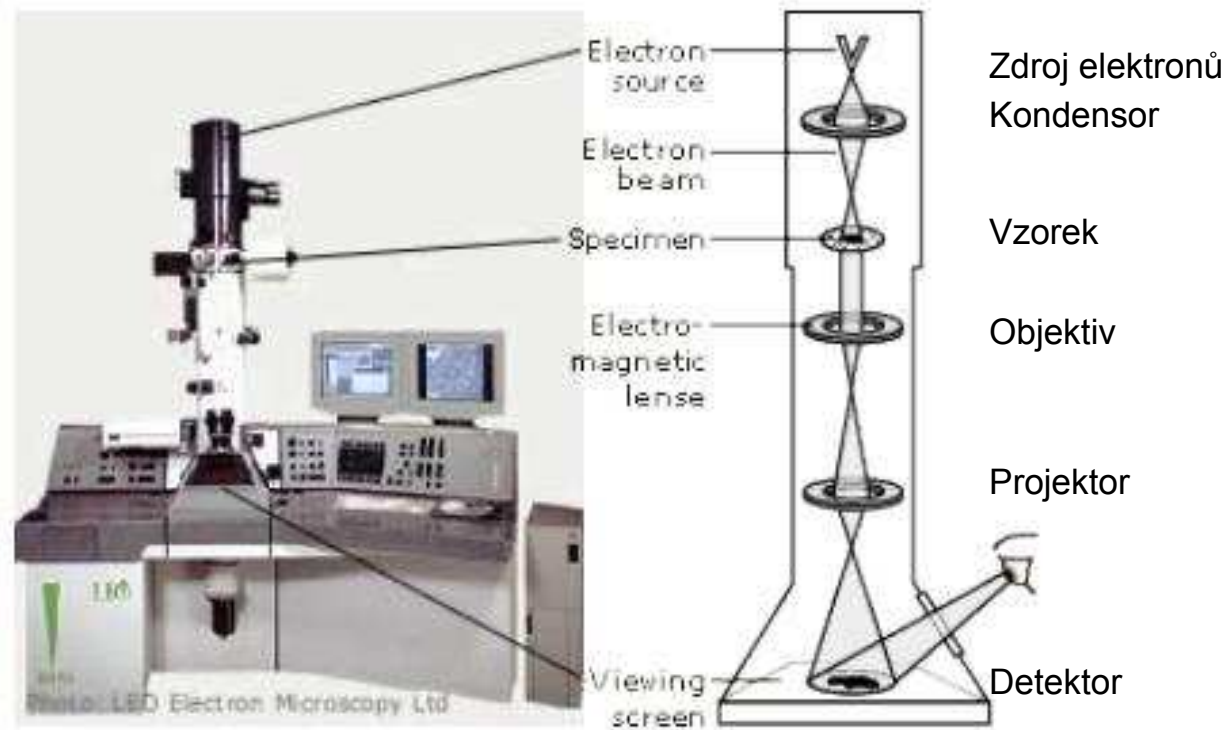
Vlastně několik reklamních obrázků

V dnešní době je elektronová mikroskopie standardní a rozšířenou laboratorní technikou.

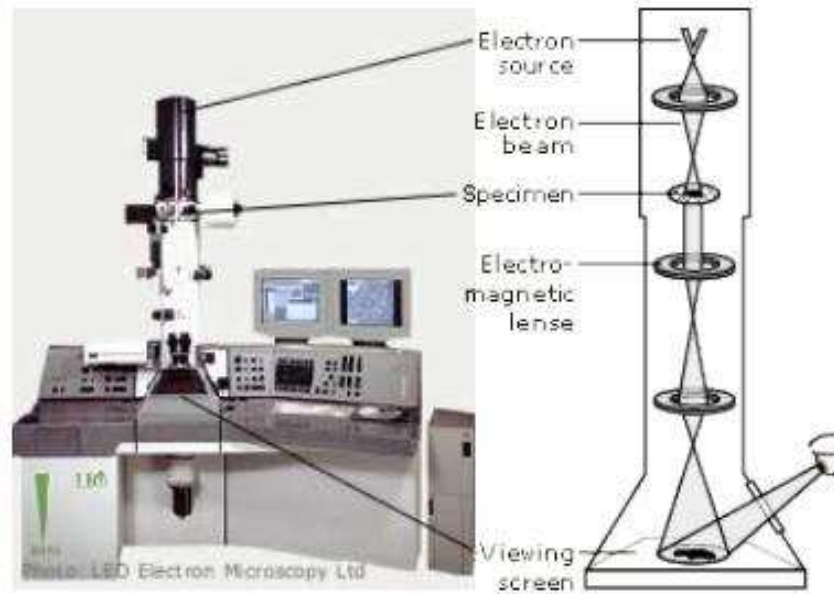
Variant konstrukce je velký počet.

Celý obor se stále rozvíjí. Elektronové svazky se využívají i v technologii, například pro elektronovou litografii.

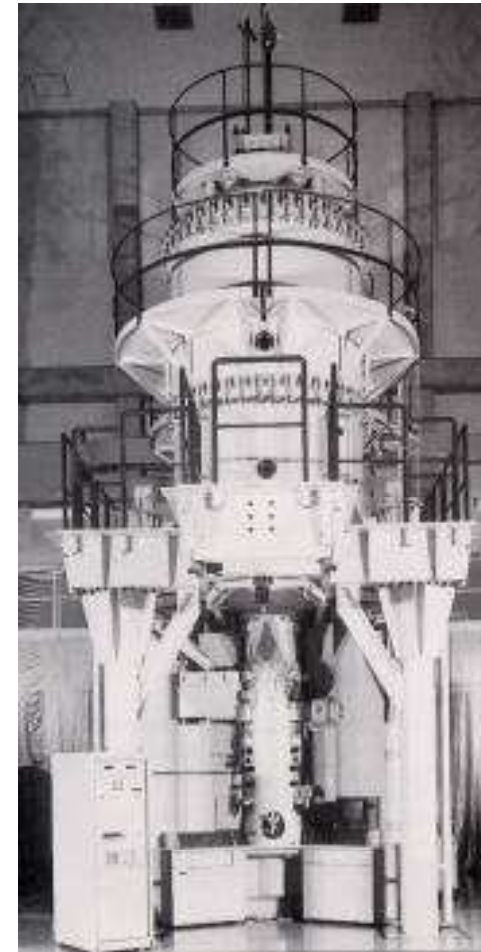
Prozařovací elektronový mikroskop



Prozařovací elektronový mikroskop

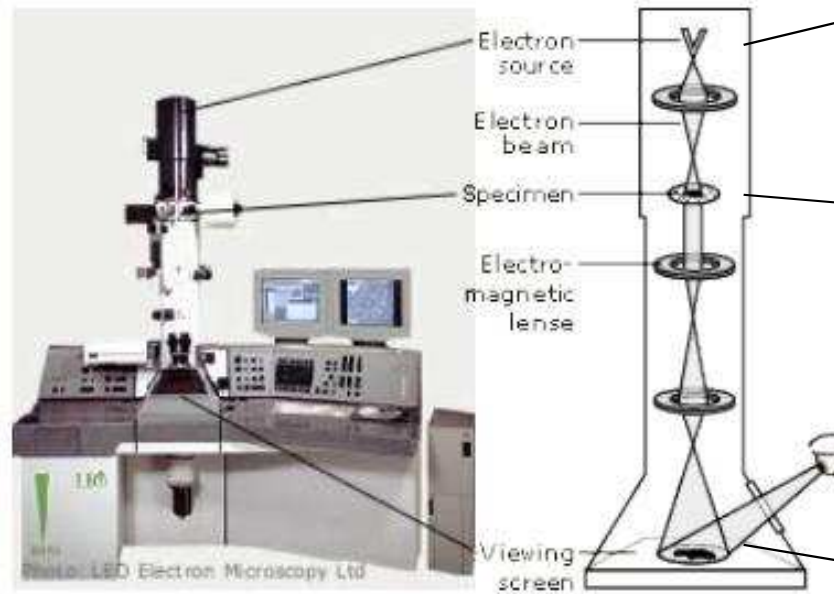


STOLNÍ PŘÍSTROJ
~ 50 000 eV

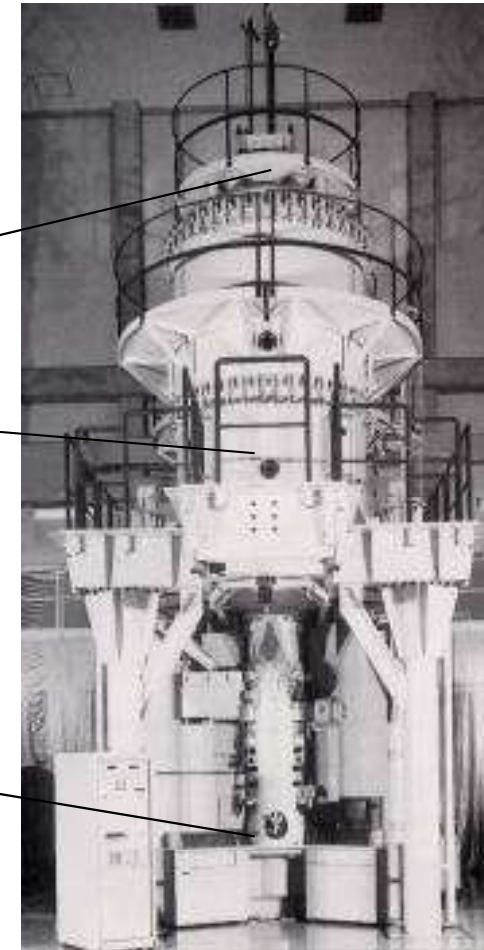


UNIKÁTNÍ PŘÍSTROJ
~ 1 000 000 eV

Prozařovací elektronový mikroskop



STOLNÍ PŘÍSTROJ
~ 50 000 eV

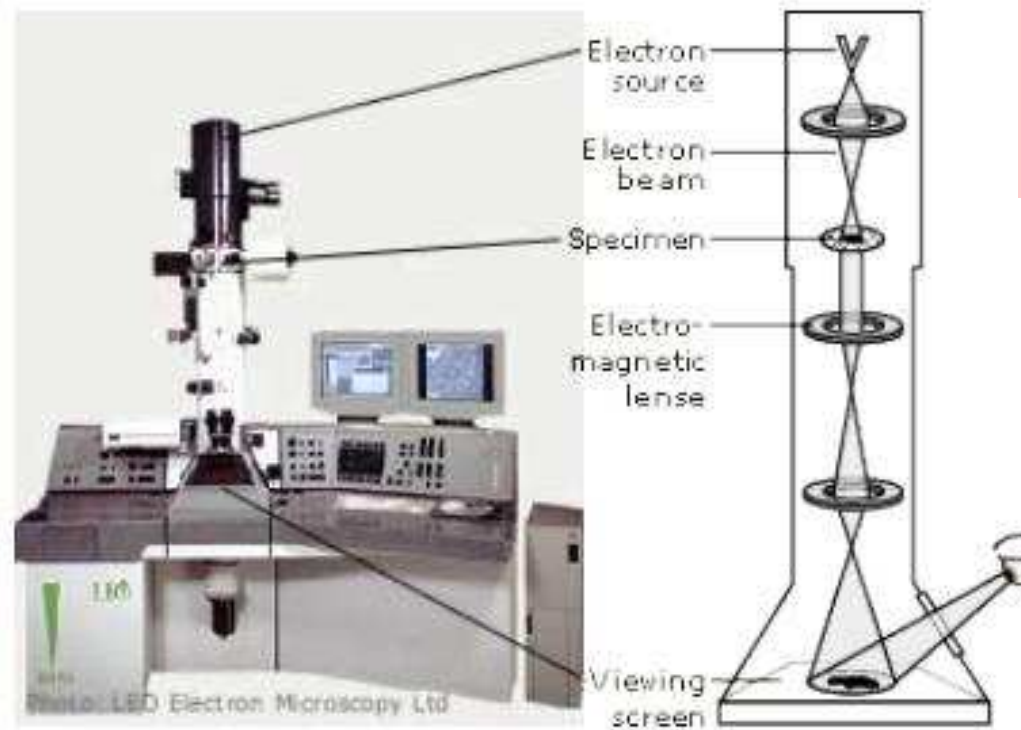


UNIKÁTNÍ PŘÍSTROJ
~ 1 000 000 eV

Prozařovací elektronový mikroskop

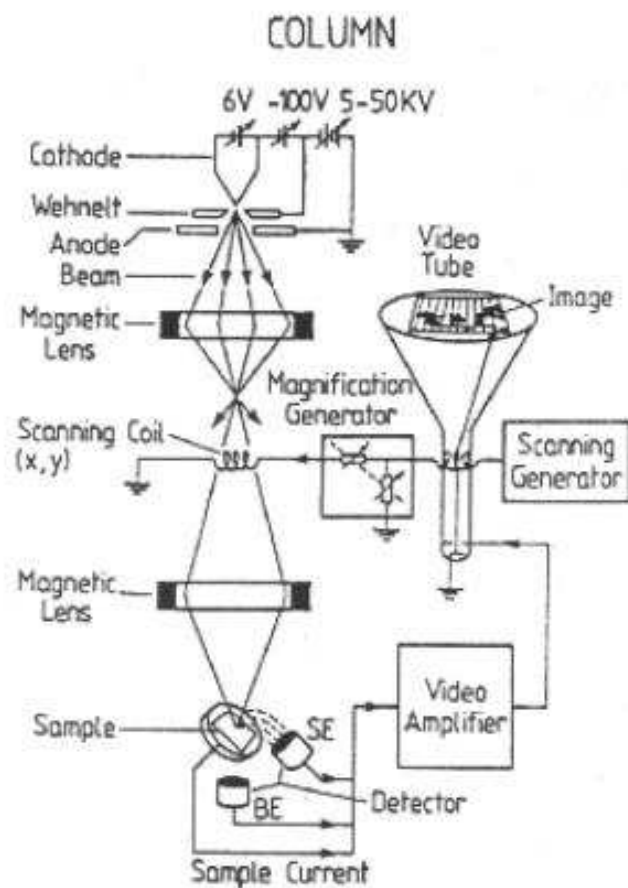
DETAIL

Srovnání s
optickým
mikroskopem



Rastrovací elektronový mikroskop

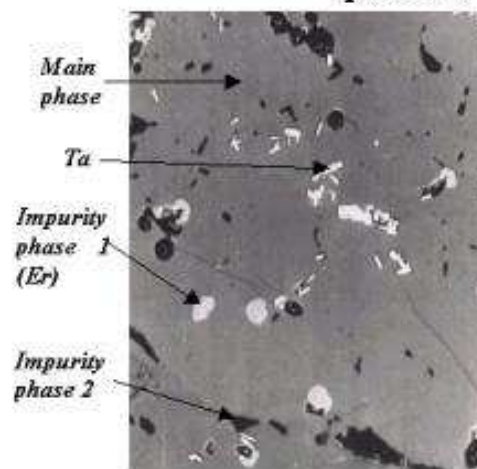
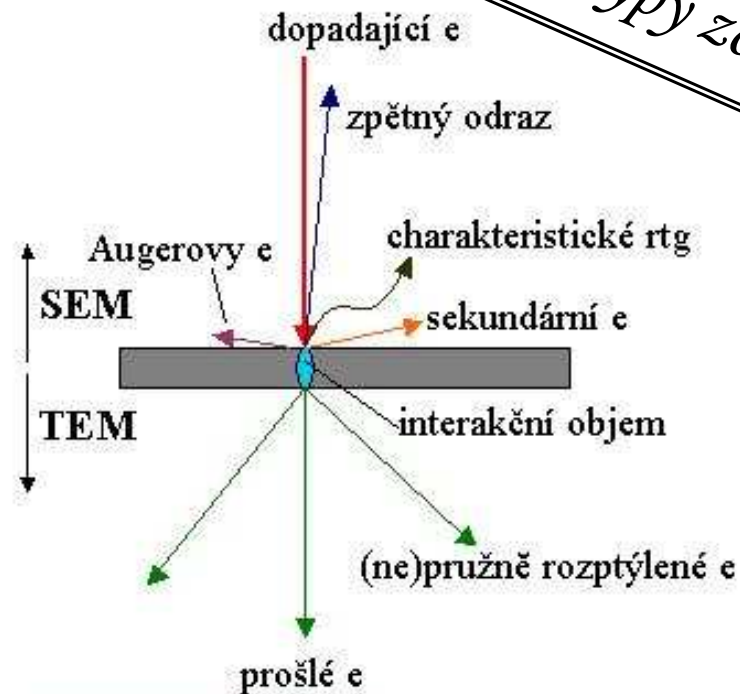
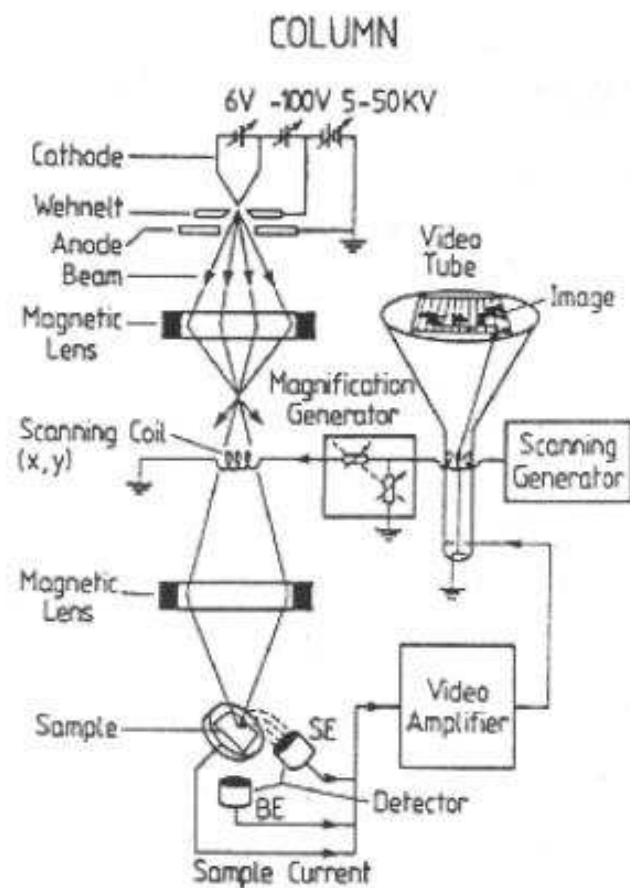
(SEM .. scanning electron microscope)



Rastrovací elektronový mikroskop

Typy zobrazení

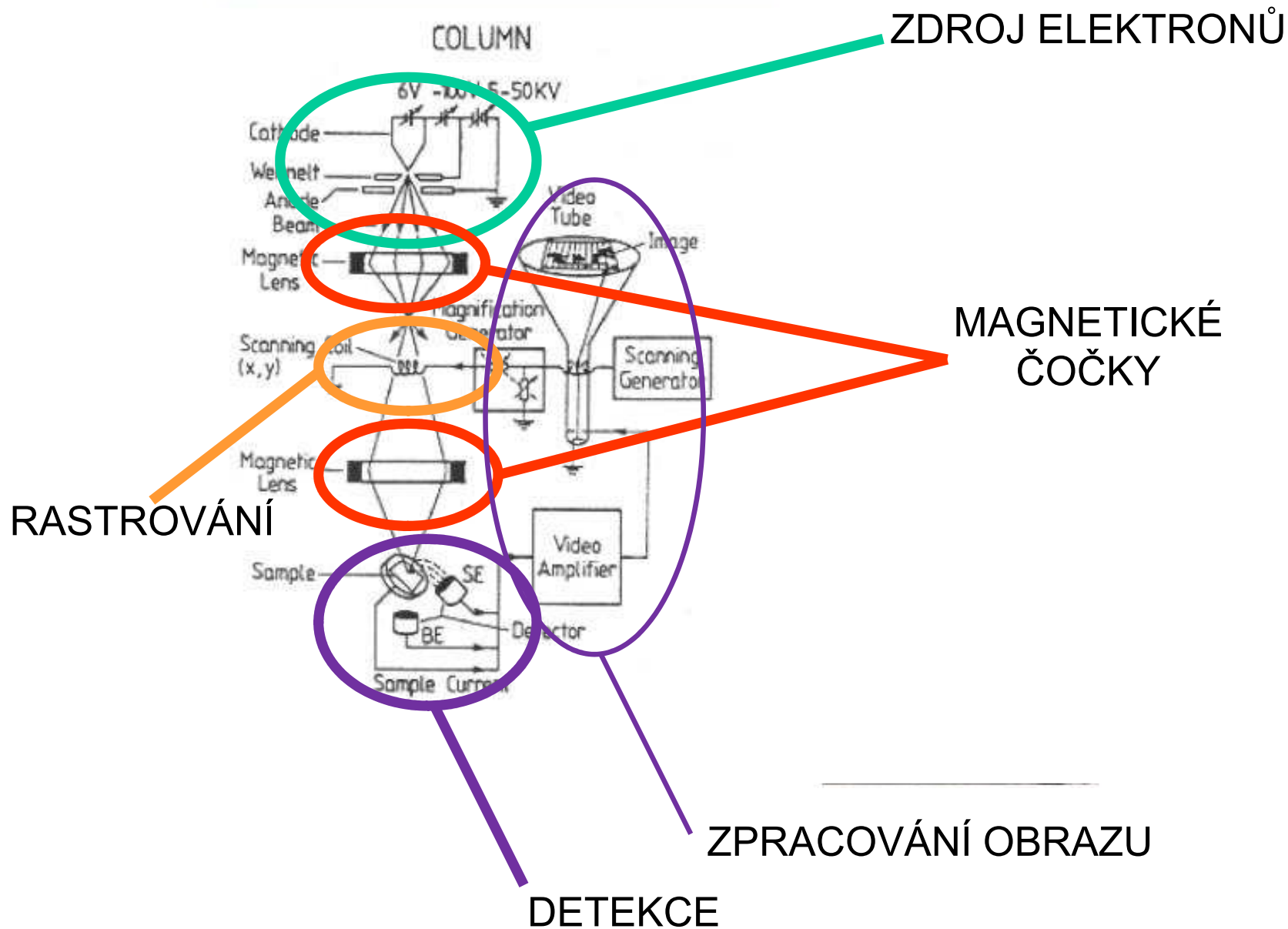
(SEM .. scanning electron microscope)



slitina Cu-Nb-Fe

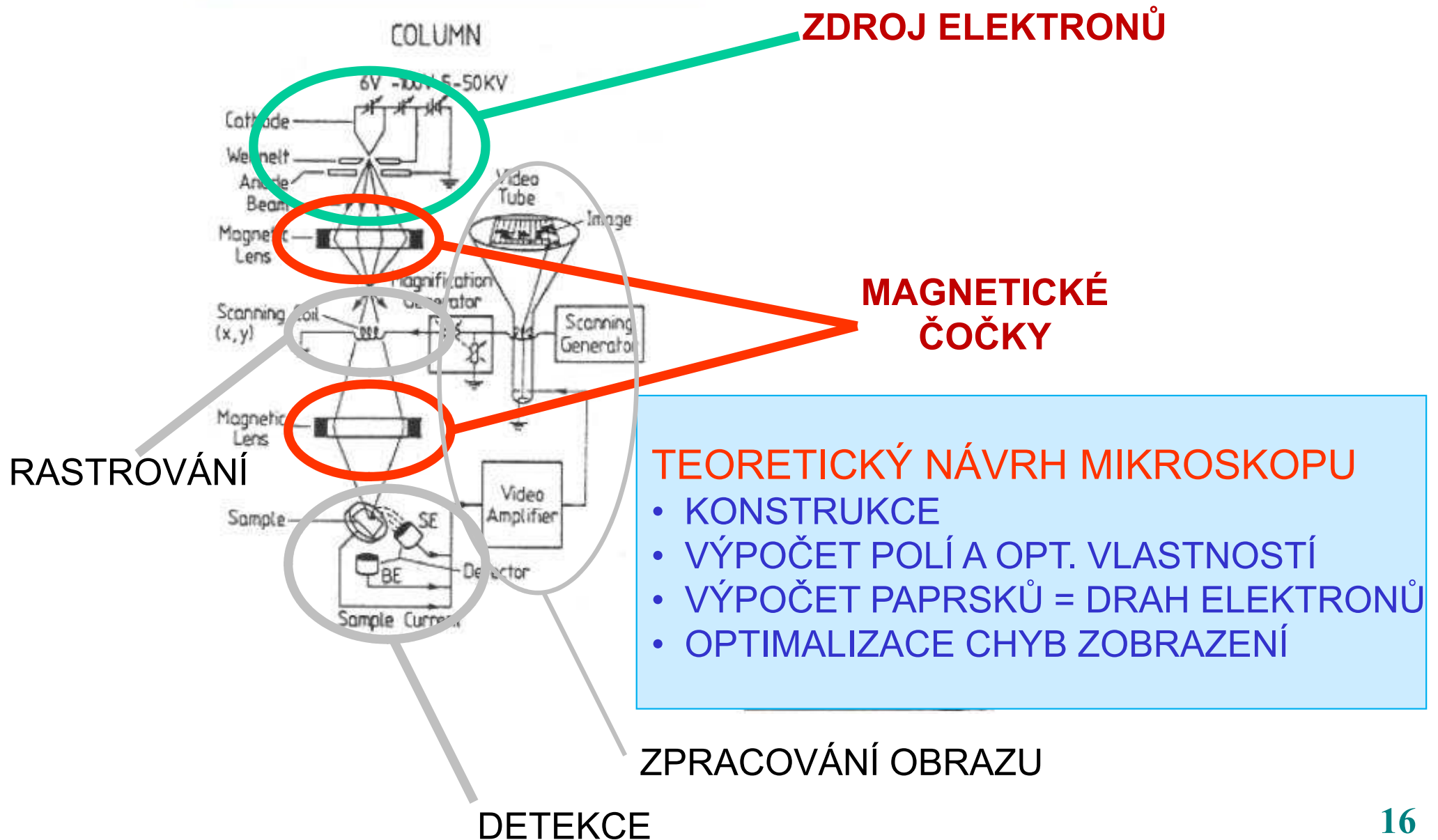
Rastrovací elektronový mikroskop: náš dnešní úhel pohledu

(SEM .. scanning electron microscope)



Rastrovací elektronový mikroskop: náš dnešní úhel pohledu

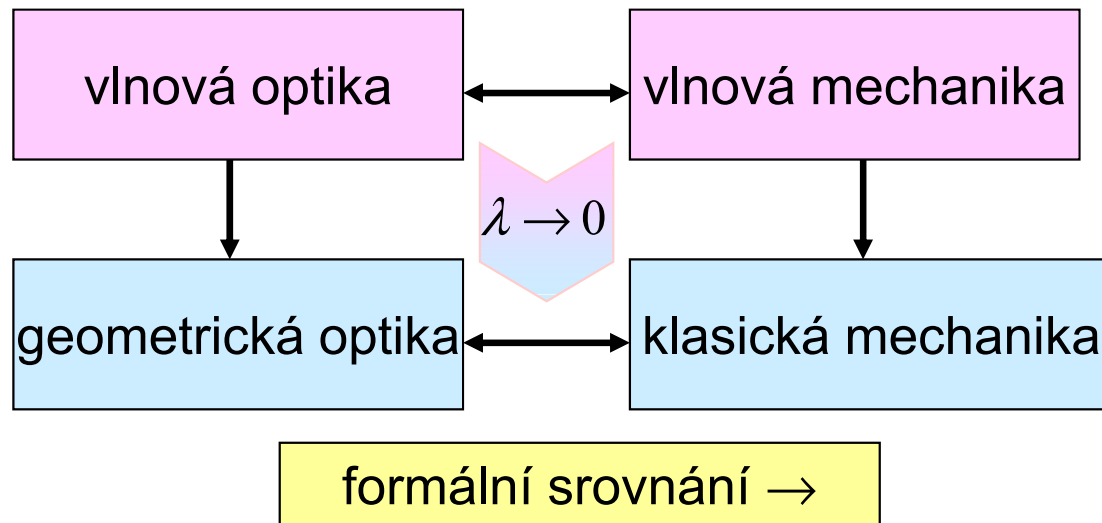
(SEM .. scanning electron microscope)



Částicová paprsková optika

Využití elektronů pro geometrickou optiku s vysokým rozlišením napadlo lidstvo teprve potom, co vlnové vlastnosti elektronu byly již dobře známy.

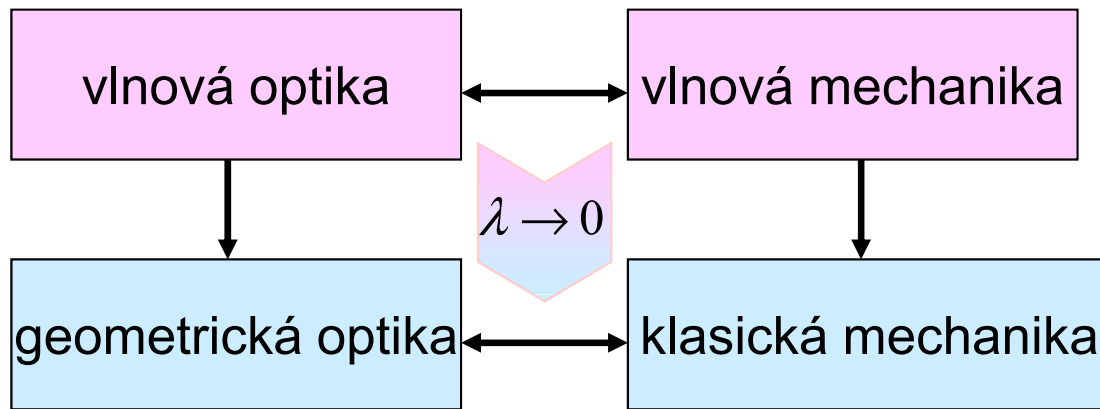
Paprsková (geometrická) optika částic



paprsky
eikonálová rovnice
sférické čočky

trajektorie
Newtonovy rovnice + vyloučení času
spojité rozložení indexu lomu

Paprsková (geometrická) optika částic



formální srovnání →

paprsky
eikonálová rovnice
sférické čočky

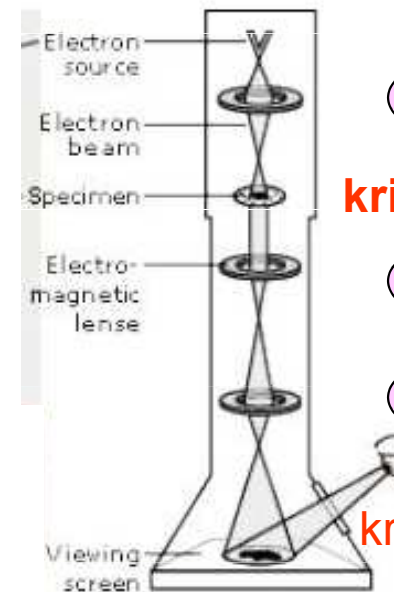
trajektorie
Newtonovy rovnice + vyločení času
spojité rozložení indexu lomu

formální podmínka

$$\lambda \rightarrow 0$$

znamená přesně

$$\lambda \ll L \text{ (char. délka)}$$



ano

kritické místo

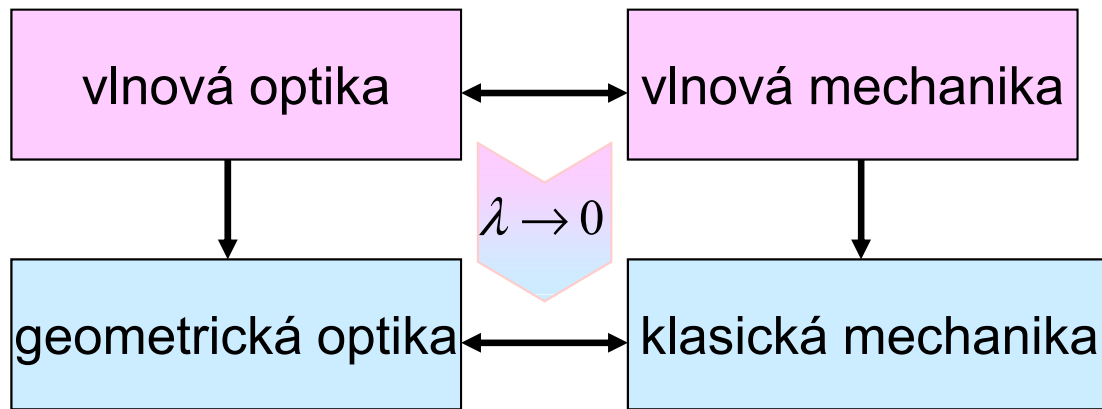
ano

ano

kritické místo

L
 mm
 nm
 mm
 mm
 μm

Paprsková (geometrická) optika částic



formální srovnání →

paprsky
eikonálová rovnice
sférické čočky

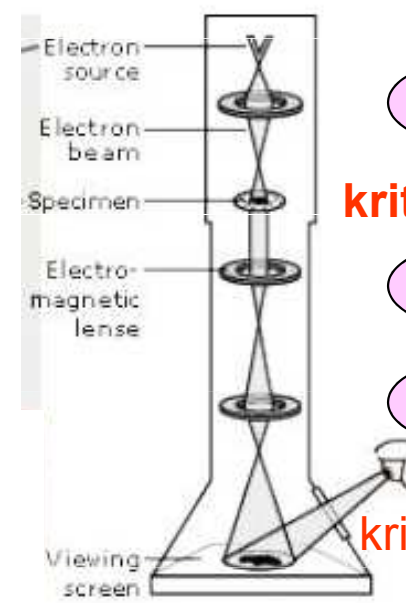
trajektorie
Newtonovy rovnice + vyločení času
spojité rozložení indexu lomu

formální podmínka

$$\lambda \rightarrow 0$$

znamená přesně

$$\lambda \ll L \text{ (char. délka)}$$



ano

kritické místo

ano

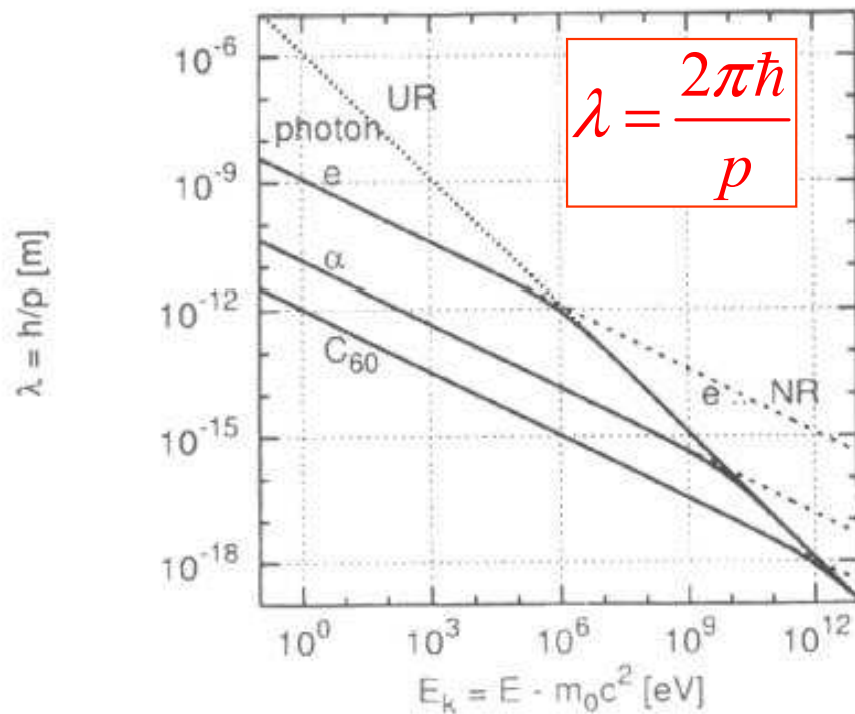
ano

kritické místo

L
 mm
 nm
 mm
 mm
 μm

vlňové délky →

Elektron jako vlna



ZÁSObNÍK VZORCŮ

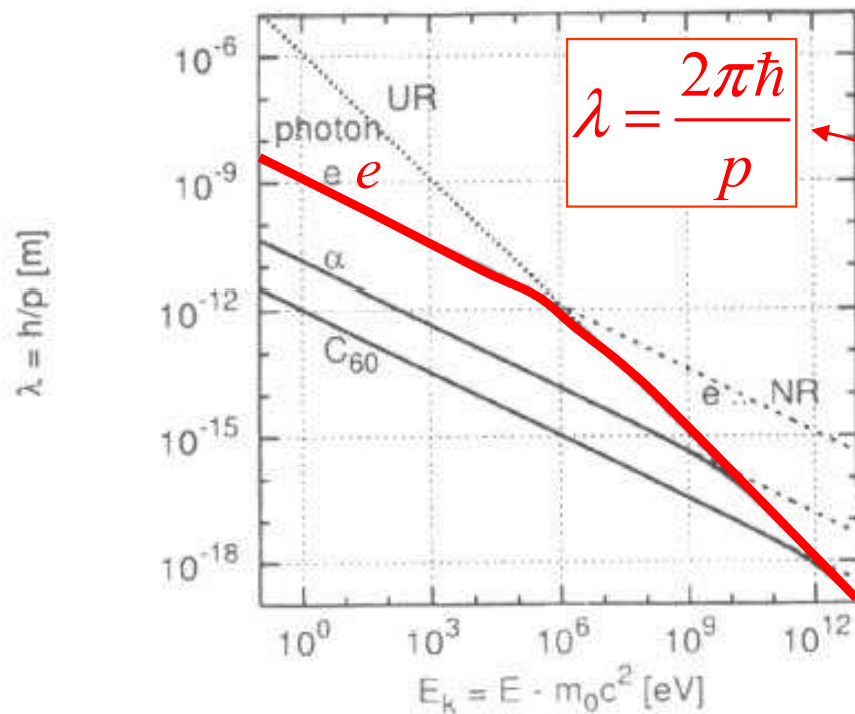
$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$E = m_0c^2 + E_{\text{kin}}$$

$$p = mv$$

$$p = \sqrt{\frac{E_{\text{kin}}^2}{c^2} + 2m_0E_{\text{kin}}}$$

Elektron jako vlna



ZÁSOBNÍK VZORCŮ

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2, \beta = \frac{v}{c}$$

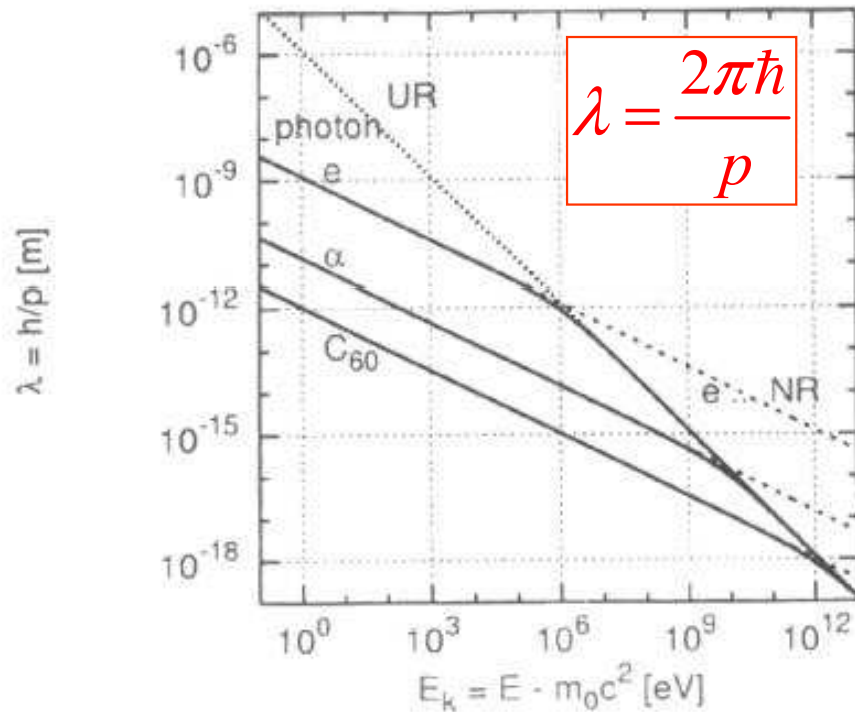
$$E = m_0c^2 + E_{\text{kin}}$$

$$p = mv$$

$$p = \sqrt{\frac{E_{\text{kin}}^2}{c^2} + 2m_0E_{\text{kin}}}$$

VSTUP
urychlovací napětí

Elektron jako vlna



ZÁSObNÍK VZORCŮ

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$E = m_0c^2 + E_{\text{kin}}$$

$$p = mv$$

$$p = \sqrt{\frac{E_{\text{kin}}^2}{c^2} + 2m_0E_{\text{kin}}}$$

LIMITY (explicitní hodnoty platí pro elektrony)

nerelativistická („naše“)

předěl

ultrarelativistická

$$E_{\text{kin}} \ll m_0c^2$$

$$E_{\text{kin}} \ll 2m_0c^2$$

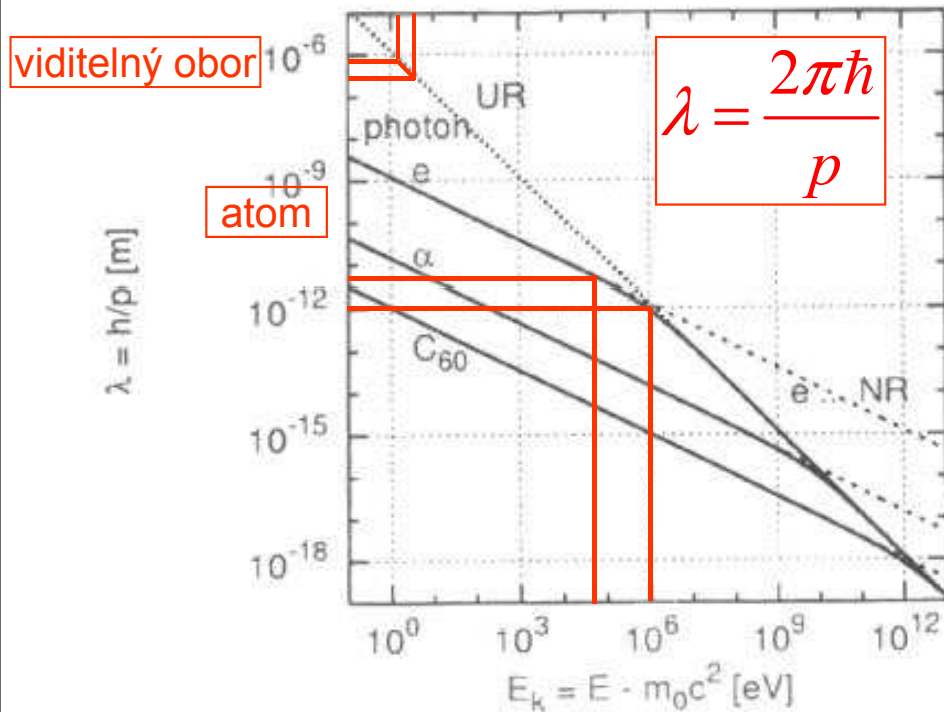
$$E_{\text{kin}} \gg m_0c^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_{\text{kin}}}} = \frac{1.22}{\sqrt{E_{\text{kin}}}} \text{ (nm, eV)}$$

$$\approx 10^6 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E_{\text{kin}}} = \frac{1.24}{E_{\text{kin}}} \text{ (\mu m, eV)}$$

Realistické vlnové délky elektronů v mikroskopu



vlnové délky v pm
(1 nm = 1000 pm)

přístroj	U keV	λ pm
stolní TEM	50	5,46
velký TEM	1000	1,22
SEM	5 – 50	5,46 – 17.3

LIMITY (explicitní hodnoty platí pro elektrony)

nerelativistická („naše“)

předěl

ultrarelativistická

$$E_{\text{kin}} \ll m_0c^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_{\text{kin}}}} = \frac{1.22}{\sqrt{E_{\text{kin}}}} \text{ (nm, eV)}$$

$$E_{\text{kin}} \ll 2m_0c^2$$

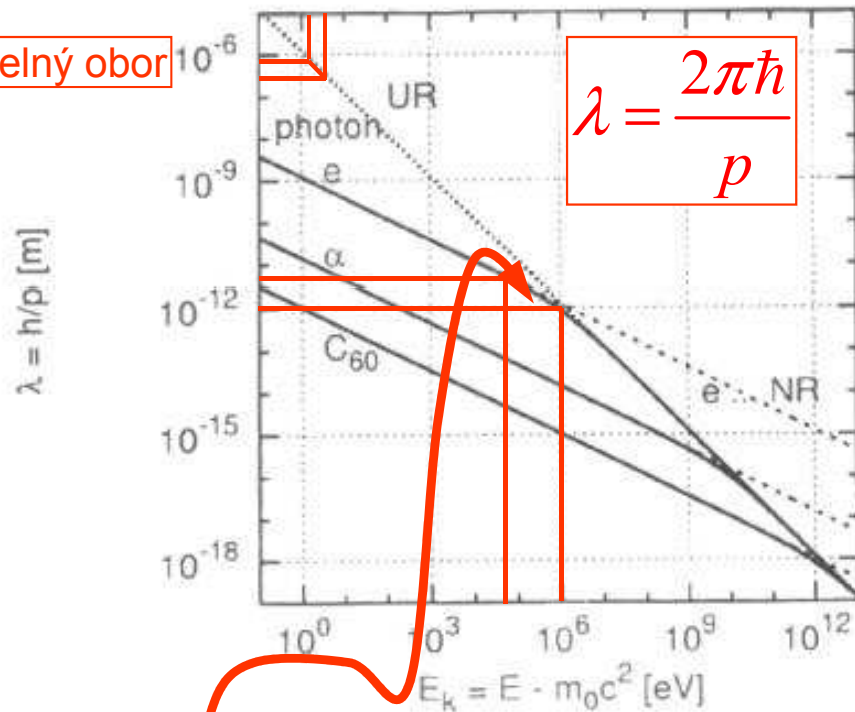
$$\approx 10^6 \text{ eV}$$

$$E_{\text{kin}} \gg m_0c^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E_{\text{kin}}} = \frac{1.24}{E_{\text{kin}}} \text{ (\mu m, eV)}$$

Realistické vlnové délky elektronů v mikroskopu

viditelný obor



vlnové délky v pm
(1 nm = 1000 pm)

přístroj	U keV	λ pm
stolní TEM	50	5,46
velký TEM	1000	1,22
SEM	5 – 50	5,46 – 17,3

v podstatě vystačíme s korigovanou NR limitou

LIMITY (explicitní hodnoty platí pro elektrony)

nerelativistická („naše“)

$$E_{\text{kin}} \ll m_0 c^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 E_{\text{kin}}}} = \frac{1.22}{\sqrt{E_{\text{kin}}}} \text{ (nm, eV)}$$

$$E_{\text{kin}} \ll 2m_0 c^2 \approx 10^6 \text{ eV}$$

předěl

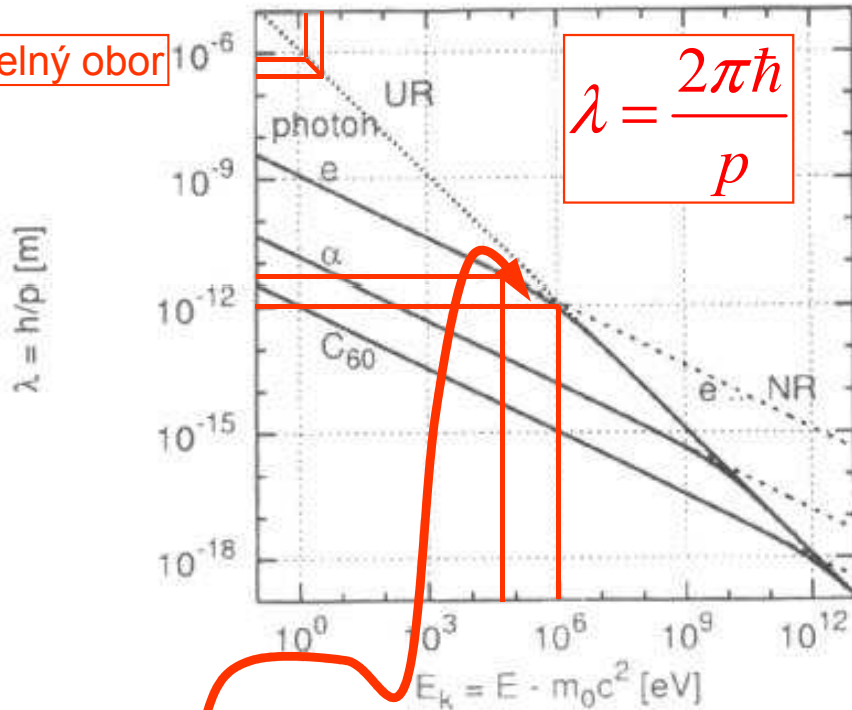
ultrarelativistická

$$E_{\text{kin}} \gg m_0 c^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E_{\text{kin}}} = \frac{1.24}{E_{\text{kin}}} \text{ (\mu m, eV)}$$

Realistické vlnové délky elektronů v mikroskopu

viditelný obor



vlnové délky v pm
(1 nm = 1000 pm)

přístroj	U keV	λ pm
stolní TEM	50	5,46
velký TEM	1000	1,22
SEM	5 – 50	5,46 – 17.3

v podstatě vystačíme s konvovanou NR limitou

LIMITY (explicitní hodnoty platí pro elektrony)

nerelativistická („naše“)

$$E_{\text{kin}} \ll m_0c^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_{\text{kin}}}} = \frac{1.22}{\sqrt{E_{\text{kin}}}} \text{ (nm, eV)}$$

předěl

$$E_{\text{kin}} \ll 2m_0c^2$$

$$\approx 10^6 \text{ eV}$$

ultrarelativistická

PROČ
PIKOMETRY
???

$$\lambda = \frac{1.24}{E_{\text{kin}}} \text{ (}\mu\text{m, eV)}$$

Trajektorie elektronů ve vnějších polích

Elektrické či magnetické pole určuje dynamiku elektronů. Od jejich drah (trajektorií) přecházíme k paprskům jako elementům řešení v přiblížení geometrické optiky

Trajektorie ve vnějších polích

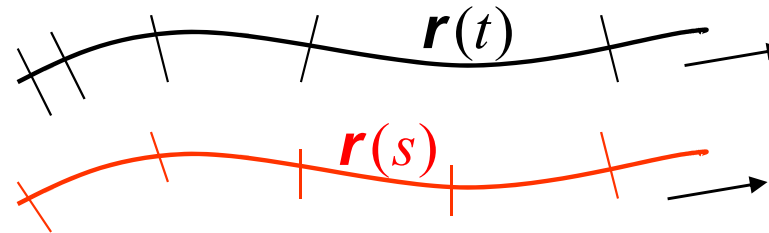
trajektorie (probíhána v čase)

paprsek (křivka parametrizovaná délkou dráhy)

Newtonovy rovnice
(Lorentzova síla)

$$e < 0$$

náboj elektronu i se znaménkem



$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Trajektorie ve vnějších polích

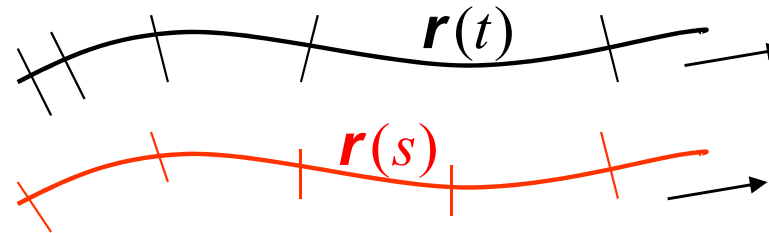
trajektorie (probíhána v čase)

paprsek (křivka parametrizovaná délkou dráhy)

Newtonovy rovnice
(Lorentzova síla)

$$e < 0$$

náboj elektronu i se znaménkem



$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

zatím vynecháme

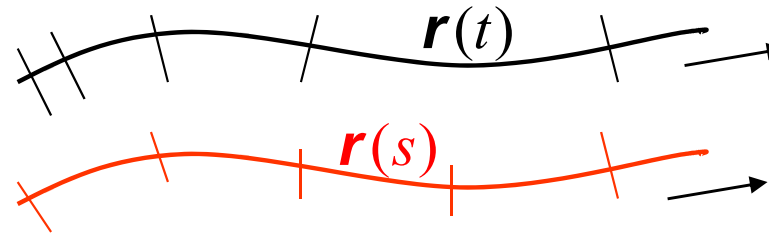
$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{m} \nabla \Phi$$

elektrostatický
potenciál

Trajektorie ve vnějších polích

trajektorie (probíhána v čase)

paprsek (křivka parametrizovaná délkou dráhy)



Newtonovy rovnice
(Lorentzova síla)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{zatím vynecháme}$$

$$e < 0$$

náboj elektronu i se znaménkem

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{m} \nabla \Phi \quad \text{elektrostatický potenciál}$$

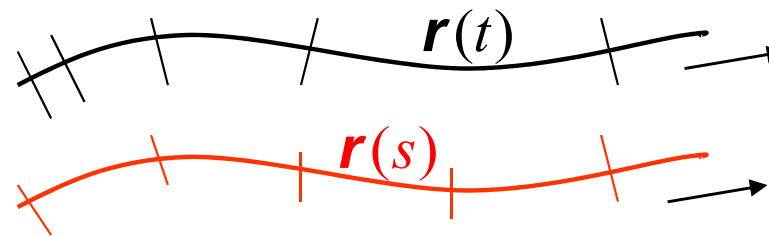
Index lomu pro elektrony

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) \propto v(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(\mathbf{r}))} & v(\mathbf{r}) &= |\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t)| \\ &= \sqrt{\frac{2}{m} E - \frac{2e}{m} \Phi(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

Trajektorie ve vnějších polích

trajektorie (probíhána v čase)

paprsek (křivka parametrizovaná délkou dráhy)



Newtonovy rovnice
(Lorentzova síla)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{zatím vynecháme}$$

$$e < 0$$

náboj elektronu i se znaménkem

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{m} \nabla \Phi \quad \text{elektrostatický potenciál}$$

Index lomu pro elektrony

$$n(\mathbf{r}) \propto v(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(\mathbf{r}))} \quad v(\mathbf{r}) = |\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t)|$$

$$= \sqrt{\frac{2}{m} E - \frac{2e}{m} \Phi(\mathbf{r})}$$

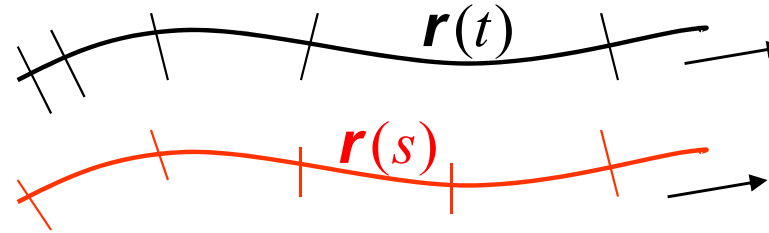
Vyloučení času

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{e}{m} \nabla \Phi \cdot \frac{1}{v} = \nabla v$$

Trajektorie ve vnějších polích

trajektorie (probíhána v čase)

paprsek (křivka parametrizovaná délkou dráhy)



Newtonovy rovnice
(Lorentzova síla)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{zatím vynecháme}$$

$$e < 0$$

náboj elektronu i se znaménkem

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{m} \nabla \Phi \quad \text{elektrostatický potenciál}$$

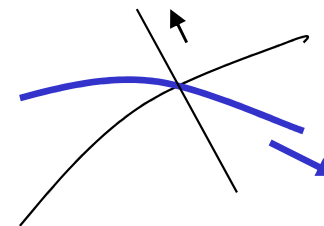
Index lomu pro elektrony

$$n(\mathbf{r}) \propto v(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(\mathbf{r}))} \quad v(\mathbf{r}) = |\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t)|$$

$$= \sqrt{\frac{2}{m} E - \frac{2e}{m} \Phi(\mathbf{r})}$$

Vyloučení času

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{e}{m} \nabla \Phi \cdot \frac{1}{v} = \nabla v$$



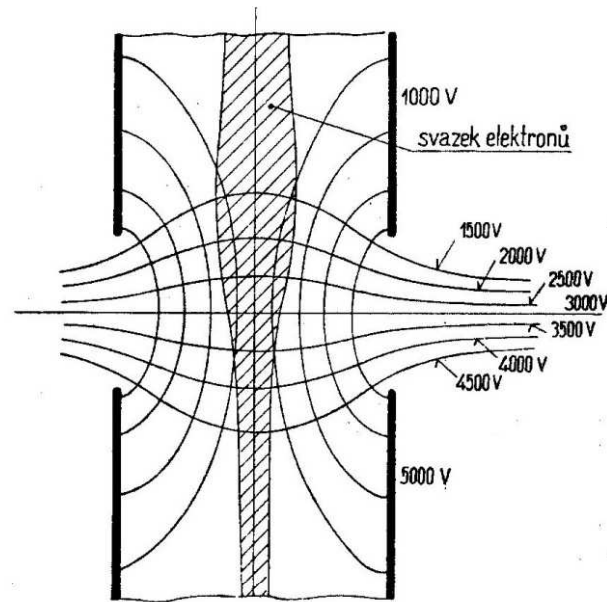
diferenciální
tvar
zákona lomu

Teoretický návrh dílů pro elektronovou optiku

Od neurčité představy, že elektrické či magnetické pole vychýlí elektronové paprsky žádoucím směrem přejdeme k návrhu optických elementů.

Dva kroky ve studiu optického dílu

PŘÍKLAD: URYCHLOVACÍ SYSTEM



Obr. 131. Urychlovací systém.

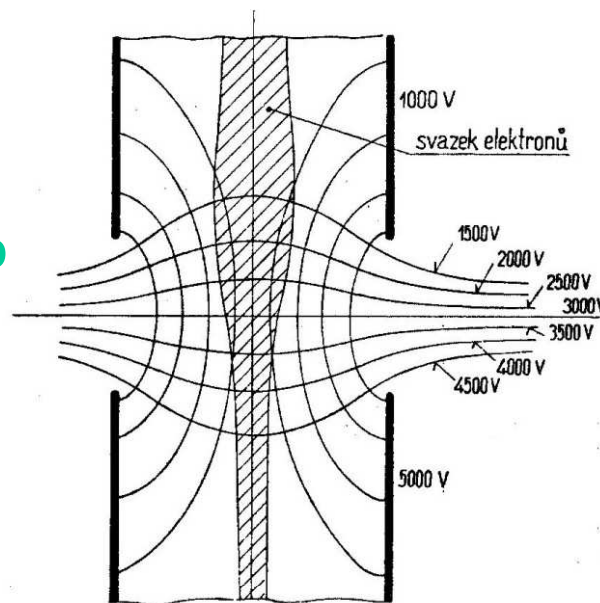
Dva kroky ve studiu optického dílu

PŘÍKLAD: URYCHLOVACÍ SYSTÉM

1. KROK: URČENÍ Φ

- ve vakuu
- geometrie kovových elektrod
- potenciály elektrod

vstup



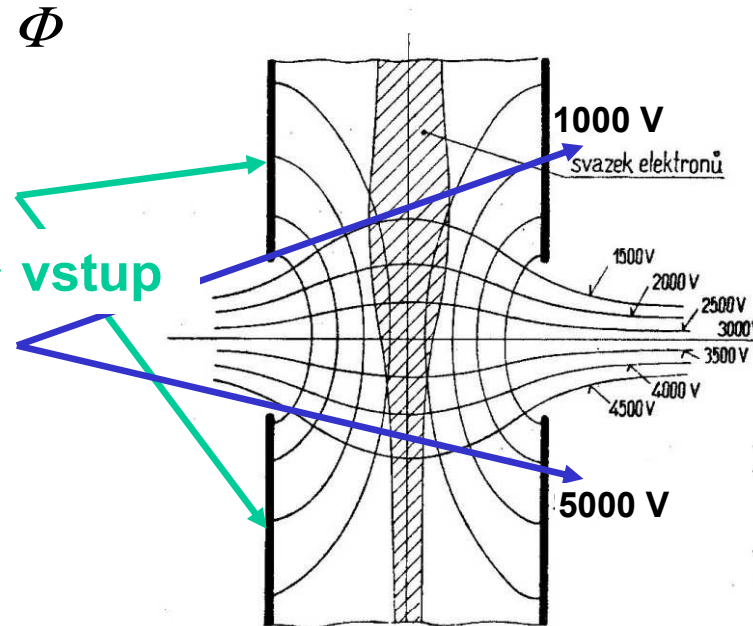
Obr. 131. Urychlovací systém.

Dva kroky ve studiu optického dílu

PŘÍKLAD: URYCHLOVACÍ SYSTEM

1. KROK: URČENÍ Φ

- ve vakuu
- geometrie kovových elektrod
- potenciály elektrod



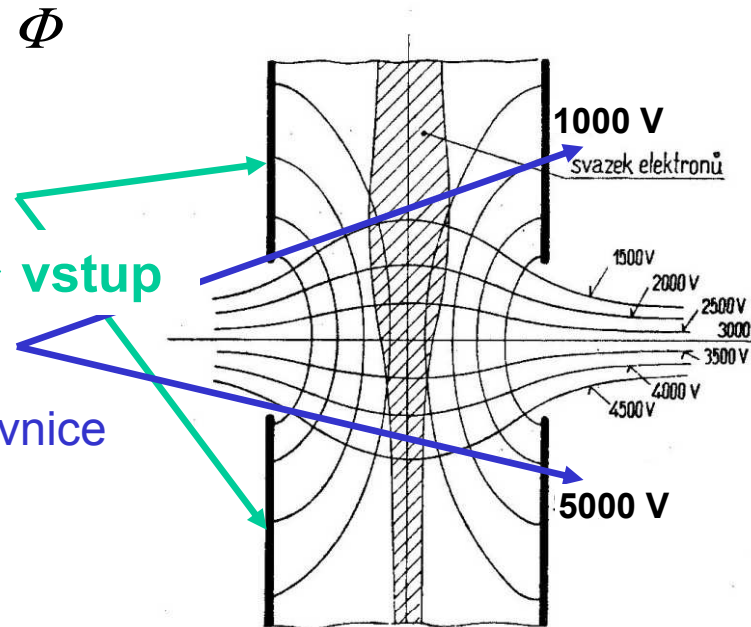
Obr. 131. Urychlovací systém.

Dva kroky ve studiu optického dílu

PŘÍKLAD: URYCHLOVACÍ SYSTEM

1. KROK: URČENÍ Φ

- ve vakuu
- geometrie kovových elektrod
- potenciály elektrod
- řešení Laplaceovy rovnice při okrajových podmínkách daných elektrodami



Obr. 131. Urychlovací systém.

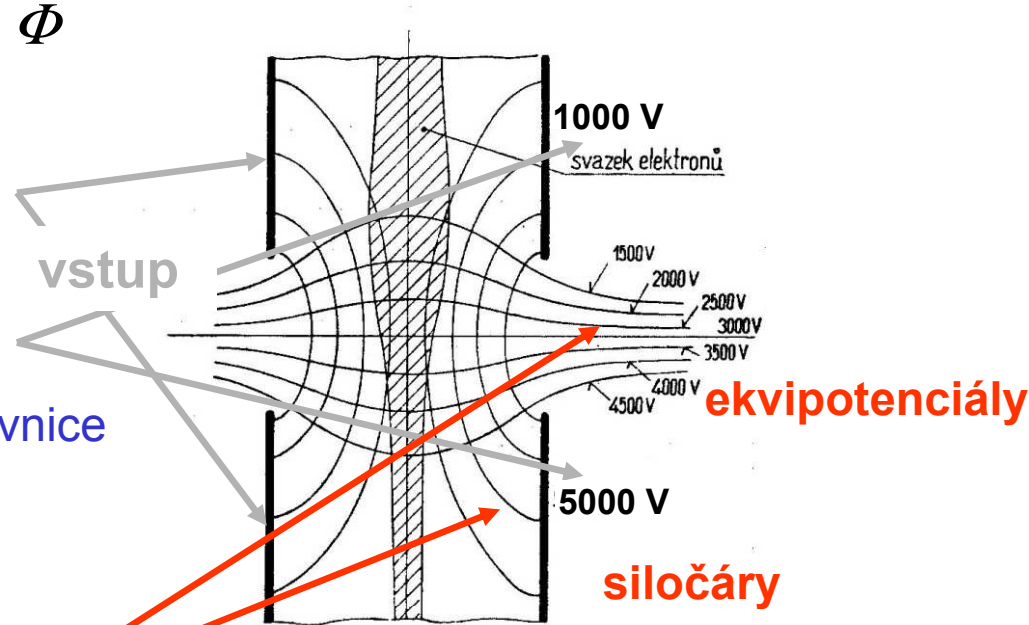
$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$$

Dva kroky ve studiu optického dílu

PŘÍKLAD: URYCHLOVACÍ SYSTEM

1. KROK: URČENÍ Φ

- ve vakuu
- geometrie kovových elektrod
- potenciály elektrod
- řešení Laplaceovy rovnice při okrajových podmínkách daných elektrodami



$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$$

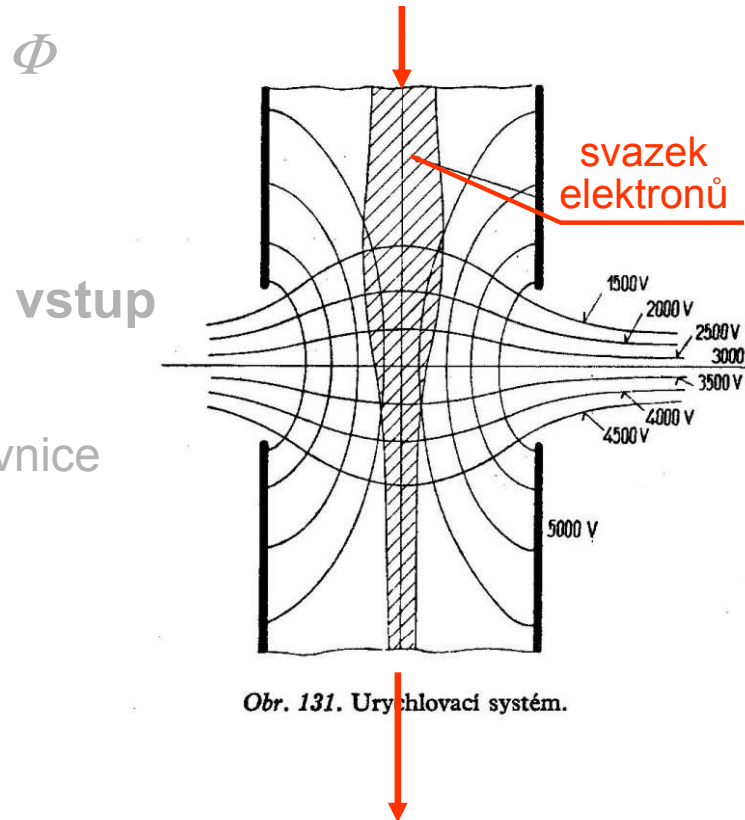
Dva kroky ve studiu optického dílu

PŘÍKLAD: URYCHLOVACÍ SYSTEM

1. KROK: URČENÍ Φ

- ve vakuu
- geometrie kovových elektrod
- potenciály elektrod
- řešení Laplaceovy rovnice při okrajových podmínkách daných elektrodami

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$$



2. KROK: PAPRSKY

- blízko osy systému – paraxiální oblast
- vstupní energie E
- výstupní energie $E + 4000 \text{ eV}$
- zlepšená kolimace
- hledání trajektorií
 - buď přímo
 - z paraxiální rovnice + korekce na sférickou vadu

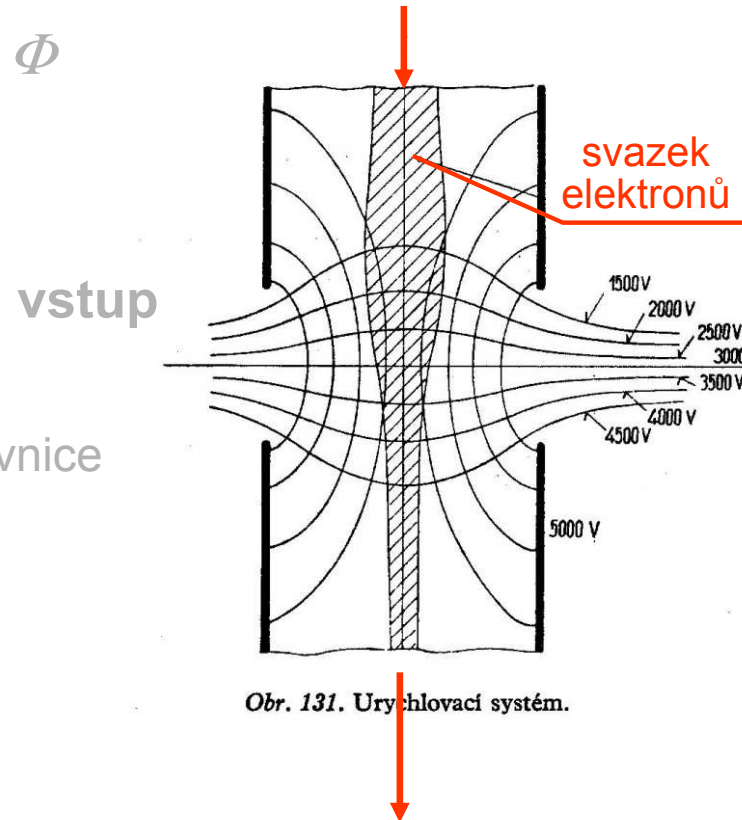
Dva kroky ve studiu optického dílu

PŘÍKLAD: URYCHLOVACÍ SYSTEM

1. KROK: URČENÍ Φ

- ve vakuu
- geometrie kovových elektrod
- potenciály elektrod
- řešení Laplaceovy rovnice při okrajových podmínkách daných elektrodami

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$$



2. KROK: PAPRSKY

- blízko osy systému – paraxiální oblast
- vstupní energie E
- výstupní energie $E + 4000 \text{ eV}$
- zlepšená kolimace
- hledání trajektorií
 - buď přímo
 - z paraxiální rovnice + korekce na sférickou vadu

I. Určení průběhu potenciálu

V principu velmi jednoduchý úkol: vyřešit Laplaceovu rovnici s Dirichletovou okrajovou podmínkou.

Tato část celého postupu však klade největší nároky na použité numerické metody. Bez nich nelze počítat s úspěchem.

Řešení Laplaceovy rovnice

LAPLACEOVA
ROVNICE

DIRICHLETOVA
ÚLOHA

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$
$$\partial_{xx}\Phi(x,y,z)+\partial_{yy}\Phi+\partial_{zz}\Phi=0$$

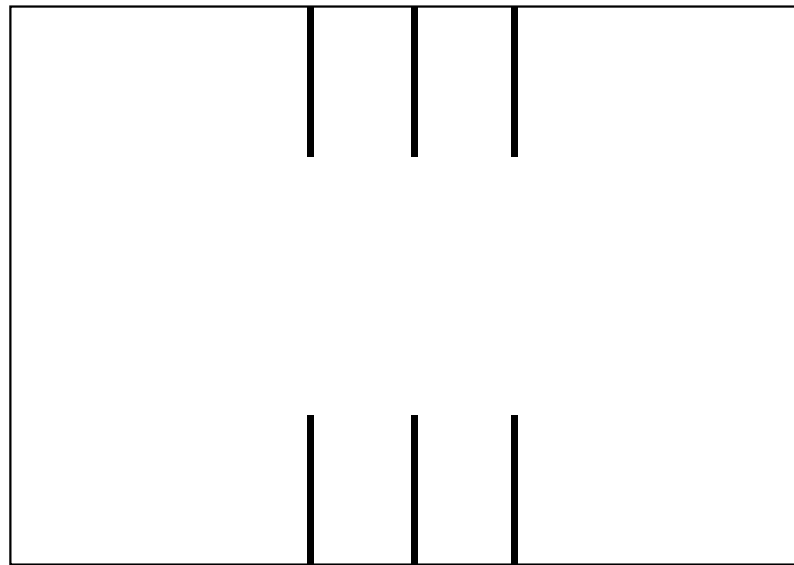
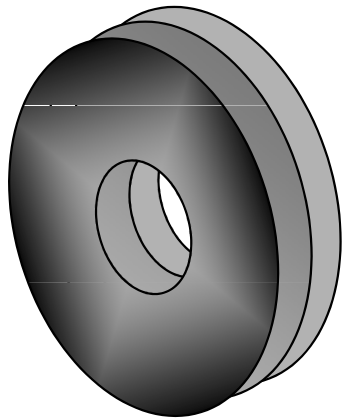
Okrajové podmínky

LR řešíme ve zvolené dostatečně rozsáhlé, ale co nejmenší oblasti.

Předepsány jsou hodnoty neznámé na hranici oblasti:

- ♠ na povrchu elektrod
- ♠ na vnější hranici

Příklad čočky



Řešení Laplaceovy rovnice

LAPLACEOVA
ROVNICE

DIRICHLETOVA
ÚLOHA

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$
$$\partial_{xx}\Phi(x,y,z)+\partial_{yy}\Phi+\partial_{zz}\Phi=0$$

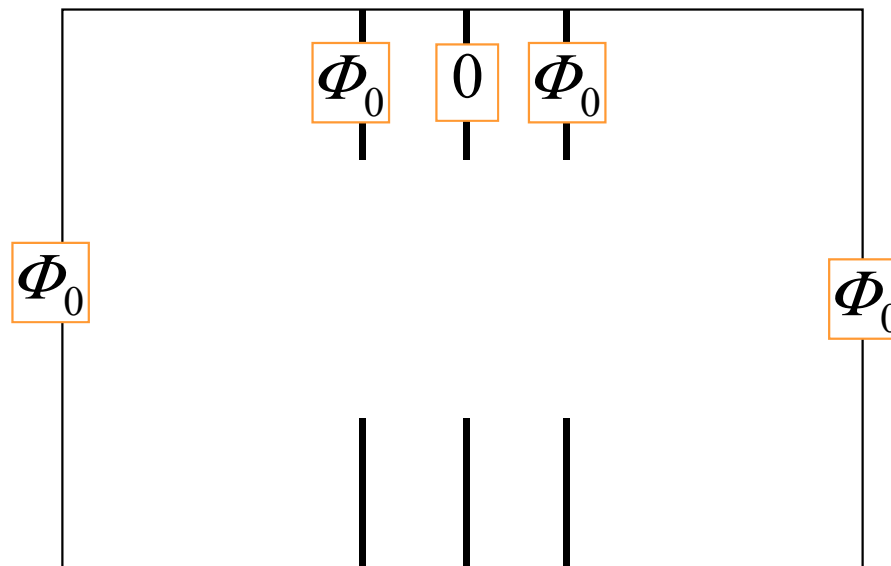
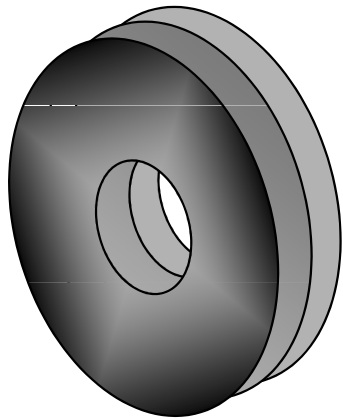
Okrajové podmínky

LR řešíme ve zvolené dostatečně rozsáhlé, ale co nejmenší oblasti.

Předepsány jsou hodnoty neznámé na hranici oblasti:

- ♣ na povrchu elektrod
- ♣ na vnější hranici

Příklad čočky



Řešení Laplaceovy rovnice

LAPLACEOVA
ROVNICE

DIRICHLETOVA
ÚLOHA

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$
$$\partial_{xx}\Phi(x,y,z)+\partial_{yy}\Phi+\partial_{zz}\Phi=0$$

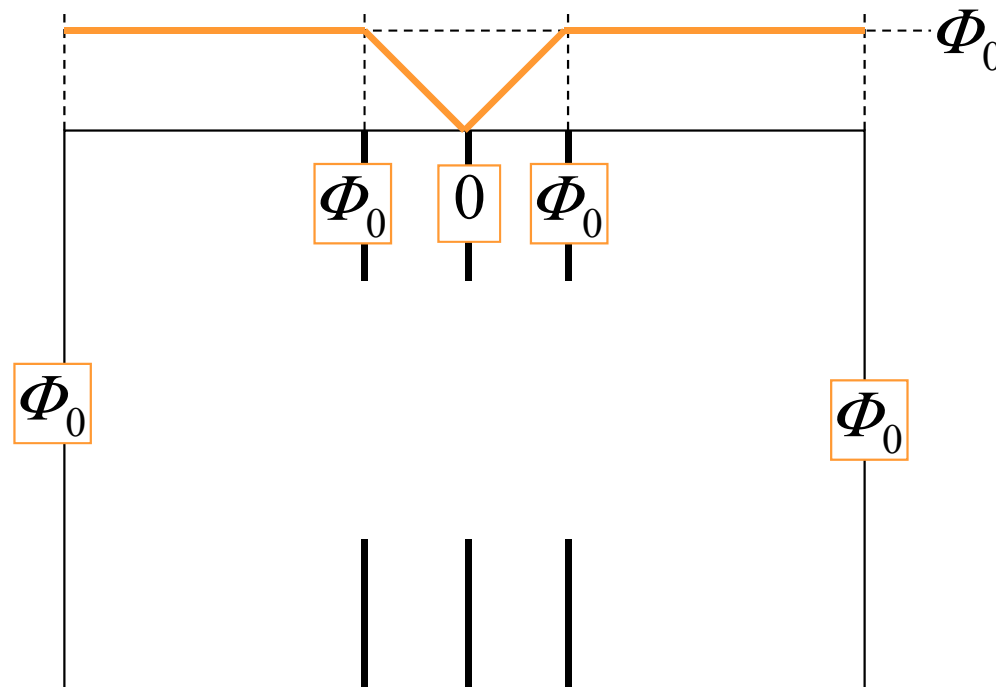
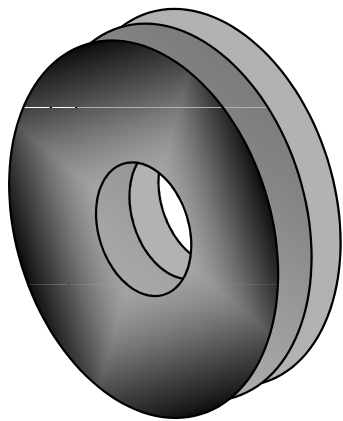
Okrajové podmínky

LR řešíme ve zvolené dostatečně rozsáhlé, ale co nejmenší oblasti.

Předepsány jsou hodnoty neznámé na hranici oblasti:

♣ na povrchu elektrod ♣ na vnější hranici

Příklad čočky



Řešení Laplaceovy rovnice

LAPLACEOVA
ROVNICE

DIRICHLETOVA
ÚLOHA

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$
$$\partial_{xx}\Phi(x,y,z)+\partial_{yy}\Phi+\partial_{zz}\Phi=0$$

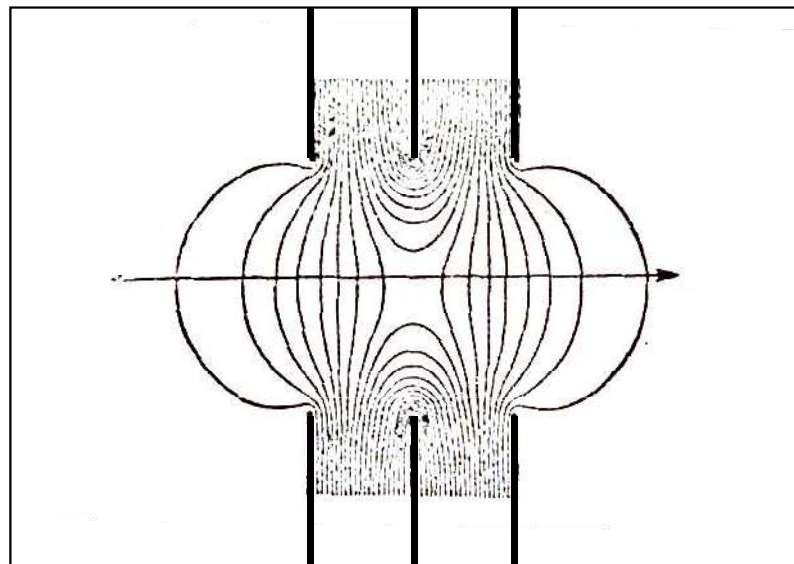
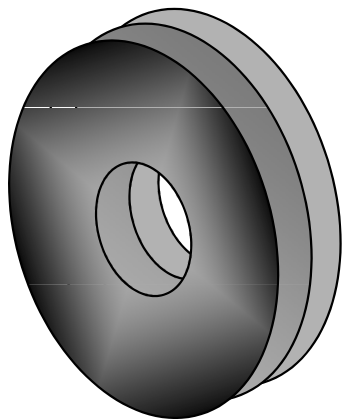
Okrajové podmínky

LR řešíme ve zvolené dostatečně rozsáhlé, ale co nejmenší oblasti.

Předepsány jsou hodnoty neznámé na hranici oblasti:

- ♠ na povrchu elektrod
- ♠ na vnější hranici

Příklad čočky



Řešení Laplaceovy rovnice

LAPLACEOVA
ROVNICE

DIRICHLETOVA
ÚLOHA

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$
$$\partial_{xx}\Phi(x,y,z)+\partial_{yy}\Phi+\partial_{zz}\Phi=0$$

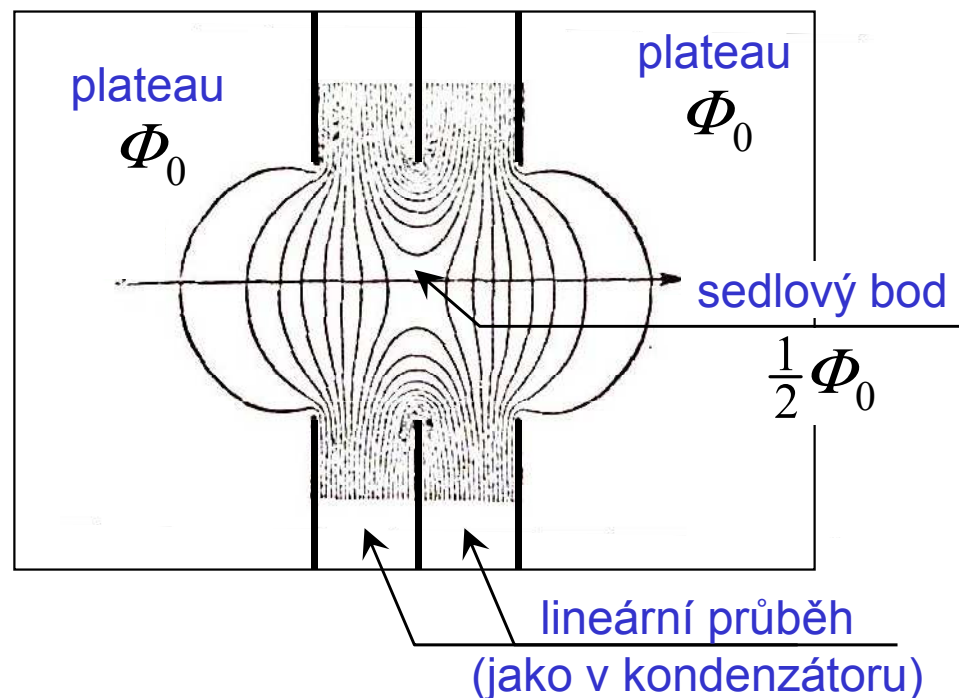
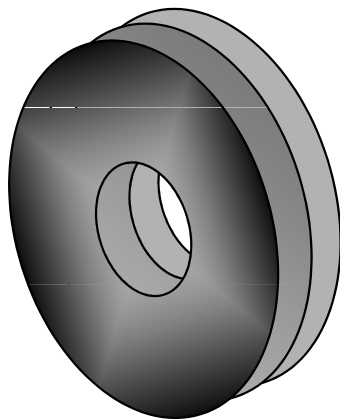
Okrajové podmínky

LR řešíme ve zvolené dostatečně rozsáhlé, ale co nejmenší oblasti.

Předepsány jsou hodnoty neznámé na hranici oblasti:

- ♣ na povrchu elektrod
- ♣ na vnější hranici

Příklad čočky



Řešení Laplaceovy rovnice

LAPLACEOVA
ROVNICE

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$$
$$\partial_{xx}\Phi(x, y, z) + \partial_{yy}\Phi + \partial_{zz}\Phi = 0$$

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Obecně 3D úloha.
Použití osové symetrie

$$\partial_{rr}\Phi(r, z) + \frac{1}{r}\partial_r\Phi + \partial_{zz}\Phi = 0$$

numerické techniky

metoda
sítí

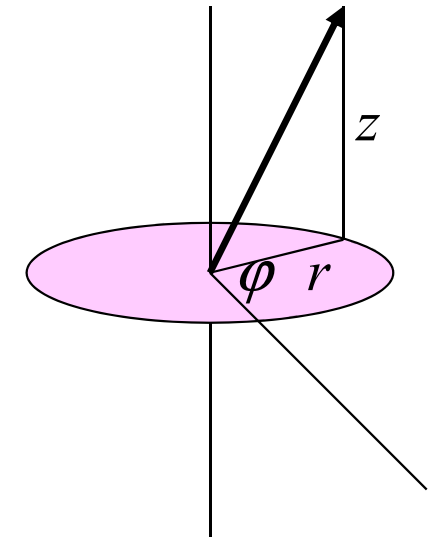
klasický postup:
derivace nahrazeny
diferencemi

dnes překonané

metoda
konečných prvků

triangulace
lineární interpolace
variační princip

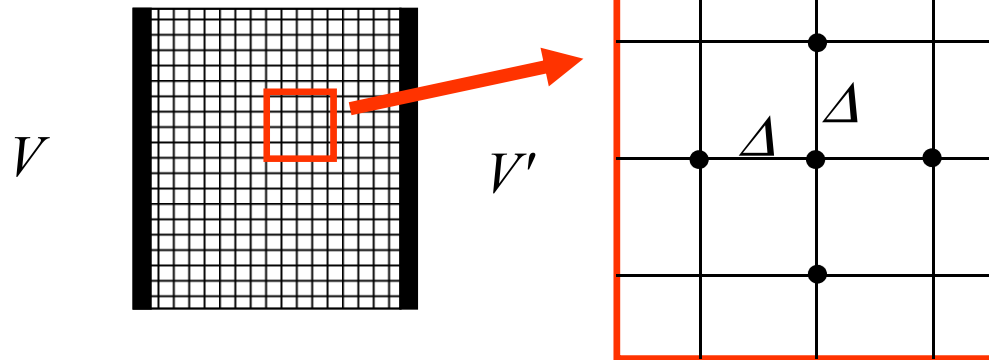
dnes nejrozšířenější



Numerické metody: Metoda sítí

Základní myšlenka: nahradit diferenciální rovnici diferenční

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$



2D ILUSTRACE

$$x_j = x_0 + j \cdot \Delta$$

$$y_k = y_0 + k \cdot \Delta$$

$$\Phi_{j,k} = \Phi(x_j, y_k)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\mathbf{r}_{jk}) &= \partial_{xx}\Phi(x_j, y_k) + \partial_{yy}\Phi(x_j, y_k) \rightarrow \\ &\approx \frac{\Phi_{j+1,k} - 2\Phi_{j,k} + \Phi_{j-1,k}}{\Delta^2} + \frac{\Phi_{j,k+1} - 2\Phi_{j,k} + \Phi_{j,k-1}}{\Delta^2} \end{aligned}$$

... soustava lineárních rovnic pro $\Phi_{j,k}$

Numerické metody: Metoda konečných prvků

Základní myšlenka: nahradit **diferenciální rovnici** **variační úlohou**

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0 \\ + \text{Dirichletovy okraj. podmínky} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \mathcal{J}[\Phi] = \int dV \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = \text{Min}$$

1. Integrace po oblasti řešení
2. Do soutěže vstupují jen funkce Φ splňující okrajové podmínky
3. Minimum budeme hledat jen ve třídě vhodných aproximativních Φ

Numerické metody: Metoda konečných prvků

Základní myšlenka: nahradit **diferenciální rovnici** **variační úlohou**

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$

+ Dirichletovy okraj. podmínky

$$\mathcal{J}[\Phi] = \int dV \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = \text{Min}$$

Motivační úvaha (standardní)

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}[\check{\Phi} \pm g\delta\Phi] - \mathcal{J}[\check{\Phi}] \\ & = \pm g\delta\mathcal{J} + g^2 O[\delta^2\Phi] \geq 0 \end{aligned}$$

1. Integrace po oblasti řešení
2. Do soutěže vstupují jen funkce Φ splňující okrajové podmínky
3. Minimum budeme hledat jen ve třídě vhodných aproximativních Φ

Numerické metody: Metoda konečných prvků

Základní myšlenka: nahradit **diferenciální rovnici** **variační úlohou**

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$

+ Dirichletovy okraj. podmínky

$$\mathcal{J}[\Phi]=\int dV \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi = \text{Min}$$

Motivační úvaha (standardní)

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}[\check{\Phi}\pm g\delta\Phi]-\mathcal{J}[\check{\Phi}] \\ &= \pm g\delta\mathcal{J}+g^2O[\delta^2\Phi]\geq 0 \end{aligned}$$

Variační podmínka

$\check{\Phi}$ nechť dává minimum $\mathcal{J}[\Phi]$

Pak

$$\delta\mathcal{J}=2\int dV \nabla\delta\Phi\cdot\nabla\check{\Phi}=0$$

pro všechna $\delta\Phi$ splňující homogenní okrajovou podmínku.

1. Integrace po oblasti řešení
2. Do soutěže vstupují jen funkce Φ splňující okrajové podmínky
3. Minimum budeme hledat jen ve třídě vhodných aproximativních Φ

Numerické metody: Metoda konečných prvků

Základní myšlenka: nahradit **diferenciální rovnici** **variační úlohou**

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$

+ Dirichletovy okraj. podmínky

$$\mathcal{J}[\Phi] = \int dV \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = \text{Min}$$

Motivační úvaha (standardní)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\check{\Phi} \pm g\delta\Phi] - \mathcal{J}[\check{\Phi}] \\ = \pm g\delta\mathcal{J} + g^2 O[\delta^2\Phi] \geq 0 \end{aligned}$$

Variační podmínka

$\check{\Phi}$ nechť dává minimum $\mathcal{J}[\Phi]$

Pak

$$\delta\mathcal{J} = 2 \int dV \nabla\delta\Phi \cdot \nabla\check{\Phi} = 0$$

pro všechna $\delta\Phi$ splňující homogenní okrajovou podmínku.

1. Integrace po oblasti řešení
2. Do soutěže vstupují jen funkce Φ splňující okrajové podmínky
3. Minimum budeme hledat jen ve třídě vhodných aproximativních Φ

Gaussova věta

$$0 = \int_{\partial V} d\mathbf{S} \delta\Phi \nabla\check{\Phi} = \int_V dV \nabla \cdot (\delta\Phi \nabla\check{\Phi})$$

$$0 = \int_V dV \nabla\delta\Phi \cdot \nabla\check{\Phi} + \int_V dV \delta\Phi \Delta\check{\Phi}$$

$$\delta\mathcal{J} = 0$$

libovolné

$$\underline{\underline{\Delta\check{\Phi} = 0}}$$

Numerické metody: Metoda konečných prvků

Základní myšlenka: nahradit **diferenciální rovnici** **variační úlohou**

$$\Delta\Phi(\mathbf{r})=0$$

+ Dirichletovy okraj. podmínky

$$\mathcal{J}[\Phi] = \int dV \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = \text{Min}$$

Motivační úvaha (standardní)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\check{\Phi} \pm g\delta\Phi] - \mathcal{J}[\check{\Phi}] \\ = \pm g\delta\mathcal{J} + g^2 O[\delta^2\Phi] \geq 0 \end{aligned}$$

Variační podmínka

$\check{\Phi}$ nechť dává minimum $\mathcal{J}[\Phi]$

Pak

$$\delta\mathcal{J} = 2 \int dV \nabla\delta\Phi \cdot \nabla\check{\Phi} = 0$$

pro všechna $\delta\Phi$ splňující homogenní okrajovou podmínku.

1. Integrace po oblasti řešení
2. Do soutěže vstupují jen funkce Φ splňující okrajové podmínky
3. Minimum budeme hledat jen ve třídě vhodných aproximativních Φ

aproximace

Numerické metody: Metoda konečných prvků

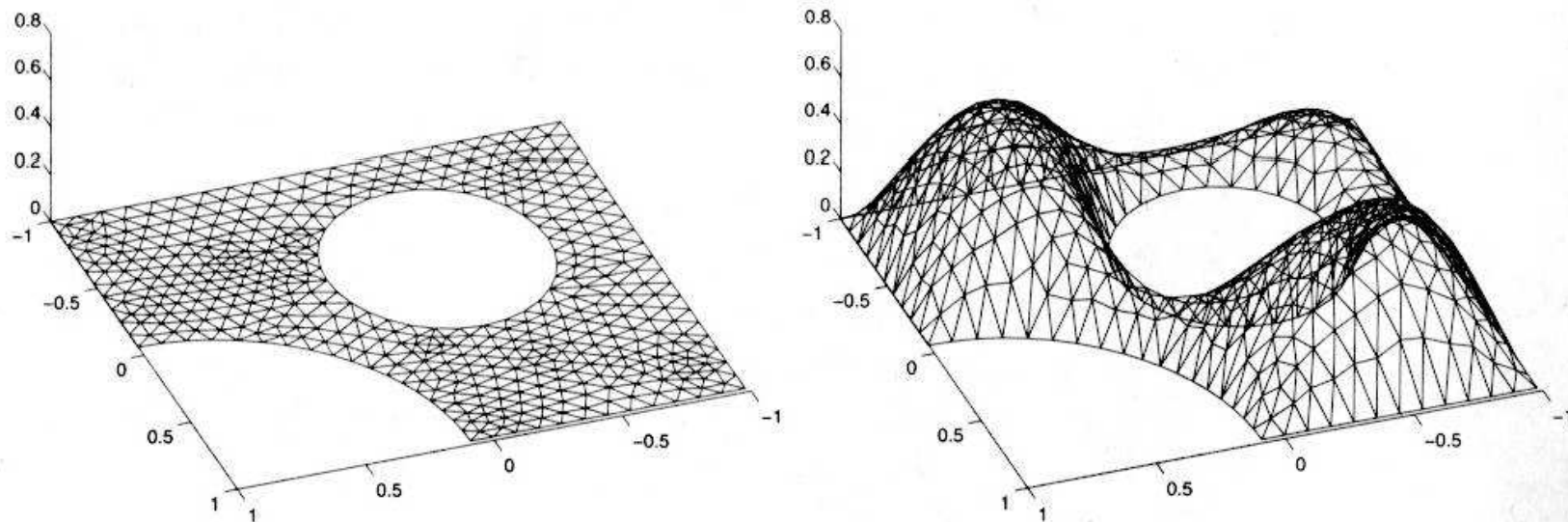
Triangulace Oblast řešení je rozdělena na síť dostatečně malých elementárních oblastí, např. trojúhelníků

Interpolace Aproximativní funkce interpoluje polynomiálně, např. lineárně, hodnoty ve vrcholech sítě

Znázornění triangulace v metodě konečných prvků

Podle Partial Differential Equation Toolbox for use with MATLAB:
User's Guide

This is like using flat tiles to build a waterproof dome, which is perfectly possible.



A Triangular Mesh (left) and a Continuous Piecewise Linear Function on That Mesh

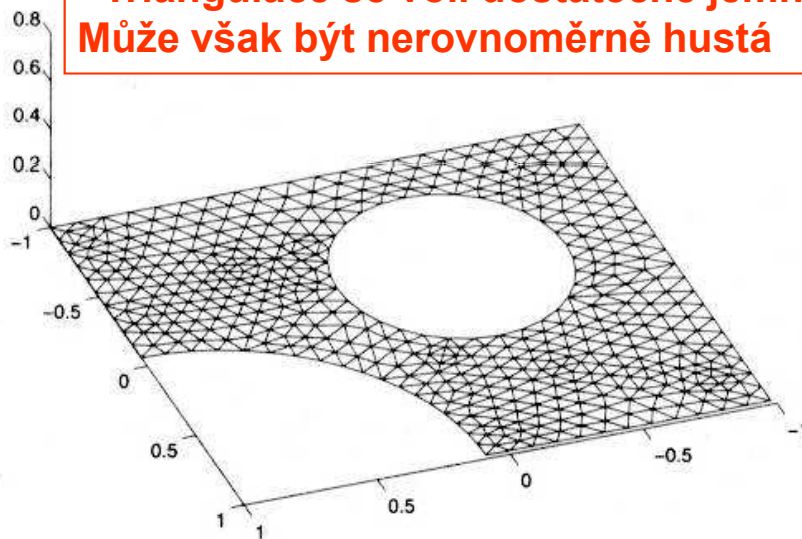
Znázornění triangulace v metodě konečných prvků

Podle Partial Differential Equation Toolbox for use with MATLAB:
User's Guide

This is like using flat tiles to build a waterproof dome, which is perfectly possible.

- Definiční obor může být složitá oblast
- Triangulace se volí dostatečně jemná. Může však být nerovnoměrně hustá

- Interpoláční funkce v každé buňce je lineární, u hran jsou zlomy sklonu
- uzly na hranici vystihují okrajovou podmínku (zde homogenní, tj. nulovou)



A Triangular Mesh (left) and a Continuous Piecewise Linear Function on That Mesh

Numerické metody: Metoda konečných prvků

Triangulace Oblast řešení je rozdělena na síť dostatečně malých elementárních oblastí, např. trojúhelníků

Interpolace Aproximativní funkce interpoluje polynomiálně, např. lineárně, hodnoty ve vrcholech sítě

Variační podmínka Gradient této interpolace je po částech spojitý ... je použitelný ve variačním funkcionálu (hledané řešení má přitom spojitě druhé derivace)

Numerické metody: Metoda konečných prvků

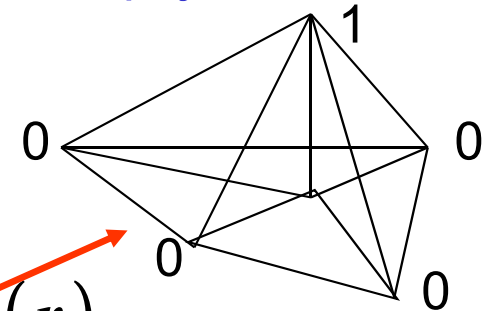
Triangulace Oblast řešení je rozdělena na síť dostatečně malých elementárních oblastí, např. trojúhelníků

Interpolace Aproximativní funkce interpoluje polynomiálně, např. lineárně, hodnoty ve vrcholech sítě

Variační podmínka Gradient této interpolace je po částech spojitý ... je použitelný ve variačním funkcionálu (hledané řešení má přitom spojité druhé derivace)

Konečné prvky S každým vrcholem sítě spojíme jeden „prvek“ podle obrázku. Máme tak rozklad

$$\Phi \xrightarrow[\text{interpolace}]{\text{triangulace}} \Phi_{\text{var}} \xrightarrow[\text{koneč. prvků}]{\text{rozklad do}} \sum_n \Phi(\mathbf{r}_n) \eta_n(\mathbf{r})$$



Numerické metody: Metoda konečných prvků

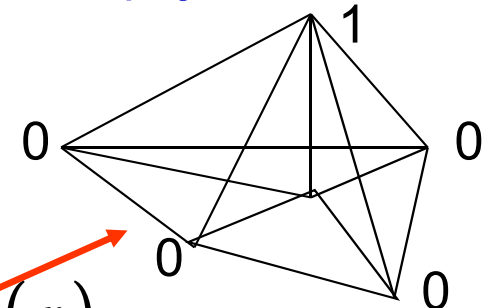
Triangulace Oblast řešení je rozdělena na síť dostatečně malých elementárních oblastí, např. trojúhelníků

Interpolace Aproximativní funkce interpoluje polynomiálně, např. lineárně, hodnoty ve vrcholech sítě

Variační podmínka Gradient této interpolace je po částech spojitý ... je použitelný ve variačním funkcionálu (hledané řešení má přitom spojité druhé derivace)

Konečné prvky S každým vrcholem sítě spojíme jeden „prvek“ podle obrázku. Máme tak rozklad

$$\Phi \xrightarrow[\text{interpolace}]{\text{triangulace}} \Phi_{\text{var}} \xrightarrow[\text{koneč. prvků}]{\text{rozklad do}} \sum_n \Phi(\mathbf{r}_n) \eta_n(\mathbf{r})$$



Lineární rovnice Soustava lineárních rovnic k řešení:

$$\int dV \nabla \delta\Phi \cdot \nabla \check{\Phi} = 0 \quad \text{variační podmínka}$$

Numerické metody: Metoda konečných prvků

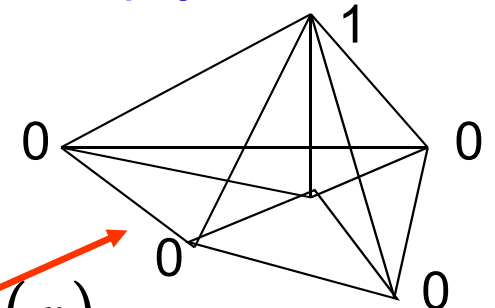
Triangulace Oblast řešení je rozdělena na síť dostatečně malých elementárních oblastí, např. trojúhelníků

Interpolace Aproximativní funkce interpoluje polynomiálně, např. lineárně, hodnoty ve vrcholech sítě

Variační podmínka Gradient této interpolace je po částech spojitý ... je použitelný ve variačním funkcionálu (hledané řešení má přitom spojité druhé derivace)

Konečné prvky S každým vrcholem sítě spojíme jeden „prvek“ podle obrázku. Máme tak rozklad

$$\Phi \xrightarrow[\text{interpolace}]{\text{triangulace}} \Phi_{\text{var}} \xrightarrow[\text{koneč. prvků}]{\text{rozklad do}} \sum_n \Phi(\mathbf{r}_n) \eta_n(\mathbf{r})$$



Lineární rovnice Soustava lineárních rovnic k řešení:

$$\int dV \nabla \eta_n \cdot \nabla \sum_m \eta_m \times \Phi(\mathbf{r}_m) = 0$$

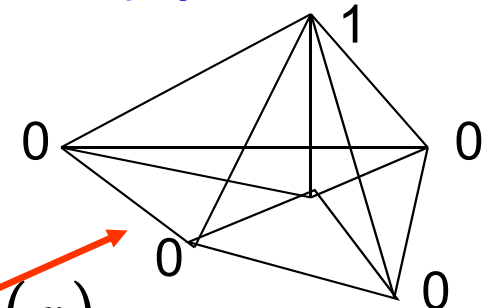
Numerické metody: Metoda konečných prvků

Triangulace Oblast řešení je rozdělena na síť dostatečně malých elementárních oblastí, např. trojúhelníků

Interpolace Aproximativní funkce interpoluje polynomiálně, např. lineárně, hodnoty ve vrcholech sítě

Variační podmínka Gradient této interpolace je po částech spojitý ... je použitelný ve variačním funkcionálu (hledané řešení má přitom spojité druhé derivace)

Konečné prvky S každým vrcholem sítě spojíme jeden „prvek“ podle obrázku. Máme tak rozklad



$$\Phi \xrightarrow[\text{interpolace}]{\text{triangulace}} \Phi_{\text{var}} \xrightarrow[\text{koneč. prvků}]{\text{rozklad do}} \sum_n \Phi(\mathbf{r}_n) \eta_n(\mathbf{r})$$

Lineární rovnice Soustava lineárních rovnic k řešení:

$$\sum_m \underbrace{\int dV \nabla \eta_n \cdot \nabla \eta_m}_{A_{nm}} \times \Phi(\mathbf{r}_m) = 0$$

Matice soustavy je řídká, efektivní metody řešení.

Metoda konečných elementů

Na současných paralelních počítačích řešitelné i rozsáhlé problémy založené na parciálních diferenciálních rovnicích

Překvapivě mnoho lze dosáhnout i na výkonných PC nebo pracovních stanicích

... APLIKOVANÁ FUNKCIONÁLNÍ ANALÝSA

BRNO a metoda FEM ✓ prof. M. Zlámal (1924-1997) a jeho škola na VUT
✓ prof. B. Lencová UPT AV ČR a VUT SPOC

II. Určení průběhu paprsků

Omezíme se nejprve na
osově symetrickou paraxiální oblast.

Tam je všechno plně zvládnuto.
Zobrazení je tam dokonalé.

Paraxiální elektronová optika

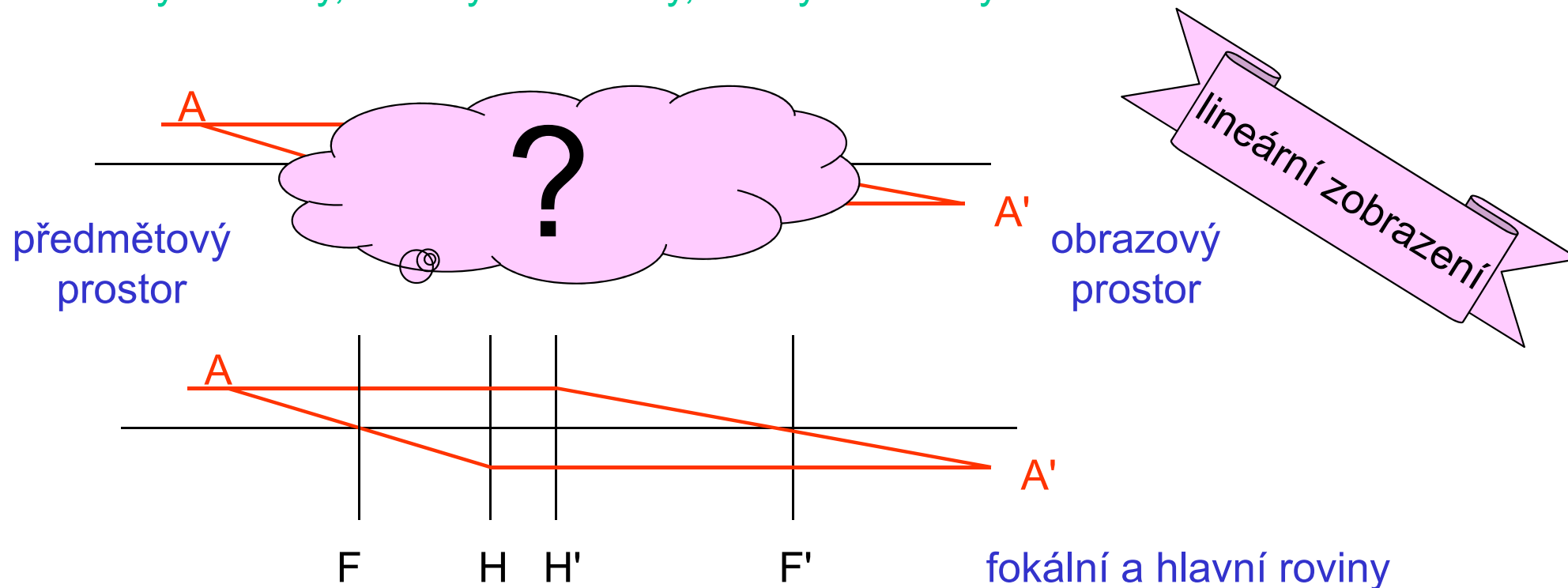
- OSOVĚ SYMETRICKÁ SOUSTAVA ... centrovaná

to byla již r. 1931 idea Rusky a Knolla, od té doby rozpracovávána

- PARAXIÁLNÍ OBLAST

elektronové svazky jen z úzké oblasti kolem optické osy (*nitkový Gaussův prostor*) ... tam dochází k **ideálnímu zobrazování**:

body na body, úsečky na úsečky, roviny na roviny



Paraxiální elektronová optika

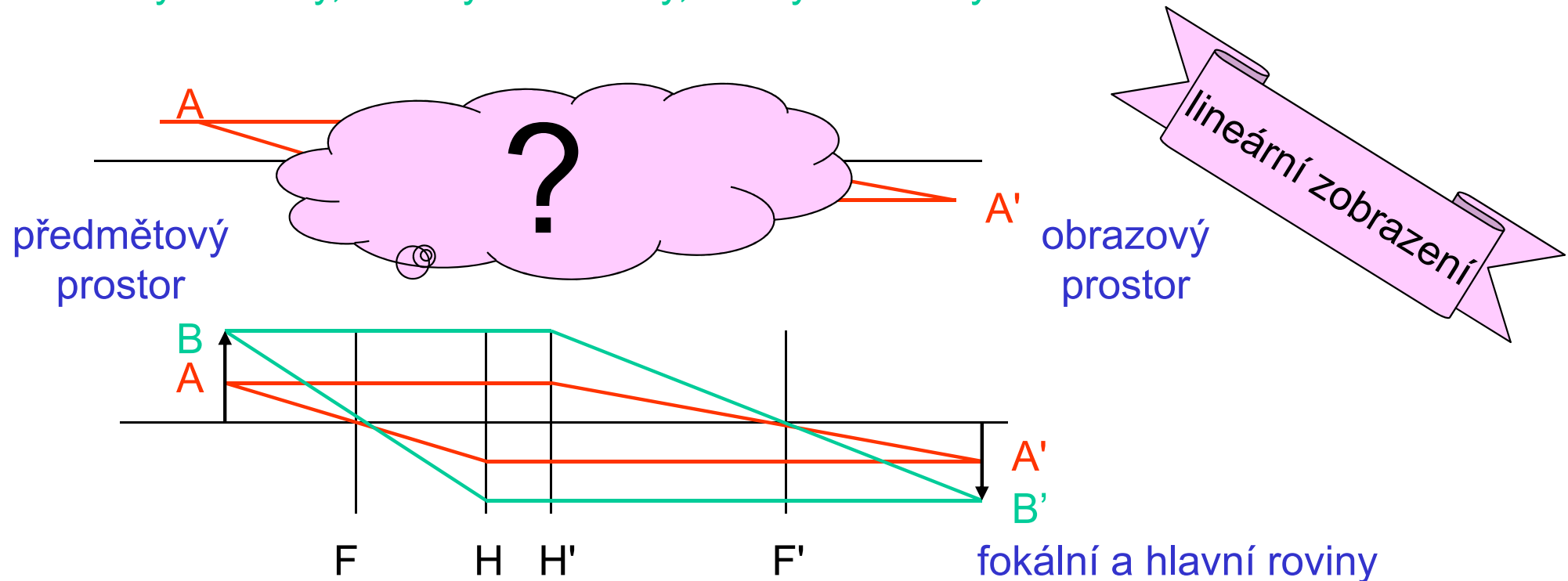
- OSOVĚ SYMETRICKÁ SOUSTAVA ... centovaná

to byla již r. 1931 idea Rusky a Knolla, od té doby rozpracovávaná

- PARAXIÁLNÍ OBLAST

elektronové svazky jen z úzké oblasti kolem optické osy (*nitkový Gaussův prostor*) ... tam dochází k **ideálnímu zobrazování**:

body na body, úsečky na úsečky, roviny na roviny



Realisace paraxiální oblasti

Kolem optické osy mají elektrony volný průchod
prostorem bez nábojů

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$$

Laplaceova rovnice

tok pláštěm

$$2\pi r \, d\ell \times E_r$$

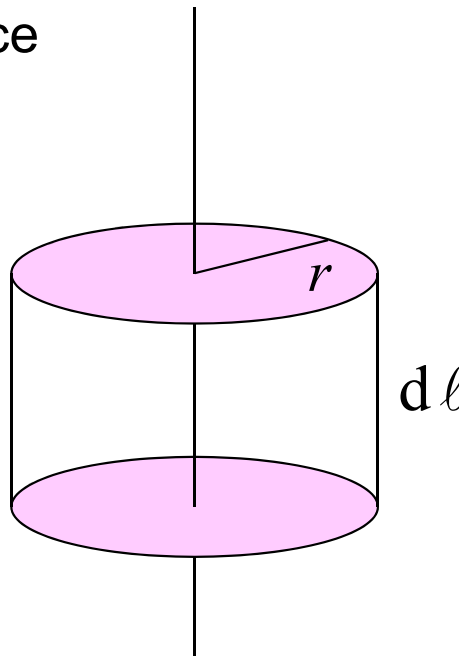


$$\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Gaussova věta
elektrostatiky

tok podstavami

$$+ \pi r^2 \times \left(E_z + \frac{\partial}{\partial z} E_z \cdot d\ell \right) - \pi r^2 \times E_z$$



Realisace paraxiální oblasti

Kolem optické osy mají elektrony volný průchod
prostorem bez nábojů

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$$

Laplaceova rovnice

tok pláštěm

$$2\pi r \, d\ell \times E_r$$

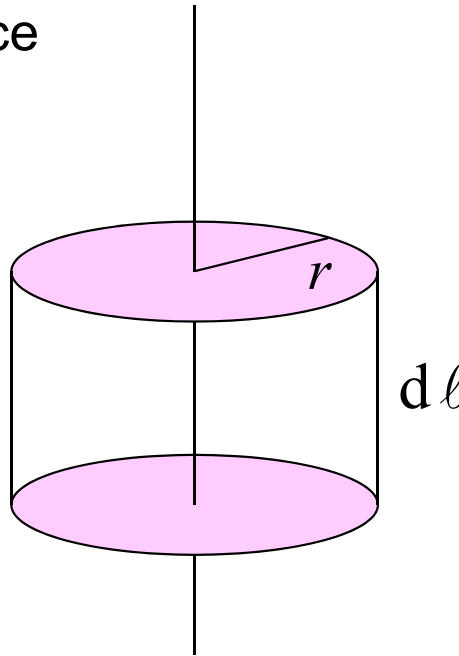


$$\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Gaussova věta
elektrostatiky

tok podstavami

$$+ \pi r^2 \times \left(E_z + \frac{\partial}{\partial z} E_z \cdot d\ell \right) - \pi r^2 \times E_z$$



$$E_r = -\frac{r}{2} \times \frac{\partial}{\partial z} E_z(0, z)$$

lineární závislost na r
znamená linearitu
zobrazení

Realisace paraxiální oblasti

kolem optické osy mají elektrony
volný průchod

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$$

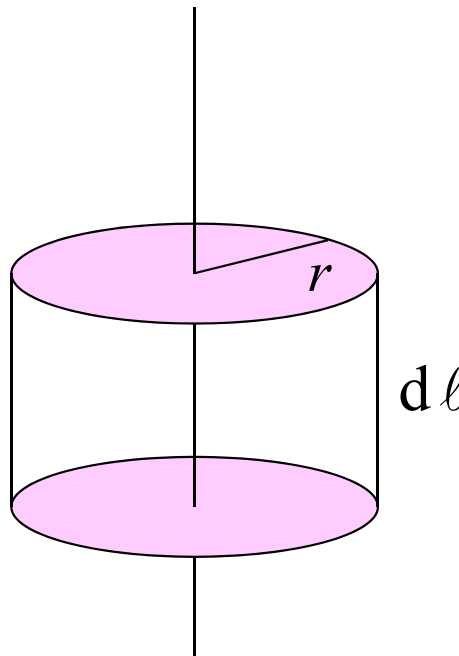
Laplace



$$\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Gaussova věta

tok pláštěm
 $2\pi r d\ell \times E_r$



tok podstavami

$$+ \pi r^2 \times \left(E_z + \frac{\partial}{\partial z} E_z \cdot d\ell \right) - \pi r^2 \times E_z$$

Tato lineární aproximace
vymezuje
paraxiální oblast

$$E_r = -\frac{r}{2} \times \frac{\partial}{\partial z} E_z(0, z)$$

lineární závislost na r
znamená linearitu
zobrazení

Paraxiální paprsková rovnice

① Pohybová rovnice

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}$$

② Osová symetrie+
paraxiální aproximace

$$\ddot{z} = \frac{e}{m} E_z(r=0, z(t))$$

$$\ddot{r} = \frac{e}{m} E_r(r(t), z(t))$$

$$\ddot{r} = -\frac{e}{m} \cdot \frac{r}{2} \times \frac{\partial}{\partial z} E_z(0, z)$$

... paraxiálnost
pole bereme na ose!!
lineární aproximace!!

Paraxiální paprsková rovnice

1 Pohybová rovnice

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}$$

2 Osová symetrie+
paraxiální aproximace

$$\ddot{z} = \frac{e}{m} E_z(r=0, z(t))$$

$$\ddot{r} = \frac{e}{m} E_r(r(t), z(t))$$

... paraxiálnost
pole bereme na ose!!
lineární aproximace!!

3 Od trajektorie k paprsku

$$\ddot{r} = -\frac{e}{m} \cdot \frac{r}{2} \times \frac{\partial}{\partial z} E_z(0, z)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \equiv v(z) \cdot (\dots)' \longrightarrow v(z) \cdot \frac{d}{dz} \left(v(z) \cdot \frac{dr}{dz} \right) + \frac{e}{m} \cdot \frac{r}{2} \times E'_z(0, z) = 0$$

Paraxiální paprsková rovnice

1 Pohybová rovnice

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}$$

2 Osová symetrie+
paraxiální aproximace

$$\ddot{z} = \frac{e}{m} E_z(r=0, z(t))$$

$$\ddot{r} = \frac{e}{m} E_r(r(t), z(t))$$

... paraxiálnost
pole bereme na ose!!
lineární aproximace!!

3 Od trajektorie k paprsku

$$\ddot{r} = -\frac{e}{m} \cdot \frac{r}{2} \times \frac{\partial}{\partial z} E_z(0, z)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \equiv v(z) \cdot (\dots)' \longrightarrow v(z) \cdot \frac{d}{dz} \left(v(z) \cdot \frac{dr}{dz} \right) + \frac{e}{m} \cdot \frac{r}{2} \times E'_z(0, z) = 0$$

4 Potenciál ke katodě

$$n(\mathbf{r}) \propto v(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(\mathbf{r}))}$$

$$\equiv \sqrt{-\frac{2e}{m} \Phi(\mathbf{r})}$$

$$\Phi \cdot r'' + \frac{1}{2} \Phi' \cdot r' + \frac{1}{4} \Phi'' \cdot r = 0$$

vstup

$$\Phi(z) \longrightarrow r(z)$$

výstup

PARAXIÁLNÍ ROVNICE

Paraxiální rovnice: vlastnosti paraxiálního zobrazení

PARAXIÁLNÍ ROVNICE

$$\Phi \cdot r'' + \frac{1}{2} \Phi' \cdot r' + \frac{1}{4} \Phi'' \cdot r = 0$$

vstup $\Phi(z)$ \longrightarrow $r(z)$ výstup

Paraxiální rovnice: vlastnosti paraxiálního zobrazení

PARAXIÁLNÍ ROVNICE

$$\Phi \cdot r'' + \frac{1}{2} \Phi' \cdot r' + \frac{1}{4} \Phi'' \cdot r = 0$$

vstup $\Phi(z)$ \longrightarrow $r(z)$ **výstup**

Tvar paprsku v elektrostatické čočce
nezávisí
na náboji ani hmotnosti částice
vlnová délka, energie atp. je ovšem něco jiného

Paraxiální rovnice: vlastnosti paraxiálního zobrazení

PARAXIÁLNÍ ROVNICE

$$\Phi \cdot r'' + \frac{1}{2} \Phi' \cdot r' + \frac{1}{4} \Phi'' \cdot r = 0$$

$$\boxed{\text{vstup}} \quad \Phi(z) \quad \longrightarrow \quad r(z) \quad \boxed{\text{výstup}}$$

SROVNÁNÍ OPTICKÝCH SOUSTAV

elektronová

- spojitý index lomu
- určující: pouze průběh indexu lomu na ose. Flexibilita v průběhu elst. polí je tak jen zdánlivá výhoda, pokud ...

světelná

- po částech konstantní index lomu
- hodnoty indexu lomu a poloměry křivosti oddělujících optických ploch nezávisle volitelné parametry

Paraxiální rovnice: vlastnosti paraxiálního zobrazení

PARAXIÁLNÍ ROVNICE

$$\Phi \cdot r'' + \frac{1}{2} \Phi' \cdot r' + \frac{1}{4} \Phi'' \cdot r = 0$$

$$\boxed{\text{vstup}} \quad \Phi(z) \quad \longrightarrow \quad r(z) \quad \boxed{\text{výstup}}$$

SROVNÁNÍ OPTICKÝCH SOUSTAV

elektronová

- spojitý index lomu
- určující: pouze průběh indexu lomu na ose. Flexibilita v průběhu elst. polí je tak jen zdánlivá výhoda, pokud ... nepřekonáme Gaussovu větu elst.

světelná

- po částech konstantní index lomu
- hodnoty indexu lomu a poloměry křivosti oddělujících optických ploch nezávisle volitelné parametry

Paraxiální rovnice: vlastnosti paraxiálního zobrazení

PARAXIÁLNÍ ROVNICE

$$\Phi \cdot r'' + \frac{1}{2} \Phi' \cdot r' + \frac{1}{4} \Phi'' \cdot r = 0$$

$$\boxed{\text{vstup}} \quad \Phi(z) \quad \longrightarrow \quad r(z) \quad \boxed{\text{výstup}}$$

SROVNÁNÍ OPTICKÝCH SOUSTAV

elektronová

- spojitý index lomu
- určující: pouze průběh indexu lomu na ose. Flexibilita v průběhu elst. polí je tak jen zdánlivá výhoda, pokud ...
nepřekonáme Gaussovu větu elst.

světelná

- po částech konstantní index lomu
- hodnoty indexu lomu a poloměry křivosti oddělujících optických ploch nezávisle volitelné parametry

Paraxiální rovnice: vlastnosti paraxiálního zobrazení

PARAXIÁLNÍ ROVNICE

$$\Phi \cdot r'' + \frac{1}{2} \Phi' \cdot r' + \frac{1}{4} \Phi'' \cdot r = 0$$

$$\boxed{\text{vstup}} \quad \Phi(z) \quad \longrightarrow \quad r(z) \quad \boxed{\text{výstup}}$$

SROVNÁNÍ OPTICKÝCH SOUSTAV

elektronová

- spojitý index lomu
- určující: pouze průběh indexu lomu na ose. Flexibilita v průběhu elst. polí je tak jen zdánlivá výhoda, pokud ... nepřekonáme **Gaussovou větu elst.**

Dva důsledky

1. elektronové čočky jsou vždy spojky
2. otvorová vada vždy kladná **Scherzerova věta 1936**

světelná

- po částech konstantní index lomu
- hodnoty indexu lomu a poloměry křivosti oddělujících optických ploch nezávisle volitelné parametry

Elektronové čočky jsou vždy spojky

Substituce v paraxiální rovnici

$$r = R\Phi^{-\frac{1}{4}}$$

$$R'' = -\frac{3}{16} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 R$$

$$|e\Phi(\mathbf{r})| = E - U(\mathbf{r})$$

1. R je konkávní, obrací se vždy **k ose** \Rightarrow

libovolný systém, kde pole Φ' je nenulové jen v konečné oblasti se chová jako spojka

2. Optická mohutnost závisí jen na poměru Φ'/Φ

3. Pro rychlé elektrony je proto malá

Elektronové čočky jsou vždy spojky

Substituce v paraxiální rovnici

$$r = R\Phi^{-\frac{1}{4}}$$

$$R'' = -\frac{3}{16} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 R$$

$$|e\Phi(\mathbf{r})| = E - U(\mathbf{r})$$

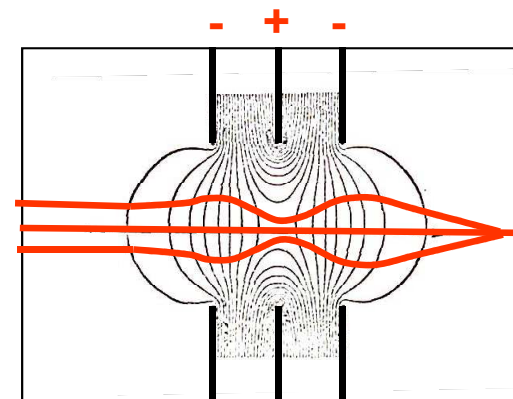
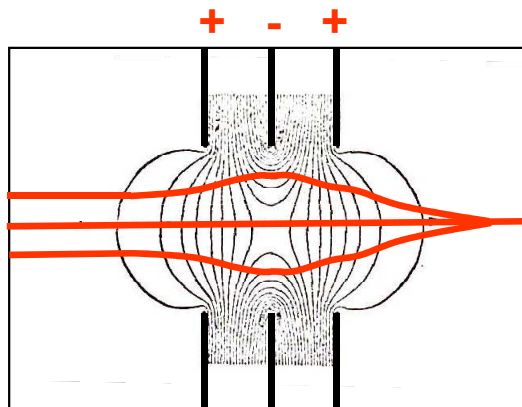
1. R je konkávní, obrací se vždy **k ose** \Rightarrow

libovolný systém, kde pole Φ' je nenulové jen v konečné oblasti se chová jako spojka

2. Optická mohutnost závisí jen na poměru Φ'/Φ

3. Pro rychlé elektrony je proto malá

4. Ve skutečnosti závisí na $(\Phi'/\Phi)^2$. R je proto stejné pro obojí polaritu. Samotné trajektorie jsou ovšem různé; ohnisko však zůstává.

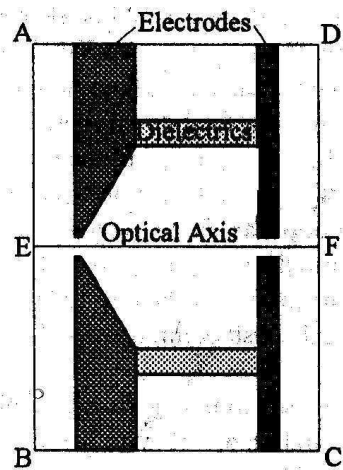


Ukázky skutečných výpočtů

Kvalita současného zpracování je plně profesionální.

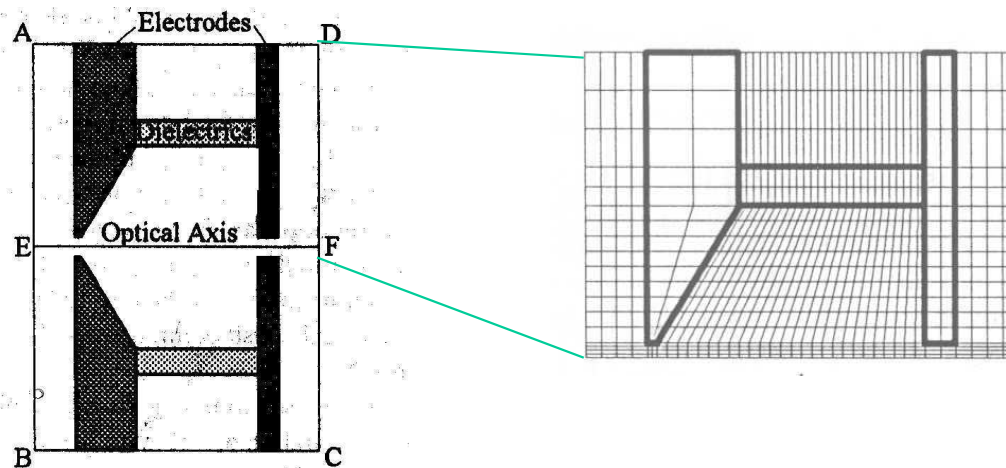
Výpočty tohoto typu zrychlují o řády konstrukční práce.

Ukázka výpočtu elektrostatické čočky



design čočky

Ukázka výpočtu elektrostatické čočky

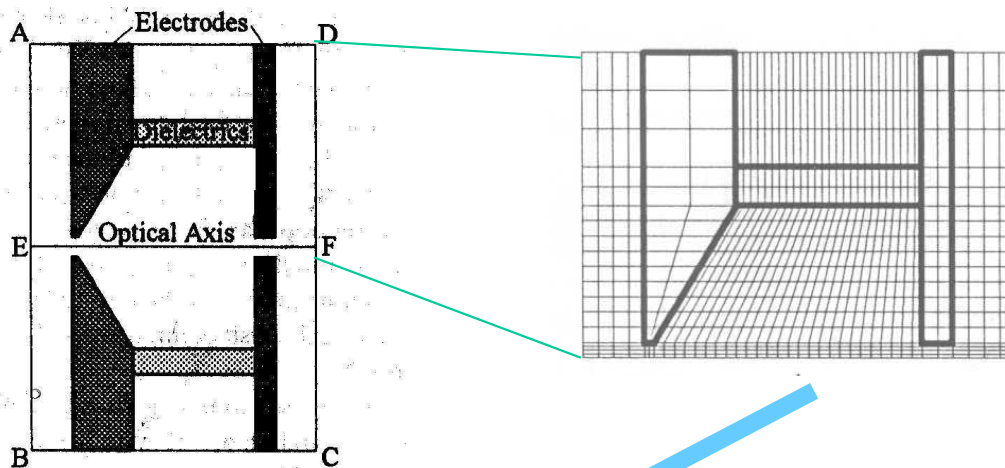


design čočky

grid pro výpočet metodou
konečných elementů:

velké oblasti,
jemné dělení

Ukázka výpočtu elektrostatické čočky

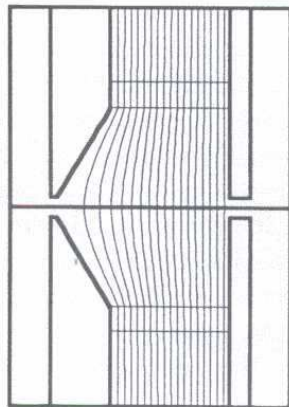


design čočky

grid pro výpočet metodou
konečných elementů:

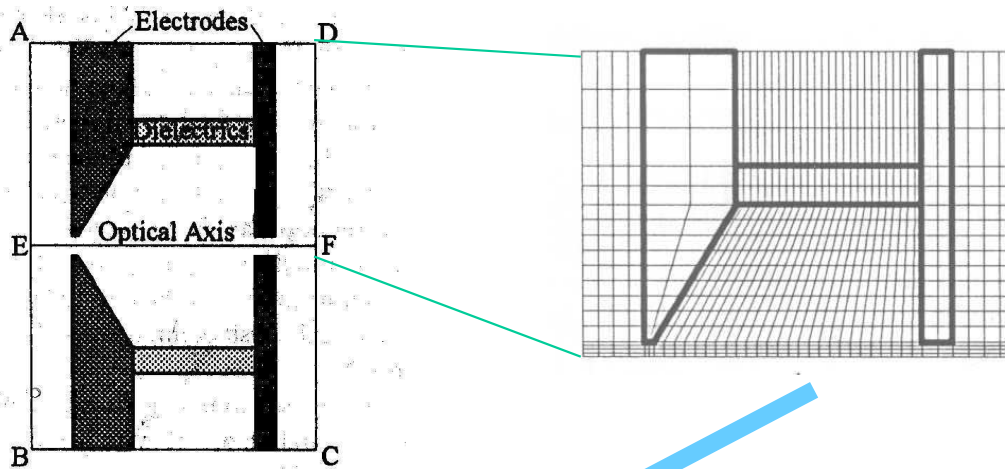
velké oblasti,
jemné dělení

výsledný
potenciál



a

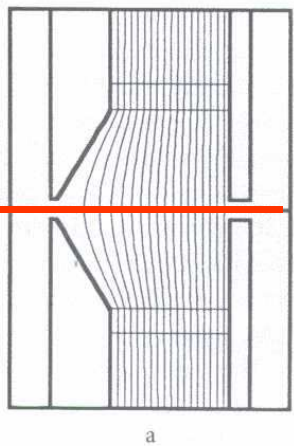
Ukázka výpočtu elektrostatické čočky



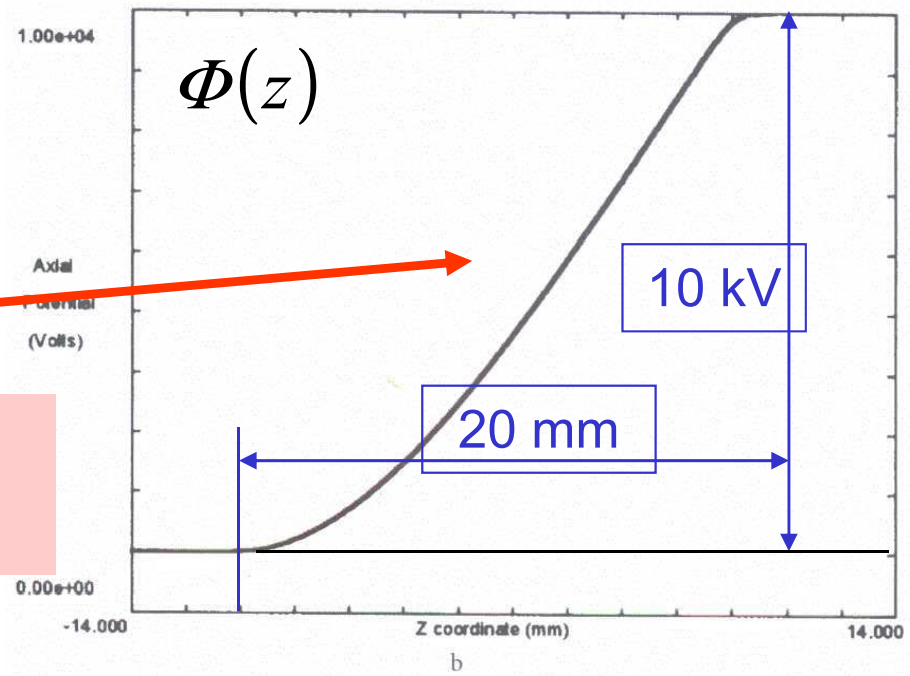
grid pro výpočet metodou konečných elementů:
velké oblasti,
jemné dělení

design čočky

výsledný potenciál

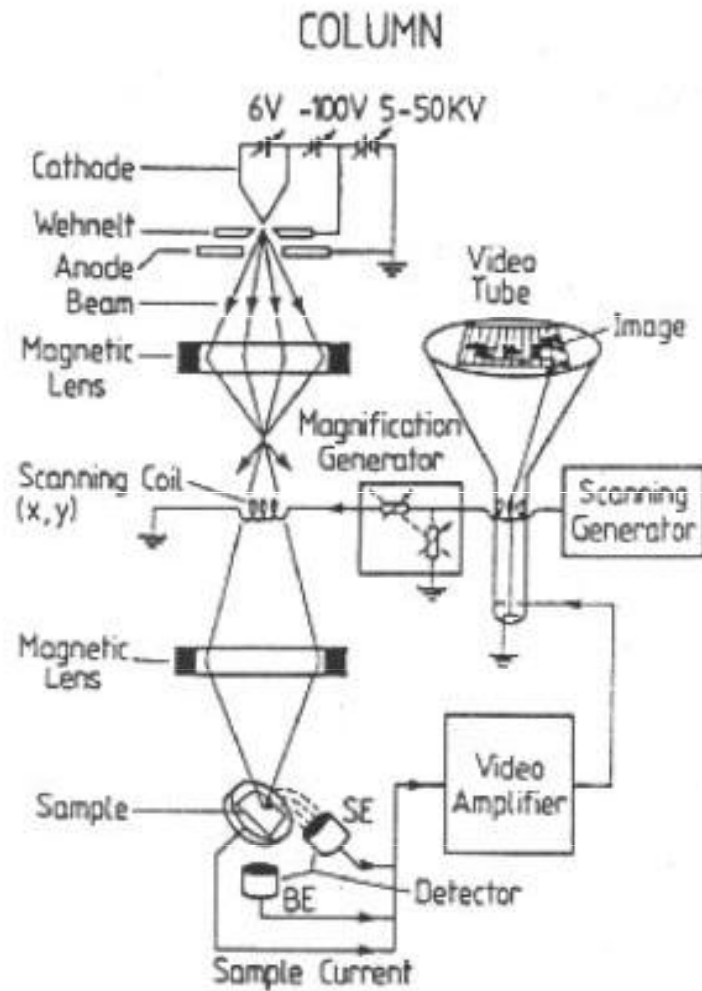


axiální průběh potenciálu



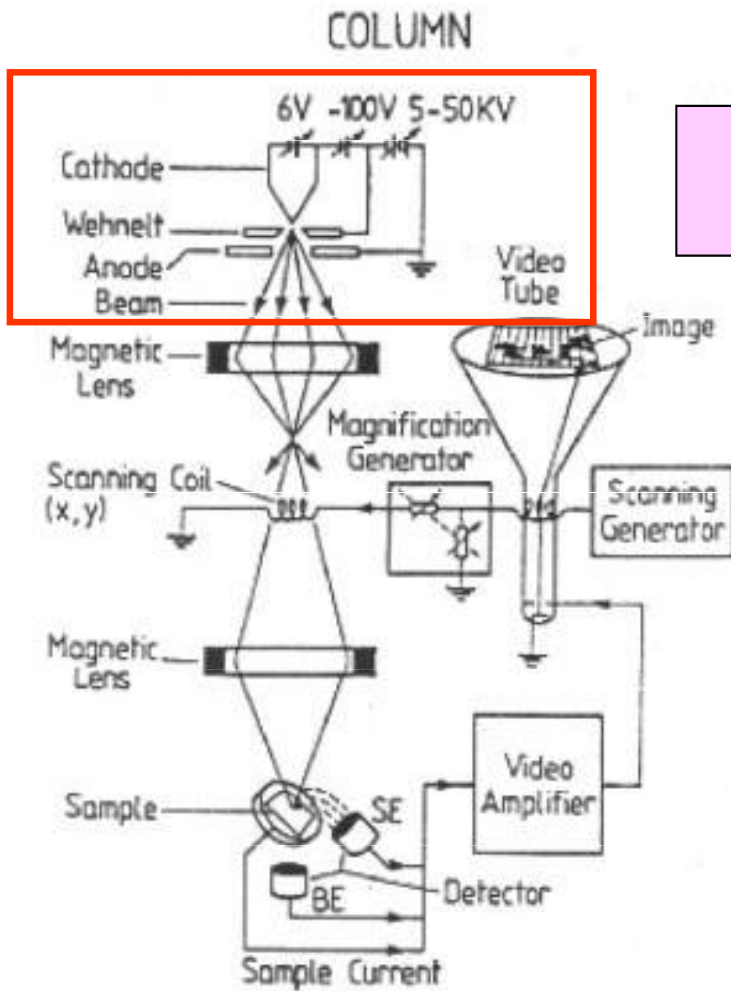
Termoemisní zdroj LaB_6

(SEM .. scanning electron microscope)



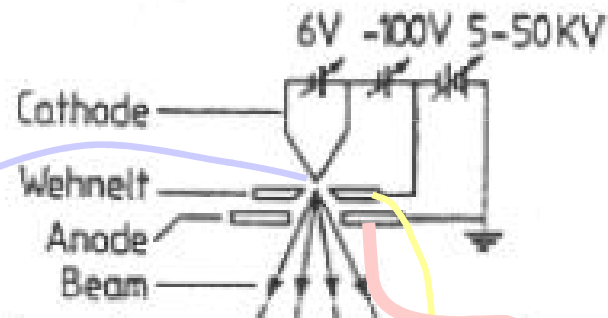
Termoemisní zdroj LaB_6

(SEM .. scanning electron microscope)

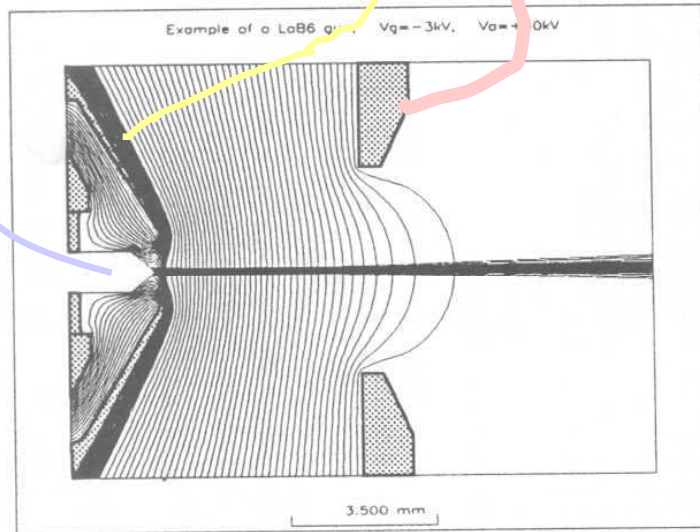


výsek ze schematu SEM

Termoemisní zdroj LaB_6



výsek ze schematu SEM



a

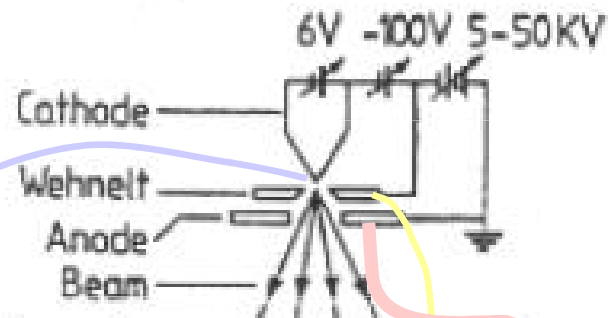
FIGURE 73 LaB_6 gun. (a) Overall view. (b) Enlarg

Monokrystal LaB_6
("Lab six")

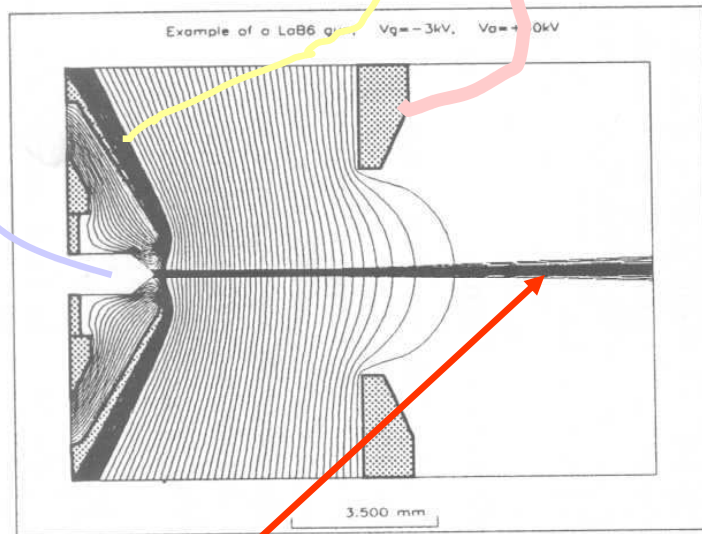
zespodu ohříváný žhaveným
wolframovým vláknem

jeho emisní schopnost je
tisíckrát vyšší
než má wolfram sám

Termoemisní zdroj LaB_6



výsek ze schematu SEM

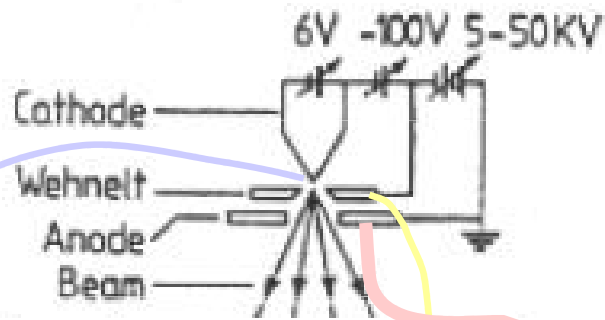


a

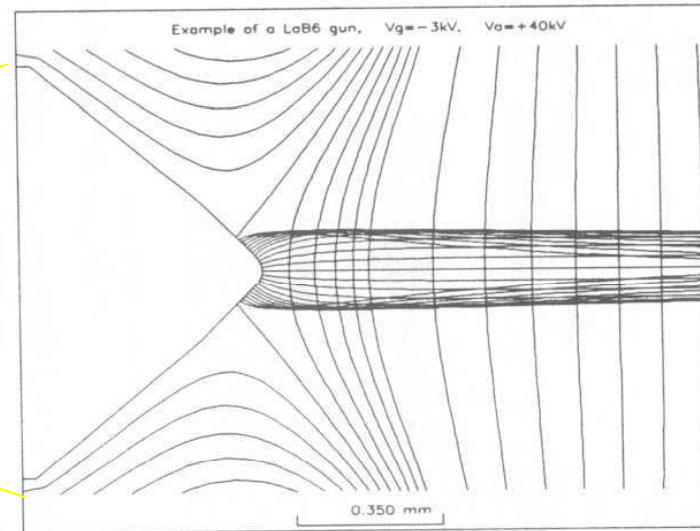
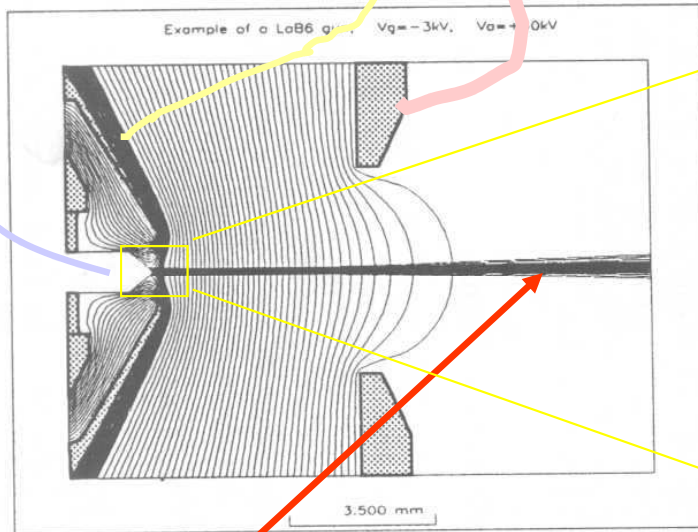
FIGURE 73 LaB_6 gun. (a) Overall view. (b) Enlarged view of tip region.

trajektorie

Termoemisní zdroj LaB_6



výsek ze schematu SEM



a

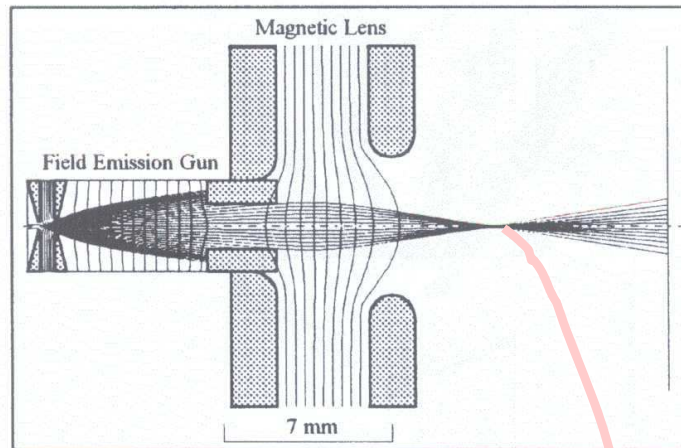
FIGURE 73 LaB_6 gun. (a) Overall view

detail

trajektorie

TFE zdroj

TFE (thermofield emission) kombinuje termickou emisi ... $T=1800\text{ K}$
se studenou emisí vyvolanou polem řádu 10 keV



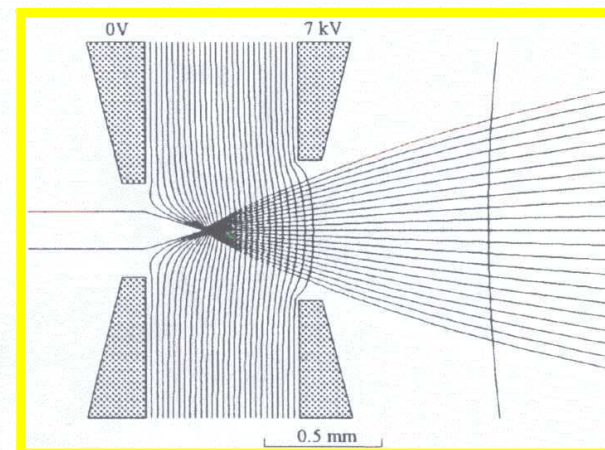
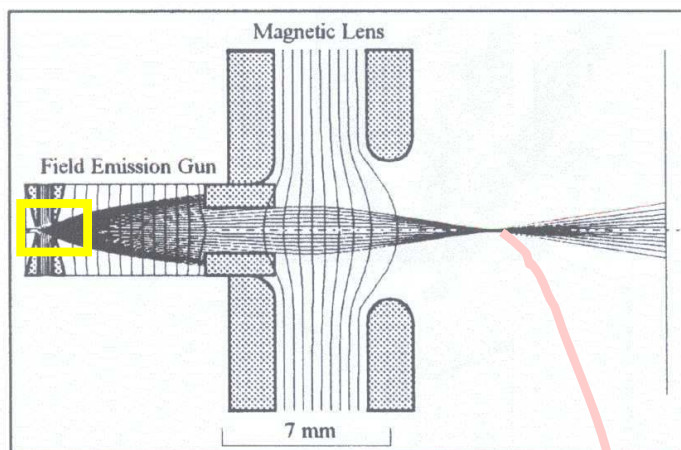
kombinace elst. zdroje a
magnetické čočky

a magnetic lens.

toto je téměř bodový zdroj
kolimovaných elektronů

TFE zdroj

TFE (thermofield emission) kombinuje termickou emisi ... $T=1800\text{ K}$
se studenou emisí vyvolanou polem řádu 10 keV



kombinace elst. zdroje a
magnetické čočky

detail

toto je téměř bodový zdroj
kolimovaných elektronů

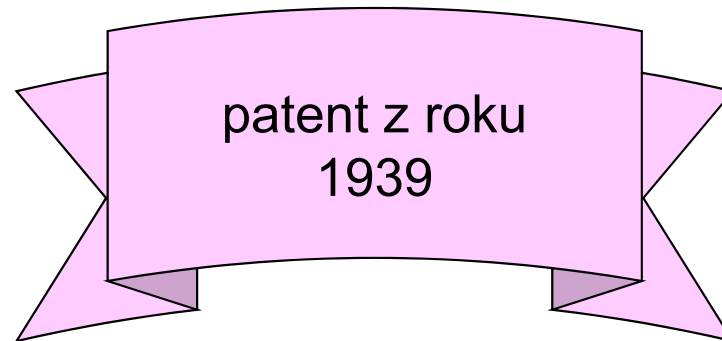
Magnetické čočky

Magnetické čočky a jiné součásti převládají v
praxi.

Jejich pochopení je ale obtížnější.
Zde jen několik poznámek.

Magnetická čočka

- má širší použití, než elektrostatická
- přesnější konstrukce, lepší korekce optických vad
- musí se ovšem chladit, atd.
- hlavní výhoda je možnost pólových nástavců z měkkých magnetických materiálů
- to právě vymysleli již praotcové Ruska a Knoll ... *Ernst Ruska* NP 1986



Magnetická čočka

DEUTSCHES REICH



AUSGEBEN AM
25. AUGUST 1939

REICHSPATENTAMT
PATENTSCHRIFT

№ 680 284

KLASSE 21g GRUPPE 25 37/20

B 154916 VIII c/21 g

Dr.-Ing. Bodo von Borries in Berlin-Halensee
und Dr.-Ing. Ernst Ruska in Berlin-Zehlendorf
Magnetische Sammellinse kurzer Feldlänge

Patentiert im Deutschen Reiche vom 17. März 1932 ab
Patenterteilung bekanntgemacht am 3. August 1939

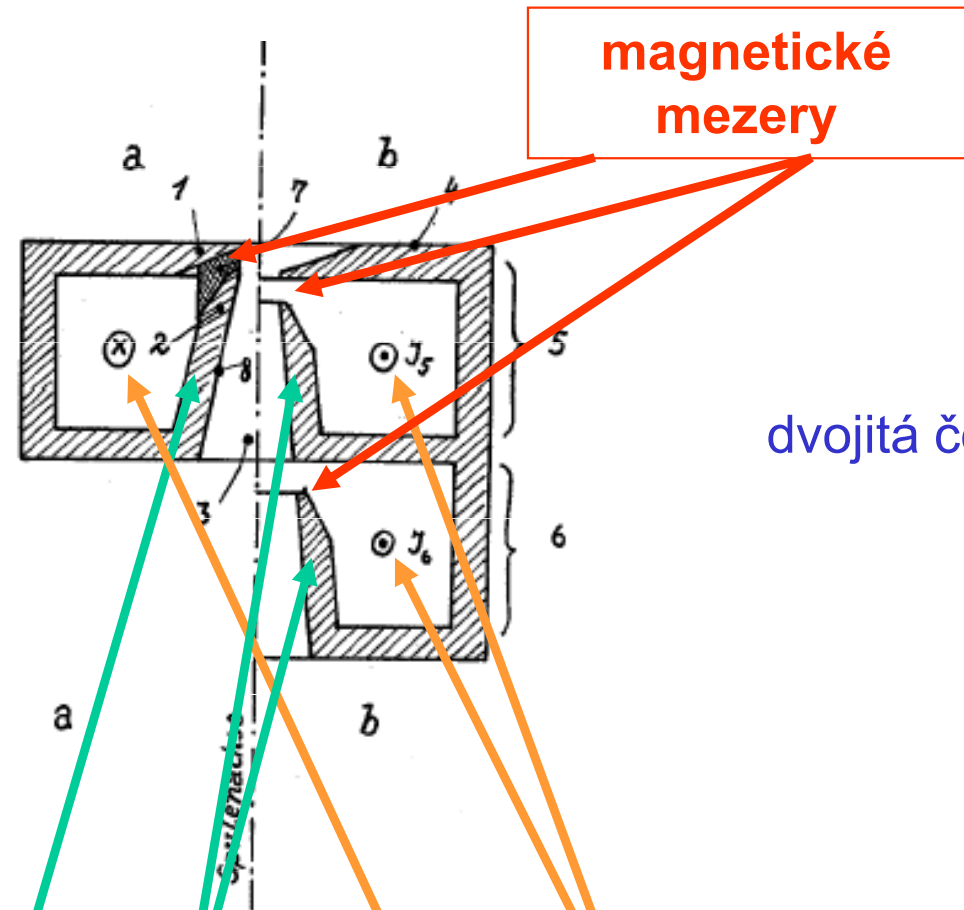
Magnetická čočka

Der Erfindung liegt die Aufgabe zugrunde, eine magnetische Linse extrem kurzer Brennweite zu schaffen, deren Feld trotz seiner Stärke (kleine Brennweite) dennoch in axialer Richtung so kurz wie möglich ist. Diese Aufgabe wird mit Hilfe einer Sammellinse gelöst, die aus einer Sammelspule besteht, die in einen sie vollständig umgebenden, aus hochpermeablem Stoff bestehenden Mantel eingehüllt ist, der einen ringförmigen Spalt in seinem Innenteil aufweist. Gemäß der Erfindung sind die die Ränder des im Verhältnis zur Längsausdehnung der Spule schmalen Spaltes bildenden Mantelteile nach der Achse zu polschuhartig verjüngt, und die lichte Weite des Polschuhringes liegt in der Größenordnung der Spalthöhe. Es ist zweckmäßig, die Spalthöhe nahezu gleich dem Halbmesser der lichten Weite der Polschuh-
ringe zu machen.

Vynález se zakládá na úloze vytvořit magnetickou čočku s extrémně krátkou ohniskovou vzdáleností, jejíž pole přes svou intenzitu (krátkou ohniskovou vzdálenost) je v axiálním směru co možno nejkratší.

Magnetická čočka (Ruskýv náčrtek)

jednoduchá
čočka



dvojitá čočka

pólové
nástavce

cívky

Magnetická čočka: jak funguje

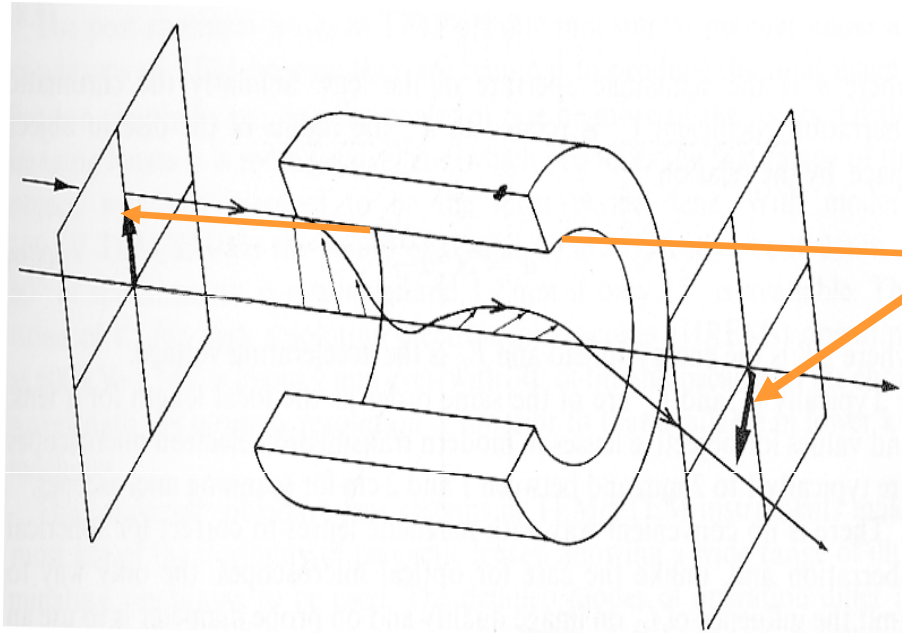
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2} \cdot B'_z$$

paraxiální oblast

Magnetická čočka: jak funguje

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2} \cdot B'_z$$

paraxiální oblast



paprsek v paraxiální oblasti

- rovina pohybu se otáčí
nezávisle na průvodiči r

$$\dot{\phi} = \frac{e}{2m} B_z(z)$$

Magnetická čočka: jak funguje

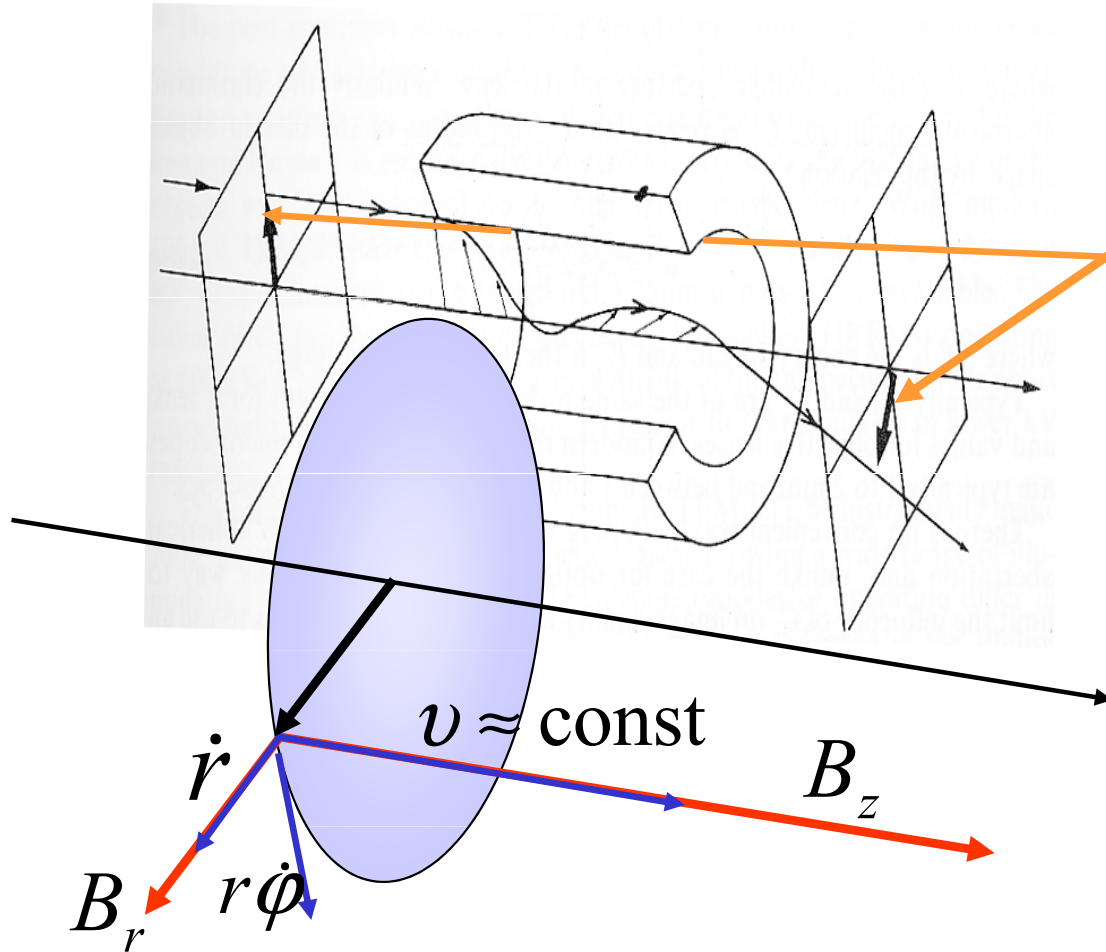
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2} \cdot B'_z$$

paraxiální oblast

paprsek v paraxiální oblasti

- rovina pohybu se otáčí
nezávisle na průvodiči r

$$\dot{\phi} = \frac{e}{2m} B_z(z)$$



Magnetická čočka: jak funguje

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2} \cdot B'_z$$

paraxiální oblast

paprsek v paraxiální oblasti

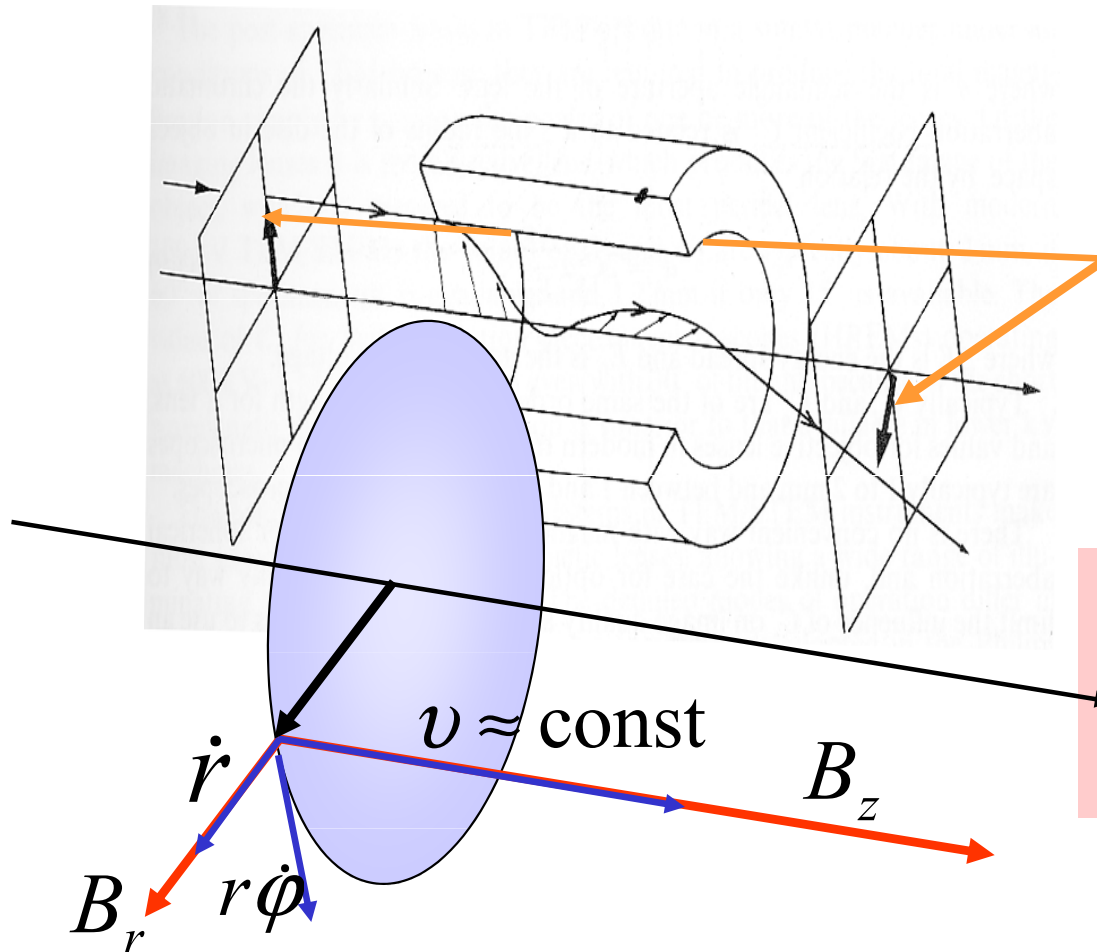
- rovina pohybu se otáčí
nezávisle na průvodiči r

$$\dot{\phi} = \frac{e}{2m} B_z(z)$$

- to ovlivní radiální pohyb

$$r'' + \left(\frac{e}{2m} \cdot \frac{B_z(z)}{v(z)} \right)^2 \times r = 0$$

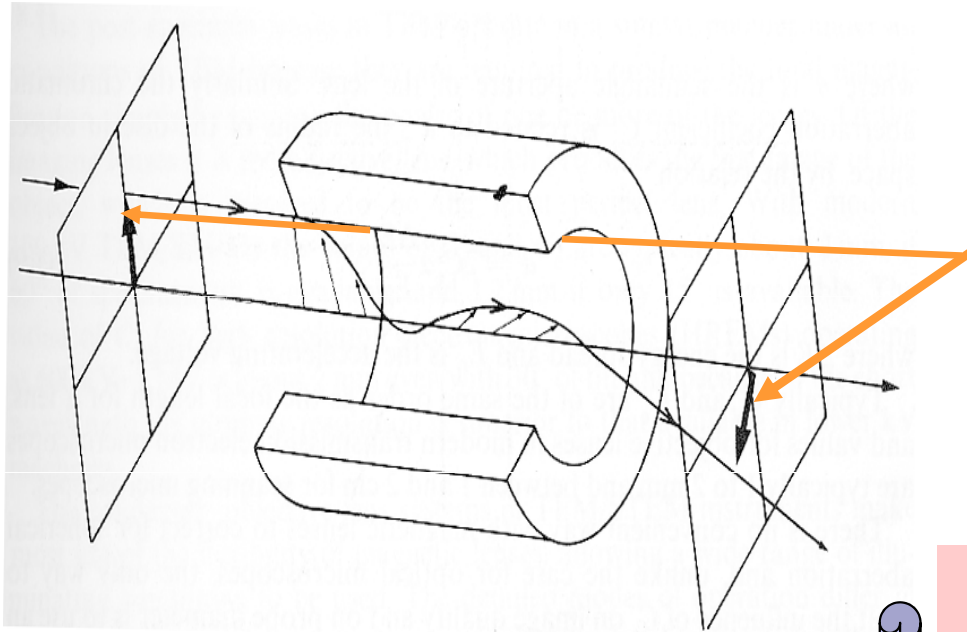
PARAXIÁLNÍ ROVNICE PAPRSKU



Magnetická čočka: jak funguje

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2} \cdot B'_z$$

paraxiální oblast



paprsek v paraxiální oblasti

- rovina pohybu se otáčí
nezávisle na průvodiči r

$$\dot{\varphi} = \frac{e}{2m} B_z(z)$$

- to ovlivní radiální pohyb

$$r'' + \left(\frac{e}{2m} \cdot \frac{B_z(z)}{v(z)} \right)^2 \times r = 0$$

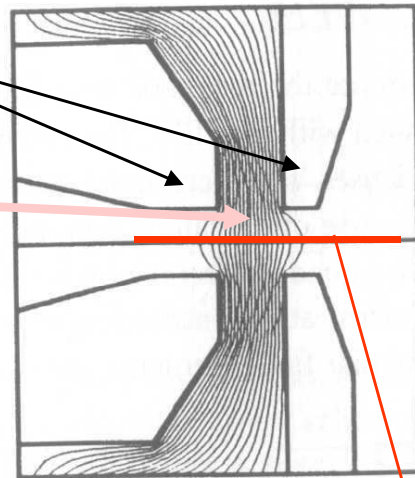
PARAXIÁLNÍ ROVNICE PAPRSKU

- I v magn. čočce vždy dochází k fokusaci
- Rozhoduje jen osový průběh podélné složky pole
- Pro rychlé elektrony je lámavá síla menší
- Obrazový prostor se potočí jako celek, věrnost zobrazení není narušena

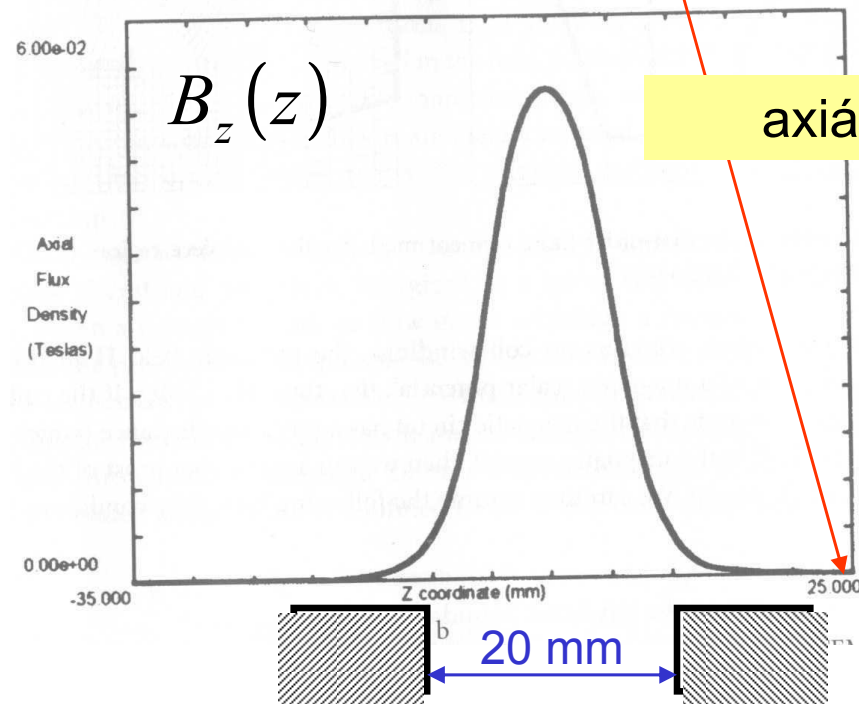
Moderní magnetická čočka

nástavce

pole v dutině



a



axiální průběh pole

Mez rozlišení pro elektronový mikroskop

... také
elektronový mikroskop strádá
vadami optického zobrazení,
dokonce hůře, než světelné přístroje

Scherzerova věta (1936)

Otto Scherzer
(Mar. 9, 1909 -
Nov. 15, 1982)



V elektronově optické soustavě, kde

- ❖ pohyb elektronů je řízen elektromagnetickými poli
- ❖ tato pole jsou statická
- ❖ a mají osovou symetrii
- ❖ v paprskovém prostoru nejsou prostorové náboje

trpí zobrazení jak **chromatickou**
tak kladnou **sférickou aberací**

Chromatická a otvorová vada elektronové čočky

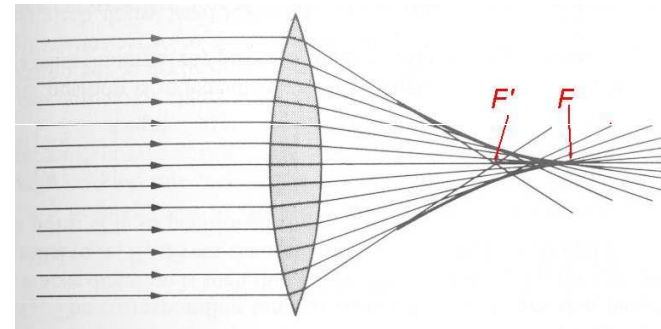
- Elektronová optika ... tytéž vady zobrazení, jako světelná **astigmatismus, koma ...**
- V oblasti obklopující paraxiální (malé úhly s osou) hlavně

vada chromatická

vada sférická (otvorová)

Podstata rychlejší elektrony se zalomí méně ... analogie červeného světla

Podstata paprsky dále od osy se zalomí více ... vzniká kaustická plocha



Vady zobrazení elektronové čočky: chromatická vada

- Elektronová optika ... tytéž vady zobrazení, jako světelná **astigmatismus, koma ...**
- V oblasti obklopující paraxiální (malé úhly s osou) hlavně

vada chromatická

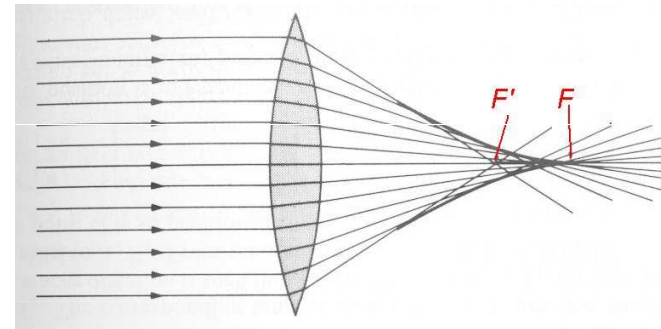
vada sférická (otvorová)

Podstata rychlejší elektrony se zalomí méně ... analogie červeného světla

Podstata paprsky dále od osy se zalomí více ... vzniká kaustická plocha

Odpomoc

- kvalitní monochromatický zdroj elektronů ... studená emise
- použití zkřížených Wienových filtrů (o těch viz přednáška VI)



Vady zobrazení elektronové čočky: otvorová vada

- Elektronová optika ... tytéž vady zobrazení, jako světelná **astigmatismus, koma ...**
- V oblasti obklopující paraxiální (malé úhly s osou) hlavně

vada chromatická

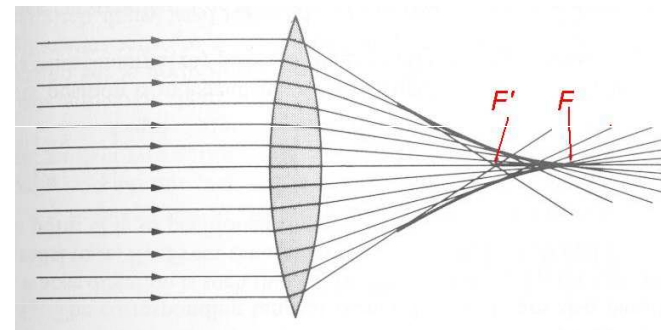
vada sférická (otvorová)

Podstata rychlejší elektrony se zalomí méně ... analogie červeného světla

Podstata paprsky dále od osy se zalomí více ... vzniká kaustická plocha

Odpomoc

- kvalitní monochromatický zdroj elektronů ... studená emise
- použití zkřížených Wienových filtrů (o těch viz přednáška VI)



Otvorová vada v elektronové optice
je **neodstranitelná**

viník: Gaussova věta elektrostatiky,
nedovolí korekce indexu lomu

Vady zobrazení elektronové čočky: otvorová vada

- Elektronová optika ... tytéž vady zobrazení, jako světelná **astigmatismus, koma ...**
- V oblasti obklopující paraxiální (malé úhly s osou) hlavně

vada chromatická

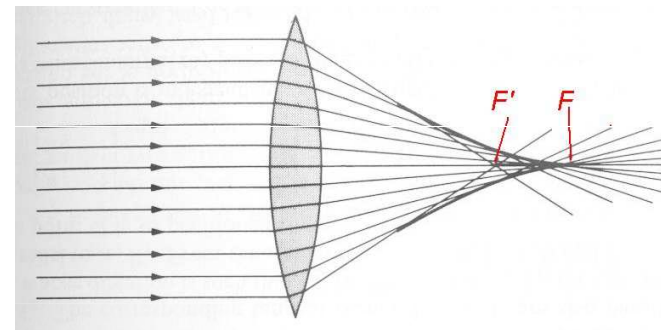
vada sférická (otvorová)

Podstata rychlejší elektrony se zalomí méně ... analogie červeného světla

Podstata paprsky dále od osy se zalomí více ... vzniká kaustická plocha

Odpomoc

- kvalitní monochromatický zdroj elektronů ... studená emise
- použití zkřížených Wienových filtrů (o těch viz přednáška VI)



Odpomoc z nouze vyclonit dostatečně úzký svazek

Otvorová vada v elektronové optice je **neodstranitelná**

viník: Gaussova věta elektrostatiky, nedovolí korekce indexu lomu

Vady zobrazení elektronové čočky: otvorová vada

- Elektronová optika ... tytéž vady zobrazení, jako světelná **astigmatismus, koma ...**
- V oblasti obklopující paraxiální (malé úhly s osou) hlavně

vada chromatická

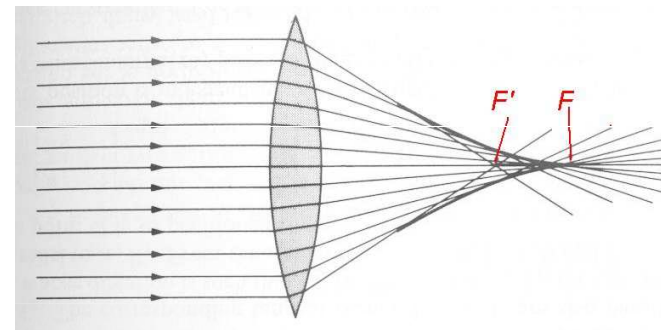
vada sférická (otvorová)

Podstata rychlejší elektrony se zalomí méně ... analogie červeného světla

Podstata paprsky dále od osy se zalomí více ... vzniká kaustická plocha

Odpomoc

- kvalitní monochromatický zdroj elektronů ... studená emise
- použití zkřížených Wienových filtrů (o těch viz přednáška VI)



Odpomoc z nouze vyclonit dostatečně úzký svazek

Problémy ♠ malá světelnost

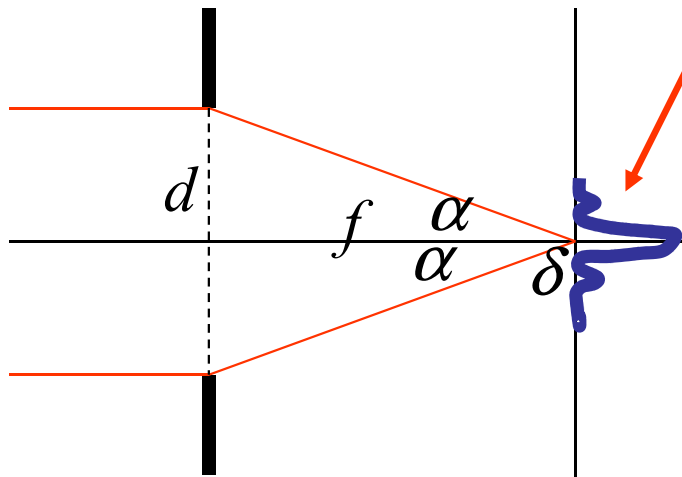
♠ difrakce na cloně

Otvorová vada v elektronové optice je **neodstranitelná**

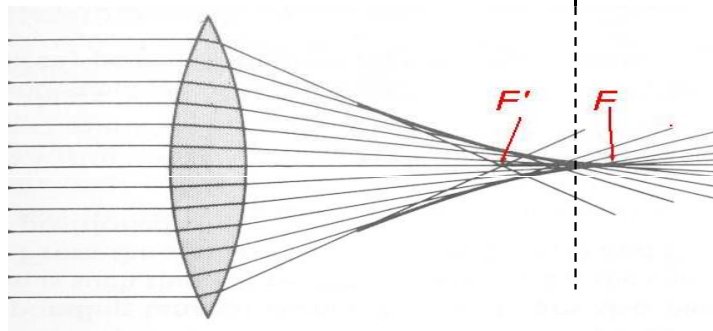
viník: Gaussova věta elektrostatiky, nedovolí korekce indexu lomu

– ohybová vada **109**

Ohybová vada (jako u světelné optiky)

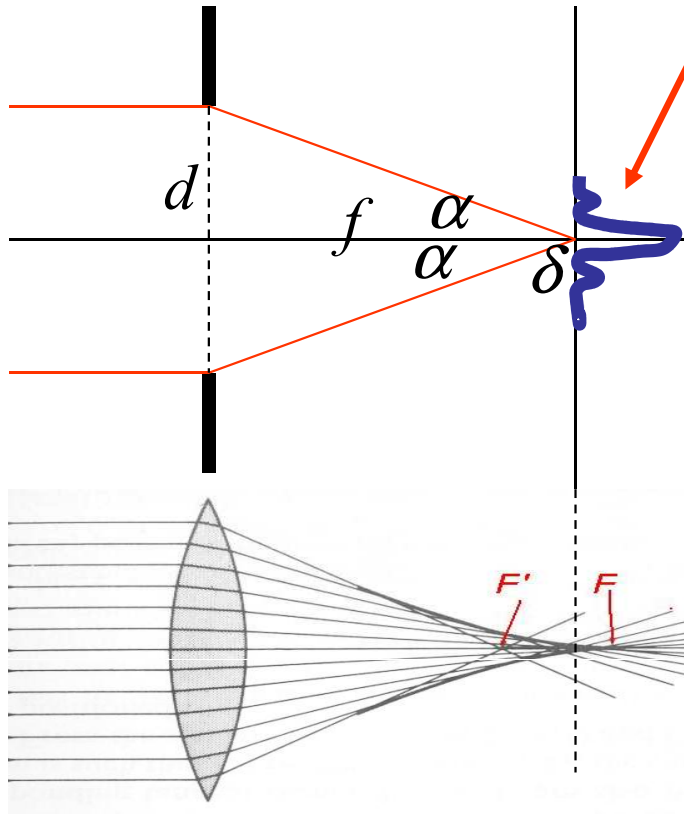


$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \alpha} \approx \frac{\lambda}{\alpha} \quad \text{průměr hlav. maxima}$$



$$\rho_{sf} \approx C_s \alpha^3 \quad \text{průměr obraz. kroužku}$$

Ohybová vada

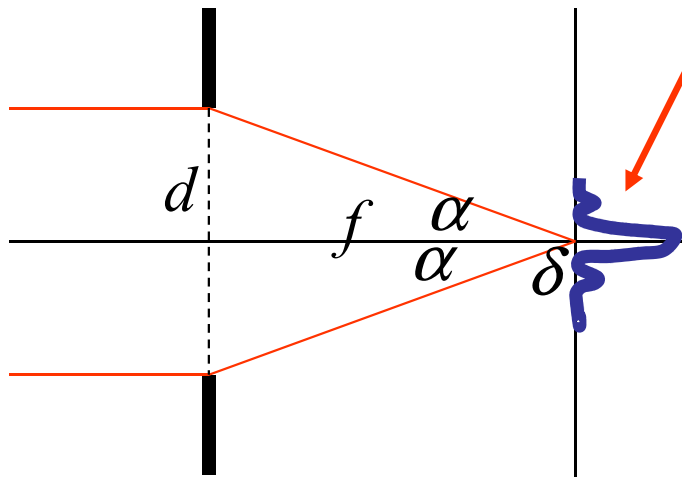


$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \alpha} \approx \frac{\lambda}{\alpha} \quad \text{průměr hlav. maxima}$$

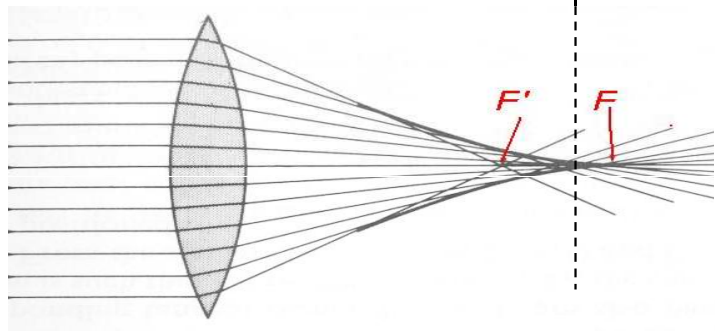
Také tento koef. 3. řádu lze určit výpočtem

$$\rho_{sf} \approx C_s \alpha^3 \quad \text{průměr obraz. kroužku}$$

Ohybová vada



$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \alpha} \approx \frac{\lambda}{\alpha} \quad \text{průměr hlav. maxima}$$



$$\rho_{sf} \approx C_s \alpha^3 \quad \text{průměr obraz. kroužku}$$

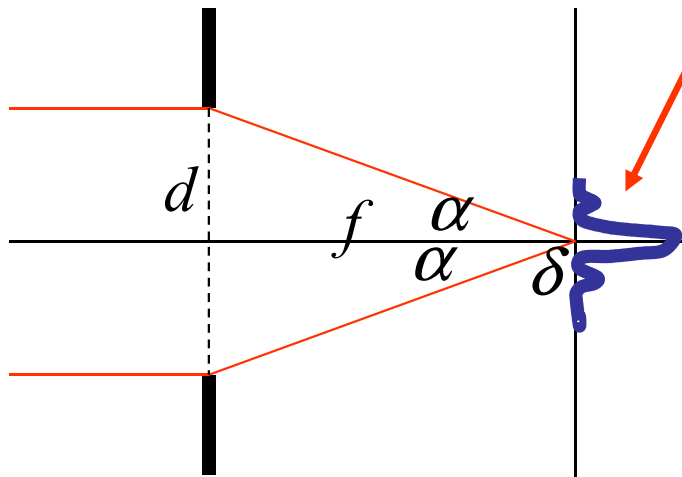
... hledáme kompromisní hodnotu aperturního úhlu z podmínky

$$\rho_{sf} \approx \delta$$

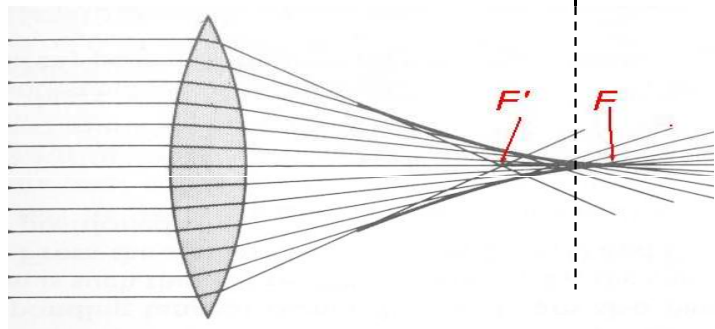
$$\alpha_{\text{opt}} \approx (\lambda / C_s)^{\frac{1}{4}}$$

$$\delta_{\text{opt}} \approx (\lambda^3 C_s)^{\frac{1}{4}} \approx \lambda$$

Ohybová vada



$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \alpha} \approx \frac{\lambda}{\alpha} \quad \text{průměr hlav. maxima}$$



$$\rho_{sf} \approx C_s \alpha^3 \quad \text{průměr obraz. kroužku}$$

... hledáme kompromisní hodnotu aperturního úhlu z podmínky

$$\rho_{sf} \approx \delta$$

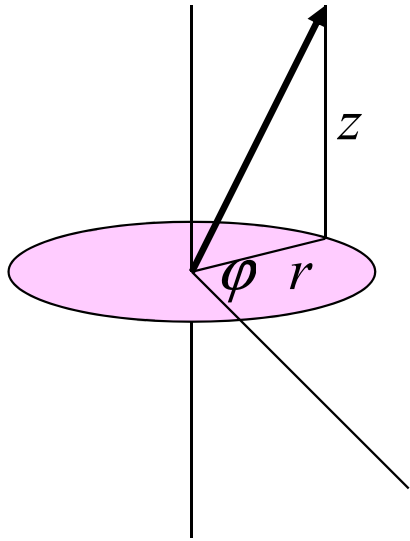
$$\alpha_{\text{opt}} \approx (\lambda / C_s)^{\frac{1}{4}} \quad \delta_{\text{opt}} \approx (\lambda^3 C_s)^{\frac{1}{4}} \approx \lambda$$

... pro rozlišení v řádu nm se tak vlnové délky volí v řádu 1 – 10 pm

Nadchází éra korigovaných elektronových mikroskopů

... idea tu byla už dávno,
posledních několik let jsou
mikroskopy s korektory
komerčně dostupné

Je tedy otvorová vada nepřekonatelná?



Na těsném propojení axiální a radiální složky pole se účastní dvě okolnosti: ❶ Laplaceova rovnice
❷ axiální symetrie pole (nezávislost na azimutu)
Dohromady to dá jednoznačné propojení

$$\partial_r E_r + \frac{1}{r} E_r + \partial_z E_z = 0$$

Po válce Scherzer navrhl korektory ...

The Theoretical Resolution Limit of the Electron Microscope

O. SCHERZER

Signal Corps Engineering Laboratories, Fort Monmouth, New Jersey

(Received June 14, 1948)

The resolving power of the electron microscope and the contrast in the image are calculated for different conditions of focusing, illumination and aperture. These conditions can change the limit of resolution by a factor of about 3. The contrast in the image of an atom is appreciably increased by defocusing and spherical aberration. Nevertheless, the contrast improves when the numerical value of the aberration constant is diminished. The effect of different methods of spherical correction is discussed briefly.

Po válce Scherzer navrhl korektory ...

The Theoretical Resolution Limit of the Electron Microscope

O. SCHERZER

Signal Corps Engineering Laboratories, Fort Monmouth, New Jersey

(Received June 14, 1948)

The resolving power of the electron microscope and the contrast in the image are calculated for different conditions of focusing, illumination and aperture. These conditions can change the limit of resolution by a factor of about 3. The contrast in the image of an atom is appreciably increased by defocusing and spherical aberration. Nevertheless, the contrast improves when the numerical value of the aberration constant is diminished. The effect of different methods of spherical correction is discussed briefly.

Po válce Scherzer navrhl korektory ...

The Theoretical Resolution Limit of the Electron Microscope

O. SCHERZER

Signal Corps Engineering Laboratories, Fort Monmouth, New Jersey

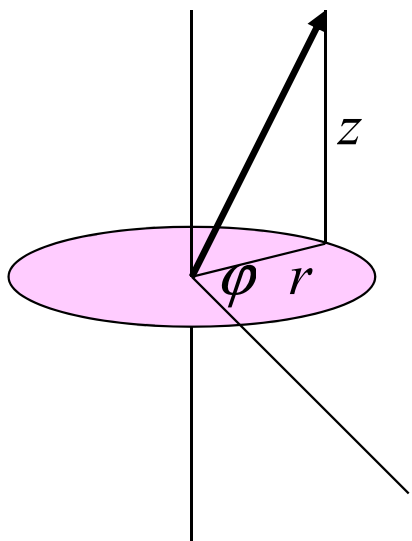
(Received June 14, 1948)

The resolving power of the electron microscope and the contrast in the image are calculated for different conditions of focusing, illumination and aperture. These conditions can change the limit of resolution by a factor of about 3. The contrast in the image of an atom is appreciably increased by defocusing and spherical aberration. Nevertheless, the contrast improves when the numerical value of the aberration constant is diminished. The effect of different methods of spherical correction is discussed briefly.

... ALE PAK TO TRVALO JEŠTĚ PADESÁT LET, NEŽ
DOŠLO K JEJICH KOMERCIALIZACI

Otvorová vada je překonatelná

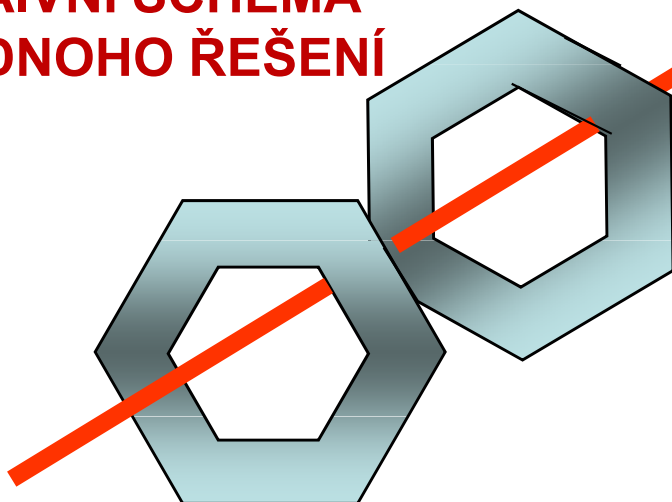
Jednoduchá, ale radikální myšlenka – opustit axiální symetrii



Na těsném propojení axiální a radiální složky pole se účastní dvě okolnosti: ❶ Laplaceova rovnice
❷ axiální symetrie pole (nezávislost na azimutu)
Dohromady to dá jednoznačné propojení

VÝCHODISKO – ¹OPUSTIT AXIÁLNÍ SYMETRII
r

**NAIVNÍ SCHEMA
JEDNOHO ŘEŠENÍ**



Dva navzájem pootočené
hexapóly
dávají téměř dokonalou
kompensaci otvorové vady
při mizivé azimutální distorsi

Přehled vyzkoušených korektorů

Correction of Aberrations

	SEM	STEM	TEM	LEEM
Spherical C_3	-	+	+	-
Spherical & Chromatic $C_3 + C_c$	+	+	?	+

Type of Corrector

		SEM	STEM	TEM	LEEM
Hexapole	C_3	-	+	+	-
Quadrupole	C_3	-	+	+	-
Electrostatic Mirror	$C_3 C_c$	+	-	-	+
Purely Electrostatic Quad.	$C_3 C_c$	+	-	-	?
Quadrupole Electr./Magn.	$C_3 C_c$	+	+	-?	-

Key: + = effective and already demonstrated;
 + = feasible, but not yet demonstrated;
 - = not feasible or not useful;
 ? or ? = questionable or very questionable

Pokusy zavést korektor byly dlouho nepřesvědčivé

Table 4. Brief history of aberration correction

<u>Corrector Type</u>	<u>First Proposed</u>	<u>Subsequent Versions</u>	<u>Proof-of-Principle</u>	<u>Improves Resolution of Its Microscope</u>	<u>Improves Resolution of Any Microscope (at its kV)</u>
Cs only: 2 cylindrical lenses / 3 octupoles	Scherzer 1947		Seeliger 1951-54	Mollenstedt 1954-56	
Cs only: 4 quads / 3 octupoles (combined)	Archard 1955		Deltrap 1964	Krivanek+Dell by 1997	
Cs only: 4 quads / 3 octupoles (separate)	Thomson 1967	Beck+Crewe 1972-75	Krivanek+Dell by 1999	Dellby + Krivanek 2000	Dellby + Krivanek 2000
Cs only: 2 sextupoles / 2 (4) round lenses	Beck 1979	Crewe 1980 Rose 1981 Shao 1988 Rose 1990	Chen and Mu 1990	Haider 1997	Haider 1998
Cs + Ce: 4 mag. quads / 2 el. quads 3 octs	Hardy 1967	Rose 1971	Hardy 1967	Zach + Haider 1995	Zach 1997
Cs + Ce: 5 el. quads / 5 mag. quads 3 el. octs	Hardy 1967 Rose 1971	Pohner 1976 Koops 1978 Bernhard 1980 Hely 1981 Haider 1984	Koops 1978	Hely 1981	

Až v posledních cca 5 – 8 letech komercializováno

Table 4. Brief history of aberration correction

<u>Corrector Type</u>	<u>First Proposed</u>	<u>Subsequent Versions</u>	<u>Proof-of-Principle</u>	<u>Improves Resolution of Its Microscope</u>	<u>Improves Resolution of Any Microscope (at its kV)</u>
Cs only: 2 cylindrical lenses / 3 octupoles	Scherzer 1947		Seeliger 1951–54	Mollenstedt 1954–56	
Cs only: 4 quads / 3 octupoles (combined)	Archard 1955		Deltrap 1964	Krivaznek+Dell by 1997	
Cs only: 4 quads / 3 octupoles (separate)	Thomson 1967	Beck+Crewe 1972–75	Krivaznek+Dell by 1999	Dellby + Krivaznek 2000	Dellby + Krivaznek 2000
Cs only: 2 sextupoles / 2 (4) round lenses	Beck 1979	Crewe 1980 Rose 1981 Shao 1988 Rose 1990	Chen and Mu 1990	Haider 1997	Haider 1998
Cs + Ce: 4 mag. quads / 2 el. quads 3 octs	Hardy 1967	Rose 1971	Hardy 1967	Zach + Haider 1995	Zach 1997
Cs + Ce: 5 el. quads / 5 mag. quads 3 el. octs	Hardy 1967 Rose 1971	Pohner 1976 Koops 1978 Bernhard 1980 Hely 1981 Haider 1984	Koops 1978	Hely 1981	

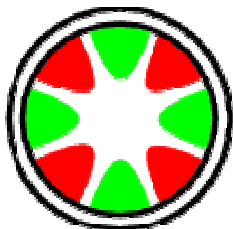
Fa Nion
Arizona, USA

Fa CEOS
Německo

12ti pólový korektor



Guru: Maximilian Haider
Joachim Zach



CEOS

Corrected Electron Optical Systems GmbH

Do existujících mikroskopů se vloží korektor

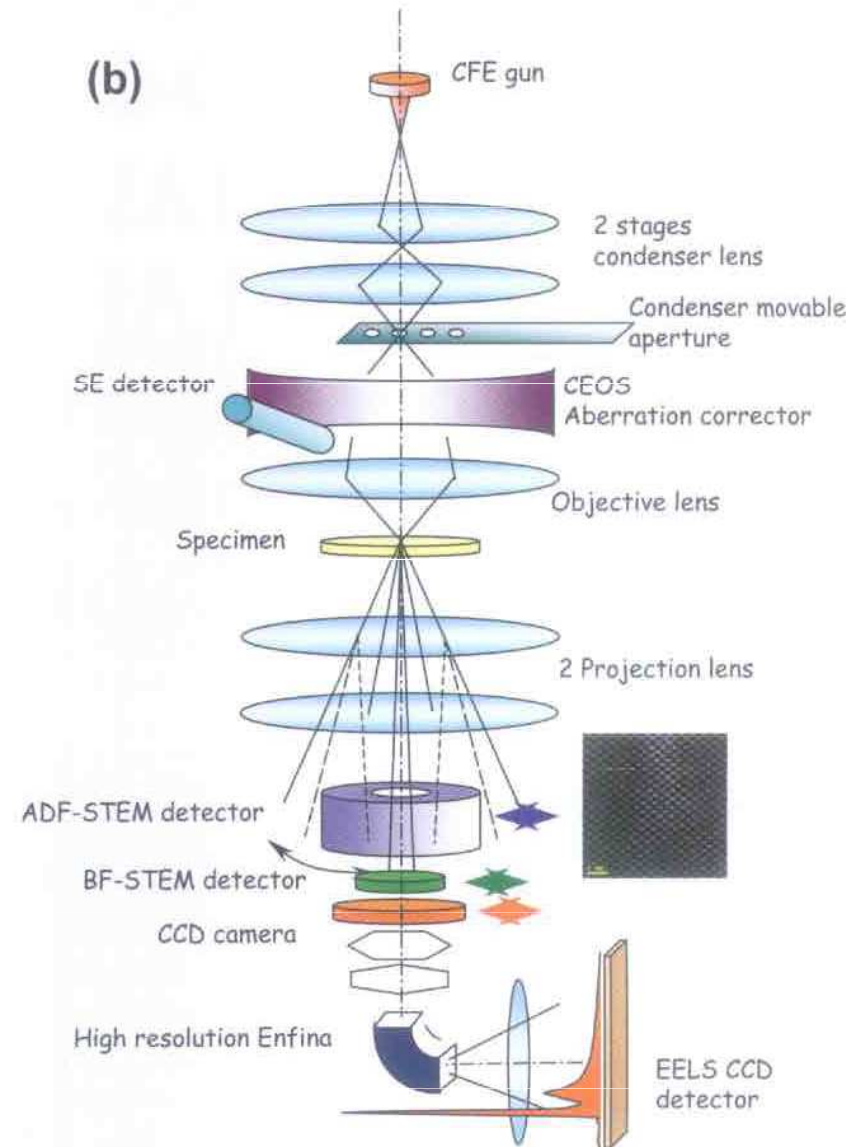


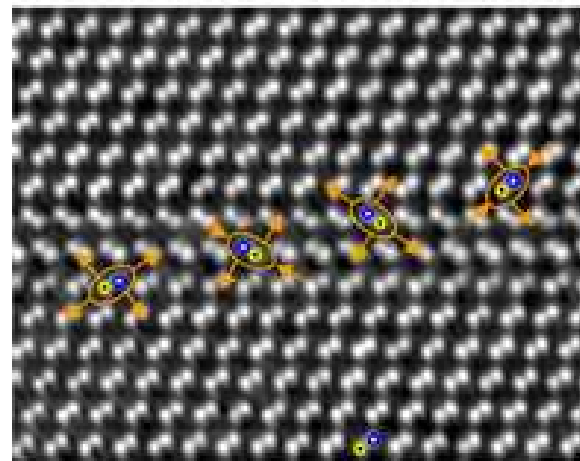
Fig.1(a) The Hitachi aberration corrected HD2700C STEM at BNL. (b) The schematics of the lens and detector assignment of the instrument.

Prof. Křivánek je českého původu

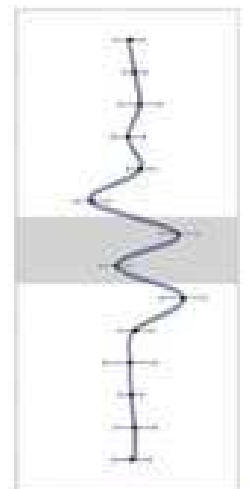


Guru: Ondřej Křivánek

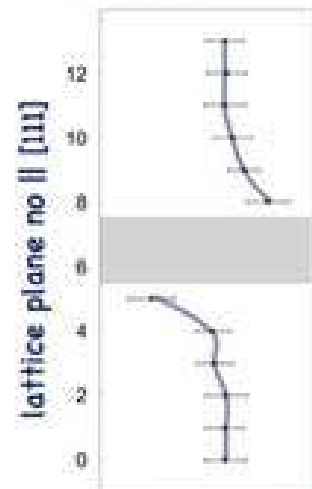
Vrstevná chyba v GaAs (ERC – Champion)



As Ga

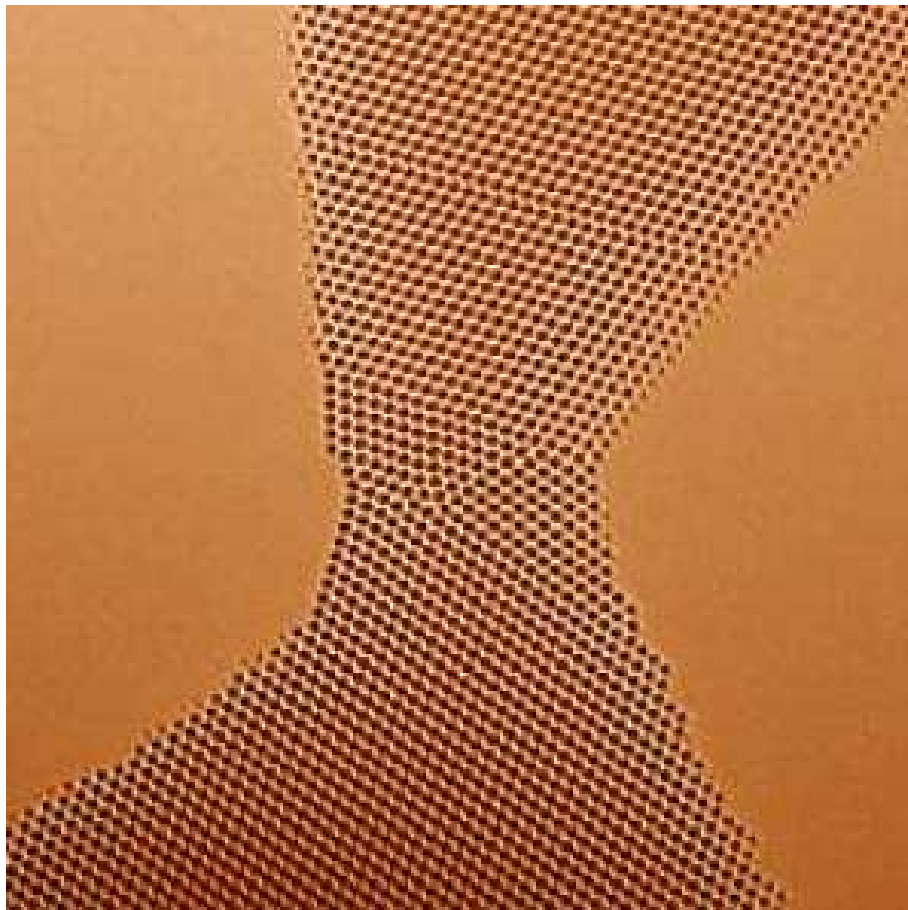


1.2 1.4 1.6
dumbbell
length [Å]

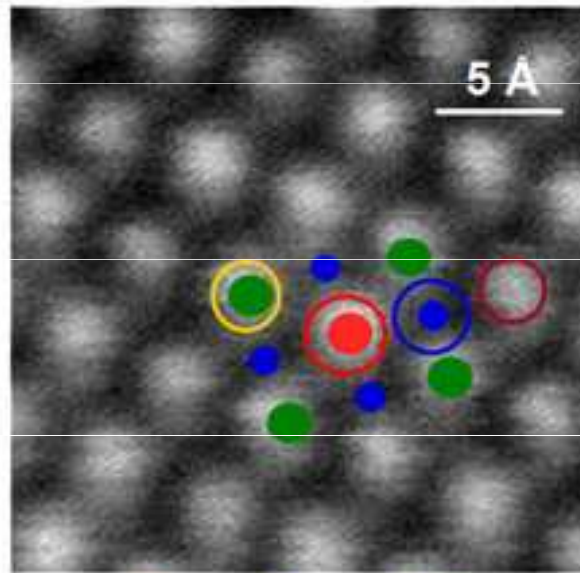


-5 0 5
dumbbell mis-
orientation [°]

Zlatá folie (TEAM 0.5)

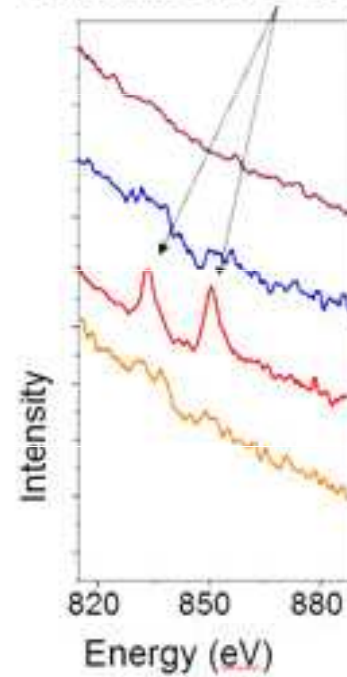


Identifikace jednotlivých atomů (Nion)



Ca O Ti

La M4/5 EELS signal



Brno a elektronový mikroskop

... tedy

Armin Delong a elektronový mikroskop

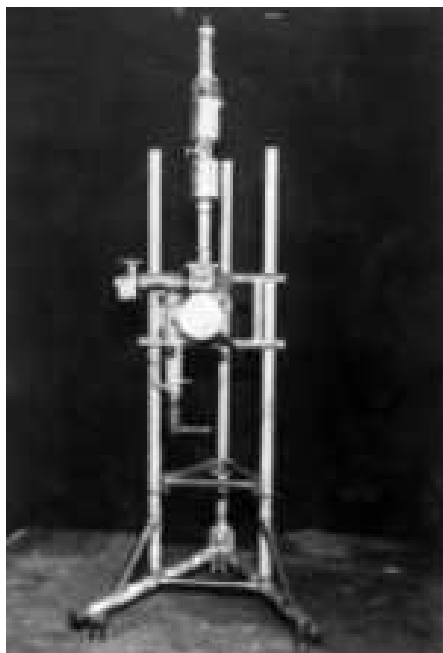


Prof. Armin Delong

hlavní spoluvůrce několika generací čs. elektronových mikroskopů

zakladatel a první mnohaletý ředitel Ústavu přístrojové techniky

laureát ceny Česká hlava 2006



"Trojnožka" (1950)



**Stolní elektronový mikroskop
Tesla BS242 (1954)**

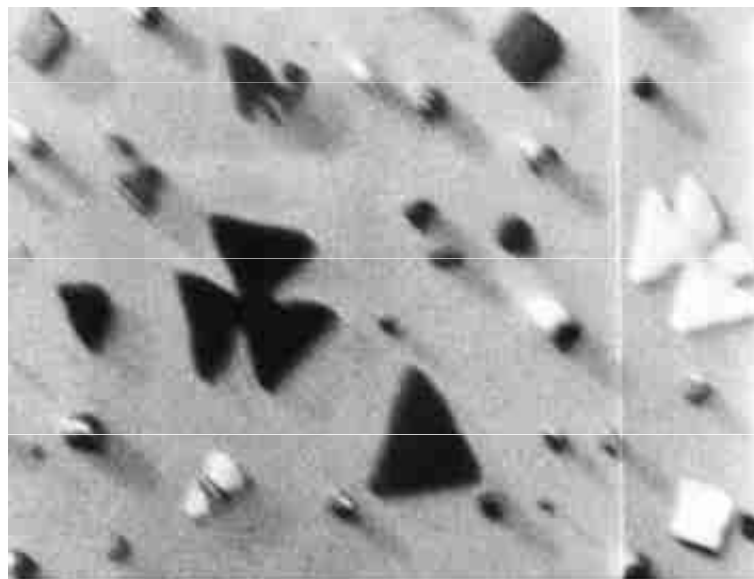
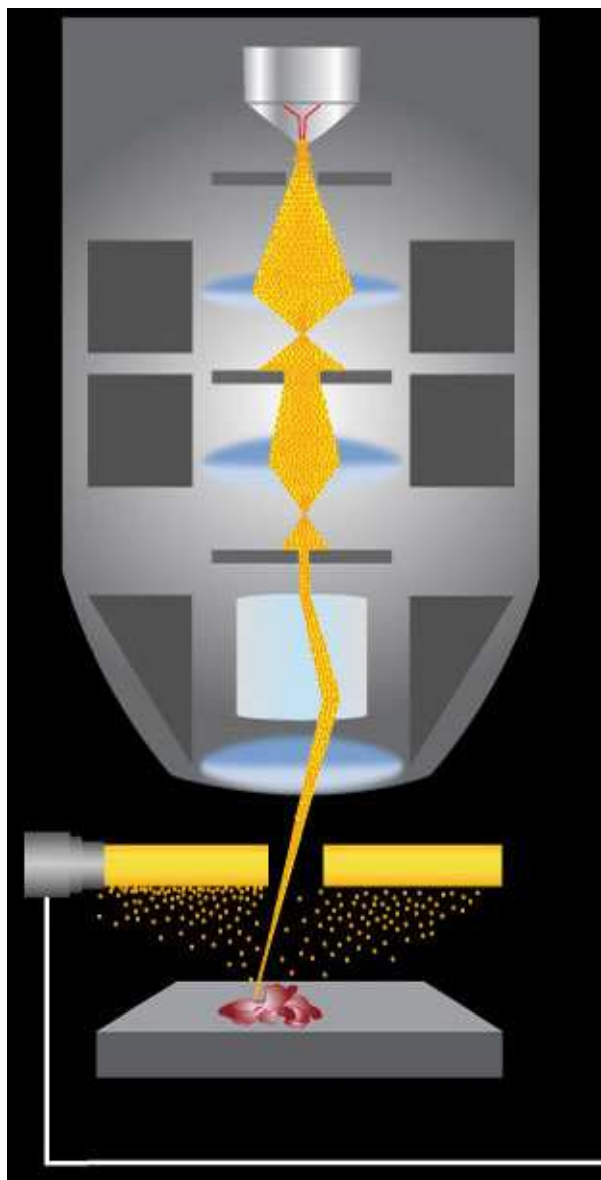


Elektronový litograf (1985)

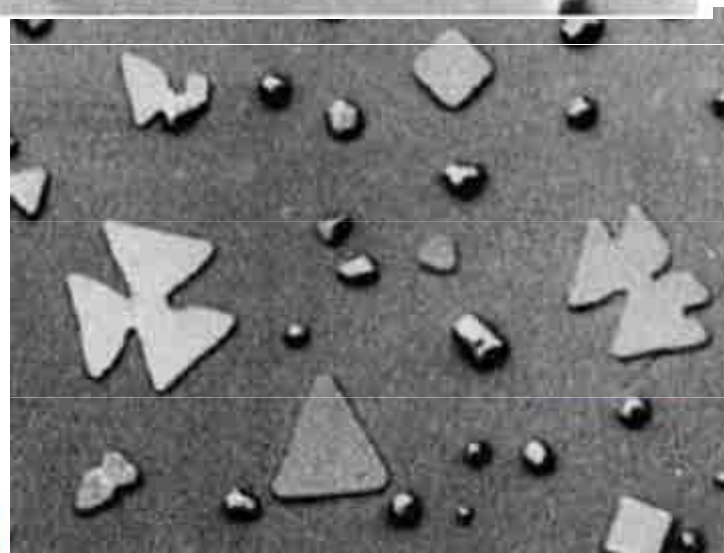


**První environmentální rastrovací elektronový
mikroskop v ČR pro pozorování vzorků v jejich
přirozeném stavu (1996)**

Scanovací elektronová mikroskopie s pomalými elektrony

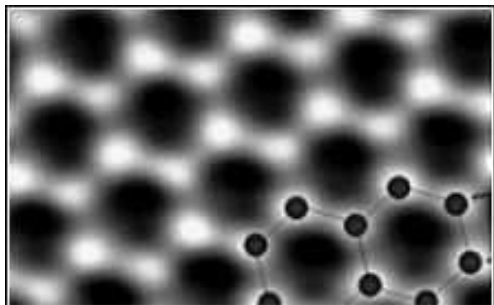


5500 eV



80 eV

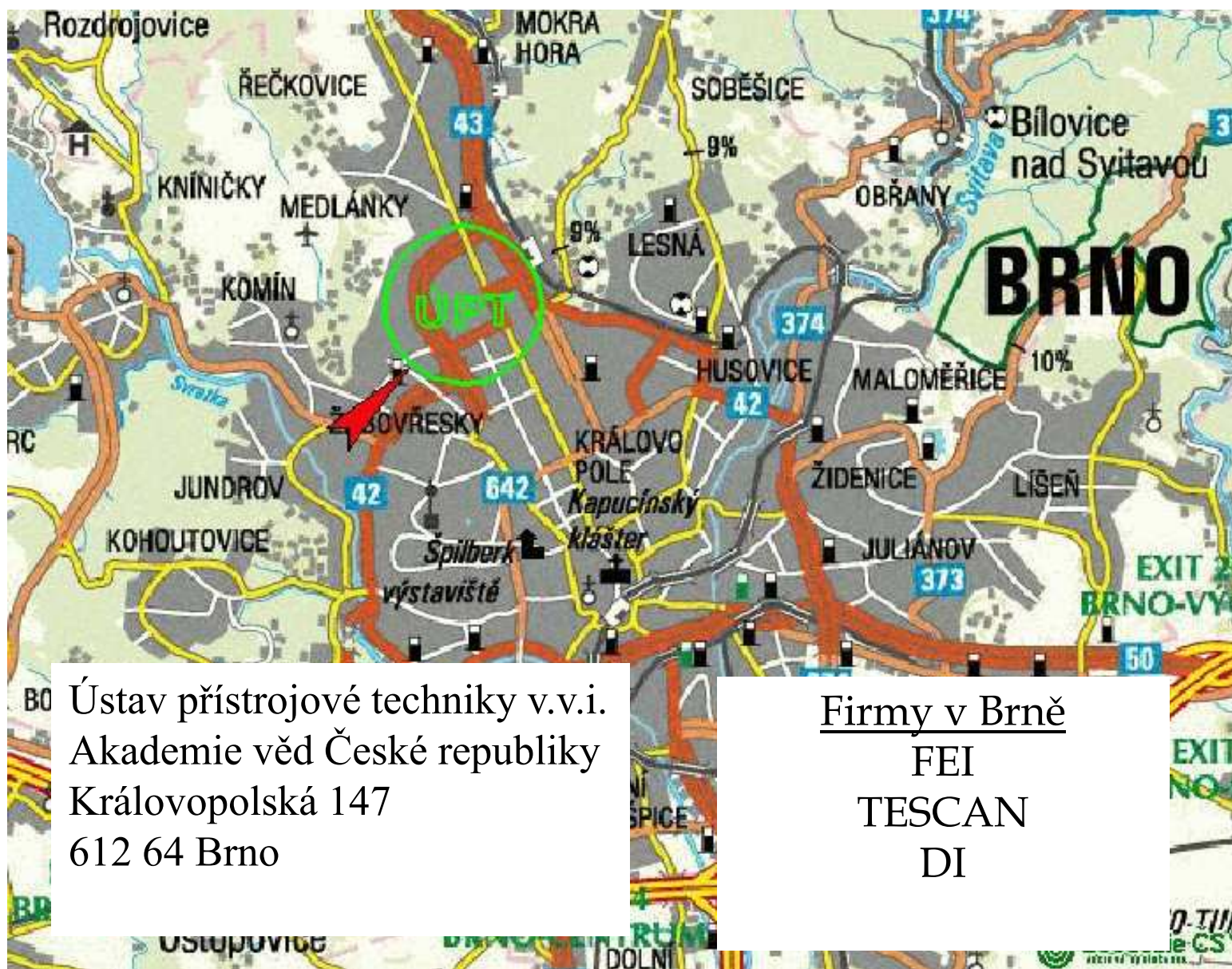
Scanovací elektronová mikroskopie s pomalými elektrony



grafen

„Saša“ Novoselov
NP 2010





The end

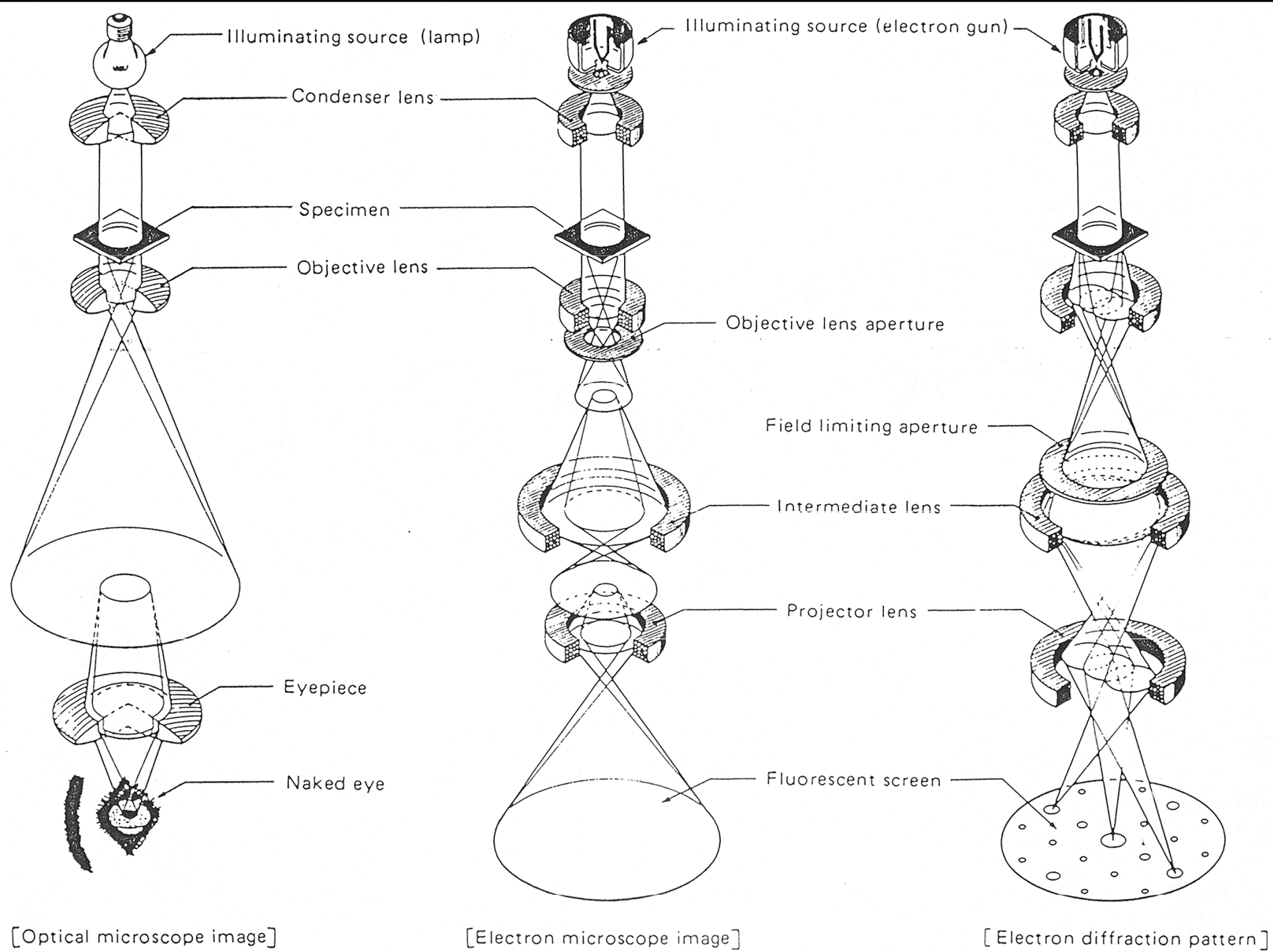


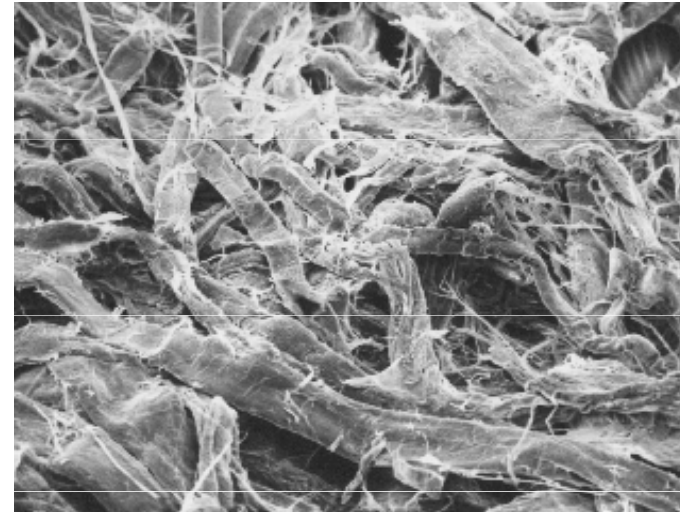
Figure 3. Comparison of image formation.



Obrázky ze SEM (neomezená hloubka ostrosti \times optika)



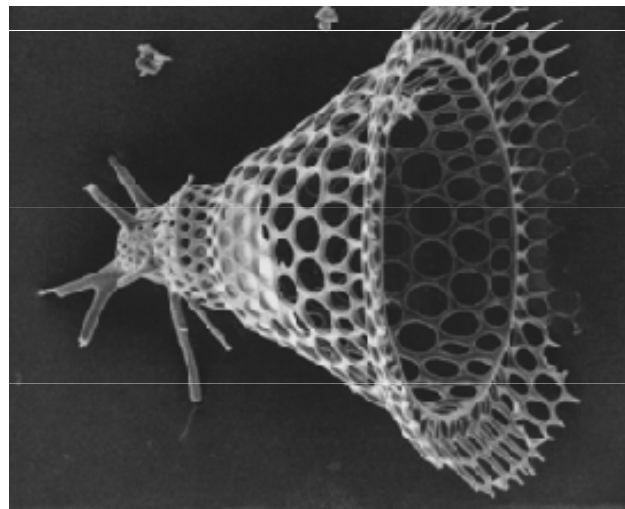
černá vdova (x 500)



toaletní papír (x 500)



inj. stříkačka (x 100)



radiolara (x 750)

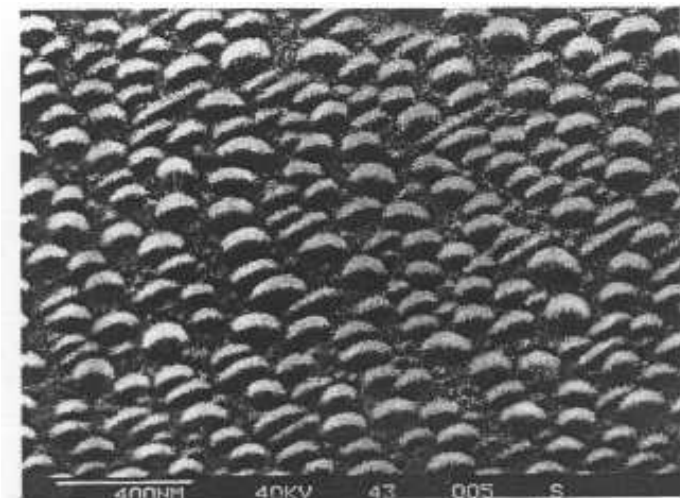


Fig. 3.28. Scanning electron micrograph of an Sn film (nominal coverage 38 monolayers) deposited on a cleaved GaAs surface [3.20]

kapičky Sn na povrchu GaAs