Relativistická kvantová mechanika

Michal Lenc

Poznámky k přednášce v jarním semestru 2010

1 Obrazy

1.1 Postulát o kvantové kausalitě

Postulát o kvantové kausalitě říká, že:

(a) Stav systému v čase t_0 jednoznačně určuje stav systému v libovolném okamžiku $t > t_0$ i v okamžiku $t < t_0$.

(b) Platí princip superposice: Jsou-li stavy $\left|\psi_1(t)\right\rangle$ a $\left|\psi_2(t)\right\rangle$ časové evoluce stavů $\left|\psi_1(t_0)\right\rangle$ a $\left|\psi_2(t_0)\right\rangle$, pak také stav $c_1\left|\psi_1(t_0)\right\rangle + c_2\left|\psi_2(t_0)\right\rangle$ má časovou evoluci $c_1\left|\psi_1(t)\right\rangle + c_2\left|\psi_2(t)\right\rangle$.

(c) Norma stavového vektoru se běhen časové evoluce nemění.

1.2 Evoluční operátor

Podle postulátu o kvantové kausalitě existuje jednoznačný vztah mezi vektory $\left|\psi(t)\right\rangle$ a $\left|\psi(t_0)\right\rangle$ a lze tedy definovat evoluční operátor $\hat{T}(t,t_0)$

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{T}(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \quad , \quad \hat{T}(t_0,t_0) = \hat{1} \quad . \tag{1.1}$$

Ze zachování normy dostáváme

$$\left\langle\psi(t)\middle|\psi(t)\right\rangle = \left\langle\hat{T}(t,t_0)\psi(t_0)\middle|\hat{T}(t,t_0)\psi(t)\right\rangle = \left\langle\psi(t_0)\middle|\psi(t_0)\right\rangle \tag{1.2}$$

a platí tak

$$\hat{T}^{+}(t,t_0)\,\hat{T}(t,t_0) = \hat{1} \quad . \tag{1.3}$$

Dále porovnáním

$$\begin{aligned} \left|\psi(t_2)\right\rangle &= \hat{T}(t_2,t_1)\left|\psi(t_1)\right\rangle = \hat{T}(t_2,t_1)\hat{T}(t_1,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \quad , \\ \left|\psi(t_2)\right\rangle &= \hat{T}(t_2,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \end{aligned} \tag{1.4}$$

dostáváme

$$\hat{T}(t_2,t_0) = \hat{T}(t_2,t_1)\hat{T}(t_1,t_0) \quad . \tag{1.5}$$

Evoluční operátor je unitární, neboť také

$$\hat{T}(t,t_0)\hat{T}^{+}(t,t_0) = \hat{1} \tag{1.6}$$

a dále máme

$$\hat{T}^{+}(t,t_0)=\hat{T}(t_0,t) \quad . \tag{1.7}$$

Pro Taylorův rozvoj $\hat{T}(t+\Delta t,t)$ dostáváme

$$\hat{T}(t+\Delta t,t)=1-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,\Delta t+\ldots, \tag{1.8}$$

kde $\hat{H}$ je nějaký hermiteovský operátor. Evoluční operátor splňuje rovnici

$$i\hbar\frac{d}{d\,t}\hat{T}(t,t_0)=\hat{H}(t)\hat{T}(t,t_0) \quad , \quad \hat{T}(t_0,t_0)=\hat{1} \quad . \tag{1.9}$$

1.3 Schrödingerův a Heisenbergův obraz

Ve Schrödingerově obraze předpokládáme, že se v čase mění stavový vektor. Pro stavový vektor platí přirozeně ta samá rovnice, jako pro evoluční operátor (Schrödingerova rovnice)

$$i\hbar\frac{d}{d\,t}\left|\psi_S(t)\right\rangle=\hat{H}_S(t)\left|\psi_S(t)\right\rangle \tag{1.10}$$

a pokud operátory závisí na čase, tak pouze explicitně. V Heisenbergově obraze naopak předpokládáme, že se stavový vektor v čase nemění. Požadavek rovnosti vyjádření střední hodnoty libovolné fyzikální veličiny v obou obrazech vede ke vztahu mezi operátory

$$\begin{gathered}\left|\psi_H\right\rangle\equiv\left|\psi_S(t_0)\right\rangle=\hat{T}^{+}(t,t_0)\left|\psi_S(t)\right\rangle \quad , \\ \left\langle\psi_S(t)\right|\hat{F}_S\left|\psi_S(t)\right\rangle=\left\langle\psi_H\right|\hat{F}_H(t)\left|\psi_H\right\rangle=\left\langle\psi_H\right|\hat{T}(t,t_0)\hat{F}_H(t)\hat{T}^{+}(t,t_0)\left|\psi_H\right\rangle \quad ,\end{gathered} \tag{1.11}$$

tedy

$$\hat{F}_H(t)=\hat{T}^{+}(t,t_0)\hat{F}_S\,\hat{T}(t,t_0) \quad . \tag{1.12}$$

Rovnici pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze získáme derivováním předchozího vztahu

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\,t}\hat{F}_H=\frac{d\,\hat{T}^{+}}{d\,t}\hat{F}_S\,\hat{T}+\hat{T}^{+}\hat{F}_S\frac{d\,\hat{T}}{d\,t}+\hat{T}^{+}\frac{\partial\hat{F}_S}{\partial t}\hat{T}= \\ \frac{1}{i\hbar}\left(-\hat{T}^{+}\hat{H}_S\,\hat{F}_S\,\hat{T}+\hat{T}^{+}\hat{F}_S\,\hat{H}_S\,\hat{T}\right)+\hat{T}^{+}\frac{\partial\hat{F}_S}{\partial t}\hat{T} \quad .\end{gathered} \tag{1.13}$$

S uvážením (1.6) máme

$$\frac{d}{d\,t}\hat{F}_H=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{F}_H,\hat{H}_H\right]+\frac{\partial\hat{F}_H}{\partial t} \quad . \tag{1.14}$$

1.4 Interakční obraz

Velmi důležitým pro aplikace je interakční obraz. Předpokládáme, že hamiltonián je složen ze dvou částí, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, kde $\hat{H}_0$ je na čase nezávislá základní část a $\hat{V}(t)$ je interakční část, která může explicitně záviset na čase. Zvolíme

$$\begin{aligned} &\hat{T}_0(t,t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)\right\} \quad , \\ &F_I = \hat{T}_0^+(t,t_0)\hat{F}_S\hat{T}_0(t,t_0) \quad , \quad |\psi_I(t)\rangle = \hat{T}_0^+(t,t_0)|\psi_S(t)\rangle \quad , \end{aligned} \tag{1.15}$$

a dostáváme pak

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_I(t)|\psi_I(t)\rangle \quad , \quad \hat{H}_I(t) = \hat{T}_0^+(t,t_0)\hat{V}(t)\hat{T}_0(t,t_0) \quad , \\ &\frac{d}{dt}\hat{F}_I = \hat{T}_0^+(t,t_0)\frac{\partial\hat{V}(t)}{\partial t}\hat{T}_0(t,t_0) + \left[\hat{H}_0,\hat{F}_I\right] \quad . \end{aligned} \tag{1.16}$$

2 Relativita a antičástice podle Feynmana

Amplituda pravděpodobnosti přechodu

$$A(\phi_0 \to \chi) = -i\int d^3\vec{x}\,\chi^*(\vec{x})U(\vec{x})\phi_0(\vec{x}) = -i\langle\chi|\hat{U}|\phi_0\rangle \quad . \tag{2.1}$$

Předpokládáme (první předpoklad je splněn normováním $|\phi_0\rangle$, druhý vhodnou volbou počátku odečítání energie)

$$\langle\phi_0|\phi_0\rangle = 1 \quad , \quad \langle\phi_0|\hat{U}|\phi_0\rangle = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Působení v čase t_1 označme $\hat{U}_1$, působení v čase t_2 jako $\hat{U}_2$ atd. Máme pak

$$A(\phi_0 \to \phi_0) = 1 - \sum_m \langle\phi_0|\hat{U}_2|\psi_m\rangle \exp\{-iE_m(t_2 - t_1)\}\langle\psi_m|\hat{U}_1|\phi_0\rangle \quad . \tag{2.3}$$

Za $|\psi_m\rangle$ vezmeme rovinné vlny. S označeními

$$a(\vec{x}_1) = \sqrt{2E_p}\,U(\vec{x}_1,t_1)\phi_0(\vec{x}_1) \quad , \quad b(\vec{x}_2) = \sqrt{2E_p}\,U(\vec{x}_2,t_2)\phi_0(\vec{x}_2) \quad , \tag{2.4}$$

kde $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ (ne nutně kladná větev odmocniny), můžeme psát

$$\begin{aligned} &A(\phi_0 \to \phi_0) = 1 - \\ &\int d^3\vec{x}_2\,b^*(\vec{x}_2)d^3\vec{x}_1\,a(\vec{x}_1)\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p}\exp\left\{-i\left[E_p(t_2 - t_1) - \vec{p}\cdot(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\right]\right\} \quad . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Proč jsme vydělili člen s energií, je vidět z úpravy relativisticky invariantního výrazu

$$\begin{aligned}&\delta\left(p^i\,p_i-m^2\right)d\,p^0\,d\,p^1\,d\,p^2\,d\,p^3=\delta\left(E^2-p^2-m^2\right)d\,E\,d^3\,\vec{p}=\\&\frac{1}{2\,E_p}\left[\delta\left(E+E_p\right)+\delta\left(E-E_p\right)\right]d\,E\,d^3\,\vec{p}\quad\Rightarrow\quad\frac{d^3\,\vec{p}}{2\,E_p}=\mathrm{inv}\quad.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Označme $t=t_2-t_1$ a $\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ a všimněme si chování funkce

$$G\left(\vec{r}\,,t\right)=\frac{i}{\left(2\pi\right)^3}\int\frac{d^3\,\vec{p}}{2\,E_p}\exp\left\{i\left[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_p\,t\right]\right\}\quad.\tag{2.7}$$

Předpokládejme $E_p>0$ a prostorupodobný interval $\lambda=\sqrt{-s^2}=\sqrt{r^2-t^2}$. Integrací přes úhlové proměnné dostaneme

$$\begin{aligned}&G\left(r,t\right)=\frac{1}{8\pi^2\,r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\,p\frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}}\exp\left\{i\left[p\,r-\sqrt{p^2+m^2}\,t\right]\right\}=\\&\frac{1}{8\pi^2\,i\,r}\frac{\partial}{\partial\,r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\,p\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}}\exp\left\{i\left[p\,r-\sqrt{p^2+m^2}\,t\right]\right\}\quad.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Substituce $p=m\sinh\varphi$ a označení $r=\lambda\cosh\varphi_0$, $t=\lambda\sinh\varphi_0$ převedou integrál na

$$G\left(r,t\right)=\frac{1}{8\pi^2\,i\,r}\frac{\partial}{\partial\,r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\,\varphi\exp\left\{i\,m\,\lambda\sinh\left(\varphi-\varphi_0\right)\right\}=\frac{1}{8\pi^2\,i\,r}\frac{\partial}{\partial\,r}K_0\left(m\,\lambda\right)\quad,\tag{2.9}$$

kde $K_0\left(x\right)=\int_0^\infty d\,y\cos\left(x\sinh y\right)$ je Besselova funkce. Pomocí vztahu $K_0'\left(x\right)=-K_1\left(x\right)$ přepíšeme (2.9) na

$$G\left(\lambda\right)=\frac{i\,m}{8\pi^2\,\lambda}K_1\left(m\,\lambda\right)\quad.\tag{2.10}$$

3 Komplexní proměnná

Místo úpravy integrálu podle (2.8) napišme

$$\begin{aligned}&G\left(r,t\right)=\frac{i}{4\pi^2\,r}\int\limits_0^\infty d\,p\frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}}\sin\left(p\,r\right)\exp\left\{-i\sqrt{p^2+m^2}\,t\right\}=\\&\frac{i}{4\pi^2\,r}\int\limits_m^\infty d\,\omega\sin\left(\sqrt{\omega^2-m^2}\,r\right)\exp\left\{-i\,\omega t\right\}\quad.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Nemusíme provádět detailní výpočet (3.1), ale pro prostorupodobný interval $-r<t<r$ využít následující věty

Věta: Nechť

(1) $F(\omega)$ je komplexní funkce reálné proměnné definovaná na intervalu $\omega\in[0,\infty)$ skoro všude.

(2) Pro všechna $t\in(-\infty,\infty)$ konverguje absolutně integrál

$$f(t)=\int_0^\infty F(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \quad , \quad \text{tj.} \quad \int_0^\infty |F(\omega)|\,d\omega<\infty \tag{3.2}$$

(funkce $F(\omega)$ je absolutně integrabilní na $[0,\infty)$).

(3) Existuje interval $[a,b]\subset(-\infty,\infty)$ tak, že $f(t)=0$ na $[a,b]$.

Pak $f(t)$ je identicky nulová na $[-\infty,\infty]$.

Důkaz: Definujme funkci $G(z)$ komplexní proměnné $z=t+iy$ vztahem

$$G(z)=\int_0^\infty F(\omega)e^{-i\omega z}\,d\omega \quad . \tag{3.3}$$

Funkce $f(t)$ je restrikcí $G(z)$ na reálnou osu, tj. $G(z)\big|_{\mathbb{R}}=f(t)$. Uvažujme $G(z)$ pouze na množině $\mathbb{C}_d\{z\in\mathbb{C},\operatorname{Im}z\le 0\}$, tj. v dolní polorovině komplexní roviny. Pak platí

$$\left|\int_0^\infty F(\omega)e^{-i\omega z}\,d\omega\right|\le\int_0^\infty\left|F(\omega)e^{-i\omega t}\,e^{\omega y}\right|d\omega\le\int_0^\infty|F(\omega)|e^{\omega y}\,d\omega\le\int_0^\infty|F(\omega)|\,d\omega \quad . \tag{3.4}$$

Integrál definující funkci $G(z)$ tedy konverguje (dokonce absolutně) v dolní polorovině. Označme dále

$$\begin{aligned} u(t,y)&=\operatorname{Re}G(z)=\int_0^\infty\left(\operatorname{Re}F(\omega)\cos\omega t-\operatorname{Im}F(\omega)\sin\omega t\right)e^{\omega y}\,d\omega \quad , \\ v(t,y)&=\operatorname{Im}G(z)=\int_0^\infty\left(\operatorname{Re}F(\omega)\sin\omega t+\operatorname{Im}F(\omega)\cos\omega t\right)e^{\omega y}\,d\omega \quad . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Přímým výpočtem (derivování podle parametru je zajištěno absolutní konvergencí integrálů) se snadno prověří platnost Cauchyových - Riemannových podmínek

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}=\frac{\partial v(t,y)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u(t,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(t,y)}{\partial t} \quad . \tag{3.6}$$

Diferencovatelnost funkcí $u(t,y)$ a $v(t,y)$ je rovněž zřejmá ze vztahů, jimiž jsou definovány a s použitím absolutní konvergence integrálů. Funkce $G(z)$ je tedy holomorfním rozšířením funkce $f(t)$ z reálné osy do dolní poloroviny komplexní roviny. Vzhledem k tomu, že reálná osa má v této polorovině hromadné body, je toto rozšíření určeno jednoznačně.

Věta o jednoznačnosti: Nechť $G(z)$ je holomorfní v otevřené souvislé oblasti D. Označme $N_G = \{z \in D \mid G(z) = 0\}$. Pak nastane právě jedna ze dvou možností

(1) N_G je tvořena izolovanými body.

(2) $N_G = D$ (tedy $G(z) \equiv 0$) $\Leftrightarrow$ N_G má v D alespoň jeden hromadný bod.

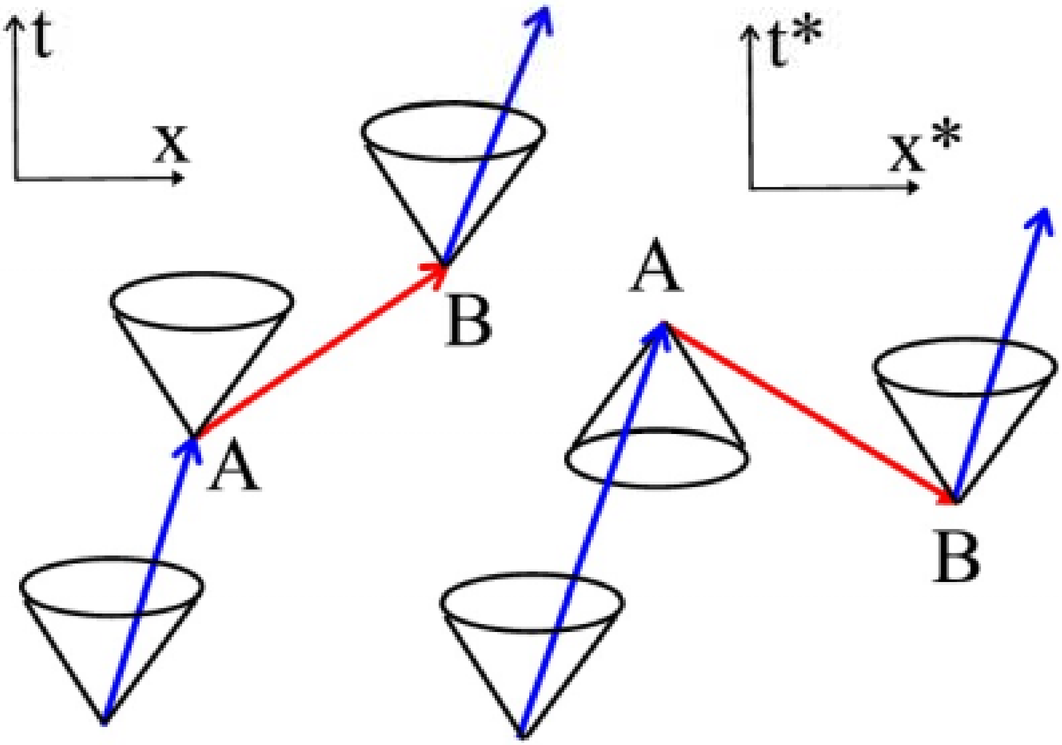
4 Antičástice podle Feynmana II

Podle uvedené věty nemůže být amplituda pravděpodobnosti přechodu rovna nule pro konečný interval času, specielně nemůže být rovna nula vně světelného kužele bodu $(t_A, \vec{x}_A)$. Proto, je-li (levá část obrázku) $t_A < t_B$ dostáváme příspěvek k amplitudě od částic putujících nadsvětelnou rychlostí, pro které je interval prostorupodobný, tj. pro které platí $c^2 (t_B - t_A)^2 - (\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 < 0$. Časová následnost událostí je pro události oddělené prostorupodobným intervalem závislá na zvolené inerciální soustavě. To snadno ukážeme: vztah pro Lorentzovu transformaci je (soustava K^* se pohybuje vzhledem k soustavě K podél osy x rychlostí V)

$$ct = \frac{ct^* + \frac{V}{c} x^*}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad x = \frac{x^* + V t^*}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad . \tag{4.1}$$

Pro $V > 0$ platí

$$x_B - x_A > \frac{c^2}{V}(t_B - t_A) \quad \Rightarrow \quad t_B^* < t_A^* \quad . \tag{4.2}$$



V souřadné soustavě K (levý obrázek) se pohybuje částice volně do bodu $(t_A, \vec{x}_A)$, kde je rozptýlena, pak opět volně do bodu $(t_B, \vec{x}_B)$, kde se opět rozptylem dostane do původního stavu a pohybuje se jako volná částice. V souřadné soustavě K^* (pravý obrázek) vypadá však věc úplně jinak. Částice se pohybuje volně, ale v čase t_B^* vznikne v bodě $(t_B^*, \vec{x}_B^*)$ dvojice částic, z nichž jedna se pohybuje proti směru času a druhá je ve stavu původní částice. Právě tato částice se pak v bodě $(t_A^*, \vec{x}_A^*)$ setká s původní částicí a obě zmizí. Zbylá částice pokračuje volným pohybem.

5 Relativistická kvantová mechanika – historický přístup

V nerelativistické teorii máme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad , \quad \hat{H} \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \hat{\vec{p}} \to \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \tag{5.1}$$

a Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) \quad . \tag{5.2}$$

V relativistické teorii

$$p^\mu = \left(p^0, p^1, p^2, p^3\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad ,$$
$$p_\mu = \left(p_0, p_1, p_2, p_3\right) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \quad . \tag{5.3}$$

Invariantní délka čtyřvektoru impulzu je

$$p_i\, p^i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad . \tag{5.4}$$

Hamiltonián je tedy

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{5.5}$$

a analogie ke kvantování v souřadnicové representaci

$$\hat{p}_i \to i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \quad . \tag{5.6}$$

Analogie ke Schrödingerově rovnici je ovšem

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\, \psi(\vec{r}, t) \quad . \tag{5.7}$$

6 Spinory v trojrozměrném prostoru

Spinor je dvoukomponentový objekt, jehož komponenty odpovídají dvěma možným hodnotám projekce spinu do osy z

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(1/2) \\ \psi(-1/2) \end{pmatrix} \quad ,$$
$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{6.1}$$

Připomeňme Pauliho matice (pro úplnost dodejme jednotkovou matici)

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{6.2}$$

Pro zavedení kovariantních složek spinorů je užitečné zavést matici, která umožňuje snižovat a zvedat indexy a tak využívat součtové konvence

$$g = \left(g_{AB}\right) = \left(g^{AB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{6.3}$$

takže

$$\psi_A = g_{AB} \psi^B \quad , \quad \psi^A = g^{BA} \psi_B \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = \psi^2 \quad , \quad \psi_2 = -\psi^1 \quad . \tag{6.4}$$

Při rotaci souřadné soustavy se spinor transformuje jako

$$\psi' = \hat{U}\,\psi \quad , \tag{6.5}$$

kde

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad . \tag{6.6}$$

Matice $\hat{U}$ je zadána čtyřmi komplexními čísly, může však záviset jen na třech nezávislých parametrech (representuje nějaký prvek z grupy rotací v trojrozměrném prostoru). Omezující podmínky dostaneme takto: bilineární kombinace

$$\psi^1 \varphi^2 - \psi^2 \varphi^1 = \psi^A \varphi_A = -\psi_A \varphi^A \tag{6.7}$$

se transformuje jako

$$\psi'^A \varphi'_A = U^A_E \psi^E g_{AB} U^B_C g^{DC} \varphi_D = \left(U^T\right)^E_A g_{AB} U^B_C \left(g^T\right)^{CD} \psi^E \varphi_D = \left(a\,d - b\,c\right)\psi^A \varphi_A \tag{6.8}$$

Máme-li jedinou funkci, která se transformuje sama na sebe, musí to být skalár, tj. platí

$$a\,d - b\,c = 1 \quad . \tag{6.9}$$

Další invariantem je hustota pravděpodobnosti nalezení částice v nějakém bodě

$$\psi'^+ \psi' = \psi^+ \hat{U}^+ \hat{U}\,\psi = \psi^+ \psi \quad \Rightarrow \quad \hat{U}^+ = \hat{U}^{-1} \tag{6.10}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad . \tag{6.11}$$

Ze vztahů (6.9) a (6.11) dostáváme pět podmínek pro čtyři komplexní čísla

$$d = a^* \quad , \quad c = -\,b^* \quad , \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad . \tag{6.12}$$

V trojrozměrném případě je operace inverse provedená dvakrát návratem k původní souřadné soustavě, proto u tensorových veličin je $\hat{P}^2 = \hat{1}$. U trojrozměrných spinorů mohou nastat (rotace o 0 a 2π nejsou ekvivalentní) dvě možnosti

$$\hat{P}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{P} = \pm 1 \quad , \quad \hat{P}^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \hat{P} = \pm i \quad . \tag{6.13}$$

Bilineární kombinace (6.7) representovala skalární veličinu. K representaci vektoru se dostaneme nejjednodušeji tak, že vyjdeme z representace grupy rotací – tj. $SO(3)$ pomocí kulových funkcí Y_{lm}. Pro $l = 1$ máme

$$Y_{10} = i\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} n_z \quad , \quad Y_{1\pm1} = \mp i\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\left(n_x \pm i\, n_y\right) \quad , \tag{6.14}$$

kde složky jednotkového vektoru jsou

$$\vec{n} = \left(n_x, n_y, n_z\right) = \left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right) \quad . \tag{6.15}$$

Vezměme teď symetrický spinor řádu $2j$. Obecný výraz je

$$\Psi_{jm} = \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}\right)^{1/2} \psi_{\underbrace{11\ldots}_{j+m}\underbrace{22\ldots}_{j-m}} \quad , \tag{6.16}$$

V našem případě ($j=1$) tedy máme buď srovnáním s výrazy (6.14)

$$\Psi_{1-1} = \frac{i}{2^{1/2}}\left(a_x - i\, a_y\right) \quad , \quad \Psi_{10} = i\, a_z \quad , \quad \Psi_{11} = -\frac{i}{2^{1/2}}\left(a_x + i\, a_y\right) \tag{6.17}$$

nebo

$$\Psi_{1-1} = \psi_{22} \quad , \quad \Psi_{10} = 2^{1/2}\psi_{12} \quad , \quad \Psi_{11} = \psi_{11} \quad . \tag{6.18}$$

Srovnáním (6.18) a (6.17) pak dostaneme vztah mezi komponentami trojrozměrného vektoru a symetrického spinoru druhého řádu

$$\psi_{11} = -\frac{i}{2^{1/2}}\left(a_x + i\, a_y\right) \quad , \quad \psi_{12} = \frac{i}{2^{1/2}} a_z \quad , \quad \psi_{22} = \frac{i}{2^{1/2}}\left(a_x - i\, a_y\right) \quad . \tag{6.19}$$

7 Spinory ve čtyřrozměrném časoprostoru

7.1 Vlastnosti spinorů

Stejně jako v nerelativistickém případě bude i teď spinor dvoukomponentový objekt

$$\begin{gathered}\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(1/2) \\ \xi(-1/2) \end{pmatrix} \quad , \\ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad .\end{gathered} \tag{7.1}$$

Ve čtyřrozměrném prostoru prostorová inverse mění znaménko pouze tří $\left(x, y, z\right)$ze čtyř $\left(ct, x, y, z\right)$ časoprostorových souřadnic a nekomutuje tedy s rotacemi souřadnic, které obsahují časovou osu. Speciálně pro Lorentzovu transformaci platí

$$\hat{P}\,\hat{L}\left(\vec{V}\right) = \hat{L}\left(-\vec{V}\right)\hat{P} \quad . \tag{7.2}$$

Při transformaci z vlastní Lorentzovy grupy transformuje se spinor jako

$$\xi'^1 = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2 \quad , \quad \xi'^2 = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2 \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad , \tag{7.3}$$

nebo v maticovém zápisu

$$\xi' = L\xi \quad , \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \det L = 1 \quad . \tag{7.4}$$

Koeficienty α, β, γ a δ jsou funkcemi úhlů rotace čtyřrozměrné souřadné soustavy. Podmínka $\det L = 1$ říká, že matice L je z representace grupy $SL(2,C)$, která má stejně jako Lorentzova grupa šest parametrů. Bilineární forma

$$\xi^1\,\Xi^2 - \xi^2\,\Xi^1 \tag{7.5}$$

je invariantem (částice se spinem nula, složená ze dvou částic se spinem 1/2).
Potom můžeme psát místo (7.5)

$$\xi^A\Xi_A = -\xi_A\Xi^A = inv \quad . \tag{7.6}$$

V nerelativistické teorii určuje $\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*}$ hustotu pravděpodobnosti, a je tedy skalární veličinou, proto musí být spinorová transformace (7.3) unitární ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). V relativistické teorii je hustota pravděpodobnosti časupodobnou složkou čtyřvektoru a podmínka unitarity nevzniká. Proto musíme uvažovat ne jeden spinor, ale dvojici spinorů ξ a η, transformujících se podle komplexně sdružených representací Lorentzovy grupy, ξ podle (7.3) a η podle

$$\eta'^{\dot{1}} = \alpha^*\eta^{\dot{1}} + \beta^*\eta^{\dot{2}} \quad , \quad \eta'^{\dot{2}} = \gamma^*\eta^{\dot{1}} + \delta^*\eta^{\dot{2}} \quad , \quad \alpha^*\delta^* - \beta^*\gamma^* = 1 \quad . \tag{7.7}$$

Komponenty spinoru, který se transformuje podle komplexně sdružené representace Lorentzovy grupy značíme tečkou nad velkým písmenem. Pro zvedání a snižování indexů platí i tady vztah (6.4). Vidíme, že transformace (7.7) odpovídá úměrnosti

$$\eta^{\dot{A}} \sim \xi^{*A} \quad . \tag{7.8}$$

Při prostorových rotacích se kovariantní složky trojrozměrného spinoru transformují jako komplexně sdružené složky kontranariantního spinoru $\psi_A \sim \psi^{*A}$. Tuto vlastnost si musí zachovat i složky čtyřrozměrného spinoru. S uvážením (7.8) je tedy

$$\eta_{\dot{A}} \sim \eta^{*\dot{A}} \sim \xi^A \quad . \tag{7.9}$$

Budem tedy podobně jako v (7.1) psát

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad . \tag{7.10}$$

Působení operátoru prostorové inverse nemůže být násobkem jednotkové matice, jako tomu bylo u trojrozměrných spinorů. Bude proto operátor prostorové převádět ξ na η a naopak. Zapsáno ve složkách je (volíme representaci, kde $\hat{P}^2 = -1$)

$$\hat{P}\xi^A = i\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta_{\dot{A}} = i\xi^A \tag{7.11}$$

neboli

$$\hat{P}\xi_A = -i\eta^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta^{\dot{A}} = -i\xi_A \quad . \tag{7.12}$$

Zápis některých vztahů výrazně zjednodušíme maticovým značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \eta^{\dot{1}} & \eta^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad . \tag{7.13}$$

Transformační vztahy můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} &\xi' = L\xi \quad , \quad \tilde{\xi}' = \tilde{\xi}L^{-1} \quad , \quad \hat{P}\xi = i\eta \quad , \quad \hat{P}\eta = i\xi \quad , \\ &\tilde{\eta}' = \tilde{\eta}L^{+} \quad , \quad \eta' = \left(L^{+}\right)^{-1}\eta \quad , \quad \hat{P}\tilde{\xi} = -i\tilde{\eta} \quad , \quad \hat{P}\tilde{\eta} = -i\tilde{\xi} \quad . \end{aligned} \tag{7.14}$$

Dvojice bispinorů (ξ, η) a $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathrm{H}})$ representují mimo jiné skalární a vektorové veličiny. Pro skalární veličiny (skalár a pseudoskalár) je

$$\begin{aligned} &\omega = \tilde{\Xi}\xi + \tilde{\mathrm{H}}\eta = \Xi_A\xi^A + \mathrm{H}^{\dot{A}}\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\omega = \omega \quad , \\ &\omega = \tilde{\Xi}\xi - \tilde{\mathrm{H}}\eta = \Xi_A\xi^A - \mathrm{H}^{\dot{A}}\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\omega = -\omega \quad . \end{aligned} \tag{7.15}$$

Máme totiž

$$\hat{P}\tilde{\Xi}\hat{P}\xi = \left(-i\tilde{\mathrm{H}}\right)(i\eta) = \tilde{\mathrm{H}}\eta \quad , \quad \hat{P}\tilde{\mathrm{H}}\hat{P}\eta = \left(-i\tilde{\Xi}\right)(i\xi) = \tilde{\Xi}\xi \quad . \tag{7.16}$$

Pro vektorové veličiny

$$\begin{aligned} &\zeta = \xi\tilde{\mathrm{H}} + \Xi\tilde{\eta} = \left(\xi^A\mathrm{H}^{\dot{B}} + \Xi^A\eta^{\dot{B}}\right) \quad , \\ &\zeta = \xi\tilde{\mathrm{H}} - \Xi\tilde{\eta} = \left(\xi^A\mathrm{H}^{\dot{B}} - \Xi^A\eta^{\dot{B}}\right) \quad . \end{aligned} \tag{7.17}$$

Vzhledem k relacím

$$\begin{aligned} &P\left(\xi\tilde{\mathrm{H}} + \Xi\tilde{\eta}\right) = P\left(\xi^A\mathrm{H}^{\dot{B}} + \Xi^A\eta^{\dot{B}}\right) = \eta_{\dot{A}}\tilde{\Xi}_B + \mathrm{H}_{\dot{A}}\tilde{\xi}_B = \eta\tilde{\Xi} + \mathrm{H}\tilde{\xi} \quad , \\ &\zeta = \xi\tilde{\mathrm{H}} - \Xi\tilde{\eta} = P\left(\xi^A\mathrm{H}^{\dot{B}} - \Xi^A\eta^{\dot{B}}\right) = \eta_{\dot{A}}\tilde{\Xi}_B - \mathrm{H}_{\dot{A}}\tilde{\xi}_B = \eta\tilde{\Xi} + \mathrm{H}\tilde{\xi} \quad . \end{aligned} \tag{7.18}$$

a spojení složek čtyřvektoru se složkami spinoru druhého řádu se smíšenými indexy (pro trojrozměrný vektor platí stejná úvaha jako v nerelativistickém případě, nultá (časupodobná) složka vektoru je úměrná hustotě pravděpodobnosti

$$a^0=\frac{1}{2}\left(\zeta^{1\dot{1}}+\zeta^{2\dot{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\zeta_{1\dot{1}}+\zeta_{2\dot{2}}\right) \quad , \quad a^1=\frac{1}{2}\left(\zeta^{1\dot{2}}+\zeta^{2\dot{1}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\zeta_{1\dot{2}}+\zeta_{2\dot{1}}\right) \quad ,$$
$$a^2=\frac{i}{2}\left(\zeta^{1\dot{2}}-\zeta^{2\dot{1}}\right)=-\frac{i}{2}\left(\zeta_{1\dot{2}}-\zeta_{2\dot{1}}\right) \quad , \quad a^3=\frac{1}{2}\left(\zeta^{1\dot{1}}-\zeta^{2\dot{2}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\zeta_{1\dot{1}}-\zeta_{2\dot{2}}\right) \tag{7.19}$$

odpovídá první případ čtyřrozměrnému vektoru (s trojrozměrným polárním vektorem) a druhý případ čtyřrozměrnému pseudovektoru (s trojrozměrným axiálním vektorem)

$$\hat{P}\left(a^0,\vec{a}\right)=\left(a^0,-\vec{a}\right) \quad , \quad \hat{P}\left(a^0,\vec{a}\right)=\left(-a^0,\vec{a}\right) \quad . \tag{7.20}$$

Vztahy (7.19) je možno zapsat zkráceně jako

$$\zeta=\left(\ \zeta^{A\dot{B}}\ \right)=\vec{a}\cdot\vec{\sigma}+a_0\,\sigma_0 \quad , \quad \vec{a}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta\,\vec{\sigma}\} \quad , \quad a^0=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta\} \quad . \tag{7.21}$$

7.2 Lorentzova transformace spinorů

Vztahů mezi spinorem ζ a čtyřvektorem a^i využijeme pro nalezení konkrétního tvaru koeficientů transformace. Zopakujme potřebné značení

$$L=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \quad , \quad \xi=\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\eta}=\begin{pmatrix}\eta^{\dot{1}} & \eta^{\dot{2}}\end{pmatrix} \quad , \quad \xi\tilde{\eta}\sim\zeta=\begin{pmatrix}\zeta^{1\dot{1}} & \zeta^{1\dot{2}}\\ \zeta^{2\dot{1}} & \zeta^{2\dot{2}}\end{pmatrix} \quad ,$$
$$\xi'=L\xi \quad , \quad \tilde{\eta}'=\tilde{\eta}L^+ \quad , \quad \zeta'=L\,\zeta\,L^+ \quad . \tag{7.22}$$

Pro infinitesimální Lorentzovu transformaci píšeme

$$\delta L=I+\lambda \quad , \quad \zeta'=\zeta+\lambda\,\zeta+\zeta\,\lambda^+ \quad , \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad . \tag{7.23}$$

Při infinitesimální Lorentzově transformaci čtyřvektoru máme jednak

$$\vec{a}'=\vec{a}-a^0\,\vec{n}\,\delta V=\vec{a}-\frac{\delta V}{2}\vec{n}\,\mathrm{Tr}\{\zeta\} \quad ,$$
$$a'^0=a^0-\vec{a}\cdot\vec{n}\,\delta V=a^0-\frac{\delta V}{2}\vec{n}\cdot\mathrm{Tr}\{\vec{\sigma}\,\zeta\} \tag{7.24}$$

a také

$$\vec{a}'=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta'\vec{\sigma}\}=\vec{a}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\zeta\left(\vec{\sigma}\,\lambda+\lambda^+\,\vec{\sigma}\right)\right\} \quad ,$$
$$a'^0=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta'\}=a^0+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\zeta\left(\lambda+\lambda^+\right)\right\} \quad . \tag{7.25}$$

Porovnáním obou zápisů dostaneme

$$\lambda=\lambda^+=-\frac{\delta V}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \quad . \tag{7.26}$$

Konečná Lorentzova transformace (pro jednoduchat zápisu v rovině *t-x*) je

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - V\,t}{\sqrt{1-V^2}} = \cosh\phi\, x - \sinh\phi\, t \quad , \\
t' &= \frac{t - V\,x}{\sqrt{1-V^2}} = \cosh\phi\, t - \sinh\phi\, x \quad .
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

Infinitezimální transformace je pak

$$x' = x - \delta V\, t = x - \delta\phi\, t \quad , \quad t' = t - \delta V\, x = t - \delta\phi\, x \quad . \tag{7.28}$$

Pro výpočet konečné Lorentzovy transformace budeme infinitezimální transformaci aplikovat násobně

$$\delta\phi = \frac{\phi}{n} \quad , \quad L = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{\phi}{2n}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \right)^n = \exp\left\{ -\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \right\} \quad . \tag{7.29}$$

Infinitesimální transformaci jsme charakterizovali parametrem $\delta\phi$ a nikoliv δV, protože

$$L(\phi_1)L(\phi_2) = L(\phi_1+\phi_2) \quad , \quad L(V_1)L(V_2) \neq L(V_1+V_2) \quad , \tag{7.30}$$

jak se můžeme přesvědčit z (7.27). S využitím vztahů

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^{2n} = I \quad , \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^{2n+1} = \vec{\sigma}\cdot\vec{n} \tag{7.31}$$

můžeme psát pro konečné velikosti rychlosti

$$L = \exp\left\{ -\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \right\} = I\cosh\frac{\phi}{2} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sinh\frac{\phi}{2} \quad , \quad \tanh\phi = V \quad . \tag{7.32}$$

Při infinitesimální rotaci souřadnic v geometrickém prostoru máme pak

$$\vec{a}' = \vec{a} - \delta\theta(\vec{n}\times\vec{a}) = \vec{a} - \frac{\delta\theta}{2}\mathrm{Tr}\{\zeta(\vec{\sigma}\times\vec{n})\} \quad , \quad a'^0 = a^0 \quad , \tag{7.33}$$

odkud

$$\lambda = -\lambda^+ = \frac{i\,\delta\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \quad . \tag{7.34}$$

Pro konečné rotace potom

$$L = \exp\left\{ \frac{i\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \right\} = I\cos\frac{\theta}{2} + i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sin\frac{\theta}{2} \quad . \tag{7.35}$$

8 Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice

8.1 Diracova rovnice pro volnou částici

Při známém vztahu mezi čtyřvektory a spinory můžeme operátoru čtyřimpulsu $\hat{p}^i$ přiřadit operátorový spinor $\hat{p}^{A\dot{B}}$ resp. $\hat{p}_{A\dot{B}}$. Jediné vhodné relativisticky invariantní výrazy jsou pak

$$\hat{p}^{A\dot{B}}\,\eta_{\dot{B}} = m\,\xi^{A} \quad , \quad \hat{p}_{\dot{B}A}\,\xi^{A} = m\,\eta_{\dot{B}} \quad , \tag{8.1}$$

které se značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

můžeme přepsat na

$$\left(\hat{p}_0\,\sigma_0 + \hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\right)\eta = m\,\xi \quad , \quad \left(\hat{p}_0\,\sigma_0 - \hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\right)\xi = m\,\eta \quad . \tag{8.3}$$

Zavedení bispinorů a γ matic je posledním krokem při odvození obvyklého tvaru Diracovy rovnice. Se značením

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{8.4}$$

přejde (8.3) na

$$\left(\gamma^0\,\hat{p}_0 - \vec{\gamma}\cdot\hat{\vec{p}}\right)\psi = m\,\psi \quad . \tag{8.5}$$

Zcela kompaktní zápis dostaneme po zavedení matic

$$\underline{\hat{p}} \equiv \gamma^i\,\hat{p}_i \quad , \quad \left(\underline{\hat{p}} - m\right)\psi = 0 \quad . \tag{8.6}$$

V souřadnicové representaci (na chvíli v SI jednotkách)

$$\begin{gathered} \left(\underline{\hat{p}} - m\,c\right)\psi = 0 \quad , \quad \underline{\hat{p}} \to i\,\hbar\,\underline{\nabla} = i\,\hbar\,\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} = i\,\hbar\left(\gamma^0 \frac{\partial}{c\,\partial t} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\right) \quad , \\ i\,\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\,\psi \quad , \quad \hat{H} = \frac{\hbar}{i}\,c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + m\,c^2\,\beta, \end{gathered} \tag{8.7}$$

kde matice α a β jsou dány vztahy

$$\begin{gathered} \vec{\alpha} = \gamma^0\,\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \alpha_i\,\alpha_k + \alpha_k\,\alpha_i = 2\,\delta_{ik} \quad , \quad \beta\,\alpha_i + \alpha_i\,\beta = 0 \quad , \quad \beta^2 = 1 \quad . \end{gathered} \tag{8.8}$$

8.2 Diracova rovnice v elektromagnetickém poli

Se čtyřpotenciálem

$$A^i = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right) \quad , \quad A_i = \left(\frac{\Phi}{c}, -\vec{A}\right) \tag{8.9}$$

a záměnou (v komutačních relacích vystupuje zobecněný impulz) oproti volné částici

$$p_i \quad \rightarrow \quad p_i - e\,A_i \tag{8.10}$$

dostáváme Diracovu rovnici ve vnějším elektromagnetickém poli

$$\gamma^i \left(\hat{p}_i - e\,\hat{A}_i\right)\psi = m\,c\,\psi \quad , \tag{8.11}$$

kde γ^i je čtyřvektor matic, které mají ve spinorové representaci tvar (jsou možné i jiné representace, získané unitárními transformacemi)

$$\gamma^i = \left(\gamma^0, \vec{\gamma}\right) \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{8.12}$$

a ψ je čtyřkomponentový bispinor. V souřadnicové representaci je

$$\hat{p}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(i\hbar \frac{\partial}{c\,\partial t}, i\hbar \vec{\nabla}\right) \quad , \quad \hat{p}^i = \left(i\hbar \frac{\partial}{c\,\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla}\right) \tag{8.13}$$

a Diracova rovnice má tvar

$$\left(\frac{1}{c}\gamma^0 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right) + \vec{\gamma}\cdot\left(i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}\right) - m\,c\right)\psi = 0 \quad . \tag{8.14}$$

nebo po přepsání

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c\,\vec{\alpha}\cdot\left(\hat{\vec{p}} - e\,\hat{\vec{A}}\right) + \beta\,m\,c^2 + e\,\hat{\Phi}\right)\psi \quad , \tag{8.15}$$

kde jsme označili

$$\gamma^0 = \beta \quad , \quad \vec{\alpha} = \beta\,\vec{\gamma} \quad . \tag{8.16}$$

8.3 Heisenbergův obraz.

Připomeňme si vztah pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze

$$\frac{d}{d\,t}\hat{F} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{F}\right] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \quad . \tag{8.17}$$

Zavedeme operátor mechanického impulzu

$$\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - e\,\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right) \quad . \tag{8.18}$$

Výpočet komutátorů

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{r}}\right]=\frac{\hbar}{i}c\vec{\alpha} \quad , \tag{8.19}$$

a trochu komplikovaněji

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{p}}-e\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right)\right]=-\frac{e\hbar}{i}\vec{\nabla}\Phi+\frac{ec\hbar}{i}\vec{\nabla}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{A}\right)-\frac{ec\hbar}{i}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} \quad . \tag{8.20}$$

S využitím vztahu

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{A}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\alpha}+\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\alpha}\right)+\vec{\alpha}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\vec{\alpha}\times\vec{B} \tag{8.21}$$

dostaneme

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{p}}-e\vec{A}\left(\hat{\vec{r}}\right)\right]=-\frac{e\hbar}{i}\vec{\nabla}\Phi+\frac{ec\hbar}{i}\vec{\alpha}\times\vec{B} \quad . \tag{8.22}$$

Tedy

$$\frac{d\hat{\vec{r}}}{dt}=c\vec{\alpha} \quad , \quad \frac{d\hat{\vec{\pi}}}{dt}=-e\vec{\nabla}\Phi+ec\vec{\alpha}\times\vec{B} \quad . \tag{8.23}$$

Charakter operátoru rychlosti dal vznik názvu Zitterbewegung.

8.4 Rovnice kontinuity.

Diracovu rovnici

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}-mc\right)\psi=0 \tag{8.24}$$

komplexně sdružíme a s využitím vztahů $\left(\gamma^i\right)^+=\gamma^0\gamma^i\gamma^0$, tedy

$$\left(\gamma^0\right)^+=\gamma^0 \quad , \quad \left(\vec{\gamma}\right)^+=-\vec{\gamma} \tag{8.25}$$

napíšeme jako

$$\left(-i\hbar\left(\gamma^0\right)^T\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\left(\vec{\gamma}\right)^T\cdot\vec{\nabla}-mc\right)\psi^*=0 \quad . \tag{8.26}$$

Rovnici (8.26) transponujeme na (diferenciální operátory působí doleva)

$$\psi^+\left(-i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}-mc\right)=0 \tag{8.27}$$

a po zavedení Diracova sdružení $\bar{\psi}=\psi^+\gamma^0$ s využitím antikomutačních relací γ matic máme

$$\bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + mc \right) = 0 \quad . \tag{8.28}$$

S použitím symbolů $\underline{a} = \gamma^i a_i$ můžeme (8.24) a (8.28) zapsat jako

$$\left(\underline{\hat{p}} - mc \right)\psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi}\left(\underline{\hat{p}} + mc \right) = 0 \quad . \tag{8.29}$$

Vynásobení první rovnice v (8.29) zleva $\bar{\psi}$ a druhé rovnice zprava ψ dává výrazy, jejichž sečtením dostáváme rovnici kontinuity

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0 \quad , \quad j^k = \bar{\psi}\gamma^k \psi \quad . \tag{8.30}$$

Časupodobná komponenta je $j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^+\psi > 0$.

8.5 Standardní representace

Od spinorové representace přejdeme ke standardní representaci unitární transformací

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \hat{U}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \quad , \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \quad . \tag{8.31}$$

Vzhledem k chování ξ a η při působení operátoru parity máme

$$\hat{P}\varphi = i\varphi \quad , \quad \hat{P}\chi = -i\chi \quad . \tag{8.32}$$

Rovnice pro tyto nové spinory získáme sečtením a odečtením rovnic v (8.3)

$$\hat{p}_0\sigma_0\varphi - \hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\chi = m\varphi \quad , \quad -\hat{p}_0\sigma_0\chi + \hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\varphi = m\chi \quad . \tag{8.33}$$

Rovnice (8.5) a (8.7) mají ve standardní representaci stejný tvar, matice v nich jsou po transformaci

$$\gamma \quad \rightarrow \quad \hat{U}\gamma\hat{U}^+ \tag{8.34}$$

vyjádřeny jako

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{8.35}$$

Matice operátoru spinu je ve všech representacích stejná

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \quad , \quad \underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad S_z\begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ \psi^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ \psi^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_z\begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \\ 0 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \\ 0 \\ \psi^4 \end{pmatrix} \quad . \tag{8.36}$$

9 Rovinné vlny

Dosadíme-li do (8.29) rovinné vlny (volba normovací konstanty $\varepsilon = c\, p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ se ozřejmí později)

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u(p) \exp\left(-i\, p_i\, x^i\right) \quad , \quad \psi(-p) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u(-p) \exp\left(i\, p_i\, x^i\right) \quad , \tag{9.1}$$

dostáváme

$$\left(\underline{p} - m c\right) u(p) = 0 \quad , \quad \left(\underline{p} + m c\right) u(-p) = 0 \tag{9.2}$$

a

$$\overline{u}(p)\left(\underline{p} - m c\right) = 0 \quad , \quad \overline{u}(-p)\left(\underline{p} + m c\right) = 0 \quad . \tag{9.3}$$

podmínkou řešitelnosti je $p^i\, p_i = m^2 c^2$. Bispinory normujeme tak, že

$$\overline{u}(p) u(p) = 2 m c^2 \quad , \quad \overline{u}(-p) u(-p) = -2 m c^2 \quad . \tag{9.4}$$

Násobení zleva první rovnice v (9.2) $\overline{u}(p)$ a druhé rovnice $\overline{u}(-p)$ vede na

$$\overline{u}(\pm p) \gamma^i\, p_i\, u(\pm p) = 2 m^2 c^3 = 2 c\, p^i\, p_i \quad \Rightarrow \quad \overline{u}(\pm p) \gamma^i\, u(\pm p) = 2 c\, p^i \quad . \tag{9.5}$$

Pro čtyřvektor toku pak

$$j^i = \overline{\psi}(\pm p) \gamma^i\, \psi(\pm p) = \frac{c\, p^i}{\varepsilon} = \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right) \quad . \tag{9.6}$$

Ve standardní representaci, kde píšeme

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad , \tag{9.7}$$

se Diracova rovnice rozpadá na dvě vázané rovnice

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon - m c^2\right) \phi - c\, \vec{p} \cdot \vec{\sigma}\, \chi = 0 \quad , \\ \left(\varepsilon + m c^2\right) \chi - c\, \vec{p} \cdot \vec{\sigma}\, \phi = 0 \quad . \end{aligned} \tag{9.8}$$

Máme pak

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m c^2}\; w(+) \\ \sqrt{\varepsilon - m c^2}\; (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})\, w(+) \end{pmatrix} \quad , \quad u(-p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m c^2}\; (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})\, w(-) \\ \sqrt{\varepsilon + m c^2}\; w(-) \end{pmatrix} \quad , \tag{9.9}$$

kde $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ a $w(\pm)$ jsou libovolné dvoukomponentové veličiny, splňující $w^+(\pm)\, w(\pm) = 1$.

Pro relativisticky sdružené bispinory máme z (9.9)

$$\bar{u}(p) = \left(\sqrt{\varepsilon + mc^2}\, w^+(+) \quad -\sqrt{\varepsilon - mc^2}\, w^+(+)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \right) \quad ,$$
$$\bar{u}(-p) = \left(\sqrt{\varepsilon - mc^2}\, w^+(-)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \quad -\sqrt{\varepsilon + mc^2}\, w(-) \right) \quad . \tag{9.10}$$

10 Transformace Diracovy rovnice

10.1 Rovnice volné částice (Foldyova - Wouthuysenova transformace)

Hamiltonián je

$$\hat{H} = c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m c^2 \quad . \tag{10.1}$$

Ve standardní reprezentaci jsou matice $\vec{\alpha}$ a β dány vztahy

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{10.2}$$

Uvažujme o takové unitární (a na čase explicitně nezávislé) transformaci, která by odstranila operátory, které vážou velké komponenty s malými

$$\hat{U} = \exp\left(i\hat{S}\right) \quad , \quad \hat{S} = \hat{S}^+ \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{S} = 0 \quad . \tag{10.3}$$

Platí

$$|\psi'\rangle = \exp\left(i\hat{S}\right)|\psi\rangle \quad ,$$
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \exp\left(i\hat{S}\right)\hat{H}|\psi\rangle = \exp\left(i\hat{S}\right)\hat{H}\exp\left(-i\hat{S}\right)|\psi'\rangle = \hat{H}'|\psi'\rangle \quad . \tag{10.4}$$

Velké a malé komponenty spojuje operátor $c\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}$. Uhádneme tedy poměrně snadno potřebný tvar $\hat{S}$

$$\exp\left(i\hat{S}\right) = \exp\left(\beta\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\theta\right) = \cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) + \beta\,\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|} \quad , \quad \theta = \theta\left(\hat{\vec{p}}\right) \quad . \tag{10.5}$$

Pro transformovaný hamiltonián dostáváme

$$\hat{H}' = \exp\left(i\hat{S}\right)\hat{H}\exp\left(-i\hat{S}\right) =$$

$$\left(\cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) + \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right)\left(c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m c^2\right)\left(\cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) - \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right) =$$

$$\left(c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m c^2\right)\left(\cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) - \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right)^2 =$$

$$\left(c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m c^2\right)\exp\left(-2\beta\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\,\theta\right) =$$

$$c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\left[\cos\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) - mc\,\frac{\sin\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right] + \beta m c^2\left[\cos\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) + \left|\hat{\vec{p}}\right|\frac{\sin\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right)}{mc}\right] \quad .$$

(10.6)

Položíme-li teď

$$\tan\left(2\left|\hat{\vec{p}}\right|\theta\right) = \frac{\left|\hat{\vec{p}}\right|}{mc} \quad , \tag{10.7}$$

dostáváme výsledný hamiltonián

$$\hat{H}' = \beta\sqrt{m^2 c^4 + \hat{\vec{p}}^2 c^2} \quad . \tag{10.8}$$

10.2 Rovnice částice v elektromagnetickém poli

Hamiltonián v tomto případě je

$$\hat{H} = c\vec{\alpha}\cdot\left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}\right) + \beta m c^2 + e\Phi = \beta m c^2 + \hat{E} + \hat{O} \quad , \tag{10.9}$$

kde

$$\hat{E} = e\Phi \quad , \quad \hat{O} = c\vec{\alpha}\cdot\left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}\right) \quad . \tag{10.10}$$

Platí

$$\beta\hat{O} = -\hat{O}\beta \quad , \quad \beta\hat{E} = \hat{E}\beta \quad . \tag{10.11}$$

Uvažujme opět o takové unitární (ale teď už možná na čase závislé) transformaci, která by odstranila liché operátory, které vážou velké komponenty s malými a ponechala jen operátory sudé

$$\hat{U} = \exp(i\hat{S}) \quad , \quad \hat{S} = \hat{S}^+ \quad . \tag{10.12}$$

Pro $|\psi'\rangle = \exp\left(i\hat{S}\right)|\psi\rangle$ dostáváme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-i\hat{S}\right)|\psi'\rangle = \exp\left(-i\hat{S}\right)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-i\hat{S}\right)\right)|\psi'\rangle = \hat{H}|\psi\rangle = \hat{H}\exp\left(-i\hat{S}\right)|\psi'\rangle \quad . \tag{10.13}$$

odkud pak

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \hat{H}'|\psi'\rangle \quad , \quad \hat{H}' = \exp\left(i\hat{S}\right)\left(\hat{H} - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\exp\left(-i\hat{S}\right) \quad . \tag{10.14}$$

Mějme výraz (chápaný jako funkce parametru λ, který pak položíme roven jedné)

$$F(\lambda) = \exp\left(i\hat{B}\lambda\right)\hat{A}\exp\left(-i\hat{B}\lambda\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n}\right)\Bigg|_{\lambda=0} \quad . \tag{10.15}$$

Derivováním (10.15) dostáváme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial\lambda}\Bigg|_{\lambda=0} = i\left[\hat{B},\hat{A}\right] \quad , \\ &\cdots \quad , \\ &\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n}\Bigg|_{\lambda=0} = i^n\left[\hat{B},\left[\hat{B},\left[\cdots\left[\hat{B},\hat{A}\right]\cdots\right]\right]\right] \quad , \end{aligned} \tag{10.16}$$

takže ponecháme-li v rozvoji pouze členy do třetího řádu (nebo čtvrtého, násobí-li člen klidovou energii) v $\hat{S}$, dostáváme

$$\begin{aligned} &\hat{H}' = \hat{H} + i\left[\hat{S},\hat{H}\right] - \frac{1}{2}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\hat{H}\right]\right] - \frac{i}{6}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\hat{H}\right]\right]\right] + \\ &\frac{mc^2}{24}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\beta\right]\right]\right]\right] - \hbar\dot{S} - \frac{i\hbar}{2}\left[\hat{S},\dot{\hat{S}}\right] + \frac{\hbar}{6}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\dot{\hat{S}}\right]\right] \quad . \end{aligned} \tag{10.17}$$

Ponecháme-li v (10.17) jen členy nejnižšího řádu, máme

$$\hat{H}' = \beta mc^2 + \hat{\mathcal{E}} + \hat{\mathcal{O}} + imc^2\left[\hat{S},\beta\right] \quad . \tag{10.18}$$

Tento tvar vede k tomu, že zkusíme zvolit

$$\hat{S} = -\frac{i}{2mc^2}\beta\hat{\mathcal{O}} \quad . \tag{10.19}$$

S označením matice spinu (ta je stejná ve spinorové i standardní representaci)

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{10.20}$$

máme po delších výpočtech výsledný hamiltonián ve tvaru

$$\begin{aligned} \hat{H}' = \beta \left(m c^2 + \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - e \vec{A} \right)^2 - \frac{1}{8 m^3 c^2} \hat{\vec{p}}^4 \right) + e \Phi - \\ \frac{e\hbar}{2m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - \frac{e\hbar}{4 m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot \left(\vec{E} \times \hat{\vec{p}} \right) - \frac{i e \hbar^2}{8 m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) - \frac{e \hbar^2}{8 m^2 c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad . \end{aligned} \tag{10.21}$$

Pro rotačně souměrné pole máme

$$\vec{E}(r) = - \frac{\mathrm{d} V(r)}{\mathrm{d} r} \frac{\vec{r}}{r} \tag{10.22}$$

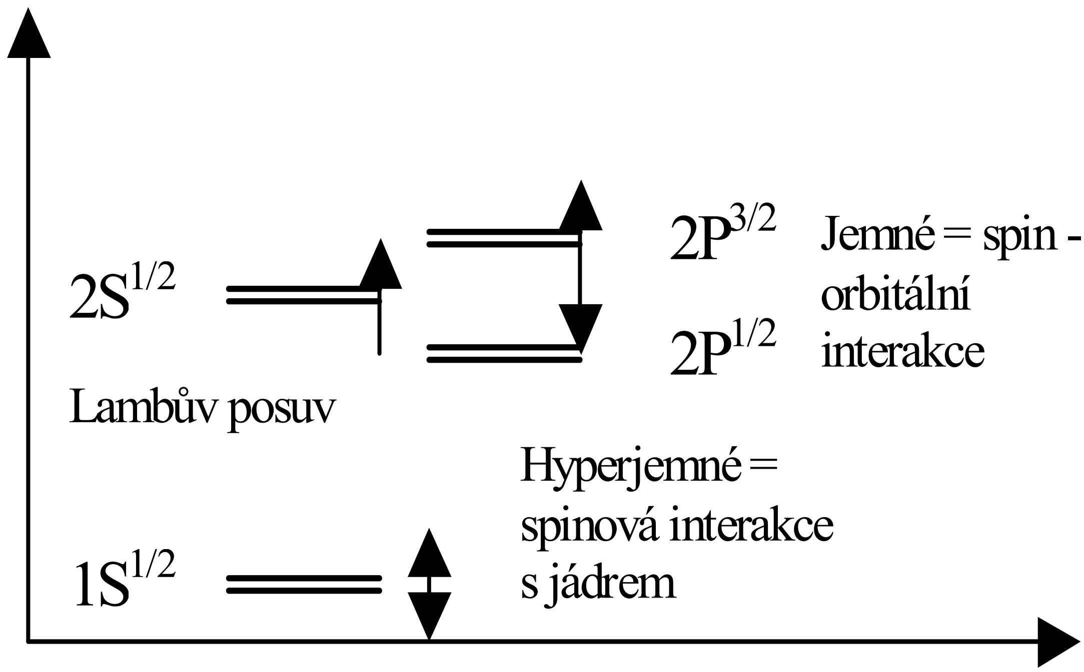
a příslušný člen nabude tvaru

$$- \frac{e\hbar}{4 m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot \left(\vec{E} \times \hat{\vec{p}} \right) = \frac{e\hbar}{4 m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d} V(r)}{\mathrm{d} r} \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \quad , \quad \vec{L} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}} \quad , \tag{10.23}$$

kterým popisujeme spin - orbitální interakci. Poslední člen se nazývá Darwinův, jeho vznik se dá se chápat jako rozmazání energie Coulombova působení

$$\left\langle V(\vec{r} + \delta \vec{r}) - V(\vec{r}) \right\rangle \simeq \left\langle \frac{\partial V}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i \delta x^j \right\rangle \simeq \frac{1}{6} \Delta V \left(\frac{\hbar}{m c} \right)^2 \quad . \tag{10.24}$$

Schéma nejnižších hladin je na obrázku:



11 Rozptyl elektronu na jádře

Budeme počítat rozptyl elektronu na (nekonečně) těžkém jádře náboje Ze. Volba souřadné soustavy je velmi důležitá pro zjednodušení výpočtu. Impuls elektronu před rozptylem ať je ve směru osy x, impuls elektronu po rozptylu ať leží v rovině x-y (značíme $\underline{p} \equiv p_i \gamma^i = (E/c)\gamma^t - \vec{p}\,\vec{\gamma}$)

$$\underline{p}_1 = \gamma^t \frac{E_1}{c} - \gamma^x\, p_{1x} \quad , \quad \underline{p}_2 = \gamma^t \frac{E_2}{c} - \gamma^x\, p_{2x} - \gamma^y\, p_{2y} \quad . \tag{11.1}$$

Čtyřvektor potenciálu je

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c} = \frac{Z\,e}{4\pi\,\varepsilon_0\,c}\frac{1}{r}, \vec{A} = 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \underline{A} = \frac{Z\,e}{4\pi\,\varepsilon_0\,c}\frac{1}{r}\gamma^t \quad . \tag{11.2}$$

Připomeňme Diracovu rovnici

$$\left(\underline{p} - e\,\underline{A} - m\,c \right) \left| \psi \right\rangle = 0 \quad , \quad \underline{p} = i\,\hbar\,\underline{\nabla} \tag{11.3}$$

a vyjádření matic ve standardní representaci

$$\gamma^t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad . \tag{11.4}$$

Počáteční a koncový stav je, pokud píšeme i obvykle vynechávaný normovací faktor

$$\left\langle x \middle| \psi_1 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\,E_1\,V}} u_1\, e^{-\frac{i}{\hbar} p_{1i}\, x^i} \quad , \quad \left\langle x \middle| \psi_2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\,E_2\,V}} u_2\, e^{-\frac{i}{\hbar} p_{2i}\, x^i} \quad . \tag{11.5}$$

Amplituda pravděpodobnosti přechodu je

$$\left\langle \psi_2 \right| H_{\text{int}} \left| \psi_1 \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{u}_2\, \gamma^t\, u_1}{2\sqrt{E_1\,E_2}\,V} \frac{Z\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_2\,\vec{r}} \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1\,\vec{r}}\, d^3\,\vec{r} \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar}E_2\,t}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2\,t}\, d\,t \quad . \tag{11.6}$$

Pro integrály máme vyjádření

$$\int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_2\,\vec{r}} \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1\,\vec{r}}\, d^3\,\vec{r} = \frac{4\pi\,\hbar^2}{\left|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\right|^2} , \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar}E_2\,t}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2\,t}\, d\,t = \frac{\sin\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T \right)}{\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}} \mathrm{e}^{i\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}T} \quad . \tag{11.7}$$

První integrál počítáme jako

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{\infty} d\,r\, r\, e^{iqr\cos\vartheta-\lambda r} = \frac{4\pi}{q}\lim_{\lambda\to 0}\int_0^{\infty} d\,r \sin(q\,r)\, e^{-\lambda r} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{4\pi}{\lambda^2+q^2} = \frac{4\pi}{q^2} \quad . \tag{11.8}$$

Pro pravděpodobnost přechodu za jednotku času

$$w(1\to 2) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\langle\psi_2 \,|\, H_{\text{int}} \,|\psi_1\rangle\right|^2 = \frac{\left|\bar{u}_2\,\gamma^t\,u_1\right|^2}{4\hbar^2 E_1 E_2 V^2}\left(\frac{Z\,e^2\,\hbar^2}{\varepsilon_0\left|\vec{p}_1-\vec{p}_2\right|^2}\right)^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{\sin^2\left(\frac{E_1-E_2}{2\hbar}T\right)}{\left(\frac{E_1-E_2}{2\hbar}\right)^2 T} \quad . \tag{11.9}$$

Jedním z vyjádření Diracovy delta funkce je

$$\delta(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{\sin^2(xT)}{\pi x^2 T} \quad . \tag{11.10}$$

Využitím (11.10) upravíme vztah (11.9) na

$$w(1\to 2) = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{\left|\bar{u}_2\,\gamma^t\,u_1\right|^2}{4E_1 E_2 V^2}\left(\frac{Z\,e^2\,\hbar^2}{\varepsilon_0\left|\vec{p}_1-\vec{p}_2\right|^2}\right)^2 \delta(E_2-E_1) \quad . \tag{11.11}$$

Hustota stavů v okolí koncového stavu (stav *2*) je ($E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$)

$$d\,\rho = \frac{V\,d^3\,\vec{p}_2}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V\,E_2\,p_2}{(2\pi\hbar)^3 c^2}\, d\,\Omega\, d\,E_2 \tag{11.12}$$

a tak můžeme psát (platí $|\vec{p}_1|=|\vec{p}_2|$)

$$d\,w = \frac{V\,d\,\Omega}{(2\pi\hbar)^3 c^2}\int w(1\to 2)\, E_2\, p_2\, d\,E_2 = \frac{p_1}{E_1 V}\left|\bar{u}_2\,\gamma^t\,u_1\right|^2\left(\frac{Z\,e^2}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{p}_1-\vec{p}_2\right|^2}\right)^2 d\,\Omega \quad . \tag{11.13}$$

Poněvadž $\vec{v}=\partial E/\partial\,\vec{p}$, máme pro hustotu toku částic výraz

$$j = \frac{v_1}{V} = \frac{p_1 c^2}{E_1 V} \tag{11.14}$$

a pro diferenciální účinný průřez pak

$$d\,\sigma = \left|\bar{u}_2\,\gamma^t\,u_1\right|^2\left(\frac{Z\,e^2}{4\pi\varepsilon_0\,q^2}\right)^2 d\,\Omega \quad , \quad q^2 = \left|\vec{p}_1-\vec{p}_2\right|^2 = 4\,p_1^2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad . \tag{11.15}$$

Nyní zvolme bispinory jako

$$u^{(1/2)}(p)=\frac{1}{\sqrt{E+mc^2}}\begin{pmatrix} E+mc^2 \\ 0 \\ c\left(p_x+i\,p_y\right) \\ 0 \end{pmatrix},\; u^{(-1/2)}(p)=\frac{1}{\sqrt{E+mc^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ E+mc^2 \\ 0 \\ c\left(p_x-i\,p_y\right) \end{pmatrix} \quad , \tag{11.16}$$

které získáme z (9.9) volbou

$$w(+)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad w(-)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad . \tag{11.17}$$

Pro složky hybnosti máme

$$p_{1x}+i\,p_{1y}=p_1 \quad , \quad p_{2x}+i\,p_{2y}=p_1\exp\{i\theta\} \quad . \tag{11.18}$$

Platí

$$\left|\bar{u}_2^{(1/2)}\gamma^t u_1^{(1/2)}\right|^2=\frac{\left|\left(E_1+mc^2\right)^2+p_1^2c^2e^{-i\theta}\right|^2}{\left(E_1+mc^2\right)^2}=4E_1^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad , \tag{11.19}$$

kde výpočet zjednodušuje

$$\bar{u}_2\,\gamma^t\,u_1=u_2^+\gamma^t\gamma^t u_1=u_2^+u_1. \tag{11.20}$$

Obdobně spočteme další výrazy, takže máme

$$\begin{aligned} &\left|\bar{u}_2^{(1/2)}\gamma^t u_1^{(1/2)}\right|^2=4E_1^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad , \quad \left|\bar{u}_2^{(1/2)}\gamma^t u_1^{(-1/2)}\right|^2=0 \quad , \\ &\left|\bar{u}_2^{(-1/2)}\gamma^t u_1^{(1/2)}\right|^2=0 \quad , \quad \left|\bar{u}_2^{(-1/2)}\gamma^t u_1^{(-1/2)}\right|^2=4E_1^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{11.21}$$

Pro diferenciální účinný průřez rozptylu je tedy konečný výraz

$$d\sigma_{rel}=\left(\frac{mc^2}{E_1}\right)^2\left(1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\sigma_{Ruth}\;,\; d\sigma_{Ruth}=\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_1^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \quad . \tag{11.22}$$

12 Invariantní účinný průřez

Mějme dva svazky částic, které se srážejí. Počítejme v klidové soustavě částice *2* počet srážek v objemu dV za čas dt

$$d\nu=n_1\sigma v_{rel}\,dt\,n_2\,dV \quad , \quad d\nu=An_1n_2\,dt\,dV \quad , \tag{12.1}$$

kde v_{rel} je velikost rychlosti částice *1* v klidové soustavě částice *2*, n_1 a n_2 jsou hustoty částic a konečně σ je účinný průřez. Veličiny $d\nu$ a $d\,t\,d\,V$ jsou invarianty, musí tedy být invariantem také veličina $A n_1 n_2$, přičemž A musí v klidové soustavě jedné z částic přejít na $v_{rel}\,\sigma$. Máme

$$n\,d\,V = n_0\,d\,V_0 \quad\Rightarrow\quad n = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = n_0\,\frac{\varepsilon}{m\,c^2} \tag{12.2}$$

a tedy

$$A n_1 n_2 = inv'' \quad\Rightarrow\quad A\varepsilon_1\varepsilon_2 = inv' \quad\Rightarrow\quad A = \frac{p_1\cdot p_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,inv \quad , \tag{12.3}$$

kde skalární součin označujeme jako $p_1\cdot p_2 = p_{1i}\,p_2^i$. V klidové soustavě částice *2* je

$$A = v_{rel}\,\sigma \quad , \quad p_2^i = \left(\frac{\varepsilon_2}{c} = m_2\,c\,,\vec{p}_2 = 0\right) \quad\Rightarrow\quad p_1\cdot p_2 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{c^2} \quad\Rightarrow\quad inv = v_{rel}\,\sigma\,c^2 \tag{12.4}$$

a dále

$$p_1\cdot p_2 = \frac{m_1\,c}{\sqrt{1-v_{rel}^2/c^2}}\,m_2\,c \quad\Rightarrow\quad \frac{v_{rel}}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{m_1 m_2 c^2}{p_1\cdot p_2}\right)^2} \quad . \tag{12.5}$$

Spojením vztahů (12.1), (12.3) a (12.4) dostáváme

$$d\,w = \frac{d\,\nu}{d\,t} = c\,\sigma\,n_1 n_2\,\frac{c^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sqrt{\left(p_1\cdot p_2\right)^2 - \left(m_1 m_2 c^2\right)^2}\,d\,V \quad . \tag{12.6}$$

Účinný průřez dostaneme tedy z pravděpodobnosti přechodu za jednotku času

$$\sigma = \frac{d\,w}{J\,n_2\,d\,V} \quad , \quad J = c^3\,\frac{\sqrt{\left(p_1\cdot p_2\right)^2 - \left(m_1 m_2 c^2\right)^2}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,n_1 \quad . \tag{12.7}$$

V těžišťové soustavě je $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, takže

$$\left(p_1\cdot p_2\right)^2 - \left(m_1 m_2 c^2\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{c^2} + \vec{p}^{\,2}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_1^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}\right)\left(\frac{\varepsilon_2^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}\right) = \vec{p}^{\,2}\,\frac{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2}{c^2} \tag{12.8}$$

a tedy

$$J = c^2\left|\vec{p}\right|\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)n_1 = \left(v_1 + v_2\right)n_1 \quad , \tag{12.9}$$

v souladu s obvyklou definicí hustoty toku. V laboratorní soustavě pak

$$J=\sqrt{\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)^2-\vec{v}_1\times\vec{v}_2}\ n_1 \quad . \tag{12.10}$$

13 Spinová matice hustoty

Shrneme nejprve vyjádření γ matic a Σ matice ve spinorové a standardní representaci. Matice γ^5 a $\vec{\Sigma}$ jsou definovány jako

$$\gamma^5=-i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3 \quad , \quad \vec{\Sigma}=\gamma^0\,\vec{\gamma}\,\gamma^5 \quad . \tag{13.1}$$

Ve spinorové representaci je

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & -\vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5=\begin{pmatrix}-I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\Sigma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix} \tag{13.2}$$

a ve standardní representaci

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5=\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\Sigma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix} \quad . \tag{13.3}$$

Spinory vyhovují řešitelným (determinant je roven nule) soustavám algebraických rovnic

$$\begin{aligned}&\left(\underline{p}-m\right)u\left(p\right)=0 \quad , \quad \left(\underline{p}+m\right)u\left(-p\right)=0 \quad ,\\ &\bar{u}\left(p\right)\left(\underline{p}-m\right)=0 \quad , \quad \bar{u}\left(-p\right)\left(\underline{p}+m\right)=0 \quad .\end{aligned} \tag{13.4}$$

Normujeme je tak, aby platilo

$$\bar{u}\left(p\right)u\left(p\right)=2m \quad ,\bar{u}\left(-p\right)u\left(-p\right)=-2m \quad . \tag{13.5}$$

Ve standardní representaci máme

$$\begin{gathered}u\left(p\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\,w\left(p\right)\\ \sqrt{\varepsilon-m}\left(\vec{n}\,\vec{\sigma}\right)w\left(p\right)\end{pmatrix} \quad , \quad u\left(-p\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon-m}\left(\vec{n}\,\vec{\sigma}\right)w\left(-p\right)\\ \sqrt{\varepsilon+m}\,w\left(-p\right)\end{pmatrix} \quad ,\\ \vec{n}=\frac{\vec{p}}{\left|\vec{p}\right|} \quad , \quad w^+\left(p\right)w\left(p\right)=w^+\left(-p\right)w\left(-p\right)=1 \quad .\end{gathered} \tag{13.6}$$

Pro relativisticky sdružené výrazy pak

$$\begin{aligned}&\bar{u}\left(p\right)=\left(\sqrt{\varepsilon+m}\,w^+\left(p\right) \quad -\sqrt{\varepsilon-m}\,w^+\left(p\right)\left(\vec{n}\,\vec{\sigma}\right)\right) \quad ,\\ &\bar{u}\left(p\right)=\left(\sqrt{\varepsilon-m}\,w^+\left(p\right)\left(\vec{n}\,\vec{\sigma}\right) \quad -\sqrt{\varepsilon+m}\,w^+\left(p\right)\right) \quad .\end{aligned} \tag{13.7}$$

V těchto výrazech jsou $w\left(p\right)$ a $w\left(-p\right)$ libovolné normované dvoukomponentové veličiny. Uvedené volnosti můžeme užít pro vhodnou volbu vlnové funkce. Možnou volbou je například

$$w(p)^{(\sigma=1/2)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad w(-p)^{(\sigma=1/2)}=-\sigma_y\, w^*(p)^{(\sigma=-1/2)}=\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} \quad ,$$
$$w(p)^{(\sigma=-1/2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad w(-p)^{(\sigma=-1/2)}=-\sigma_y\, w^*(p)^{(\sigma=1/2)}=\begin{pmatrix}0\\-i\end{pmatrix} \quad . \tag{13.8}$$

Platí

$$\sum_\sigma w(p)^{(\sigma)}\, w^+(p)^{(\sigma)}=\sum_\sigma w(-p)^{(\sigma)}\, w^+(-p)^{(\sigma)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad . \tag{13.9}$$

Pro bispinory pak máme

$$\sum_\sigma u(p)^{(\sigma)}\, u^+(p)^{(\sigma)}=\underline{p}+m \quad , \quad \sum_\sigma u(-p)^{(\sigma)}\, u^+(-p)^{(\sigma)}=\underline{p}-m \quad . \tag{13.10}$$

Prvky spinové matice hustoty jsou v čistém stavu triviální výrazy

$$\rho_{AB}(p)=u_A(p)\bar{u}_B(p) \quad . \tag{13.11}$$

Poněkud odlišně oproti běžné matici hustoty zde stopa není rovna 1

$$\mathrm{Tr}\{\rho(p)\}=\sum_A u_A(p)\bar{u}_A(p)=\bar{u}(p)u(p)=2m \quad . \tag{13.12}$$

Ze (13.11) je zřejmé, že matice hustoty v čistém i smíšeném stavu bude splňovat Diracovu rovnici

$$\left(\underline{p}-m\right)\rho(p)=0 \quad , \quad \rho(p)\left(\underline{p}-m\right)=0 \quad . \tag{13.13}$$

V čistém stavu spočteme střední hodnotu spinu podle vztahu

$$\left\langle \hat{\vec{s}}\right\rangle=\frac{1}{2}\int \psi^*\,\vec{\Sigma}\psi\, d^3\vec{r}=\frac{1}{4\varepsilon}u^*(p)\vec{\Sigma}u(p)=\frac{1}{4\varepsilon}\bar{u}(p)\gamma^0\vec{\Sigma}u(p) \tag{13.14}$$

a odpovídající výraz pro stav částečné polarizace je pak

$$\left\langle \hat{\vec{s}}\right\rangle=\frac{1}{4\varepsilon}\sum_A\sum_B \bar{u}_A(p)\left(\gamma^0\,\vec{\Sigma}\right)_{AB}u_B(p)=$$
$$\frac{1}{4\varepsilon}\mathrm{Tr}\left\{\rho(p)\gamma^0\,\vec{\Sigma}\right\}=\frac{1}{4\varepsilon}\mathrm{Tr}\left\{\rho(p)\gamma^5\,\vec{\gamma}\right\} \quad . \tag{13.15}$$

Polarizační vektor v klidové soustavě označme $\vec{\zeta}=2\left\langle \hat{\vec{s}}\right\rangle$, platí tedy pro čistý stav $\left|\vec{\zeta}\right|=1$, pro smíšený stav $\left|\vec{\zeta}\right|<1$. Čtyřvektory impulsu a spinu v klidové soustavě jsou $p^i=\left(m,\vec{0}\right)$ a $a^i=\left(0,\vec{\zeta}\right)$ a v libovolné inerciální souřadné soustavě tedy musí platit

$$p\cdot p=m^2 \quad , \quad a\cdot a=-\zeta^2 \quad , \quad p\cdot a=0 \quad . \tag{13.16}$$

Lorentzova transformace do laboratorní soustavy dává

$$a^0 = \frac{\vec{\zeta}\,\vec{p}}{m} \quad , \quad \vec{a} = \vec{\zeta} + \frac{(\vec{\zeta}\,\vec{p})\vec{p}}{m(\varepsilon + m)} \quad . \tag{13.17}$$

Matice hustoty pro nepolarizovaný svazek bude mít tvar (musí obsahovat pouze impuls jako jedinou charakteristiku a splňovat dané rovnice)

$$\rho_n(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m) \quad . \tag{13.18}$$

Pro obecný smíšený stav bude mít tvar

$$\rho(p) = \frac{1}{4m}(\underline{p} + m)\tilde{\rho}(\underline{a})(\underline{p} + m) \quad , \quad \tilde{\rho}(\underline{a} = 0) = 1 \quad . \tag{13.19}$$

Připomeňme si, že platí $(\underline{p} + m)^2 = 2m(\underline{p} + m)$. Matice $\tilde{\rho}(\underline{a})$ má na čtyřvektoru $\underline{a}$ záviset lineárně. Napišme tedy $\tilde{\rho}(\underline{a}) = 1 - A\gamma^5\,\underline{a}$. Konstantní matici A určíme výpočtem střední hodnoty spinu v klidové soustavě

$$\begin{gathered} \rho(p) = \frac{m}{4}(1 + \gamma^0)\left(1 + A\gamma^5(\vec{\gamma}\vec{\zeta})\right)(1 + \gamma^0) = \frac{m}{2}(1 + \gamma^0)\left(1 + A\gamma^5(\vec{\gamma}\vec{\zeta})\right) \quad , \\ \vec{\zeta} = 2\langle\hat{\vec{s}}\rangle = \frac{1}{2m}\mathrm{Tr}\{\rho(p)\gamma^5\vec{\gamma}\} = -\frac{1}{4}A\,\mathrm{Tr}\{(\vec{\gamma}\vec{\zeta})\vec{\gamma}\} = A\vec{\zeta} \end{gathered} \tag{13.20}$$

a musí být tedy $A = 1$. Protože je $a \cdot p = 0$, $\underline{p}$ antikomutuje s $\underline{a}$ a komutuje s $\gamma^5\,\underline{a}$. Výraz pro spinovou matici hustoty lze přepsat do konečného tvaru

$$\rho(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m)(1 - \gamma^5\,\underline{a}) \quad . \tag{13.21}$$

Vektor spinové polarizace lze naopak z matice hustoty spočítat pomocí vztahu

$$a^i = \frac{1}{2m}\mathrm{Tr}\{\rho(p)\gamma^5\gamma^i\} \quad . \tag{13.22}$$

Obdobně by bylo možné odvodit obecný vztah pro spinovou matici hustoty positronů

$$\rho(-p) = \frac{1}{2}(\underline{p} - m)(1 - \gamma^5\,\underline{a}) \quad . \tag{13.23}$$

14 Spinové středování

Máme-li ve Feynmanově diagramu jen jednu fermionovou čáru (rozptyl na vnějším poli, Comptonův rozptyl, anihilace nebo kreace páru), můžeme použít následujícího způsobu spinového středování (středování přes počáteční spinové stavy a součtu přes koncové spinové stavy pro rozptyl, středování přes spinové stavy elektronu a positronu při anihilaci nebo kreaci). Maticový element M_{fi} je ve zmíněných případech možno zapsat jako

$$M_{fi} = \sum_{A,B} \bar{u}_{fA} Q_{AB} u_{iB} = \bar{u}_f Q u_i \quad . \tag{14.1}$$

Potom máme

$$\begin{aligned} M^*_{fi} &= \left(\sum_{A,B} \bar{u}_{fA} Q_{AB} u_{iB} \right)^* = \sum_{A,B,C} u_{fC} \gamma^{0*}_{CA} Q^*_{AB} u^*_{iB} = \\ &\sum_{A,B,C,D,E} u^*_{iB} \gamma^0_{BD} \gamma^0_{DE} Q^+_{BA} \gamma^0_{AC} u_{fC} = \bar{u}_i \bar{Q} u_f \quad , \end{aligned} \tag{14.2}$$

kde jsme využili vlastností $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, $\gamma^{0+} = \gamma^0$ a označili $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$. Můžeme teď psát

$$\left| M_{fi} \right|^2 = \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i \bar{Q} u_f = \mathrm{Tr}\left\{ u_f \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i \bar{Q} \right\} \quad . \tag{14.3}$$

Takže máme

$$\begin{aligned} &2\,\mathrm{Tr}\left\{ \rho_f(p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \right\} && \text{rozptyl elektronů na vnějším potenciále} \\ &2\,\mathrm{Tr}\left\{ \rho_f(p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \right\} && \text{Comptonův rozptyl} \\ &\mathrm{Tr}\left\{ \rho_f(-p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \right\} && \text{anihilace páru} \\ &\mathrm{Tr}\left\{ \rho_f(p) Q \rho_i(-p) \bar{Q} \right\} && \text{kreace páru} \end{aligned} \tag{14.4}$$