

Drsná matematika

Martin Panák, Jan Slovák a „autorský kolektiv“



Projekt netradiční základní učebnice matematiky pro studenty přírodních věd, informatiky, ekonomie apod., přibližující podstatnou část matematiky v rozsahu čtyř semestrálních přednášek.

Text by měl být dokončen a vydán v roce 2013. Práce na učebnici jsou podpořeny projektem Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203)

Obsah

Kapitola 1. Rozcvička	5
1. Čísla a funkce	5
2. Kombinatorické veličiny	11
3. Diferenční rovnice	15
4. Pravděpodobnost	19
5. Geometrie v rovině	28
6. Relace a zobrazení	42
Kapitola 2. Elementární lineární algebra	71
1. Vektory a matice	71
2. Determinanty	83
3. Vektorové prostory a lineární zobrazení	93
4. Vlastnosti lineárních zobrazení	111
Kapitola 3. Lineární modely a maticový počet	131
1. Lineární procesy	131
2. Diferenční rovnice	138
3. Iterované lineární procesy	146
4. Více maticového počtu	155
5. Rozklady matic a pseudoinverze	176
Kapitola 4. Analytická geometrie	199
1. Afinní a euklideovská geometrie	199
2. Geometrie kvadratických forem	221
3. Projektivní geometrie	229
Kapitola 5. Zřízení ZOO	239
1. Interpolace polynomy	239
2. Reálná čísla a limitní procesy	248
3. Derivace	267
4. Mocninné řady	278
Kapitola 6. Diferenciální a integrální počet	321
1. Derivování	321
2. Integrovaní	338
3. Nekonečné řady	357
Kapitola 7. Spojité modely	381
1. Fourierovy řady	381
2. Metrické prostory	394
3. Integrální operátory	401

Předmluva

Příprava této učebnice byla motivována přednáškami pro inženýrské obory na Masarykově univerzitě, kde je celý program založen na precizním matematickém přístupu.

Chtěli jsme proto rychle, ale zároveň pořádně, pokrýt zhruba tolik matematických metod, jako je obvyklé u větších kurzů v klasických technických oborech opřených o matematické metody. Zároveň jsme ale nechtěli rezignovat na úplný a matematicky korektní výklad. Chtěli jsme vedle sebe vyložit i obtížnější partie matematiky a spoustu elementárních i obtížnějších konkrétních příkladů, jak s uvedenými postupy ve skutečnosti pracovat. Nechtěli jsme přitom za čtenáře řešit, v jakém pořadí a kolik „teorie“ či „praxe“ pročitat.

Z těchto podnětů vznikl dvousloupcový formát s oddělenými teoretickými úvahami a praktickými postupy, který kopíruje i skutečné rozdělení výkladu na přednáškách na „teoretické přednášky“ a „demonstrování cvičení“.

Snažíme se tím vyjít vstříc jak čtenářům, kteří si napřed chtějí procvičit postupy při řešení úloh a teprve pak přemýšlet, proč a jak algoritmy fungují, tak těm druhým, kteří si napřed chtějí dělat jasno o tom proč a jak věci fungují a pak případně zkouší počítat příklady. Zároveň tím snad zbavujeme čtenáře stresu, že by měl přečíst úplně vše. Naopak, měl by mít radost z brouzdání textem a prožitku objevování vlastní cestičky.

Text se přitom v obou svých částech snaží prezentovat standardní výklad matematiky s akcentem na smysl a obsah představovaných matematických metod. Řešené úlohy procvičují základní pojmy, ale zároveň se snažíme dávat co nejlepší příklady užití matematických modelů.

Teoretický text je prezentován dosti kompaktním způsobem, mnoho prostoru je ponecháno pro dořešení podrobností čtenáři. Uváděné příklady se snaží pokrýt celou škálu složitosti, od banálních až po perličky ke skutečnému přemýšlení. Studenti navíc řešili a odevzdávali každý týden zadávané příklady.

Čtenářům bychom rádi pomohli:

- přesně formulovat definice základních pojmů a dokazovat jednoduchá matematická tvrzení,
- vnímat obsah i přibližně formulovaných závislostí, vlastností a výhledů použití matematických nástrojů,
- vstřebat návody na užívání matematických modelů a osvojit si jejich využití.

K těmto ambiciózním cílům nelze dojít lehce a pro většinu lidí to znamená hledat si vlastní cestu s tápáním různými směry (s potřebným překonáváním odporu či nechtě). I proto je celý výklad strukturován tak, aby se pojmy a postupy vždy několikrát vracely s postupně rostoucí složitostí a širší diskuse. Jsme si vědomi, že se tento postup může jevit jako chaotický. Domníváme se ale, že dává mnohem lepší šanci na pochopení u těch, kteří vytrvají.

Vstup do matematiky je skoro pro každého obtížný — pokud už „víme“, nechce se nám přemýšlet, pokud „nevíme“, je to ještě horší. Jediný spolehlivý postup pro orientaci v matematice je hledat porozumnění v mnoha pokusech a to, pokud možno, při četbě v různých zdrojích. Určitě nepovažujeme tento text za dostatečný jediný zdroj pro každého. Doufáme, že může být dobrým začátkem a případně i dlouhodobým pomocníkem, zvláště pro ty, kdo se k jednotlivým částem budou znovu a znovu vracet.

Pro ulehčení vícekolového přístupu ke čtení je text doprovázen emotivně laděnými ikonkami, které snad nejen ožíví obvyklou strohou strukturu matematického textu, ale naznačí čtenáři, kde by složitější text měl být čten pozorněji, ale určitě ne přeskakován, případně kde by bylo možná lépe náročné pasáže přinejmenším napoprvé vůbec nečíst.

Volba jednotlivých ikoněk samozřejmě odráží hlavně pocity autorů. Přesto by postupně mohly být dobrým vodítkem pro čtenáře. Sloupec zaměřený na výklad teorie (užší sloupec) a sloupec zaměřující se na příkadovou část jsou přitom značeny odlišnými sadami ikoněk. Co se týče sloupce teorie používáme ikonky varující před pracností/složitostí/náročností, např.



Další označují ne úplně pohodovou zdlouhavost práce a potřebu trpělivosti či nadhledu, jako jsou tyto



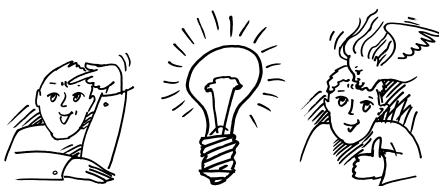
A konečně máme také ikonky vyjadřující pohodu nebo radost ze hry, třeba následující



Co se týče příkladového sloupce, tak používáme ikonky



pro základní příklady, které by čtenář rozhodně měl být schopen zvládnout a pokračovat ve čtení až po jejich vyřešení,



ikonky

pro obtížnější příklady se zajímavým obratem, či praktickou aplikací, ikonka



značí velmi obtížný příklad a konečně ikonka



indikuje, že při řešení příkladu je vhodné použít výpočetní software.

Snažili jsme se sloupce s příklady sepsat tak, aby byly čitelné prakticky víceméně samostatně. Bez ambicí pohrát si s hlubšími důvody, proč uváděné postupy fungují (nebo s prostým cílem „projít s písemkou“), by mělo skoro stačit probírat se jen příklady. Definice pojmů či popisy jejich vlastností používaných při řešení příkladů jsou v teoretickém sloupci zpravidla vyznačeny, aby o ně bylo možno snadno pohledem zavadit. Souvislost řešených příkladů s paralelně studovanou teorií je přitom spíše volná, snažili jsme ale ulehčit přesakování „z teorie do praxe a zpět“ co nejvíce.

Obsahově je celá učebnice ovlivněna představou, že pro praktické využití jsou velmi podstatné metody tzv. diskrétní matematiky, zatímco tzv. spojité modely jsou matematicky dobře uchopitelná přiblížení veskrze diskrétního světa kolem nás. Počítat koneckonců stejně umíme vždy jen s konečně

mnoha racionálními čísly naráz. Bez spojité matematiky si lze ale těžko dobře představit koncepty jako konvergence procesu k limitnímu stavu nebo robustnost výpočtu. Bylo by bez ní také obtížné pracovat s odhady chyb při numerických procesech.

Všechna témata a velmi podstatnou část textu jsme v letech 2005 – 2012 ověřovali při výuce studentů informatiky a později i matematiky na Masarykově univerzitě. Paralelně jsme přitom vytvořili také podklady pro praktické semináře matematického modelování a numerických metod. V nich se studenti věnují skutečnému využití výpočtových nástrojů a modelů.

Závěrem stručně shrneme obsah celé učebnice. Samozřejmě předpokládáme, že si každý čtenář, případně přednášející, vybere témata a jejich pořadí. Pokusíme se proto zároveň vymezit bloky, se kterými lze takto nezávisle zacházet.

Úvodní motivační kapitola se snaží ilustrovat několik přístupů k matematickému popisu problémů. Začínáme nejjednoduššími funkcemi (základní *kombinatorické vzorce*). Pak naznačujeme, jak pracovat se závislostmi zadanými pomocí okamžitých změn (jednoduché *diferenční rovnice*), užití kombinatoriky a množinové algebry diskutujeme prostřednictvím konečné klasické *pravděpodobnosti*. Předvádíme maticový počet pro jednoduché úlohy rovinné geometrie (práce s pojmem *pozice* a *transformace*) a závěrem vše trochu zformalizujeme (*relace, uspořádní, ekvivalence*). Nenechte se zde uvrhnout do chaotického zmatku rychlým střídáním témat — cílem je nashromáždit něco málo netriviálních námětů k přemýšlení a hledání jejich souvislostí i použití, ještě než zabředneme do úrovně problémů a teorií složitějších. Ke všem tématům této úvodní kapitoly se časem vrátíme.

Další dvě kapitoly jsou věnovány základům počtu, který umožňuje práci s vícerozměrnými daty i grafikou. Jde o postupy tzv. *lineární algebry*, které jsou základem a konečným výpočtním nástrojem pro většinu matematických modelů. Nejprve probíráme jednoduché postupy pro práci s *vektory a maticemi*, třetí kapitola je pak věnována aplikacím maticového počtu v různých lineárních modelech (*systémy lineárních rovnic, lineární procesy, lineární diferenční rovnice, Markovovy procesy, lineární regrese*). Čtvrtá kapitola pak ilustruje použití maticového počtu v geometrických úlohách. Dozvíme se něco málo o *afinní, euklidovské a projektivní geometrii*.

V tomto okamžiku přerušíme diskusi diskrétních modelů a přejdeme ke spojitým. Chceme co nejnázorněji ukázat, že základní ideje, jak s funkcemi pracovat, bývají jednoduché. Stručně řečeno, velmi jednoduché úvahy spojené s popisem okamžitých změn sledovaných veličin umožňují dělat závěry pro jejich celkové chování. Složitosti se pojí skoro výhradně se zvládnutím rozumně velké třídy funkcí, pro které mají naše postupy být použitelné.

Začínáme proto kapitolou, kde diskutujeme jaké funkce potřebujeme pro nelineární modely. Po *polynomech a splajnech* postupně diskutujeme pojmy *spojitosti, limity posloupností a funkcí a derivace funkcí*, připomeneme všechny základní *elementární funkce* a závěrem se seznámíme s *mocninými řadami*. Tím je připravena půda pro klasický diferenciální a integrální počet. Ten prezentujeme v kapitole šesté s důrazem na co nejpřímočařejší pochopení souvislostí *limitních procesů, integračních procesů a aproximací*.

Sedmá kapitola se věnuje náznakům aplikací a snaží se co nejvíce připomínat analogie k postupům jednoduché lineární algebry. Místo lineárních zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory tak pracujeme s lineárními operacemi mezi vektorovými prostory funkcí, definovanými buď integrálními nebo diferenciálními operátory.

Zatímco diskusi diferenciální rovnic necháváme na později, zde studujeme nejprve aproximace funkcí s pomocí vzdálenosti definované integrálem (tzv. *Fourierovy řady*). Pak se věnujeme souvislostem s některými integrálními operátory (např. *konvoluce*) a integrálními transformacemi (zejména *Fourierova transformace*). Po cestě si neodpustíme ilustraci obecného principu, že spojité modely jsou zpravidla ideovým podkladem a zároveň dobrou aproximací pro modely diskrétní. Poslouží nám k tomu stručně nahlédnutí na problematiku tzv. *waveletů a diskrétní Fourierovy transformace*.

V osmé kapitole pokračujeme v našem stručném nastínění analytických spojitých metod, tentokrát pro modely s mnoha proměnnými. Nejprve rozšíříme základní postupy a výsledky týkající se derivací na *funkce více proměnných*, včetně *funkcí zadaných implicitně* a tzv. *vázaných extrémů*. Hned poté rozšíříme teorii integrování o tzv. násobné integrály. Poté se věnujeme stručně modelům opřeným o známou změnu našich objektů, tj. *diferenciálním rovnicím* a malinko naznačíme obdobné problémy *variační*. Závěrem této kapitoly se pak stručně věnujeme numerickým přiblížením a odhadům.

Devátá kapitola je věnována popisné statistice, matematické pravděpodobnosti a matematické statistice. Seznámíme se s pojmy *pravděpodobnostní prostor*, *hustota pravděpodobnosti*, *normální rozdělení*, *střední hodnota*, *medián*, *kvantil*, *rozptyl*, *příklady diskrétních a spojitých rozdělení* a budeme se náznakem věnovat *statistickému zpracování dat*, tj. výběrovým statistikám a jejich spolehlivosti.

V další kapitole zamíříme zpět do světa diskrétních metod. Zabýváme se v ní základními pojmy a poznatky teorie grafů a jejich využitím v praktických problémech (např. prohledávání do šířky a hloubky, *minimální pokrývající kostry*, *toky v sítích*, *hry popisované stromy*). Závěrem se budeme zajímat o vytvořující funkce.

Poslední kapitola se zabývá nejprve obecnými algebraickými strukturami s důrazem na elementární poznatky z teorie grup, okruhů polynomů. Zmíníme i něco málo aplikací v kódování. Dále se věnujeme úvodu do teorie čísel a vybrané aplikace, včetně šifrování informace.

POŘÁDNÉ PODĚKOVÁNÍ VŠEM ZÚČASTNĚNÝM, KTEŘÍ NEBUDOU PŘÍMO V AUTORSKÉM KOLEKTIVU, STUDENTŮM APOD.

??, ??, 2013,

kolektiv autorů

Rozcvička

„hodnota, změna, poloha“
– co to je a jak to uchopit?

Cílem první kapitoly je uvést čtenáře do fascinujícího světa matematického myšlení. Vybíráme si k tomu co nejkonkrétnější příklady modelování reálných situací pomocí abstraktních objektů a souvislostí. Zároveň projdeme několik témat a postupů, ke kterým se postupně budeme vracet a v závěru kapitoly se budeme chvíli věnovat samotnému jazyku matematiky (se kterým budeme jinak zacházet spíše intuitivně).

O co jednodušší jsou východiska a objekty, se kterými zde budeme pracovat, o to složitější je pochopit do důsledku jemnosti použitých nástrojů a postupů. Většinou je možné proniknout k podstatě věci teprve v jejich souvislostech. Proto je také představujeme hned z několika pohledů zároveň.

Přecházení od tématu k tématu se možná bude zdát jako zmatečné, ale to se jistě postupně spraví při našich návratech k jednotlivým úvahám a pojmům v pozdějších kapitolách.

Název kapitoly lze chápat i jako nabádání k trpělivosti. I nejjednodušší úlohy a úvahy budou snadné jen pro ty, kteří už podobné řešili. K postupnému poznání a ovládnutí matematického myšlení vede jen pozvolná a spletitá cesta.

Začneme s tím nejjednodušším: obyčejnými čísly.

1. Čísla a funkce

Lidé odjakživa chtějí mít jasno „kolik“ něčeho je, případně „za kolik“ to je, „jak dlouho“ něco trvá apod. Výsledkem takových úvah je většinou nějaké „číslo“. Za číslo přitom považujeme něco, co umíme sčítat a násobit a splňuje to obvyklé zákonitosti, ať už všechny nebo jen některé. Například výsledek sčítání nezávisí na pořadí, v jakém čísla sčítáme, máme k dispozici číslo nula, které přičtením výsledek nezmění, číslo jedna, kterým můžeme násobit, aniž bychom změnili výsledek, apod.

Nejjednodušším příkladem jsou tzv. čísla přirozená, budeme je značit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Všimněme si, že jsme mezi přirozená čísla vzali i nulu, jak je obvyklé zvláště v informatice.

Počítat „jedna, dvě, tři, ...“ se učí děti už ve školce. O něco později se setkáváme s čísly celými $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ a nakonec si zvykneme na

A. Čísla a funkce

S přirozenými, celými, racionálními a reálnými čísly již počítat umíme. Zamysleme se, proč racionální čísla nestačí (byť v počítači s jinými doopravdy počítat neumíme) a připomeneme si tzv. čísla komplexní (protože ani s reálnými čísly si při výpočtech nevystačíme).

1.1. Najděte nějaké reálné číslo, které není racionální.

Řešení. Jedna z mnoha možných odpovědí je $\sqrt{2}$. Již staří Řekové věděli, že předepíšeme-li plochu čtverce $a^2 = 2$, pak nelze najít racionální a , které by předpisu vyhovovalo. Proč?

Víme, že každé přirozené číslo n lze jednoznačným způsobem vyjádřit jako součin $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$, až na pořadí v součinu, kde p_1, \dots, p_k jsou po dvou různá prvočísla.

Pokud by tedy platilo $(p/q)^2 = 2$ pro přirozená čísla p a q , pak tedy $p^2 = 2q^2$. Na levé straně máme v rozkladu na prvočísla 2^r se sudým r (případně $r = 0$), na pravé straně ale bude vždy mocnina dvojky lichá. To je spor s naším tvrzením a tedy předpoklad nemůže platit a žádné racionální číslo nemůže mít za svoji druhou mocninu dvojku. \square

1.2. Najděte řešení rovnice $x^2 = b$ pro libovolné reálné číslo b .

Řešení. Víme, že tato rovnice má vždy řešení x v oboru reálných čísel, pokud je b nezáporné. Jestliže je $b = -1$, pak ale zjevně takové reálné x existovat nemůže. Musíme proto najít větší obor čísel, ve kterém už řešení existovat bude.

K reálným číslům nejprve přidáme nové číslo i , tzv. *imaginární jednotku* a zkusíme dodefinovat sčítání a násobení tak, abychom i nadále zajistili obvyklé chování čísel, jak jsou shrnuty v odstavci 1.1.

Jistě musíme umět nové číslo i násobit reálnými čísly a výsledky sčítat s jakýmikoliv reálnými čísly. Nutně proto musíme v novém číselném oboru *komplexních čísel* \mathbb{C} pracovat s formálními výrazy $z = a + ib$.

Aby byly splněny vlastnosti asociativity a distributivity, zavedeme sčítání tak, že se nezávisle sčítají reálné složky a imaginární složky. Stejně tak chceme násobení tak, jak by se násobily dvojčleny reálných čísel s jediným dodatečným pravidlem $i^2 = -1$, tj.

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad).$$

□

Reálnému číslu a říkáme *reálná složka* komplexního čísla z , reálnému číslu b pak *imaginární složka*, píšeme $\operatorname{re}(z) = a$, $\operatorname{im}(z) = b$.

1.3. Ověřte, že skutečně platí všechny vlastnosti (KG1-4), (O1-4) a (P) skalárů z 1.1.

Řešení. Nulou je číslo $0 + i0$, jedničkou číslo $1 + i0$, které opět píšeme jako 0 a 1 . Všechny vlastnosti se ověří přímočarým výpočtem. □

p1.3

1.4. Komplexní číslo je dáno dvojicí reálných čísel, jde tedy o bod v reálné rovině \mathbb{R}^2 . Ukažte, že vzdálenost komplexního čísla $z = a + ib$ od počátku je dána výrazem $z\bar{z}$, kde \bar{z} *komplexně sdružené číslo* $a - ib$.

Řešení. Součin

$$z\bar{z} = (a^2 + b^2) + i(-ab + ba) = a^2 + b^2$$

je vždy reálné číslo a dává nám skutečně kvadrát vzdálenosti čísla z od počátku 0 . Platí tedy $|z|^2 = z\bar{z}$. □

1.5. Interpretujte násobení imaginární jednotkou a vzetí komplexně sdruženého čísla jako geometrickou transformaci v rovině.

Řešení. Imaginární jednotka i odpovídá bodu $(0, 1)$ a všimněme si, že vynásobením jakéhokoliv čísla $z = a + ib$ imaginární jednotkou dává výsledek

$$i \cdot (a + ib) = -b + ia$$

což je v interpretaci v rovině otočení bodu z o pravý úhel v kladném smyslu, tj. proti směru hodinových ručiček.

Přiřazení komplexně sdruženého čísla je symetrie podle osy reálných čísel:

$$z = (a + ib) \mapsto (a - ib) = \bar{z}.$$

□

desetinná čísla a víme, co znamená 1.19-násobek ceny díky 19% dani z přidané hodnoty.

1.1. Vlastnosti čísel. Abychom mohli s čísly pracovat opravdu, musíme se jejich definicí a vlastnostem věnovat pořádněji. V matematice se těm základním tvrzením o vlastnostech objektů, jejichž platnost předpokládáme, aniž bychom se zabývali jejich dokazováním, říkáme *axiomy*. Vhodná volba axiomů předurčuje jak dosah z nich vycházející teorie, tak její použitelnost v matematických modelech skutečnosti.

Uveďme si teď základní vlastnosti operací sčítání a násobení pro naše počty s čísly, která píšeme jako písmena a, b, c, \dots . Obě tyto operace fungují tak, že vezmeme dvě čísla a, b a aplikací sčítání nebo násobení dostaneme výsledné hodnoty $a + b$ a $a \cdot b$.

VLASTNOSTI SKALÁRŮ

Vlastnosti sčítání:

(KG1) $(a + b) + c = a + (b + c)$, pro všechna a, b, c

(KG2) $a + b = b + a$, pro všechna a, b

(KG3) existuje 0 taková, že pro všechna a platí $a + 0 = a$

(KG4) pro všechna a existuje b takové, že $a + b = 0$

Vlastnostem (KG1) – (KG4) říkáme vlastnosti *komutativní grupy*. Jsou to po řadě *asociativita*, *komutativita*, *existence neutrálního prvku* (říkáme u sčítání také nulového prvku), *existence inverzního prvku* (říkáme u sčítání také opačného prvku k a a značíme ho $-a$).

Vlastnosti násobení:

(O1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pro všechny a, b, c

(O2) $a \cdot b = b \cdot a$, pro všechny a, b

(O3)

existuje prvek 1 takový, že pro všechny a platí $1 \cdot a = a$

(O4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, pro všechny a, b, c .

Vlastnosti (O1)–(O4) se postupně nazývají *asociativita*, *komutativita*, *existence jednotkového prvku* a *distributivita* sčítání vůči násobení.

Množiny s operacemi $+$, \cdot a vlastnostmi (KG1)–(KG4), (O1)–(O4) se nazývají *komutativní okruhy*.

Další vlastnosti násobení:

(P) pro každé $a \neq 0$ existuje b takové, že $a \cdot b = 1$.

(OI) je-li $a \cdot b = 0$, potom buď $a = 0$ nebo $b = 0$.

Vlastnost (P) se nazývá *existence inverzního prvku* vzhledem k násobení (tento prvek se pak značí a^{-1}) a vlastnost (OI) říká, že neexistují „dělitelé nuly“.



Vlastnosti těchto operací sčítání a násobení budeme soustavně využívat, aniž bychom museli přesně vědět, s jakými objekty skutečně pracujeme. Tak se dostaneme k obecným matematickým nástrojům, je však vždy dobré mít představu o typických příkladech.

Celá čísla \mathbb{Z} jsou dobrým příkladem komutativní grupy, přirozená čísla nikoliv, protože nesplňují (KG4) (a případně neobsahují neutrální prvek, pokud někdo nulu do \mathbb{N} nezahrnuje).

Když komutativní okruh navíc splňuje i vlastnost (P), hovoříme o *poli* (často také o *komutativním tělese*).

Poslední uvedená vlastnost (OI) je automaticky splněna, pokud platí (P). Opačně to ovšem neplatí a tak říkáme, že vlastnost (OI) je slabší než (P). Např. okruh celých čísel \mathbb{Z} nesplňuje (P), ale splňuje (OI). Hovoříme v takovém případě o *oboru integrity*.

Všimněme si, že množina všech nenulových prvků v poli společně s operací násobení splňuje (O1), (O2), (O3), (P), a je proto také komutativní grupa. Jen se místo sčítání mluví o násobení. Jako příklad můžeme vzít všechna nenulová reálná čísla.

Prvky nějaké množiny s operacemi $+$ a \cdot splňujícími (ne nutně všechny) výše uvedené vlastnosti (tj. komutativní okruh, obor integrity, pole) budeme nazývat *skaláry*. Budeme pro ně vesměs užívat malá latinská písmena ze začátku nebo konce abecedy.

Všechny vlastnosti (KG1)–(KG4), (O1)–(O4), (P), (OI) z našich úvah je třeba brát jako *axiomatickou definici* příslušných matematických pojmů. Pro naše potřeby bude stačit si průběžně uvědomovat, že při dalších diskusích budeme důsledně používat pouze tyto vlastnosti skalárů a že i naše výsledky proto budou platné pro všechny objekty s těmito vlastnostmi.

V tomto je pravá síla matematických teorií – nejsou platné jen pro konkrétní řešený příklad. Naopak, při rozumné výstavbě mají vždy univerzální použití. Budeme se snažit tento aspekt zdůrazňovat, přestože naše ambice mohou být v rámci daného rozsahu učebnice jen velice skromné.

1.1a

1.2. Existence skalárů. K tomu, aby ale skutečně bylo možné budovat matematickou teorii, je třeba ověřit, že takové objekty mohou existovat. Pro pořádek si proto budeme postupně ukazovat, jak je možné zkonstruovat základní číselné obory. Pro konstrukci přirozených čísel začneme s předpokladem, že víme, co jsou to množiny.

Prázdou množinu si označíme \emptyset a definujeme

$$(1.1) \quad 0 := \emptyset, \quad n + 1 := n \cup \{n\},$$

neboli

$$0 := \emptyset, \quad 1 := \{\emptyset\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \dots, \quad n + 1 := \{0, 1, \dots, n\}.$$

1.6. Využijte k popisu komplexních čísel úhel průvodiče a vzdálenost od počátku (tzv. *gonimetrický tvar*).

Řešení. Komplexní čísla tvaru $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, kde φ je reálný parametr udávající úhel mezi reálnou přímkou a spojnicí z s počátkem (měřený v kladném smyslu), popisují právě všechny body na jednotkové kružnici v komplexní rovině. Každé nenulové číslo z pak lze právě jedním způsobem napsat jako

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

□

1.7. Napište součin dvou komplexních čísel pomocí goniometrických tvarů (tzv. Moivreova věta).

Řešení. Hledaný vztah

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

kde φ_i jsou argumenty čísel z_i , vyplývá z vzorců pro sinus a kosinus součtu argumentů. □

1.8. Vyjádřete číslo $z_1 = 2 + 3i$ v goniometrickém tvaru a naopak číslo $z_2 = 3(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$ v algebraickém tvaru.

Řešení. Absolutní hodnota daného čísla (vzdálenost bodu s kartézskými souřadnicemi $[2, 3]$ v rovině od počátku souřadnic) je $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Z pravoúhlého trojúhelníka v obrázku pak snadno spočteme $\sin(\varphi) = 3/\sqrt{13}$, $\cos(\varphi) = 2/\sqrt{13}$. Je tedy $\varphi = \arcsin(3/\sqrt{13}) = \arccos(2/\sqrt{13}) \doteq 53,3^\circ$. Celkem

$$z_1 = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} + i \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \right) = \sqrt{13} \left[\cos \left(\arccos \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right) \right) + i \sin \left(\arcsin \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right) \right) \right].$$

Převod komplexního čísla z goniometrického do algebraického je ještě jednodušší:

$$z_2 = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} + i \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

□

1.9. Číslo $(5\sqrt{3} + 5i)^{12}$ zapište v co nejjednodušším tvaru.

Řešení. Úpravy jako postupné umocňování nebo rozvoj podle binomické věty jsou v tomto případě časově náročné. Při vyjádření

$$5\sqrt{3} + 5i = 10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 10 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

užitím Moivreovy věty však snadno obdržíme

$$(5\sqrt{3} + 5i)^{12} = 10^{12} \left(\cos \frac{12\pi}{6} + i \sin \frac{12\pi}{6} \right) = 10^{12}.$$

□

1.10. Vyjádřete $z = \cos 0 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ v goniometrickém tvaru.

Řešení. Abychom mohli vyjádřit

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

nejprve určíme

$$|z| = \sqrt{(\cos 0 + \cos \frac{\pi}{3})^2 + \sin^2 \frac{\pi}{3}} = \sqrt{(1 + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{3}.$$

Zapíšeme-li

$$z = \sqrt{3} \left(\frac{\cos 0 + \cos \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} + i \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} + i \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right),$$

vidíme, že pro argument φ má platit

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2},$$

což již dává $\varphi = \pi/6$. Celkem jsme tak získali

$$z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

1.11. Pomocí Moivreovy věty vypočítejte

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{31}.$$

Řešení. Ihned dostáváme

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{31} = \cos \frac{31\pi}{6} + i \sin \frac{31\pi}{6} = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}.$$

1.12. Stanovte

$$\left| \frac{(2+3i)(1+i\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}} \right|.$$

Řešení. Neboť absolutní hodnota součinu (podílu) dvou libovolných komplexních čísel je součin (podíl) jejich absolutních hodnot a každé komplexní číslo má stejnou absolutní hodnotu jako číslo s ním komplexně sdružené, platí

$$\left| \frac{(2+3i)(1+i\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}} \right| = |2+3i| \cdot \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right| = |2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}.$$

1.13. Uvedte vzdálenost d čísel z, \bar{z} v komplexní rovině, je-li

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2}.$$

Tímto zápisem říkáme, že pokud už máme definovaná všechna čísla $0, 1, 2, \dots, n$, pak číslo $n+1$ definujeme jako množinu všech předchozích čísel.

Přirozená čísla takto ztotožňujeme s počty prvků konkrétních množin. Číslo n je množina, která má n prvků a dvě přirozená čísla a, b jsou stejná, právě když příslušné množiny mají stejně prvků. V teorii množin se místo slovního spojení „počet prvků množiny“ používá pojem „mohutnost množiny“. Tento pojem má smysl (narozdíl od toho předchozího) i pro nekonečné množiny.

Na první pohled je také vidět obvyklá definice uspořádání přirozených čísel podle velikosti (o číslu a řekneme, že je ostře menší než b tehdy a jen tehdy, když $a \neq b$ a $a \subset b$ jako množina). Dalším formálním krokem by měla být definice sčítání a násobení a důkaz všech základních vlastností přirozených čísel, včetně výše uvedených axiomů komutativního okruhu. Snadno lze např. ukázat, že každá podmnožina v \mathbb{N} má nejmenší prvek a spoustu dalších vlastností o kterých zpravidla už dávno nepřemýšlíme a máme je za samozřejmé.

Nebudeme se tu konstrukcí číselných oborů zabývat podrobně a předpokládáme, že čtenář čísla racionální (\mathbb{Q}), reálná (\mathbb{R}) a komplexní (\mathbb{C}) důvěrně zná. Občas budeme jen připomínat teoretické i praktické souvislosti při dalším výkladu. Podrobně bude konstrukce racionálních čísel z přirozených diskutována v 1.40. Konstrukci reálných čísel bude vhodné zmínit při studiu limitních procesů později a již dříve budeme z různých algebraických pohledů zkoumat čísla komplexní. Obrázek naznačuje, jak je možné vnímat číselné obory jako vnořené jeden do druhého (tj. komplexní rovina obsahuje mnohokrát vložená přirozená nebo celá čísla, reálnou přímkou atd.).

Řešení. Není obtížné si uvědomit, že komplexně sdružená čísla jsou souměrně sdružená podle osy x a že vzdálenost komplexního čísla od osy x je rovna absolutní hodnotě jeho imaginární části. To již dává $d = 3$. \square

1.14. Vyjádřete $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, \bar{z}_1 , $|z_2|$, $\frac{z_1}{z_2}$, pro

i) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 4i - 3$

ii) $z_1 = 2$, $z_2 = i$

1.15. Komplexní čísla nejsou pouze nástrojem, abychom získali „divná“ řešení kvadratických rovnic, ale jsou potřeba i k tomu, abychom určili reálná řešení kubických rovnic. Jak vyjádřit řešení kubické rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

pomocí reálných koeficientů a , b , c ? Ukažme si metodu, na kterou přišli v šestnáctém století pánové Ferro, Cardano, Tartaglia a možná další. Zavedme substituci $x := t - a/3$ (abychom odstranili kvadratický člen v rovnici), dostaneme rovnici:

$$t^3 + pt + q = 0,$$

kde $p = b - a^2/3$ a $q = c + (2a^3 - 9ab)/27$. Nyní zavedme neznámé u , v splňující podmínky $u + v = t$ a $3uv + p = 0$. Dosazením první podmínky do původní rovnice dostáváme

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

dosazením druhé pak

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

což je kvadratická rovnice v neznámé $s = u^3$. Máme tedy

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

Celkem pak zpětným dosazením

$$x = -p/3u + u - a/3. \text{ [Cardan]}$$

Ve výrazu pro u je se vyskytuje třetí odmocnina a abychom dostali všechna tři řešení, je nutno pracovat i s komplexními odmocninami. Rovnice $x^3 = a$, $a \neq 0$, s neznámou x má totiž právě tři řešení v oboru komplexních čísel (Základní věta algebry, viz (??)). Všechna tato řešení nazýváme třetí odmocninou z čísla a . Je tedy výraz $\sqrt[3]{a}$ v komplexním oboru trojznačný. Pokud se chce přisoudit výrazu $\sqrt[3]{a}$ jednoznačný význam, tak se za třetí odmocninu uvažuje řešení s nejmenším argumentem.

Navíc, jak je v matematice obvyklé, budeme místo s čísly manipulovat s písmeny abecedy, případně jinými znaky, ať už jejich hodnota je nebo není předem známá.

1.2

1.3. Skalární funkce. Často pracujeme s číselnou hodnotou, která není dána jako konkrétní číslo. Místo toho něco víme o závislosti naší hodnoty na hodnotách jiných. Formálně píšeme, že hodnota $y = f(x)$ naší „závislé“ proměnné veličiny y je dána „nezávislou“ veličinou x . Přitom můžeme znalost f brát formálně (prostě je to nějaká, blíže nespecifikovaná, závislost) nebo operačně, tj. $f(x)$ je dáno vzorcem poskládaným z (prozatím si představme konečně mnoha) známých operací. Pokud je hodnotou skalár, hovoříme o *skalární funkci*. Každá funkce je definována na nějaké množině, mluvíme o *definičním oboru funkce*, a množina všech hodnot je pak tzv. *obor hodnot funkce*.

Také mohou být ale hodnoty funkce f dány pouze přibližně nebo s jistou pravděpodobností.

Navíc ještě dodejme, že při popsaném postupu se mohlo vyskytnout dělení nulou. V tom případě je nutno použít jiného (většinou snadnějšího) postupu.

1.16. Řešte rovnici

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Řešení. Jak snadno zjistíme, tak rovnice nemá racionální kořeny (metody na určování racionálních kořenů si objasníme v části (??)). Dosazením do získaných vztahů získáme $p = b - a^2/3 = -7/3$, $q = -7/27$, pro u pak dostáváme

$$u = \frac{\sqrt[3]{28 \pm 12\sqrt{-147}}}{6},$$

kde můžeme teoreticky volit až šest možností pro u (dvě volby znaménka plus či mínus a k tomu tři nezávislé volby třetí odmocniny). Jak však snadno nahlédneme, dostáváme pro x pouze tři různé hodnoty. Dosazením do (1.15) pak jeden z kořenů má tvar

$$\frac{14}{\sqrt[3]{3(28 - 84i\sqrt{3})}} + \frac{\sqrt[3]{28 - 84i\sqrt{3}}}{6} - \frac{1}{3} \doteq 1, 247, \quad \boxed{1.3}$$

obdobně pro ostatní dva kořeny (přibližně $-0, 445$ a $-1, 802$). Jak jsme předeslali, vidíme, že i když se ve vzorcích pro kořeny vyskytují komplexní čísla, tak výsledek je reálný. \square

Závěrem uvedme ještě jeden příklad ukazující, že „divné“ skaláry se chovají divně:

1.17. Nenulový mnohočlen s nulovými hodnotami. Najděte nenulový mnohočlen jedné neznámé s koeficienty v \mathbb{Z}_7 , tj. výraz typu $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}_7$, $a_n \neq 0$, takový, že na množině \mathbb{Z}_7 nabývá pouze nulových hodnot (tj. dosadíme-li za x libovolný z prvků \mathbb{Z}_7 a výraz v \mathbb{Z}_7 vyčíslíme, dostaneme vždy nulu).

Řešení. Při konstrukci tohoto mnohočlenu se opřeme o Malou Fermatovu větu, která říká, že pro libovolné prvočíslo p a číslo a s ním nesoudělné platí:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Hledaný polynom je tedy například polynom $x^7 - x$ (polynom $x^6 - 1$ by neměl nulovou hodnotu v čísle 0). \square

B. Kombinatorika

V této kapitole si budeme hrát s přirozenými čísly, která budou popisovat různé nedělitelné předměty nacházející se v našem životním prostoru a budeme se zabývat tím, jak spočítat počet jejich uspořádání,

Smyslem matematických úvah pak bývá z neformálního popisu závislostí najít explicitní vzorce pro funkce, které je popisují, nebo aspoň explicitní vyjádření pro konkrétní hodnoty závislých proměnných, případně jejich přiblížení. Podle typu úlohy a cíle pracujeme:

- s přesným a konečným výrazem
- s nekonečným výrazem
- s přiblížením neznámé funkce známým odhadem (většinou s vyčíslenou možnou chybou)
- s odhadem hodnot s vyčíslením jejich pravděpodobnosti apod.

Skalární funkcí je např. roční mzda pracovníka nějaké firmy (hodnoty nezávislé veličiny, tj. definiční obor funkce, jsou jednotliví pracovníci x z množiny všech sledovaných pracovníků, $f(x)$ je jejich roční mzda za dané období). Stejně tak můžeme sledovat měsíční mzdu konkrétního pracovníka v čase (nezávislou hodnotou je čas v měsících, závislou příjem v jednom každém měsíci). Jiným příkladem je třeba plocha obrazce v rovině, objem tělesa v prostoru, rychlost konkrétního auta v čase atd. Dovedeme si jistě představit, že ve všech uvedených případech může být hodnota dána nějakou volně popsanou souvislostí nebo naměřena přibližně nebo odhadnuta atd.

1.4. Operačně definované funkce. Funkce můžeme mít

dány výčtem jejich hodnot – např. ve firmě je jen konečně mnoho zaměstnanců a umíme sestavit tabulku s jejich aktuálními měsíčními platy. Častěji ale máme místo hodnot pravidla, jak k hodnotám dojít.

FUNKCE FAKTORIÁL
Důležitou skalární funkcí na přirozených číslech je *faktoriál*, který definujeme vztahy

$$f(0) = 1, \quad f(n) = n \cdot f(n-1)$$

pro $n = 1, 2, \dots$. Píšeme $f(n) = n!$ a definice zjevně znamená

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1.$$

Naše definice funkce faktoriál říká, jak se změní hodnota $f(n)$, když změníme hodnotu n o jedničku. Vzorec pro $n!$ již explicitně říká, kolik to je doopravdy. V tomto případě to není příliš efektivní vzorec, protože se jeho složitost zvětšuje s rostoucím n , lepší ale těžko hledat.

Podívejme se ještě na obvyklé sčítání přirozených čísel jako na operačně definovanou skalární funkci. Definičním oborem je množina všech dvojic (a, b) přirozených čísel. Definujeme $a + b$ jako výsledek procedury, ve které k a několikrát po sobě přičítáme 1. Tak jsme vlastně obecně $a + 1$ definovali v rovnicích (1.1). Při každém přičtení odebereme z b největší prvek a postupujeme tak, dokud není b prázdná (tj. b se postupně zmenšuje o jedničku a v každém kroku nám říká, kolik ještě zbývá přičíst).

Je evidentní, že takto definované sčítání sice je dáno (iterativním) vzorcem, postup ale není vhodný pro praktické počítání. Tak tomu bude v našem výkladu často – teoreticky korektní definice pojmu či operace neznamená, že úkony s nimi spojené jsou efektivně vykonatelné. Právě k tomu budeme postupně rozvíjet celé teorie, abychom praktické nástroje získávali. Co se týče přirozených čísel, od školky je umíme sčítat z paměti a rychle (pokud jsou malá), pro větší známe ze základní školy algoritmus písemného sčítání a s velkými si poradí počítače (pokud nejsou příliš velká).

2. Kombinatorické veličiny



Typickým „kombinatorickým“ problémem je napočítat, kolika různými způsoby se může něco stát. Např. kolika způsoby lze vybrat v samoobsluze dva různé sendviče z dané nabídky? Myslíme si přitom, že jsou všechny sendviče v regálu po dvou různé nebo rozlišujeme jen různé typy sendvičů? Připouštíme pak, že si také můžeme vzít dva stejné? Nepřeberně takových otázek máme u karetých a jiných her.

Při řešení konkrétních problémů většinou používáme buď tzv. „pravidlo součinu“, když v navzájem nezávislých úkonech kombinujeme každý výsledek s každým, nebo „pravidlo součtu“, když sčítáme počty pro různé neslučitelné možnosti. Prakticky to uvidíme v mnoha příkladech.

1. 4

1.5. Permutace. Jestliže z množiny n předmětů vytváříme nějaké pořadí jejich prvků, máme pro volbu prvního prvku n možností, další je volen z $n - 1$ možností atd., až nám nakonec zůstane jediný poslední prvek. Zjevně tedy je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Procesu uspořádávání prvků množiny S říkáme *permutace* prvků množiny S . Výsledkem permutace je pak vždy nějaké pořadí prvků. Jestliže si předem prvky v S očíslováme, tj. ztotožníme si S s množinou $S = \{1, \dots, n\}$ přirozených čísel, pak permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n . Máme tedy příklad jednoduché matematické věty a naši předchozí diskusi je možné považovat za její důkaz:

POČET PERMUTACÍ

Tvrzení. Počet $p(n)$ různých pořadí na konečné množině s n prvků je dán známou funkcí faktoriál:

e1. 1a

$$(1.2) \quad p(n) = n!$$

1. 4a

1.6. Kombinace a variace. Dalším jednoduchým příkladem hodnoty určené vzorcem jsou tzv. *kombinační čísla*, která vyjadřují, kolika způsoby lze vybrat k různých rozlišitelných předmětů z množiny n předmětů. Zjevně máme



$$n(n-1) \cdots (n-k+1)$$

možných výsledků postupného výběru našich k prvků, přitom ale stejnou výslednou k -tici dostaneme v $k!$ různých

přeuspořádání, výběrů a tak podobně. Ve velké většině takovýchto problémů lze vystačit se „selským rozumem“. Stačí vhodně používat pravidel *součtu* a *součinu*, která si ukážeme na následujících příkladech:

1.18. Maminka chce Jeníkovi a Mařence rozdělit pět hrušek a šest jablek. Kolika způsoby to může udělat? (Hrušky mezi sebou považujeme za nerozlišitelné, stejně tak jablka. Připouštíme, že některé z dětí nic nedostane.)

Řešení. Pět hrušek samostatně může maminka rozdělit šesti způsoby. (Rozdělení je určeno tím, kolik hrušek dá Jeníkovi, zbytek případně Mařence.) Šest jablek pak nezávisle sedmi způsoby. Podle pravidla součinu pak obě ovoce současně může rozdělit $6 \cdot 7 = 42$ způsoby. □

1.19. Určete počet čtyřciferných čísel, která začínají cifrou 1 a nekončí cifrou 2, nebo končí cifrou 2 a nezačínají cifrou 1.

Řešení. Množina uvažovaných čísel je složená ze dvou disjunktních množin, totiž čísel, která začínají cifrou 1 a nekončí cifrou 2 (první množina) a čísel, která nezačínají cifrou 1 a končí cifrou 2. Celkový počet popsanych čísel dostaneme podle pravidla součtu tak, že sečteme počty čísel v těchto dvou množinách. V první z těchto množin máme čísla tvaru „1XXY“, kde X je libovolná cifra a Y je libovolná číslice mimo dvojky. Můžeme tedy provést deset voleb druhé cifry, nezávisle na tom můžeme provést deset voleb třetí cifry a opět nezávisle devět voleb poslední cifry. Tyto tři nezávislé volby jednoznačně určují dané číslo a podle pravidla součinu máme tedy $10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$ takových čísel. Obdobně ve druhé skupině máme $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$ čísel (na první cifru máme pouze osm možností, neboť číslo nemůže začínat nulou a jedničku máme zakázáno). Celkem podle pravidla součtu je $900 + 800 = 1700$ uvažovaných čísel. □

1.20. Určete počet způsobů, jak lze na šachovnici (8×8 polí) postavit bílou a černou věž tak, aby se neohrožovaly (nebyly ve stejném řádku ani sloupci).

Řešení. Nejprve umístíme např. bílou věž. Pro ni máme na výběr z 8^2 polí. Ve druhém kroku umístíme věž černou. Nyní máme „ k dispozici“ 7^2 polí. Podle pravidla součinu je výsledek $8^2 \cdot 7^2 = 3136$. □

V následujících příkladech už budeme při řešení používat pojmů kombinace, permutace, variace (případně s opakováním), které jsme definovali.

1.21. Během schůze má vystoupit 8 řečníků. Stanovte počet všech pořadí, v nichž dva předem určené řečníci nevystupují ihned po sobě.

Řešení. Označme si zmíněné dva řečníky jako osoby A a B . Pokud hned po vystoupení osoby A následuje vystoupení osoby B , můžeme na to nahlížet jako na projev jediného řečníka. Počet všech pořadí, v nichž vystupuje B ihned po A , je tedy roven počtu všech permutací ze sedmi prvků. Stejný je pochopitelně také počet všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po B . Neboť počet všech možných pořadí 8 řečníků je $8!$, číslo $8! - 2 \cdot 7!$ udává hledaný počet pořadí. \square

1.22. Kolik existuje přesmyček slova PROBLÉM takových, že v nich

- písmena B a R stojí vedle sebe,
- písmena B a R nestojí vedle sebe.

Řešení. a) Dvojici písmen B a R můžeme považovat za jedno nedělitelné dvojpísmeno. Celkem tedy máme k dispozici šest různých písmen a šestipísmenných slov složených z různých písmen je $6!$. V našem případě však tento počet musíme ještě vynásobit dvěma, neboť naše dvojpísmeno může být jak BR tak RB. Celkem dostáváme $2 \cdot 6!$ různých přesmyček.

b) $7! - 2 \cdot 6!$ (doplňek části a) do počtu všech sedmipísmenných slov složených z různých písmen. \square

1.23. Kolika způsoby může sportovec umístit 10 různých pohárů do 5 polic, jestliže se na každou polici vejde všech 10 pohárů?

Řešení. K pohárům přidáme 4 navzájem nerozlišitelné předměty tužky. Počet všech různých pořadí pohárů a tužek je zřejmě $14!/4!$ (tužky jsou nerozlišitelné). Každé umístění pohárů do polic ovšem odpovídá právě jednomu seřazení pohárů a tužek. Stačí třeba říci, že poháry před první tužkou v pořadí dáme do první police (při zachování pořadí), poháry před druhou tužkou do druhé police atd. To znamená, že číslo $14!/4!$ je výsledkem. \square

1.24. Určete počet čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou různých ných cifer.

Řešení. Dvě různé cifry použité na zápis můžeme vybrat $\binom{10}{2}$ způsoby, ze dvou vybraných cifer můžeme sestavit $2^4 - 2$ různých čtyřciferných čísel (dvojku odečítáme za dvě čísla složená pouze z jedné cifry). Celkem máme $\binom{10}{2}(2^4 - 2) = 630$ čísel. Nyní jsme ale započítali i čísla začínající nulou. Těch je $\binom{9}{1}(2^3 - 1) = 63$. Celkově dostáváme $630 - 63 = 567$ čísel. \square

1.25. Určete počet sudých čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou různých cifer.

Řešení. Obdobně jako v předchozím příkladu se nejprve nebudeme ohlížet na cifru nula. Dostaneme tak $\binom{5}{2}(2^4 - 2) + 5 \cdot 5(2^3 - 1)$ čísel (nejprve počítáme čísla pouze ze sudých cifer, druhý sčítanec udává

pořadích. Pokud nám záleží i na pořadí vybrané k -tice prvků, hovoříme o *variaci k -tého stupně*.

Jak jsme si právě ověřili, počet kombinací a variací udávají následující vzorce, které také nejsou pro výpočet moc efektivní při velkých k a n , protože obsahují výrazy pro faktoriály.

KOMBINACE A VARIACE

Tvrzení. Pro počet $c(n, k)$ kombinací k -tého stupně z n prvků, kde $0 \leq k \leq n$, platí

(1.3)

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pro počet $v(n, k)$ variací platí

$$(1.4) \quad v(n, k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ čteme „ n nad k “ a nazýváme ho také někdy *binomickým číslem*. Tento název čísla dostala od tzv. *binomického rozvoje*, tj. roznásobení n -té mocniny dvojčlenu. Počítáme-li totiž $(a+b)^n$, bude koeficient u mocniny $a^k b^{n-k}$ pro každé $0 \leq k \leq n$ roven právě počtu možností, jak vybrat k -tici z n závorek v součinu (ty, kde bereme do výsledku a). Platí proto

$$(1.5) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

a všimněme si, že pro odvození jsme potřebovali pouze distributivitu, komutativitu a asociativitu násobení a sčítání. Formule (1.5) proto platí v každém komutativním okruhu.

Jako další jednoduchou ukázkou, jak vypadá matematický důkaz si odvodíme několik jednoduchých tvrzení o kombinačních číslech. Pro zjednodušení formulací definujme $\binom{n}{k} = 0$, kdykoliv je buď $k < 0$ nebo $k > n$.

1.7. Tvrzení. Pro všechna přirozená čísla k a n platí

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

DŮKAZ. První tvrzení je zjevné přímo z formule (1.3). Jestliže vyčíslíme pravou stranu z tvrzení (2), dostáváme

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

což je ale levá strana tohoto tvrzení.



Tvrzení (3) dokážeme tzv. *matematickou indukcí*. Tento typ důkazu je vhodný právě pro tvrzení, která říkají, že něco má platit pro všechna přirozená čísla n . Matematická indukce se skládá ze dvou kroků. V prvním se tvrzení dokáže pro $n = 0$ (popřípadě $n = 1$ nebo další hodnoty n). V druhém, tzv. indukčním, kroku předpokládáme, že tvrzení platí pro nějaké n (a všechny předešlé hodnoty), a za pomoci tohoto předpokladu dokážeme, že tvrzení platí i pro $n + 1$. Dohromady z toho pak vyvodíme, že tvrzení platí pro všechna přirozená n .

Tvrzení (3) zjevně platí pro $n = 0$, protože $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$. (Stejně tak je přímo vidět i pro $n = 1$.) Předpokládejme, že platí pro nějaké n a spočítáme příslušnou sumu pro $n + 1$ s využitím tvrzení (2) i (3). Dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \\ &= \sum_{k=-1}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že vzorec (3) udává počet všech podmnožin n -prvkové množiny, neboť $\binom{n}{k}$ je počet všech jejích k -prvkových podmnožin. Všimněme si také, že tvrzení (3) plyne přímo z (1.5) volbou $a = b = 1$.

Tvrzení (4) dokážeme opět matematickou indukcí, podobně jako (3). Zjevně platí pro $n = 0$, čímž je hotov první krok. Indukční předpoklad říká, že (4) platí pro nějaké n . Spočítáme nyní příslušnou sumu pro $n + 1$ s využitím tvrzení (2) a indukčního předpokladu. Dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} k \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \\ &= \sum_{k=-1}^n (k+1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \\ &= 2^n + n2^{n-1} + n2^{n-1} = (n+1)2^n. \end{aligned}$$

Tím je proveden indukční krok, a tvrzení je dokázáno pro všechna přirozená n . \square

Druhá vlastnost z našeho tvrzení umožňuje sestavit všechna kombinační čísla do tzv. *Pascalova trojúhelníku*, kde každé číslo obdržíme jako součet dvou bezprostředně nad ním ležících sousedů:

$$\begin{array}{rcccccc} n = 0 : & & & & & & 1 \\ n = 1 : & & & & & & 1 & 1 \\ n = 2 : & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ n = 3 : & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ n = 4 : & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ n = 5 : & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

počet sudých čtyřciferných čísel složených ze sudé a liché cifry). Opět musíme odečíst čísla začínající nulou, těch je $(2^3 - 1)4 + (2^2 - 1)5$. Hledaný počet cifer tak je

$$\binom{5}{2}(2^4 - 2) + 5 \cdot 5(2^3 - 1) - (2^3 - 1)4 - (2^2 - 1)5 = 272.$$

\square

1.26. Na koncertě je 730 lidí. Mají někteří z nich stejné iniciály? (Neuvažujeme háčky ani čárky)

Řešení. Písmen v abecedě (včetně CH) je 27. Počet všech možných iniciálů je tedy $27^2 = 729$. Proto aspoň 2 lidé budou mít stejné iniciály. \square

1.27. Noví hráči se sejdou v jednom volejbalovém týmu (6 lidí). Kolikrát si při seznamování (každý s každým) podají ruce? Kolikrát si hráči podají ruce se soupeřem po odehrání zápasu?

Řešení. Seznamuje se každá dvojice z šesti hráčů. Počet podání rukou je teda roven kombinaci $C(2, 6) = \binom{6}{2} = 15$. Po zápase si každý z šesti hráčů podá ruku šestkrát (s každým z šesti soupeřů). Počet je teda dohromady $6^2 = 36$. \square

1.28. Jak se může rozesadit pět osob v pětimístném autě, když jen dva z nich mají řidičský průkaz? Jak se může rozesadit 20 cestujících a dva řidiči v 25-místném minibusu?

Řešení. Na místě řidiče máme dvě možnosti a na zbylých místech už je pořadí libovolné, tzn. pro spolujezdce 4 možnosti, pro další místo 3, pak 2 a 1. Celkově $2 \cdot 4! = 48$ možností. Podobně v minibusu máme dvě možnosti na místě řidiče a druhý řidič plus cestující mohou na zbylých 24 místech sedět libovolně. Nejprve vybereme místa, která budou obsazena, tj. $\binom{24}{2}$ a na těchto místech může být 21! různých pořadí. Dohromady máme $2 \cdot \binom{24}{2} 21! = \frac{24!}{3}$ možností. \square

1.29. Kolika způsoby lze do tří různých obálek rozmístit pět shodných stokorun a pět shodných tisícikorun tak, aby žádná nezůstala prázdná?

Řešení. Nejdříve zjistíme všechna rozmístění bez podmínky neprázdnosti. Těch je podle pravidla součinu (rozmísťujeme nezávisle stokoruny a tisícikoruny) $C(3, 5)^2 = \binom{7}{2}^2$. Odečteme postupně rozmístění, kdy je právě jedna obálka prázdná, a poté kdy jsou dvě obálky prázdné. Celkem $C(3, 5)^2 - 3(C(2, 5)^2 - 2) - 3 = \binom{7}{2}^2 - 3(6^2 - 2) - 3 = 336$. \square

1.30. Určete počet různých vět, které vzniknou přesmyčkami v jednotlivých slovech věty „Skokan na koks“ (vzniklé věty ani slova nemusejí dávat smysl).

Řešení. Určíme nejprve počty přesmyček jednotlivých slov. Ze slova „skokan“ dostaneme $6!/2$ různých přesmyček (permutace s opakovaním $P(1, 1, 1, 1, 2)$), obdobně ze slova „na“ dvě a ze slova „koks“ $4!/2$. Celkem podle pravidla součinu $6!4!/4 = 4320$. \square

1.31. Kolik existuje různých přesmyček slova „krakatit“ takových, že mezi písmeny „k“ je právě jedno jiné písmeno.

Řešení. V uvažovaných přesmyčkách je šest možností, jak umístit skupinu dvou „k“. Fixujeme-li pevně místa pro dvě písmena „k“, pak ostatní písmena můžeme rozmístit na zbylých šest míst libovolně, tedy $P(1, 1, 2, 2)$ způsoby. Celkem podle pravidla součinu je hledaný počet

$$6 \cdot P(1, 1, 2, 2) = \frac{6 \cdot 6!}{2 \cdot 2} = 1080.$$

1.32. Kolika způsoby můžeme do pěti různých důlků vybrat po jedné kouli, vybíráme-li ze čtyř bílých, čtyř modrých a tří červených koulí?

Řešení. Nejprve řešme úlohu v případě, že bychom měli k dispozici alespoň pět koulí od každé barvy. V tomto případě se jedná o volný výběr pěti prvků ze tří možností, tedy o variace s opakovaním (viz 2.4.). Máme

$$V(3, 5) = 3^5.$$

Nyní odečteme ty výběry, ve kterých se vyskytují buď pouze koule stejné barvy (takové výběry jsou tři), nebo právě čtyři koule červené (takových výběrů je $2 \cdot 5 = 10$; nejprve vybereme barvu koule, která nebude červená – dvě možnosti – a poté důlek, ve kterém bude – pět možností). Celkem tedy máme

$$3^5 - 3 - 10 = 230$$

možných výběrů. \square

1.33. Kolika způsoby lze rozestavit n shodných věží na šachovnici $n \times n$ tak, aby bylo každé neobsazené pole ohrožováno některou z věží?

Řešení. Daná rozestavení jsou sjednocením dvou množin: množiny rozestavení, kdy je alespoň v jednom řádku jedna věž (tedy v každém řádku právě jedna; tato množina má n^n prvků – v každém řádku vybereme nezávisle jedno pole pro věž) a množiny rozestavení, kdy je v každém sloupci alespoň (tedy právě) jedna věž (stejnou úvahou jako u první množiny má tato množina rovněž n^n prvků). Průnik těchto

Všimněme si, že v jednotlivých řádcích máme právě koeficienty u jednotlivých mocnin z výrazu (1.5), např. poslední uvedený řádek říká

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

1.8. Výběr s opakovaním. Pořadí n prvků, z nichž mezi některými nerozlišujeme, nazýváme *permutace s opakovaním*.



Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, ..., p_k prvků k -tého druhu, $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$, potom počet pořadí těchto prvků s opakovaním budeme značit $P(p_1, \dots, p_k)$.

Podobně jako u permutací a kombinací bez opakování, pro výběr prvního z nich máme n možností, pro další $n - 1$ a tak dále, až po poslední, který zbude. Přitom ale za stejná považujeme pořadí nerozlišitelných objektů. Těch je pro každou skupinku o p_i objektech právě $p_i!$, takže zřejmě platí

PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

$$P(p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Volný výběr k prvků z n možností, včetně pořadí, nazýváme *variace k -tého stupně s opakovaním*, jejich počet budeme značit $V(n, k)$. Volný výběr v tomto případě znamená, že předpokládáme, že stále máme pro výběr stejně možností, např. díky tomu, že vybrané prvky před dalším výběrem vrátíme nebo třeba házíme pořád stejnou kostkou. Zřejmě platí

VARIACE S OPAKOVÁNÍM

$$V(n, k) = n^k.$$

Pokud nás výběr zajímá bez zohlednění pořadí, hovoříme o *kombinacích s opakovaním* a pro jejich počet píšeme $C(n, k)$. Zde se na první pohled nezdá tak jednoduché, jak výsledný počet zjistit. Důkaz následující věty je pro matematiku typický – podaří se nám nový problém převést na problém jiný, který jsme už dříve zvládli. V našem případě je to převedení na problém standardních kombinací bez opakování:

KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

Věta. Počet kombinací s opakovaním k -té třídy z n prvků je pro všechny $k \geq 0$ a $n \geq 1$

$$C(n, k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

DŮKAZ. Důkaz je opřen o trik (jednoduchý, jakmile ho pochopíme). Uvedeme dva různé postupy.



Představme si nejprve, že taháme postupně karty z balíku n různých karet a abychom mohli případně některou z nich vytáhnout vícekrát, přidáme si $k - 1$ různých žolíků (alespoň jednou určitě chceme jednu z původních karet). Řekněme, že postupně vytáhneme r původních karet a s žolíků, tj. $r + s = k$. Zdá se, že bychom měli vymyslet postup, jak z těch s žolíků poznat, které karty nám zastupují. Ve skutečnosti nám ale stačí diskuse počtů možností takových voleb.

K tomu můžeme použít matematickou indukci a předpokládat, že dokazovaná věta platí pro menší argumenty než jsou n a k . Skutečně, potřebujeme obsáhnout kombinace s -té třídy s opakováním z pouze r původních karet, což dává $\binom{r+k-r-1}{s} = \binom{k-1}{s}$, což je právě počet kombinací s -tého stupně (bez opakování) ze všech žolíků. Tím je věta dokázána.

Druhý přístup (bez matematické indukce): Na množině

$$S = \{a_1, \dots, a_n\},$$

ze které vybíráme kombinace, si zafixujeme uvedené pořadí prvků a pro naše volby prvků z S si připravíme n přihrádek, do kterých si již předem dáme v námi zvoleném pořadí po právě jednom prvku z S .

Jednotlivé volby $x_i \in S$ přidáváme do přihrádky, která již tento prvek obsahuje. Nyní si uvědomme, že pro rozpoznání původní kombinace nám stačí vědět, kolik je prvků v jednotlivých přihrádkách. Například,

$$a \mid bbb \mid cc \mid d \simeq * \mid *** \mid ** \mid *,$$

vypovídá o volbě b, b, c z množiny $S = \{a, b, c, d\}$.

V obecném případě výběru k prvků z n možných tedy máme řetězec $n + k$ znaků a počet $C(n, k)$ je roven počtu možných umístění přihrádek \mid mezi jednotlivé znaky. To odpovídá výběru $n - 1$ pozic z $n + k - 1$ možných. Protože je

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n+k-1-k} = \binom{n+k-1}{n-1},$$

je věta dokázána i podruhé. \square

3. Diferenční rovnice

V předchozích odstavcích jsme viděli vzorce, které dávaly hodnotu skalární funkce definované na přirozených číslech (faktoriál) nebo dvojicích čísel (binomická čísla) pomocí předcházejících hodnot. Zatímco v odstavci 1.5 jsou kombinační čísla definována přímo spočítatelným výrazem, lze rozumět vztahům v 1.8 také tak, že místo hodnoty naší funkce zadáváme její změnu při odpovídající změně nezávislé proměnné.

Takto se skutečně velice často postupuje při matematické formulaci modelů, které popisují reálné systémy v ekonomice, biologii apod. My si tu povšimneme jen několika jednoduchých případů a budeme se k této tématice postupně vracet.



množin pak má $n!$ prvků (místa pro věže vybíráme postupně od prvního řádku – tam máme n možností, ve druhém pak již pouze $n - 1$ možností – jeden sloupec je již obsazen, ...). Podle principu inkluze a exkluze je počet hledaných rozestavení:

$$2n^n - n!.$$

\square

1.34. Kolika způsoby mohla skončit tabulka první fotbalové ligy, víme-li o ní, že žádné dva z trojice týmů Zbrojovka Brno, Baník Ostrava a Sigma Olomouc spolu v tabulce „nesousedí“? (Ligu hraje 16 mužstev.)

Řešení. *První způsob.* Hledaný počet spočítáme podle principu inkluze a exkluze tak, že od počtu všech možných tabulek odečteme počet tabulek, ve kterých sousedí některá dvojice z uvedených tří týmů a přičteme počet těch tabulek, ve kterých sousedí všechny tři týmy. Hledaný počet tedy je

$$16! - \binom{3}{2} \cdot 2! \cdot 15! + 3! \cdot 14! = 13599813427200.$$

Jiné řešení. Zmíněné tři týmy budeme považovat za „oddělovače“. Zbylých třináct týmů musíme rozdělit tak, aby mezi libovolnými dvěma oddělovači byl alespoň jeden tým. Navíc zbylé týmy můžeme mezi sebou nezávisle permutovat a rovněžtak oddělovače. Celkem tedy dostáváme

$$\binom{14}{3} \cdot 13! \cdot 3! = 13599813427200$$

možností. \square

1.35. Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

v množině

- nezáporných
- kladných

celých čísel.

Řešení. a) Každé řešení (r_1, \dots, r_k) , $\sum_{i=1}^k r_i = n$ můžeme jednoznačně zašifrovat jako posloupnost jedniček a nul, ve které napíšeme nejprve r_1 jedniček, pak nulu, pak r_2 jedniček, nulu a tak dále. Posloupnost bude celkem obsahovat n jedniček a $k - 1$ nul. Každá taková posloupnost navíc zřejmě určuje nějaké řešení dané rovnice. Je tedy řešení tolik, kolik je posloupností, tedy $\binom{n+k-1}{n}$.

b) Hledáme-li řešení v oboru kladných celých čísel, tak si všimneme, že přirozená čísla x_1, \dots, x_k jsou řešením dané rovnice, právě

když jsou celá nezáporná čísla $y_i = x_i - 1$, $i = 1, \dots, k$, řešení rovnice

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k.$$

Těch je podle první části řešení $\binom{n-1}{k-1}$. \square

C. Diferenční rovnice

Diferenční rovnice (jinak řečeno též rekurentní vztahy) jsou vztahy mezi členy nějaké posloupnosti, přičemž následující člen je dán pomocí členů předchozích. Vyřešit diferenční rovnici pak znamená najít explicitní vzorec pro n -tý (libovolný) člen dané posloupnosti. Rekurentní vztah nám totiž po zadání několika prvních členů posloupnosti zadává n -tý člen přímo pouze pomocí postupného vyčíslení všech předchozích členů.

Pokud je následující člen posloupnosti určen pouze předchozím členem, hovoříme o diferenčních rovnicích prvního řádu. S nimi se můžeme v životě opravdu setkat, například, pokud si chceme zjistit dobu splácení nějaké půjčky při pevné měsíční splátce, nebo naopak chceme zjistit výši měsíční splátky, zadáme-li si dobu, za kterou chceme půjčku splatit.

1.36. Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%. Mirek bych chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?

Řešení. Označme Mirkovu měsíční splátku S . Po prvním měsíci splatí Mirek S korun, z nichž část půjde na vlastní splátku, část na splacení úroku. Částku, kterou bude Mirek dlužit po uplynutí k měsíců označme d_k . Po prvním měsíci bude Mirek dlužit

$$d_1 = 300000 - S + \frac{0,06}{12} \cdot 300000.$$

Obecně po uplynutí k -tého měsíce

$$(1.1) \quad d_k = d_{k-1} - S + \frac{0,06}{12} d_{k-1}. \quad \text{e1.5}$$

Podle vztahu (1.9) je d_k dáno následovně

$$d_k = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^k 300000 - \left[\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^k - 1\right] \left(\frac{12S}{0,06}\right).$$

Splacení po třech letech se rovná podmínce $d_{36} = 0$, odkud dostáváme

$$(1.2) \quad S = 300000 \left(\frac{\frac{0,06}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{-36}} \right) \doteq 9127. \quad \square$$

1.9. Lineární diferenční rovnice prvního řádu. Obecnou diferenční rovnicí prvního řádu rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel. Známe-li „počáteční“ hodnotu $f(0)$, můžeme spočítat $f(1) = F(0, f(0))$, poté $f(2) = F(1, f(1))$ atd. Tímto postupným způsobem můžeme tedy nakonec spočítat hodnotu $f(n)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Všimněme si, že tato úvaha je podobná konstrukci přirozených čísel z prázdné množiny nebo principu matematické indukce.

Jako příklad může sloužit definiční formule pro faktoriál, tj.

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Vidíme, že skutečně vztah pro $f(n+1)$ závisí na n i na hodnotě $f(n)$.

Dalším obzvlášť jednoduchým příkladem je $f(n) = C$ pro nějaký pevný skalár C a všechna n a tzv. *lineární diferenční rovnice*

$$(1.6) \quad f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde $a \neq 0$, a b jsou známé skaláry.

Takovou diferenční rovnici umíme snadno řešit, je-li $b = 0$. Pak se totiž jedná o dobře známou rekurentní definici geometrické posloupnosti a platí

$$f(1) = af(0), \quad f(2) = af(1) = a^2 f(0) \quad \text{atd.}$$

Máme tedy pro všechna n

$$f(n) = a^n f(0).$$

To je např. vztah pro tzv. Malthusiánský model populačního růstu, který vychází z představy, že za zvolený časový interval vzroste populace s konstantní úměrou a vůči předchozímu stavu.

Dokážeme si obecný výsledek pro rovnice prvního řádu, které se podobají lineárním, ale připouští proměnné koeficienty a a b ,

$$(1.7) \quad f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n.$$

Nejdříve se ale zamysleme, co mohou takové rovnice popisovat.

Lineární diferenční rovnici (1.6) můžeme pěkně interpretovat jako matematický model pro spoření nebo splácení úvěru s pevnou úrokovou mírou a a pevnou splátkou b (tyto dva případy se liší pouze znaménkem u parametru b).

S proměnnými parametry dostáváme obdobný model, ovšem s proměnlivými jak úroky, tak splátkami. Můžeme si představit třeba n jako počet měsíců, a_n bude vyjadřovat úrokovou míru v měsíci n , b_n příslušnou splátku v měsíci n .



Neděste se zdánlivě složitěho sčítání a násobení v následujícím výsledku. Jde o typický příklad technického matematického tvrzení, kdy těžké je „uhodnout“, jak zní. Naopak důkaz je už pak jen docela snadné cvičení na základní vlastnosti skalárů a matematickou indukci. Skutečně zajímavé jsou teprve důsledky, viz 1.11 níže.

Ve formulaci používáme vedle obvyklých znaků pro součet \sum také obdobné znaky pro součin \prod . V dalším budeme vždy používat také konvenci, že pokud u součtu je množina uvedených indexů prázdná, pak je součet nula, zatímco u součinu je ve stejném případě výsledek jedna.

1.8 **1.10. Tvrzení.** *Obecné řešení diferenční rovnice (1.7) prvního řádu s počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je dáno vztahem*

$$(1.8) \quad f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) y_0 + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} a_i \right) b_j + b_{n-1}.$$

DŮKAZ. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Zjevně tvrzení platí pro $n = 1$, kdy se jedná právě o definiční vztah $f(1) = a_0 y_0 + b_0$.

Předpokládáme-li, že tvrzení platí pro nějaké pevně zvolené n , můžeme snadno spočítat:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= a_n \left(\left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) y_0 + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} a_i \right) b_j + b_{n-1} \right) \\ &\quad + b_n \\ &= \left(\prod_{i=0}^n a_i \right) y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{i=j+1}^n a_i \right) b_j + b_n, \end{aligned}$$

jak se přímo vidí roznásobením výrazů. \square

Opět si všimněme, že jsme pro důkaz nepotřebovali o použitých skalárech nic víc než vlastnosti komutativního okruhu.

[primkydelirovinu](#)

1.9 **1.11. Důsledek.** *Obecné řešení lineární diferenční rovnice (1.6) s $a \neq 1$ a počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je*

$$(1.9) \quad f(n) = a^n y_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

DŮKAZ. Dosazením konstantních hodnot za a_i a b_i do obecného vzorce (1.8) dostáváme

$$f(n) = a^n y_0 + b \left(1 + \sum_{j=0}^{n-2} a^{n-j-1} \right).$$

Pro vyčíslení součtu součinů v druhém sčítanci si je třeba všimnout, že se jedná o výrazy $(1 + a + \dots + a^{n-1})b$. Součet této geometrické řady spočteme ze vztahu $1 - a^n = (1 - a)(1 + a + \dots + a^{n-1})$ a dostaneme právě požadovaný výsledek. \square

Všimněme si, že rekurentní vztah (1.1) můžeme použít na náš příklad pouze tak dlouho, dokud budou všechna $y(n)$ kladná, tj. dokud bude Mírek skutečně něco dlužit.

1.37. Uvažujme situaci z předchozího příkladu. Jak dlouho by Mírek auto splácel, kdyby chtěl měsíčně splácet 5000 Kč?

Řešení. Při označení $q = 1,005$, $c = 300000$ nám podmínka $d_k = 0$ dává vztah

$$q^k = \frac{200S}{200S - c},$$

jehož logaritmováním obdržíme

$$k = \frac{\ln 200S - \ln(200S - c)}{\ln q},$$

což pro $S = 5000$ dává přibližně $k = 71,5$, tedy splácení půjčky by trvalo šest let (poslední splátka by nebyla plných 5 000 Kč). \square

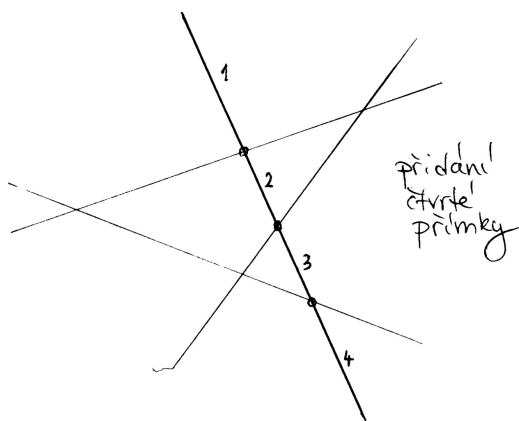
1.38. Určete posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, která vyhovuje následujícímu rekurentnímu vztahu

$$y_{n+1} = \frac{3y_n}{2} + 1, \quad n \geq 1, \quad y_1 = 1.$$

Lineární rekurentní vztahy se mohou vyskytnout například v geometrických problémech:

1.39. Na kolik nejvýše oblastí může dělit rovinu n přímek?

Řešení. Označme hledaný počet oblastí p_n . Pokud v rovině nemáme dānu žádnou přímku, je celā rovina jedinou oblastí, je tedy $p_0 = 1$. Pokud je v rovině dāno n přímek, tak přidáním $n + 1$ přibude nejvýše $(n + 1)$ oblastí: oblastí přibude právě tolik, kolika (původními) oblastmi bude přímka prochāzet (každou takovou oblast rozdělí na dvě části, jedna oblast tedy přibude). Přidanā přímka může mít nejvýše n různých průsečíků s n přímkami, které už v rovině byly. Část přímky mezi libovolnými dvěma sousedními průsečíky prochāzí právě jednou oblastí, celkem může přidanā přímka prochāzet nejvýše $n + 1$ oblastmi, tedy může přibýt maximálně $n + 1$ oblastí, navíc v rovině bylo před přidáním $(n + 1)$ -ní přímky nejvýše p_n oblastí (tak jsme číslo p_n totiž definovali).



Celkem dostáváme rekurentní vztah

$$p_{n+1} = p_n + (n + 1),$$

1.11

ze kterého získáme explicitní formuli pro p_n buď pomocí vzorce 1.10 nebo přímo:

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + n = p_{n-2} + (n-1) + n = \\ &= p_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \dots = p_0 + \sum_{i=1}^n i = \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$

□

Rekurentní vztahy mohou mít i složitější podobu než je rekurze prvního řádu. Uvedme si příklady kombinatorických úloh, při jejichž řešení se můžeme rekurze s výhodou využít.

1.40. Kolik existuje slov délky 12 složených pouze z písmen A a B , které neobsahují skupinu BBB ?

Řešení. Nechť a_n značí počet slov délky n složených pouze z písmen A , B , neobsahujících skupinu BBB . Pak pro a_n ($n \geq 3$) platí rekurentní vztah

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

neboť slova délky n splňující danou podmínku musí končit buď na A , nebo na AB , nebo na ABB . Slova končících na A je právě a_{n-1} (před posledním A může být libovolné slovo délky $n-1$ splňující danou podmínku. Obdobně pro zbylé dvě skupiny. Dále snadno vyčíslíme $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7$. Postupným dopočítáním

$$a_{12} = 1705.$$

e1.7a

Všimněme si, že pro výpočet součtu geometrické řady jsme potřebovali existenci inverze pro nenulové skaláry. To bychom nad celými čísly neuměli. Poslední výsledek tedy platí pro pole skalárů a můžeme jej bez problému použít pro lineární diferenciální rovnice, kde koeficienty a , b a počáteční podmínka $f(0) = y_0$ jsou racionální, reálné nebo komplexní, ale také nad okruhem zbytkových tříd \mathbb{Z}_k s prvočíselným k (zbytkové třídy budeme definovat v odstavci 1.41).

Pozoruhodné je, že ve skutečnosti vzorec (1.9) platí i s celočíselnými koeficienty a počáteční podmínkou. Pak totiž předem víme, že všechny $f(n)$ budou také celočíselné, a celá čísla jsou podmnožinou v číslech racionálních. Musí proto nutně náš vzorec dávat ta správná celočíselná řešení.

Při pozornějším pohledu na důkaz je zřejmé, že $1 - a^n$ je vždy dělitelné $1 - a$, takže nás poslední pozorování nemělo překvapit. Nicméně je vidět, že třeba nad skaláry ze \mathbb{Z}_4 a třeba $a = 3$ už neuspějeme, protože pak $1 - a = 2$ je dělitelem nuly.

tady to asi není šikovné — příklady na zbytkové třídy snad budou v druhém sloupci už dříve, nejlépe by bylo i z tohoto udělat příklad a odtud to přesunout (nebo úplně vypustit)

1.12. Nelineární příklad. Vraťme se na chvíli k rovnici prvního řádu (1.6), kterou jsme použili na velice primitivní model populačního růstu závisící přímo úměrně na okamžité velikosti populace p . Na první pohled je zřejmé, že takový model vede při úměře $a > 1$ k příliš rychlému a hlavně neomezenému růstu.

Realističtější model bude mít takto úměrnou změnu populace $\Delta p(n) = p(n+1) - p(n)$ jen při malých hodnotách p , tj. $\Delta p/p \sim r > 0$. Pokud tedy budeme chtít nechat růst populaci o 5% za období při malém p , budeme r volit 0,05. Při určité limitní hodnotě $p = K > 0$ ale naopak už populace neroste a při ještě větších už klesá (třeba protože zdroje pro její obživu jsou omezené, jedinci ve veliké populaci si navzájem překáží apod.).

Předpokládejme, že právě hodnoty $y_n = \Delta p(n)/p(n)$ se v závislosti na $p(n)$ mění lineárně. Graficky si tedy tuto závislost můžeme představit jako přímku v rovině proměnných p a y , která prochází body $[0, r]$ (tj. při $p = 0$ máme $y = r$) a $[K, 0]$ (což dává druhou podmínku, že při $p = K$ se populace nemění). Položíme proto

$$y = -\frac{r}{K}p + r.$$

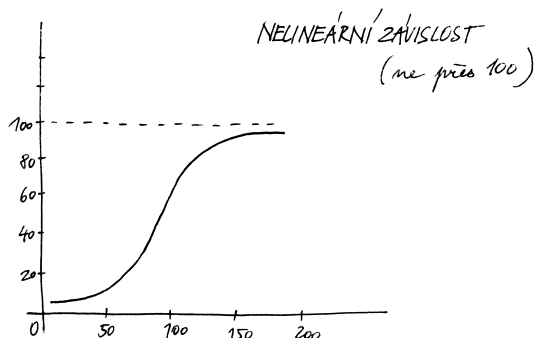
Dosazením y_n za y a $p(n)$ za p dostáváme

$$\frac{p(n+1) - p(n)}{p(n)} = -\frac{r}{K}p(n) + r,$$

tj. roznásobením dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu (kde hodnota $p(n)$ vystupuje v první i v druhé mocnině)

$$(1.10) \quad p(n+1) = p(n)\left(1 - \frac{r}{K}p(n) + r\right).$$

Zkuste si promyslet nebo vyzkoušet chování tohoto modelu pro různé hodnoty r a K . Na obrázku je průběh hodnot pro parametry $r = 0,05$ (tj. pětiprocentní nárůst v ideálním stavu), $K = 100$ (tj. zdroje limitují hodnotu na 100 jedinců) a $p(0)$ jsou dva jedinci.



Všimněme si, že počáteční přibližně exponenciální růst se skutečně později zlomí a hodnota se postupně blíží kýženému limitu 100 jedinců. Pro p blízké jedné a K daleko větší než r bude pravá strana rovnice (1.10) přibližně $p(n)(1+r)$, tzn. chování je obdobné Malthusiánskému modelu. Naopak při p přibližně K bude pravá strana přibližně $p(n)$. Pro větší počáteční hodnoty p než K budou hodnoty klesat, pro menší než K růst, takže systém bude zpravidla postupně oscilovat kolem hodnoty K .

4. Pravděpodobnost

Teď se podíváme na jiný obvyklý případ skalárních hodnot funkcí – sledované hodnoty často nejsou známy ani explicitně vzorcem, ani implicitně nějakým popisem. Jsou výsledkem nějaké nahodilosti a my se snažíme popsat s jakou *pravděpodobností* nastane ta či ona možnost.



1.12

1.13. Co je pravděpodobnost? Jako jednoduchý příklad může sloužit obvyklé házení kostkou se šesti stěnami s označeními

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Pokud popisujeme matematický model takového házení „pochtivou“ kostkou, budeme očekávat a tudíž i předepisovat, že každá ze stran padá stejně často. Slovy to vyjadřujeme „každá předem vybraná stěna padne s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ “.

Pokud ale si třeba sami nožičkem vyrobíme takovou kostku z kusu dřeva, je jisté, že skutečné relativní četnosti výsledků nebudou stejné. Pak můžeme z velikého počtu pokusů usoudit na relativní četnosti jednotlivých výsledků hodů a tyto ustanovit jako pravděpodobnosti v našem matematickém popisu. Nicméně při sebevětším počtu pokusů nemůžeme vyloučit možnost, že se náhodou povedla velice nepravděpodobná kombinace výsledků a že jsme proto náš matematický model skutečnosti pro naši kostku nevybrali dobře.

Těž bychom mohli odvodit explicitní vzorec pro n -tý člen takto zadané posloupnosti, dle uvedené teorie. Charakteristický polynom dané rekurentní rovnice je $x^3 - x^2 - x - 1$ s jedním reálným a dalšími dvěma komplexními kořeny, které můžeme vyjádřit pomocí vztahů (1.15). \square

1.41. Skóre basketbalového utkání mezi týmy Česka a Ruska vyznělo po první čtvrtině 12 : 9 pro ruský tým. Kolika způsoby se mohlo vyvíjet skóre? K výpočtu můžete použít výpočetní techniky.



Řešení. Označíme-li $P_{(k,l)}$ počet způsobů, kterými se mohlo vyvíjet skóre basketbalového utkání, které skončilo $k : l$, tak pro $k, l \geq 3$ platí rekurentní vztah:

$$P_{(k,l)} = P_{(k-3,l)} + P_{(k-2,l)} + P_{(k-1,l)} + P_{(k,l-1)} + P_{(k,l-2)} + P_{(k,l-3)}.$$

(Způsoby, kterými se mohlo vyvíjet utkání s výsledným skóre $k : l$ rozdělíme na šest po dvou disjunktních podmnožin podle toho, které družstvo vstřelilo koš a za kolik bodů (1, 2, či 3).) Ze symetrie úlohy zřejmě platí $P_{(k,l)} = P_{(l,k)}$. Dále pro $k \geq 3$ platí:

$$P_{(k,2)} = P_{(k-3,2)} + P_{(k-2,2)} + P_{(k-1,2)} + P_{(k,1)} + P_{(k,0)},$$

$$P_{(k,1)} = P_{(k-3,1)} + P_{(k-2,1)} + P_{(k-1,1)} + P_{(k,0)},$$

$$P_{(k,0)} = P_{(k-3,0)} + P_{(k-2,0)} + P_{(k-1,0)},$$

což spolu s počátečními podmínkami $P_{(0,0)} = 1$, $P_{(1,0)} = 1$, $P_{(2,0)} = 2$, $P_{(3,0)} = 4$, $P_{(1,1)} = 2$, $P_{(2,1)} = P_{(1,1)} + P_{(0,1)} + P_{(2,0)} = 5$, $P_{(2,2)} = P_{(0,2)} + P_{(1,2)} + P_{(2,1)} + P_{(2,0)} = 14$, dává

$$P_{(12,9)} = 497178513.$$

\square

Poznámka. Vidíme, že rekurentní vztah v tomto příkladu má složitější formu, než kterou jsme se zabývali v teorii a tudíž neumíme vyčísřit libovolné číslo $P_{(k,l)}$ explicitně, nýbrž pouze postupným výpočtem od počátečních členů. Takové rovnice nazýváme parciální diferenční rovnice, protože členy posloupnosti jsou značeny dvěma nezávislými proměnnými (k, l) .

O lineárních rekurentních formulích (diferenčních rovnicích) vyšších řádů s konstantními koeficienty si povíme více v kapitole 3.

D. Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Uvedme si několik jednoduchých příkladů na klasickou pravděpodobnost, kdy zkoumáme nějaký pokus, který má konečně mnoho

možných výsledků („všechny případy“) a nás zajímá, kdy výsledek pokusu bude náležet nějaké podmnožině možných výsledků („příznivé případy“). Hledaná pravděpodobnost je pak rovna poměru počtu příznivých případů ku počtu všech případů. Klasickou pravděpodobnost můžeme použít tam, kde předpokládáme (víme), že každý z možných výsledků má stejnou pravděpodobnost toho, že nastane (například při hodech kostkou).

1.42. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šestibokou kostkou padne číslo větší než 4?

Řešení. Všech možných výsledků je šest (tvoří množinu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), příznivé možnosti jsou dvě ($\{5, 6\}$). Hledaná pravděpodobnost je tedy $2/6 = 1/3$. \square

1.43. Ze skupiny osmi mužů a čtyř žen náhodně vybereme skupinu pěti lidí. Jaká je pravděpodobnost, že v ní budou alespoň tři ženy?

Řešení. Pravděpodobnost spočítáme jako podíl počtu příznivých případů ku počtu všech případů. Příznivé případy rozdělíme podle toho, kolik je v náhodně vybrané skupině mužů: mohou v ní být buď dva, nebo jeden muž. Skupinek o pěti lidech s jedním mužem je osm (záleží pouze na výběru muže, ženy v ní musí být všechny), skupinek se dvěma muži je potom $c(8, 2) \cdot c(4, 3) = \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{3}$ (vybereme dva muže z osmi a nezávisle na tom tři ženy ze čtyř, tyto dva výběry můžeme nezávisle kombinovat a podle pravidla součinu dostáváme uvedený počet skupin). Všech možných skupin o pěti lidech pak můžeme sestavit $c(12, 5) = \binom{12}{5}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{8 + \binom{4}{3} \binom{8}{2}}{\binom{12}{5}}.$$

\square

Uvedme si příklad, při jehož řešení není vhodné používat klasické pravděpodobnosti:

1.44. Jaká je pravděpodobnost toho, že čtenář této úlohy vyhraje příští týden alespoň milion dolarů v loterii? 1.13

Řešení. Takováto formulace úlohy je neúplná, neposkytuje dostatek údajů. Předvedme „chybné“ řešení Základní prostor všech možných jevů je dvouprvkový: buď vyhraje nebo nevyhraje. Příznivý jev je jeden (vyhraje), hledaná pravděpodobnost je tedy $1/2$ (a to je zjevně špatná odpověď). \square

Poznámka. V předchozím příkladě je porušena základní podmínka použití klasické pravděpodobnosti, totiž to, že každý z elementárních jevů má stejnou pravděpodobnost toho, že nastane.



V dalším budeme pracovat s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti v nejjednodušším přiblížení. To, do jaké míry je takový popis adekvátní pro konkrétní pokusy či jiný problém, je záležitostí mimo samotnou matematiku. To ale neznamená, že by se takovým přemýšlením neměli zabývat matematikové (nejspíše ve spolupráci s jinými experty). Později se vrátíme k pravděpodobnosti coby teorii popisující chování nahodilých procesů nebo i plně determinovaných dějů, kde ovšem neznáme přesně všechny určující parametry.

Matematická statistika pak umožňuje posuzovat, do jaké míry lze očekávat, že vybraný model je ve shodě s realitou, resp. umožňuje určit parametry modelu tak, aby docházelo k co nejlepší shodě s pozorováním a zároveň umí odhadnout míru spolehlivosti zvoleného modelu.

K matematické pravděpodobnosti i statistice ovšem budeme potřebovat dosti rozsáhlý matematický aparát, který budeme mezitím několik semestrů budovat.

Na příkladu naší neumělé kostky si to můžeme představit tak, že v teorii pravděpodobnosti budeme pracovat s parametry p_i pro pravděpodobnost jednotlivých hodnot stran a budeme požadovat pouze aby všechny tyto pravděpodobnosti byly nezáporné a jejich součet byl

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1.$$

Při volbě konkrétních hodnot p_i pro konkrétní kostku pak v matematické statistice budeme schopni odhadnout s jakou spolehlivostí tento model naší kostce odpovídá.

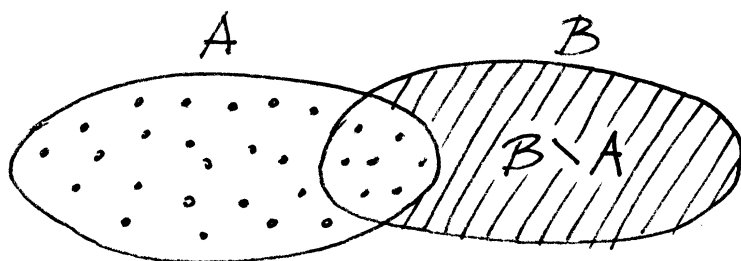
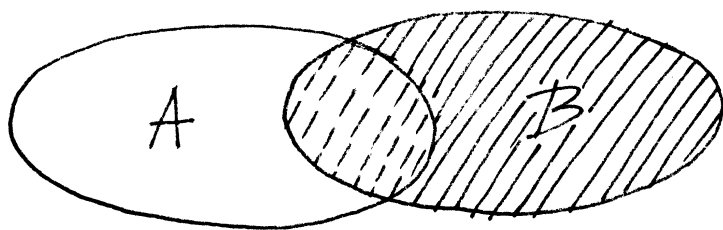
Naším skromným cílem je teď pouze naznačit, jak abstraktně zachytit pravděpodobnostní úvahy ve formalizovaných matematických objektech. Následující odstavce tak budou ve své podstatě pouhými cvičeními v jednoduchých operacích nad množinami a jednoduché kombinatorice (tj. výpočtech počtu možností, jak mohou být splněny dané podmínky kladené na konečné množiny prvků).



1.14. Náhodné jevy. Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme *základní prostor*. Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná množina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$, představujícími jednotlivé *možné výsledky*. Každá podmnožina $A \subset \Omega$ představuje *možný jev*. Systém podmnožin \mathcal{A} základního prostoru se nazývá *jevové pole*, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$ (tj. základní prostor, je jevem),
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl),
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \cup B \in \mathcal{A}$ (tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich sjednocení).

PRAVDĚPODOBNOST



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Zjevně je i komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A . Průnik dvou jevů je opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny $A, B \subset \Omega$ platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Slovy se tak dá jevové pole charakterizovat jako systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme *náhodné jevy* (vzhledem k \mathcal{A}).

Pro naše házení kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jevové pole je tvořeno všemi podmnožinami množiny Ω . Např. náhodný jev $\{1, 3, 5\}$ pak interpretujeme jako „padne liché číslo“.

Něco málo terminologie, která by měla dále připomínat souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá *jistý jev*, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá *nemožný jev*,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \subset \Omega$ se nazývají *elementární jevy*,
- *společné nastoupení jevů* $A_i, i \in I$, odpovídá jevu $\bigcap_{i \in I} A_i$, *nastoupení alespoň jednoho z jevů* $A_i, i \in I$, odpovídá jevu $\bigcup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou *neslučitelné jevy*, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za *důsledek* jev B , když $A \subset B$,

Přestavte si příklady všech uvedených pojmů pro jevový prostor popisující házení kostkou nebo obdobně pro házení mincí!

1.45. Do řady v kině o $2n$ místech je náhodně rozmístěno n mužů a n žen. Jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

Řešení. Všech možných rozmístění lidí v řadě je $(2n)!$, rozmístění splňujících podmínky je $2(n!)^2$: máme dvě možnosti výběru pozice mužů, tedy i žen – buď všichni muži budou sedět na lichých místech (a tedy ženy na sudých), nebo všichni muži na sudých (a tedy ženy na lichých místech); na nich jsou pak muži i ženy rozmístěny libovolně. Výsledná pravděpodobnost je tedy

$$p(n) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}, \quad p(2) \doteq 0,33, \quad p(5) \doteq 0,0079, \quad p(8) \doteq 0,00016.$$

□

1.46. Do výtahu osmipatrové budovy nastoupilo 5 osob. Každá z nich vystoupí se stejnou pravděpodobností v libovolném poschodí. Jaká je pravděpodobnost, že vystoupí

- všichni v šestém poschodí,
- všichni ve stejném poschodí,
- každý v jiném poschodí?

Řešení. Základní prostor všech možných jevů je prostor všech možných způsobů vystoupení 5 osob z výtahu. Těch je 8^5 .

V prvním případě je jediná příznivá možnost vystoupení, hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{8^5}$, ve druhém případě máme osm možností, hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{8^4}$ a konečně ve třetím je počet příznivých případů dán pětiprvkovou variací z osmi prvků (z osmi pater vybíráme pět, ve kterých se vystoupí a dále kteří lidé vystoupí ve vybraných poschodích), celkem je hledaná pravděpodobnost ve třetím případě rovna (viz 1.6 a 1.8)

$$\frac{v(5, 8)}{V(5, 8)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4}{8^5} \doteq 0,2050781250.$$

□

1.47. Náhodně vybereme celé kladné číslo menší než 10^5 . Jaká je pravděpodobnost, že bude složeno pouze z cifer 0, 1, 5 a zároveň bude dělitelné číslem 5?

Řešení. Čísel splňujících danou podmínku je $2 \cdot 3^4 - 1$ (kromě poslední cifry máme na každý řád na výběr ze tří cifer, případně číslice 0 na začátku slova nepíšeme). Všech celých kladných čísel menších než 10^5 je $10^5 - 1$, podle klasické pravděpodobnosti dostáváme, že hledaná pravděpodobnost je $\frac{2 \cdot 3^4 - 1}{10^5 - 1}$.

□

1.48. Princip inkluze a exkluze. Sekretářka má rozeslat šest dopisů šesti různým lidem. Dopisy pro různé adresáty vkládá do obálek s adresami náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden člověk dostane dopis určený pro něj?

Řešení. Spočítejme pravděpodobnost jevu opačného, tedy toho, že ani jeden člověk neobdrží správný dopis. Stavový prostor všech možných jevů odpovídá všem možným pořadím pěti prvků (obálek). Označíme-li jak obálky tak dopisy čísly od jedné do šesti, tak všechny příznivé jevy (tedy žádný dopis nepříjde do obálky se stejným číslem) odpovídají takovým pořadím šesti prvků, kdy i -tý prvek není na i -tém místě ($i = 1, \dots, 6$), tzv. pořadím bez pevného bodu. Jejich počet spočítáme pomocí principu inkluze a exkluze. Označíme-li M_i množinu permutací s pevným bodem i (permutace v M_i ale mohou mít i jiné pevné body), tak výsledný počet d permutací bez pevného bodu je roven

$$d = 6! - |M_1 \cup \dots \cup M_6|$$

Počet prvků průniku $|M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}|$, $k = 1, \dots, 6$, je $(6-k)!$ (pořadí prvků i_1, \dots, i_k je pevně dáno, ostatních $6-k$ prvků řadíme libovolně). Podle principu inkluze a exkluze je

$$|M_1 \cup \dots \cup M_6| = \sum_{k=1}^6 (-1)^{k+1} \binom{6}{k} (6-k)!$$

a tedy pro hledaný počet d dostáváme vztah

$$\begin{aligned} d &= 6! - \sum_{k=1}^6 (-1)^{k+1} \binom{6}{k} (6-k)! \\ &= \sum_{k=0}^6 (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)! = 6! \sum_{k=0}^6 \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost toho, že žádný člověk neobdrží „svůj“ dopis je tedy

$$\sum_{k=0}^6 \frac{(-1)^k}{k!}$$

a hledaná pravděpodobnost pak

$$1 - \sum_{k=0}^6 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{53}{144}.$$

□

Poznámka. Všimněme si, že odpověď na stejnou otázku, se s rostoucím počtem dopisů příliš nemění. Pro n dopisů je pravděpodobnost, že sekretářka nedá žádný do správné obálky

$$1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \doteq 1 - \frac{1}{e},$$

jak totiž uvidíme později, uvedená suma konverguje (blíží se) k hodnotě $1/e$.

1.15. Definice. *Pravděpodobnostní prostor* je trojice (Ω, \mathcal{A}, P) , kde \mathcal{A} je jevové pole podmnožin (konečného) základního prostoru Ω , na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ s následujícími vlastnostmi:

- P je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A ,
- P je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \cap B = \emptyset$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1, tj. $P(\Omega) = 1$.

Funkci P nazýváme *pravděpodobností* na jevovém poli \mathcal{A} .

Zjevně je okamžitým důsledkem našich definic řada prostých ale užitečných tvrzení. Např. pro všechny jevy platí

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Dále můžeme matematickou indukcí snadno rozšířit aditivnost na jakýkoliv konečný počet vzájemně neslučitelných jevů $A_i \subset \Omega$, $i \in I$, tj.

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i),$$

kdykoliv $A_i \cap A_j = \emptyset$, pro všechna $i \neq j$, $i, j \in I$.

1.16. Definice. Nechť Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole \mathcal{A} je právě systém všech podmnožin v Ω . *Klasická pravděpodobnost* je pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) s pravděpodobnostní funkcí

$$P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|A|$ značí počet prvků množiny $A \in \mathcal{A}$.

Zjevně takto zadaná funkce skutečně definuje pravděpodobnost, ověřte si samostatně všechny požadované axiomy.

1.17. Sčítání pravděpodobností. U neslučitelných jevů je sčítání pravděpodobností pro výskyt alespoň jednoho z nich přímo požadováno v základní definici pravděpodobnosti. Obecně je sčítání pravděpodobností pro výskyty jevů složité. Problém totiž je, že pokud jsou jevy slučitelné, částečně máme v součtu pravděpodobností započteny příznivé výskyty vícekrát.

Nejjednodušší je si nejprve představit situaci se dvěma slučitelnými jevy A, B . Uvažme nejprve klasickou pravděpodobnost, kde jde vlastně o počítání prvků v podmnožinách. Pravděpodobnost výskytu alespoň jednoho z nich, tj. pravděpodobnost jejich sjednocení, je dána vztahem

$$(1.11) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

protože ty prvky, které patří do množiny A i B , jsme nejprve započítali dvakrát a tak je musíme jednou odečíst.

Tentýž výsledek dostaneme i pro obecnou pravděpodobnost P na nějakém jevovém poli. Protože $A \cap B$ a $A \setminus B$ jsou nezávislé jevy,

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B),$$

podobně pro B , ale také máme

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B).$$

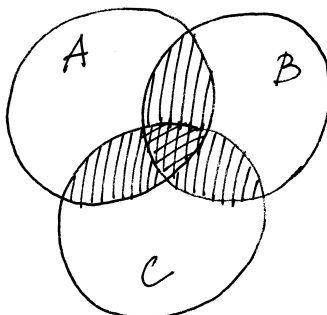
Dosažením za pravděpodobnosti množinových rozdílů dostáváme opět vztah (1.11).

Následující věta je přímým promítnutím tzv. kombinatorického *principu inkluze a exkluze* do naší konečné pravděpodobnosti a říká, jakým způsobem vícenásobné započítávání výsledků kompenzovat v obecném případě.



Jde patrně o dobrý příklad matematického tvrzení, kde nejtěžší je najít dobrou formulaci a pak se dá říci, že (intuitivně) je tvrzení zřejmé.

PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE



Na obrázku je situace znázorněna pro tři množiny A , B , C a pro klasickou pravděpodobnost. Jednoduše šrafované oblasti v prostém součtu máme dvakrát, dvojitě šrafované třikrát. Pak ty jednoduše šrafované jednou odečteme, přitom ty dvojitě šrafované opět třikrát odečteme, proto je tam nakonec ještě jednou započteme.

Obecně, díky aditivní vlastnosti pravděpodobnosti, si můžeme představit, že každý jev rozložíme na elementární (tj. jednobodové) jevy, jakkoliv ve skutečnosti nemusí jednobodové podmnožiny do uvažovaného jevového pole patřit. Pak je pravděpodobnost každého jevu dána součtem pravděpodobností jednotlivých elementárních jevů do něj patřících a můžeme při vyjádření pravděpodobnosti nastoupení alespoň jednoho z jevů takto: sečteme všechny pravděpodobnosti výsledků pro všechna A_i zvlášť, pak ovšem musíme odečíst ty, které tam jsou započteny dvakrát (tj. prvky v průnicích dvou). Teď si ovšem dovoluujeme odečíst příliš mnoho tam, kde ve skutečnosti byly prvky třikrát, tj. korigujeme přičtením pravděpodobností ze třetího členu, atd.

1.16

Věta. Buďte $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ libovolné jevy na základním prostoru Ω s jevovým polem \mathcal{A} . Pak platí

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^k A_i) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{\ell=j+1}^k P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) \\ &- \dots \\ &+ (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k). \end{aligned}$$

1.49. Volejbalový tým (s liberem, tj. celkem sedm osob) sedí po zápasu v hospodě a popíjí zasloužené pivo. Je ale málo kríglů a proto hospodský používá pořád těch sedm samých. Jaká je pravděpodobnost, že příště

- i) právě jeden nedostane ten svůj, ze kterého pil
- ii) nikdo nedostane ten svůj
- iii) právě tři dostanou ten svůj.

1.50. Další principy počítání s pravděpodobnostmi. Vraťme se k házení kostkou a zkusme popsat jevy ze základního prostoru Ω vznikající při házení tak dlouho, dokud nepadne šestka, ne však více než stokrát.

Pro jeden hod samostatně je základním prostorem šest čísel od jedné do šesti a jde o klasickou pravděpodobnost. Pro celé série našich hodů bude základní prostor daleko větší – bude to množina konečných posloupností čísel od jedné do šestky, které buď končí šestkou, mají nejvýše 100 členů a všechna předchozí čísla jsou menší než šest, nebo jde o 100 čísel od jedné do pěti. Jevem A může být např. podmnožina „házení končí druhým pokusem“. Všechny příznivé elementární jevy pak jsou

$$[1, 6], [2, 6], [3, 6], [4, 6], [5, 6].$$

Ze známé klasické pravděpodobnosti pro jednotlivé hody umíme odvodit pravděpodobnosti našich jevů v Ω . Není to ale jistě klasická pravděpodobnost. Tak pro diskutovaný jev chceme popsat, s jakou pravděpodobností nepadne šestka při prvním hodu a zároveň padne při druhém. Vnucuje se řešení

$$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

protože v prvním hodu padne s pravděpodobností $1 - \frac{1}{6}$ jiné číslo než šest a druhý hod, ve kterém naopak požadujeme šestku, je zcela nezávislý na prvním. Samozřejmě toto není poměr počtu příznivých výsledků k velikosti celého stavového prostoru!

Obecněji můžeme říci, že po právě $1 < k < 100$ hodech pokus skončí s pravděpodobností $(\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Ze všech možností je tedy nejpravděpodobnější, že skončí již napoprvé.

Jiný příklad, jak z házení kostkou dostat různě pravděpodobné jevy je pozorovat součty při hodu více kostkami. Uvažujme takto: při hodu jednou kostkou je každý výsledek stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Při hodu dvěma kostkami je každý předem zvolený výsledek (a, b) , tj. dvojice přirozených čísel od jedné do šesti (včetně pořadí), stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{36}$. Pokud se budeme ptát po dvou pětkách, je tedy pravděpodobnost poloviční než u dvou různých hodnot bez uvedení pořadí. Pro jednotlivé možné součty

uvedené v horním řádku nám vychází počet možností v řádku dolním:

Součet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Počet	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Podobně vyjde pravděpodobnost $\frac{1}{216}$ jednotlivých výsledků hodu třemi kostkami, včetně určeného pořadí. Pokud se budeme ptát na pravděpodobnost výsledného součtu při hodu více kostkami, musíme pouze určit, kolik je možností, jak daného součtu dosáhnout a příslušné pravděpodobnosti sečíst.

1.51. Ze sáčku s pěti bílými a pěti červenými koulemi náhodně vytáhneme tři (koule do sáčku nevracíme). Jaká je pravděpodobnost, že dvě budou bílé a jedna červená?

Řešení. Rozdělme uvažovaný jev na sjednocení tří disjunktních jevů: podle toho, kolikátou vytáhneme červenou kouli. Pravděpodobnosti, že vytáhneme koule přesně ve zvoleném pořadí jsou: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$. Celkem $\frac{5}{12}$.

Jiné řešení. Uvažme počet všech možných trojic vytažených koulí (koule jsou mezi sebou rozlišitelné), tedy $\binom{10}{3}$. Trojic, které obsahují právě dvě bílé koule je potom $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ (dvě bílé koule můžeme vytáhnout $\binom{5}{2}$ způsoby, k nim pak červenou pěti způsoby). \square

1.52. Z klobouku, ve kterém je pět bílých, pět červených a šest černých koulí, náhodně vytahujeme koule (bez vracení). Jaká je pravděpodobnost, že pátá vytažená koule bude černá?

Řešení. Spočítáme dokonce obecnější úlohu. Totiž pravděpodobnost toho, že i -tá vytažená koule bude černá, je stejná pro všechna i , $1 \leq i \leq 16$. Můžeme si totiž představit, že vytáhneme postupně všechny koule. Každá taková posloupnost vytažených koulí (od první vytažené koule po poslední), složená z pěti bílých, pěti červených a šesti černých koulí, má stejnou pravděpodobnost vytažení a pro výpočet hledané pravděpodobnosti můžeme opět použít model klasické pravděpodobnosti. Zmíněných posloupností je $P(5, 5, 6) = \frac{16!}{5! \cdot 5! \cdot 5!}$. Počet posloupností, kde na i -tém místě je černá koule, zbytek libovolný, je tolik, kolik je libovolných posloupností pěti bílých, pěti červených a pěti černých koulí, tedy $P(5, 5, 5) = \frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!}$. Celkem tedy je hledaná pravděpodobnost

$$\frac{P(5, 5, 5)}{P(5, 5, 6)} = \frac{\frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!}}{\frac{16!}{5! \cdot 5! \cdot 5!}} = \frac{3}{8}.$$

\square

1.53. V jisté zemi mají parlament, ve kterém zasedá 200 poslanců. Dvě hlavní politické strany, které v zemi existují, si při „volbách“ házejí o každý poslanecký mandát zvlášť mincí. Každá z těchto stran má



DŮKAZ. Aby se výše naznačený postup stal důkazem, je zapotřebí si ujasnit, že skutečně všechny korekce, tak jak jsou popsány, jsou skutečně s koeficienty jedna. Místo toho můžeme snáze dát dohromady formálnější důkaz matematickou indukcí přes počet k jevů, jejichž pravděpodobnosti sčítáme. Zkuste si průběžně porovnávat oba postupy, mělo by to vést k vyjasnění, co to znamená „dokázat“ a co „porozumět“.

Pro $k = 1$ tvrzení zjevně platí, vztah pro $k = 2$ je totožný s rovností (1.11) a tu jsme pro obecné pravděpodobnostní funkce již dokázali také.

Předpokládejme tedy, že věta platí pro všechny počty množin až do pevně zvoleného $k \geq 1$. Nyní můžeme pracovat v indukčním kroku se vztahem pro $k + 1$ jevů, když sjednocení prvních k jevů bereme jako A ve vzorci (1.11) výše, zatímco zbývající jev hraje roli B :

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{k+1} A_i) &= P((\cup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}) \\ &= \sum_{j=1}^k \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}) \right) \\ &\quad + P(A_{k+1}) - P((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1}). \end{aligned}$$

To už připomíná formuli pro $k + 1$ sčítaných jevů, nicméně nám ve velké sumě chybějí všechny výrazy obsahující A_{k+1} a člen s pravděpodobností současného nastoupení všech jevů. Zato nám však přebývá poslední člen. Tento člen výrazu můžeme nahradit výrazem

$$-P((A_1 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1}))$$

a pro tento výraz opět použít indukční předpoklad, tj. formuli ve větě. Při troše trpělivosti (a dostatečně velkém pápíru na rozepsání všech členů) ověříme, že tím právě přidáme všechny dosud chybějící členy. \square

1.18. Princip inkluze a exkluze. Speciálním případem předchozí věty je případ klasické pravděpodobnosti, kdy všechny konečné podmnožiny základního prostoru jsou jevy a všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost. Ve vzorci z předchozí věty pak všechny pravděpodobnosti dávají právě počet prvků příslušných podmnožin, až na společný faktor $\frac{1}{n}$, kde n je počet prvků základního prostoru.

Takto můžeme z věty 1.17 vyčíst následující tvrzení pro mohutnosti obecné konečné množiny M a jejích podmnožin A_1, \dots, A_k . Jako obvykle píšeme $|M|$ pro počet prvků množiny M .

Samozřejmě pro konečnou množinu M a její podmnožiny platí

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| = |M| - |\cup_{i=1}^k A_i|.$$

Nyní můžeme dosadit z předchozí věty za mohutnost sjednocení na pravé straně a dostáváme tvrzení, kterému se říká

princip inkluze a exkluze.

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| = |M| + \sum_{j=1}^k \left((-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| \right).$$

Opět je snadné nakreslit si tvrzení pro dvě nebo tři množiny, viz obrázek před větou 1.17.

1.19. Nezávislé jevy. Vraťme se na chvíli k jednoduchému modelu dokonalé hrací kostky. Bude nás zajímat, jak mohou být jevy závislé.

Např. pravděpodobnost, že nastanou zároveň jevy „padne liché číslo“ a „padne alespoň trojka“, je $\frac{1}{3}$. To je totéž jako $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, tedy součin pravděpodobností jednotlivých jevů. To odpovídá představě, že můžeme nezávisle testovat obě podmínky a výsledná pravděpodobnost současného splnění bude dána součinem pravděpodobností dílčích. Naopak, jestliže budeme uvažovat neslučitelné jevy, jako jsou např. „padne sudé číslo“ a „padne liché číslo“, bude pravděpodobnost současného výskytu obou nulová, zatímco součin dílčích pravděpodobností nulový není. To odpovídá představě, že tyto dva jevy musí být závislé, protože výskyt jednoho z nich ten druhý už vylučuje. Samozřejmě může nastávat slabší závislost, např. jev „padne liché číslo“ je důsledkem jevu „padne trojka“ a proto také není dána pravděpodobnost společného výskytu těchto dvou jevů pomocí součinu.

Pro pravděpodobnosti P na libovolných jevových polích řekneme že jevy A a B jsou *stochasticky nezávislé* jestliže platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Zkusme ale tutéž hru s kostkou s více jevy, třebaš jev A „padne liché číslo“, jev B „padne alespoň 3“ a jev C „padne nejvýše 3“. Pravděpodobnosti jsou $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$, ale po dvojicích dostáváme např. $P(A \cap C) = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

Obecně tedy definujeme nezávislé jevy takto:

Definice. Uvažme libovolný pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) a v něm k jevů A_1, \dots, A_k . Řekneme, že tyto jevy jsou *stochasticky nezávislé* (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže pro libovolné z nich vybrané jevy $A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}$, $1 \leq \ell \leq k$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_\ell}).$$

Zjevně je každý podsystem stochasticky nezávislých jevů opět stochasticky nezávislý. Dále si pro dva stochasticky nezávislé jevy A, B spočtěme

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

přiděleno jednu stranu mince. Té straně, jejíž strana mince padne, náleží mandát, o který se právě losovalo. Jaká je pravděpodobnost, že každá ze stran získá 100 mandátů? (mince je „pocitivá“)

Řešení. Všech možných výsledků losování (uvažovaných jako dvousetčlenné posloupnosti rubů a líců) je 2^{200} . Pokud každá strana získá právě sto mandátů, je ve vylosované posloupnosti právě sto líců a sto rubů. Takových posloupností je $\binom{200}{100}$ (taková posloupnost je jednoznačně určena výběrem sto členů z dvou set možných, na kterých budou např. líce). Celkem je hledaná pravděpodobnost

$$\frac{\binom{200}{100}}{2^{200}} = \frac{200!}{100! \cdot 100!} \doteq 0,056.$$

□

Následující příklad je jednoduchým modelem, který odhaduje pravděpodobnost úmrtí osoby při dopravní nehodě.

1.54. Ročně zahyne na silnicích v ČR přibližně 1200 českých občanů. Určete pravděpodobnost, že někdo z vybrané skupiny pěti set Čechů zemře v následujících deseti letech při dopravní nehodě. Předpokládejte pro zjednodušení, že každý občan má v jednom roce stejnou „šanci“ zemřít při dopravní nehodě a to $1200/10^7$.

Řešení. Spočítejme nejprve pravděpodobnost, že jeden vybraný člověk v následujících deseti letech **nezahyne** při dopravní nehodě. Pravděpodobnost, že nezahyne v jednom roce, je $(1 - \frac{12}{10^5})$. Pravděpodobnost, že nezahyne v následujících deseti letech, je pak $(1 - \frac{12}{10^5})^{10}$. Pravděpodobnost, že v následujících deseti letech nezahyne nikdo z daných pěti set lidí, je opět podle pravidla součinu (jedná se o nezávislé jevy) $(1 - \frac{12}{10^5})^{5000}$. Pravděpodobnost jevu opačného, tedy toho, že někdo z vybraných pěti set lidí zahyne, je tedy

$$1 - \left(1 - \frac{12}{10^5}\right)^{5000} \doteq 0,4512.$$

□

Poznámka. Model, který jsme použili v předchozím příkladu k popisu zadané situace, je pouze přibližný. Problém spočívá v podmínce, že každý občan z vyšetřovaného vzorku má stejnou pravděpodobnost toho, že v průběhu roku zahyne, kterou jsme odhadli z počtu usmrčených osob za rok. Počet tragických nehod se totiž rok od roku mění a i kdyby se neměnil, tak se mění populace. Ukažme si jednu s nepřesností příkladu na jiném způsobu řešení: zahyne-li 1200 osob za rok, tak za deset let zahyne 12000. Pravděpodobnost toho, že konkrétní člověk zahyne v průběhu deseti let tedy můžeme odhadnout i zlomkem $12000/10^7$. Pravděpodobnost, že konkrétní osoba nezahyne v průběhu 10 let je tedy $(1 - \frac{12}{10^4})$ (to jsou první dva členy binomického rozvoje

$(1 - \frac{12}{10^5})^{10}$). Celkem dostáváme anologicky jako v předchozím řešení odhad pravděpodobnosti

$$1 - \left(1 - \frac{12}{10^4}\right)^{500} \doteq 0,4514.$$

Vidíme, že oba odhady jsou velmi blízké.

Snaha použít matematických znalostí k výhře v nejrůznějších hazardních hrách je velmi stará. Podívejme se na jednoduchý příklad.

1.55. Alešovi zbylo 2500 Kč z pořádání tábora. Aleš není žádný nouma: 50 Kč přidal z kasičky a rozhodl se jít hrát ruletu na **automaty** Aleš sází pouze na barvu. Pravděpodobnost výhry při sázce na barvu je $18/37$. Začíná sázet na 10 Kč a pokud prohraje, v další sázce vsadí dvojnásobek toho, co v předchozí (pokud na to ještě má, pokud ne, tak končí s hrou – byť by měl ještě peníze na nějakou menší sázku). Pokud nějakou sázku vyhraje, v následující sázce hraje opět o 10 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že při tomto postupu vyhraje dalších 2550 Kč? (jakmile bude 2550 Kč v plusu, tak končí)

Řešení. Nejprve spočítejme, kolikrát po sobě může Aleš prohrát. Začíná-li s 10 Kč, tak na n vsazení potřebuje

$$10 + 20 + \dots + 10 \cdot 2^{n-1} = 10 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right) = 10 \cdot \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = 10 \cdot (2^n - 1).$$

Jak snadno nahlédneme, číslo 2550 je tvaru $10(2^n - 1)$ a to pro $n = 8$. Aleš tedy může sázet osmkrát po sobě bez ohledu na výsledek sázky, na devět sázek by potřeboval již $10(2^9 - 1) = 5110$ Kč a to v průběhu hry nikdy mít nebude (jakmile bude mít 5100 Kč, tak končí). Aby tedy jeho hra skončila neúspěchem, musel by prohrát osmkrát v řadě. Pravděpodobnost prohry při jedné sázce je $19/37$, pravděpodobnost prohry v osmi po sobě následujících (nezávislých) sázkách je tedy $(19/37)^8$. Pravděpodobnost, že v těchto osmi hrách vyhraje 10 Kč (při daném postupu) je tedy $1 - (19/37)^8$. Na to, aby vyhrál 2500 Kč, potřebuje 255 krát vyhrát po desetikoruně. Tedy opět podle pravidla součinu je pravděpodobnost výhry

$$\left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^8\right)^{255} \doteq 0,29.$$

Tedy pravděpodobnost výhry je nižší, než kdyby vsadil rovnou vše na jednu barvu. \square

1.56. Samostatně si můžete vyzkoušet spočítat předchozí příklad za předpokladu, že Aleš sází stejnou metodou jako v předchozím příkladě, končí však až v okamžiku, kdy nemá žádné peníze (pokud nemá na vsazení dvojnásobku částky prohrané v předchozí sázce, ale má ještě nějaké peníze, začíná sázet znovu od 10 Kč).

Odtud už snadno dovodíme, že záměnou jednoho nebo více stochasticky nezávislých jevů za jejich opačné jevy obdržíme opět stochasticky nezávislé jevy.

Často je potřebná pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden ze stochasticky nezávislých jevů, tzn. hledáme $P(A_1 \cup \dots \cup A_k)$. Můžeme pak použít elementární vlastnosti množinových operací, tzv. de Morganova pravidla,

$$\begin{aligned} (\cup_{i \in I} A_i)^c &= \cap_{i \in I} A_i^c \\ (\cap_{i \in I} A_i)^c &= \cup_{i \in I} A_i^c \end{aligned}$$

a dostáváme:

$$(1.12) \quad P(A_1 \cup \dots \cup A_k) = 1 - P(A_1^c \cap \dots \cap A_k^c) = 1 - (1 - P(A_1)) \dots (1 - P(A_k)).$$

1.20. Podmíněná pravděpodobnost. Míru závislosti dvou jevů můžeme přeformulovat s představou, že zkoumáme jeden z nich za podmínky, že druhý nastal. U nezávislých by podmínka neměla mít žádný vliv. Např. „jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?“. Formalizovat takový postup umíme následovně.



PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

Definice. Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli \mathcal{A} v pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . *Podmíněná pravděpodobnost* $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k hypotéze H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Jak je vidět přímo z definice, hypotéza H a jev A jsou skutečně nezávislé tehdy a jen tehdy, je-li $P(A) = P(A|H)$. Přímo z definice také vyplývá tzv. „věta o násobení pravděpodobností“. Máme-li dva jevy A_1, A_2 splňující $P(A_1 \cap A_2) > 0$, potom

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)P(A_1|A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

Všechna tato čísla vyjadřují pravděpodobnost toho, že nastanou oba jevy A_1 i A_2 , jenom jinými způsoby. Například v posledním případě nejprve sledujeme, zda nastane první jev. Potom za předpokladu, že ten první nastal, sledujeme zda nastane i ten druhý. Podobně, pro tři jevy A_1, A_2, A_3 splňující $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) > 0$, dostaneme

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

Slovy to lze opět popsat tak, že pravděpodobnost výskytu všech tří jevů zároveň můžeme spočítat tak, že se nejprve zabýváme výskytem pouze prvního z nich, potom druhého za předpokladu, že první už nastal a naposledy třetího za předpokladu, že oba předešlé jevy již nastaly.

Máme-li obecný počet k jevů A_1, \dots, A_k splňujících $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$, pak věta říká následující:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}).$$

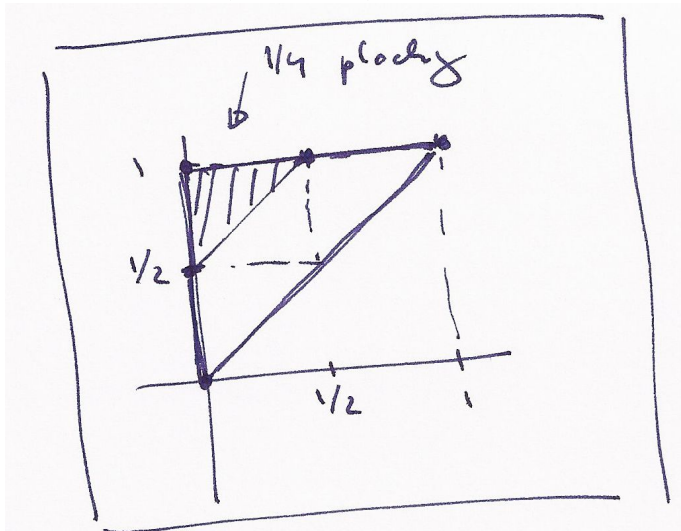
Skutečně, dle předpokladu jsou i pravděpodobnosti všech průniků, které jsou brány ve výrazu za hypotézy, nenulové. Pokrácením čitatele a jmenovatele získáme i napravo právě pravděpodobnost jevu odpovídajícího průniku všech uvažovaných jevů.

1.21. Geometrická pravděpodobnost. V praktických problémech se často setkáváme s daleko složitějšími modely, kde základní prostor není konečnou množinou. Nemáme momentálně k dispozici ani základní nástroje pro dostatečné zobecnění pojmu pravděpodobnosti, nicméně můžeme uvést alespoň jednoduchou ilustraci.



Uvažme rovinu \mathbb{R}^2 dvojic reálných čísel a v ní podmnožinu Ω se známým obsahem $\text{vol } \Omega$ (symbol „vol“ je od anglického „volume“, tj. obsah/objem). Příkladem může sloužit třeba jednotkový čtverec. Náhodné jevy budou reprezentovány podmnožinami $A \subset \Omega$ a za jevové pole \mathcal{A} bereme nějaký vhodný systém podmnožin, u kterých umíme určit jejich obsah. Nastoupení nebo nenastoupení jevu je dáno výběrem bodu v Ω , kterým se trefíme nebo netrefíme do množiny reprezentující jev A .

Uvažme jako příklad problém, kdy náhodně vybereme dvě hodnoty $a < b$ v intervalu $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Všechny hodnoty a i b jsou stejně pravděpodobné a otázka zní „jaká je pravděpodobnost, že interval (a, b) bude mít velikost alespoň jedna polovina?“. Volba čísel a, b je volbou libovolného bodu $[a, b]$ ve vnitřku trojúhelníku Ω s hraničními vrcholy $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$ (viz obrázek).



Úlohu si můžeme představit jako popis problému, kdy se hodně unavený účastník večírku nad ránem pokouší dvěma řezy rozdělit párek na tři díly pro sebe a své dva kamarády. Jaká je pravděpodobnost, že se na někoho dostane aspoň půlka?

Odpověď je docela jednoduchá: Podobně jako u klasické pravděpodobnosti definujeme pravděpodobnostní funkci $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$P(A) = \frac{\text{vol } A}{\text{vol } \Omega},$$

1.57. Podmíněná pravděpodobnost. Nyní si procvičme tzv. „podmíněnou“ pravděpodobnost (viz (??)).

1.58. Jaká je pravděpodobnost toho, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7, víme-li, že ani na jedné z kostek nepadlo číslo 2?

Řešení. Označme jako B jev, že ani na jedné kostce nepadne dvojka, jev „padne součet 7“ označme jako A . Množinu všech možných výsledků budeme značit opět jako Ω . Pak

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Číslo 7 může padnout čtyřmi různými způsoby, pokud nepadne dvojka, tedy $|A \cap B| = 4$, $|B| = 5 \cdot 5 = 25$, tedy

$$P(A|B) = \frac{4}{25}.$$

Všimněme si, že $P(A) = \frac{1}{6}$, tedy jevy A a B jsou závislé. \square

1.59. Michal má dvě poštovní schránky, jednu na gmail.com a jednu na seznam.cz. Uživatelské jméno má stejné na obou serverech, hesla různá (ale nepamatuje si, které heslo má na kterém serveru). Při zadávání hesla při přístupu do schránky se splete s pravděpodobností 5% (tj. jestliže chce napsat zadat jemu známé slovo jako heslo, tak jej s pravděpodobností 95% skutečně správně na klávesnici zadá). Michal zadal na serveru seznam.cz jméno a heslo a server mu oznámil, že něco není vpořádku. Jaká je pravděpodobnost, že chtěl zadat správné heslo, ale pouze se „překlepnul“ při zadávání? (Předpokládáme, že uživatelské jméno zadá vždy bez chyby.)

Řešení. Označme A jev, že Michal fyzicky zadal na serveru seznam.cz špatné heslo. Tento jev je sjednocením dvou disjunktních jevů:

A_1 : chtěl zadat správné heslo a přepsal se,

A_2 : chtěl zadat špatné heslo (to z gmail.com) a buď se přepsal nebo ne.

Hledáme tedy podmíněnou pravděpodobnost $P(A_1|A)$, ta je podle vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost rovna:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)},$$

potřebujeme tedy určit pravděpodobnosti $P(A_1)$ a $P(A_2)$. Jev A_1 je konjunkcí (průnikem) dvou nezávislých jevů: Michal chtěl zadat správné heslo a Michal se při zadávání přepsal. Dle zadání je pravděpodobnost prvního z nich $1/2$, druhého $1/20$, celkem $P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$ (pravděpodobnosti násobíme, protože se jedná o nezávislé jevy). Dále je ze zadání $P(A_2) = \frac{1}{2}$. Celkem $P(A) = P(A_1) + P(A_2) =$

$\frac{1}{40} + \frac{1}{2} = \frac{21}{40}$, a můžeme vyčíslit:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{21}{40}} = \frac{1}{21}.$$

□

Geometrická pravděpodobnost.

Metodu *geometrické pravděpodobnosti* můžeme použít v případě, že daný základní prostor sestává z nekonečně mnoha elementárních jevů, které dohromady vyplňují nějakou oblast na přímce, rovině, prostoru (u které umíme určit její délku, obsah, objem, ...). Předpokládáme, že pravděpodobnost toho, že nastane elementární jev z určité podoblasti je rovna poměru její velikosti (délce, obsahu, ...) k velikosti celého základního prostoru.

1.60. Z Těšína vyjíždí vlaky co půl hodinu (směrem na Bohumín) a z tohoto směru přijíždějí také každé půl hodiny. Předpokládejme, že vlaky se mezi těmito dvěma stanicemi pohybují rovnoměrnou rychlostí 72 km/h a jsou dlouhé 100 metrů, cesta trvá 30 minut, vlaky se míjejí někde na trase. Nevyspalý hazardér Jarek si vybere jeden z těchto vlaků a během cesty z Těšína do Bohumína náhodně vystrčí hlavu z okna na pět vteřin nad kolejiště pro protější směr. Jaká je pravděpodobnost, že mu bude uražena? (Předpokládáme, že jiné než zmíněné vlaky na trati nejezdí.)

Řešení. Vzájemná rychlost protijedoucích vlaků je 40 m/s, protijedoucí vlak mine Jardovo okno za dvě a půl sekundy. Prostor všech možností je tedy interval $(0, 1800\text{ s})$, prostor „příznivých“ možností je potom interval délky 7,5 s ležící někde uvnitř předchozí úsečky. Pravděpodobnost uražení hlavy je tedy $7,5/1800 \doteq 0,004$. □

1.61. Jednou denně někdy mezi osmou hodinou ranní a osmou hodinou večerní vyjíždí náhodně autobus z Koločavy do Užhorodu. Jednou denně ve stejném časovém rozmezí jezdí jiný autobus náhodně opačným směrem. Cesta tam trvá pět hodin, zpět též pět hodin. Jaká je pravděpodobnost, že se autobusy potkají, jezdí-li po stejné trase?

Řešení. Prostor všech možných jevů je čtverec 12×12 , Označíme-li doby odjezdu obou autobusů x , resp. y , pak se tyto na trase potkají právě když $|x - y| \leq 5$. Tato nerovnost vymezuje v daném čtverci oblast „příznivých jevů“. Obsah zbylé části spočítáme přímo jednodušeji, neboť je sjednocením dvou pravouhlých rovnoramenných trojúhelníků o odvěsnách délky 7, tedy je roven 49, obsah části odpovídající „příznivým jevům“ je tedy $144 - 49 = 95$, celkem je hledaná pravděpodobnost $p = \frac{95}{144} \doteq 0,66$.

kde A jsou podmnožiny v rovině, které odpovídají námi vybraným jevům.

Potřebujeme tedy znát plochu podmnožiny, která odpovídá bodům s $b \geq a + \frac{1}{2}$, tj. vnitřku trojúhelníku A ohraničeného vrcholy $[0, \frac{1}{2}]$, $[0, 1]$, $[\frac{1}{2}, 1]$. Evidentně dostáváme $P(A) = \frac{1}{4}$.

Zkuste si samostatně odpovědět na otázku „pro jakou požadovanou minimální délku intervalu (a, b) dostaneme pravděpodobnost jedna polovina?“.

1.22. Metody Monte Carlo. Jednou z účinných výpočetních metod přibližných hodnot je naopak simulace známé takovéto pravděpodobnosti pomocí relativní četnosti nastoupení vhodně zvoleného jevu. Např. známá formule pro obsah kruhu o daném poloměru říká, že obsah jednotkového kruhu je roven právě konstantě



$$\pi = 3,1415\dots,$$

kteřá vyjadřuje poměr obsahu kruhu a druhé mocniny jeho poloměru. (Tady si také povšimněme východiska, které jsme nedokázali – proč by měl být obsah kruhu roven konstantnímu násobku druhé mocniny poloměru? Matematicky to budeme umět ukázat, až zvládneme tzv. integrování. Experimentálně si to ale můžeme ověřit níže uvedeným postupem s různými velikostmi strany čtverce.)

Pokud zvolíme za Ω jednotkový čtverec a za A průnik Ω a jednotkového kruhu se středem v počátku, pak vol $A = \frac{1}{4}\pi$. Máme-li tedy spolehlivý generátor náhodných čísel mezi nulou a jedničkou a počítáme relativní četnosti, jak často bude vzdálenost bodu $[a, b]$ (určeného vygenerovanou dvojicí a, b) od počátku menší než jedna, tj. $a^2 + b^2 < 1$, pak výsledek bude při velkém počtu pokusů s velkou jistotou dobře aproximovat číslo $\frac{1}{4}\pi$.

Numerickým postupům založeným na tomto principu se říká *metody Monte Carlo*.

5. Geometrie v rovině

V posledních odstavcích jsme intuitivně používali elementární pojmy z geometrie reálné roviny. Teď budeme podrobněji zkoumat, jak se vypořádávat s potřebou popisovat „polohu v rovině“, resp. dávat do souvislosti polohy různých bodů roviny.

Nástrojem k tomu budou opět zobrazení, tentokrát to ale budou velice speciální pravidla přiřazující dvojicím hodnot (x, y) dvojice $(w, z) = F(x, y)$. Zároveň půjde o předzvěst úvah z oblasti matematiky, které se říká *lineární algebra* a kterou se budeme podrobně zabývat v dalších třech kapitolách.

1.23. Vektorový prostor \mathbb{R}^2 . Podívejme se na „rovinu“ jakožto na množinu dvojic reálných čísel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Budeme jim říkat *vektory* v \mathbb{R}^2 . Pro takové vektory umíme definovat sčítání „po složkách“, tj. pro vektory $u = (x, y)$ a

$v = (x', y')$ klademe

$$u + v = (x + x', y + y').$$

Protože pro jednotlivé složky platí všechny vlastnosti komutativní grupy, evidentně budou tyto vlastnosti platit i pro naše nové sčítání vektorů. Zejména tedy máme tzv. *nulový vektor* $0 = (0, 0)$, jehož přičtením k jakémukoliv vektoru v dostaneme opět vektor v . Záměrně teď používáme tentýž symbol 0 pro vektor i jeho skalární složky — z kontextu je vždy jasné, jakou „nulu“ máme kdy na mysli.

Dále definujeme násobení vektorů a skalárů tak, že pro $a \in \mathbb{R}$ a $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ klademe

$$a \cdot v = (ax, ay).$$

Zpravidla budeme znak \cdot vynechávat a pouhé zřetězení znaků av bude označovat skalární násobek vektoru. Přímo se ověří další vlastnosti pro násobení skaláry a, b a sčítání vektorů u, v , např.

$$a(u+v) = au+av, (a+b)u = au+bu, a(bu) = (ab)u,$$

□

kde opět používáme stejný znak plus pro sčítání vektorů i skalárů.

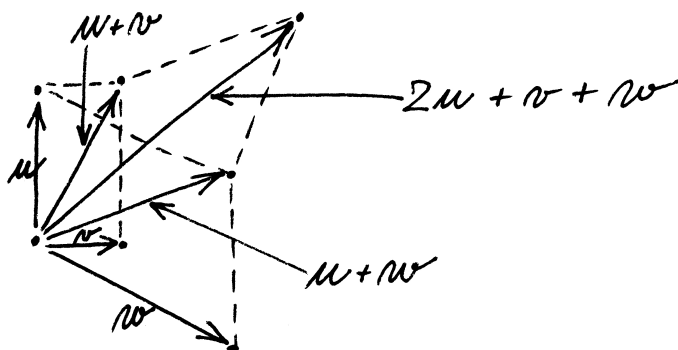
Tyto operace si můžeme dobře představit, jestliže uvažujeme vektory v jako šipky začínající v počátku $0 = [0, 0]$ a končící v bodě $[x, y]$ v rovině.



Takové šipky pak můžeme přikládat jednu za druhou a to přesně odpovídá sčítání vektorů.

Násobení skalárem a pak odpovídá natažení dané šipky na a -násobek.

LINEÁRNÍ KOMBINACE



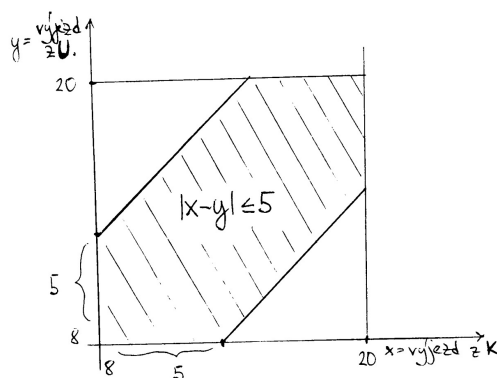
Nyní můžeme udělat podstatný krok: jestliže si zapamatujeme dva významné vektory $e_1 = (1, 0)$ a $e_2 = (0, 1)$, pak každý jiný vektor dostaneme jako



$$u = (x, y) = x e_1 + y e_2.$$

Výrazu napravo říkáme *lineární kombinace vektorů* e_1 a e_2 . Dvojici vektorů $\underline{e} = (e_1, e_2)$ říkáme *báze* vektorového prostoru \mathbb{R}^2 .

Jestliže si ale vybereme jiné dva vektory u, v , které nejsou jeden násobek druhého, tj. jinou bázi v \mathbb{R}^2 , budeme moci udělat totéž. Lineární kombinace $w = x u + y v$ nám

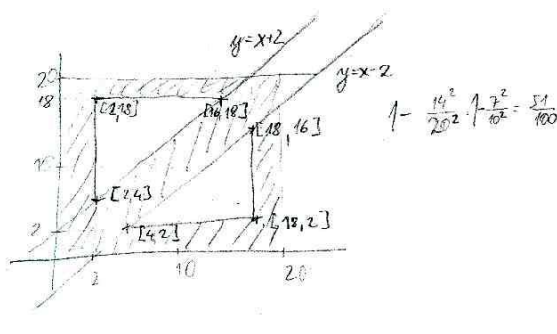


1.62. Dvoumetrová tyč je náhodně rozdělena na tři díly. Určete pravděpodobnost, že alespoň jeden díl bude nejvýše 20 cm dlouhý.

Řešení. Náhodné rozdělení tyče na tři díly je dáno dvěma body řezu, čísla x a y (nejprve tyč rozřízneme ve vzdálenosti x od počátku, nehýbeme s ní a dále ji rozřízneme ve vzdálenosti y od počátku). Pravděpodobnostní prostor je tedy čtverec C o straně 2 m. Umístíme-li čtverec C tak, aby dvě jeho strany ležely na kartézských osách v rovině, tak podmínka, že alespoň jeden díl má být nejvýše 20 cm dlouhý, nám vymezuje ve čtverci následující oblast O :

$$O = \{(x, y) \in C \mid (x \leq 20) \vee (x \geq 180) \vee (y \leq 20) \vee (y \geq 180) \vee (|x - y| \leq 20)\}.$$

Jak snadno nahlédneme, zaujímá takto vymezená oblast $\frac{51}{100}$ obsahu čtverce.



□

E. Geometrie v rovině

1.63. Napište obecnou rovnici přímky $p : x = 2 - t, y = 1 + 3t, t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Vektor $(-1, 3)$ je směrovým vektorem přímky p . Proto vektor $(3, 1)$ je jejím normálovým vektorem a obecná rovnice přímky p má tvar

$$3x + y + c = 0$$

pro jisté $c \in \mathbb{R}$. Tuto konstantu c určíme dosazením $x = 2, y = 1$ (přímka p prochází bodem $[2, 1]$ daným volbou $t = 0$). Získáváme tak $c = -7$ a následně výsledek $3x + y - 7 = 0$. \square

1.64. Je dána přímka

$$p : [2, 0] + t(3, 2), t \in \mathbb{R}.$$

Určete její obecnou rovnici a nalezněte průnik s přímkou

$$q : [-1, 2] + s(1, 3), s \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Souřadnice bodů na přímce jsou dány dle daného parametrického zadání jako $x = 2 + 3t$ a $y = 0 + 2t$. Vyloučením parametru t ze soustavy těchto dvou rovnic dostáváme obecnou rovnici přímky p :

$$2x - 3y - 4 = 0.$$

Průnik s přímkou q získáme dosazením parametrického vyjádření bodů přímky q , tedy $x = -1 + s$ a $y = 2 + 3s$, do obecné rovnice přímky p :

$$2(-1 + s) - 3(2 + 3s) - 4 = 0,$$

odkud $s = -12/7$ a dosazením do parametrického vyjádření přímky q dostáváme souřadnice průsečíku P :

$$P = \left[-\frac{19}{7}, -\frac{22}{7}\right].$$

\square

1.65. Stanovte průsečík přímek

$$p : x + y - 4 = 0, \quad q : x = -1 + 2t, y = 2 + t, t \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Nejdříve poznamenejme, že směrovým vektorem přímky p je $u_p = (1, -1)$ (libovolný nenulový vektor kolmý k vektoru $(1, 1)$ z obecné rovnice přímky) a směrovým vektorem přímky q je $u_q = (2, 1)$. To, že vektor u_p není násobkem vektoru u_q , pak zaručuje, že se přímky protínají (přímky nejsou rovnoběžné). Bod $[x, y]$ je hledaným průsečíkem, právě když jeho souřadnice vyhovují rovnici přímky p a současně existuje reálné číslo t , pro které

$$x = -1 + 2t, \quad y = 2 + t.$$

Dosadíme-li odsud do obecné rovnice p , obdržíme

pro všechny různé dvojice (x, y) dá právě všechny vektory w v rovině.



Nakonec můžeme nahlížet vektory jako naše šipky v abstraktní poloze, tj. zapomeneme na ztotožnění bodů v rovině s dvojicemi čísel. Jenom budou naše šipky všechny „upoutány“ v bodě 0 , který je zároveň nulovým vektorem. Zůstanou nám operace sčítání a násobení skaláry a teprve volbou báze e_1, e_2 ztotožníme naši rovinu šipek s \mathbb{R}^2 .

1.24. Afinní rovina. Když si pevně vyvolíme nějaký vektor $u \in \mathbb{R}^2$, můžeme jej přičítat (tj. coby šipku přikládat) k libovolnému bodu $P = [x, y]$. Máme tak tedy s pevným vektorem definované *posunutí*, které každý bod roviny P zobrazí na $P + u$.



Zkusme teď úplně zapomenout na souřadnice a vnímat celou rovinu jako množinu, na které fungují naše posunutí. Takovou množinu $A = \mathbb{R}^2$ si můžeme představit z pohledu pozorovatele, který sedí v některém pevně zvoleném místě (můžeme mu říkat třeba bod $O = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$). Předpokládejme, že ji vnímá jako nekonečnou desku bez jakýchkoliv zvolených měřítek a popisů a jenom ví, co to znamená posunout se o libovolný násobek nějakého vektoru $u \in \mathbb{R}^2$. Takové rovině budeme říkat „afinní rovina“.

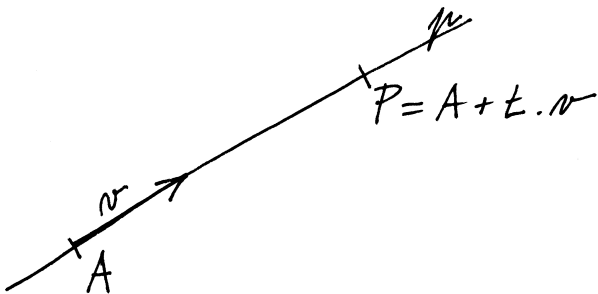
Aby mohl vidět kolem sebe „dvojice reálných čísel“, musí si vybrat nějaký bod E_1 , kterému řekne „bod $[1, 0]$ “ a jiný bod E_2 , kterému začne říkat „bod $[0, 1]$ “. Jinými slovy, zvolí si bázi $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ mezi vektory posunutí. Do všech ostatních se pak dostane tak, že poskočí „ a -krát ve směru e_1 “ a pak „ b -krát ve směru e_2 “ a takovému bodu bude říkat „bod $[a, b]$ “. Pokud to bude dělat obvyklým způsobem,

nebude výsledek záviset na pořadí, tzn. může také napřed jít b -krát ve směru e_2 a pak teprve ve směru e_1 .

To, co jsme popsali, se nazývá volba (afinního) souřadného systému v rovině, bod O je jeho počátkem, a obecně každý bod P roviny je ztotožněn s dvojicí čísel $[a, b]$, kterou také budeme psát jako posunutí $P - O$.

Budeme dále pracovat v pevně zvolených souřadnicích, tj. s dvojicemi reálných čísel, ale pro lepší orientaci budeme vektory zapisovat s kulatými závorkami místo hranatých u souřadnic bodů v afinní rovině.

ROVNICE PŘÍMKY



1.24

1.25. Přímky v rovině. Když se náš pozorovatel umí posouvat o libovolný násobek pevného vektoru, pak také ví, co je to *přímka*.



Je to podmnožina $p \subset A$ v rovině taková, že existují bod O a nenulový vektor v takové, že

$$p = \{P \in A; P - O = t \cdot v, t \in \mathbb{R}\}.$$

Popišme si $P = P(t) \in p$ ve zvolených souřadnicích s volbou $v = (\alpha, \beta)$:

$$x(t) = x_0 + \alpha \cdot t, \quad y(t) = y_0 + \beta \cdot t.$$

Protože vektor $v = (\alpha, \beta)$ je nenulový, musí být aspoň jedno z čísel α, β různé od nuly. Když pro určitost předpokládáme, že třeba $\alpha \neq 0$, pak vyloučíme t z parametrického vyjádření pro x a y a jednoduchým výpočtem dostaneme

$$-\beta x + \alpha y = -\beta x_0 + \alpha y_0.$$

To je obecná rovnice přímky

e1.12 (1.13) $ax + by = c,$

se známým vztahem dvojice čísel $(a, b) = (-\beta, \alpha)$ a směrového vektoru přímky $v = (\alpha, \beta)$

e1.13 (1.14) $a\alpha + b\beta = 0.$

$$(-1 + 2t) + (2 + t) - 4 = 0.$$

Této rovnici vyhovuje právě $t = 1$, což dává průsečík se souřadnicemi $x = 1, y = 3$. □

1.66. Najděte obecnou rovnici přímky p , jež prochází bodem $[2, 3]$ a je rovnoběžná s přímkou $x - 3y + 2 = 0$, a parametrickou rovnici přímky q procházející body $[1, 3]$ a $[-2, 1]$.

Řešení. Každá přímka rovnoběžná s přímkou $x - 3y + 2 = 0$ je zadána rovnicí

$$x - 3y + c = 0$$

pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Přímka p prochází bodem $[2, 3]$. Musí tedy platit

$$2 - 3 \cdot 3 + c = 0, \quad \text{tj. } c = 7.$$

Pro přímku q lze ihned uvést její parametrické vyjádření

$$q : [1, 3] + t(1 - (-2), 3 - 1) = [1, 3] + t(3, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

1.67. Zjistěte, zda některé z přímek

$$p_1 : 2x + 3y - 4 = 0, \quad p_2 : x - y + 3 = 0, \quad p_3 : -2x + 2y = -6,$$

$$p_4 : -x - \frac{3}{2}y + 2 = 0, \quad p_5 : x = 2 + t, \quad y = -2 - t, \quad t \in \mathbb{R}$$

(ne)jsou totožné.

Řešení. Je vidět, že

$$-2 \cdot (-x - \frac{3}{2}y + 2) = 2x + 3y - 4.$$

Obecné rovnice p_1 a p_4 tudíž zadávají stejnou přímku. Normálový vektor přímky p_1 je $(2, 3)$, pro přímku p_2 je $(1, -1)$, pro p_3 je $(-2, 2)$ a pro p_5 je $(1, 1)$ (kolmý vektor k vektoru $(1, -1)$). Přímky p_2 a p_3 jsou rovnoběžné (normálový vektor jedné je násobkem normálového vektoru druhé). Další dvojice rovnoběžných přímek neexistují. Neboť soustava

$$x - y + 3 = 0, \quad -2x + 2y + 6 = 0$$

zjevně nemá řešení, přímky p_1 a p_4 tvoří jedinou dvojici totožných přímek. □

1.68. Určete přímku p , která je kolmá k přímce $q : 6x - 7y + 13 = 0$ a která prochází bodem $[-6, 7]$.

Řešení. Protože normálový vektor přímky q je směrový vektor přímky p , můžeme bezprostředně napsat výsledek

$$p : x = -6 + 6t, \quad y = 7 - 7t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

1.69. Udejte příklad čísel $a, b \in \mathbb{R}$, pro něž je vektor u normálovým vektorem přímky AB , je-li $A = [1, 2]$, $B = [2b, b]$, $u = (a - b, 3)$.

Řešení. Směrovým vektorem přímky AB je $(2b - 1, b - 2)$ (tento vektor je vždy nenulový), a proto jejím normálovým vektorem je $(2 - b, 2b - 1)$. Položíme-li

$$2 - b = a - b, \quad 2b - 1 = 3,$$

dostáváme $a = b = 2$. \square

1.70. Určete vzájemnou polohu přímek p, q v rovině, jestliže je $p : 2x - y - 5 = 0$, $q : x + 2y - 5 = 0$. Pokud se jedná o různoběžky, nalezněte souřadnice jejich průsečíku.

Řešení. Z obecných rovnic přímek p, q známe jejich normálové vektory $(2, -1)$, $(1, 2)$. Přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li normálový vektor jedné násobkem normálového vektoru druhé, což zřejmě pro přímky p, q splněno není. Jde tedy o různoběžky. Průsečík nalezneme vyřešením soustavy

$$2x - y - 5 = 0, \quad x + 2y - 5 = 0.$$

Když z první rovnice vyjádříme $y = 2x - 5$ a dosadíme za y do druhé, získáme

$$x + 2(2x - 5) - 5 = 0, \quad \text{tj.} \quad x = 3.$$

Poté snadno určíme $y = 2 \cdot 3 - 5 = 1$. Přímky se tak protínají v bodě $[3, 1]$. \square

laser

1.71. Uvažujme rovinu \mathbb{R}^2 se standardní soustavou souřadnic. Z počátku $[0, 0]$ je vyslán laserový paprsek ve směru $(3, 1)$. Dopadne na zrcadlovou přímku p danou parametricky jako

$$p : [4, 3] + t(-2, 1)$$

a poté se odrazí (úhel dopadu je shodný s úhlem odrazu). V jakém bodě dopadne odražený paprsek na přímku q , danou parametricky jako

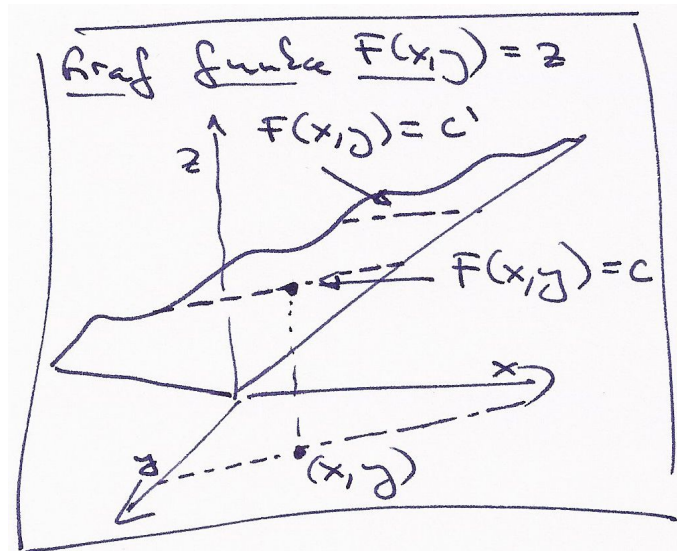
$$q : [7, -10] + t(-1, 6)?$$

1.25

Řešení. Směr paprsku svírá s přímkou p úhel 45° , odražený paprsek tedy bude kolmý na dopadající, jeho směrový vektor bude $(1, -3)$ (Pozor na orientaci! Daný směrový vektor můžeme též získat například zrcadlením (osovou symetrií) podle kolmého vektoru k přímce p .) Paprsek dopadne v bodě $[6, 2]$, odražený paprsek tedy bude mít rovnici

$$[6, 2] + t(1, -3), \quad t \geq 0.$$

Průnik přímky dané odraženým paprskem s přímkou q je bod $[4, 8]$, což je mimo polopřímku, která je daná odraženým paprskem ($t = -2$). Odražený paprsek tedy přímkou q neprotne. \square



Výraz nalevo v rovnici přímky (1.13) můžeme vidět jako skalární funkci F závislou na bodech v rovině a s hodnotami v \mathbb{R} , samu rovnici pak jako požadavek na její hodnotu. Časem uvidíme, že vektor (a, b) je v tomto případě právě směrem, ve kterém F nejrychleji roste. Proto bude směr kolmý na (a, b) právě tím směrem, ve kterém zůstává naše funkce F konstantní. Konstanta c pak určuje, kterou ze všech rovnoběžných přímek rovnice určuje.



Mějme nyní dvě přímky p a q a ptejme se po jejich průniku $p \cap q$. Ten bude popsán jako bod, splňující obě rovnice přímek současně. Pišme je takto

$$(1.15) \quad \begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s. \end{aligned}$$

Opět můžeme levou stranu vnímat jako přiřazení, které každé dvojici souřadnic $[x, y]$ bodů P v rovině přiřadí vektor hodnot dvou skalárních funkcí F_1 a F_2 daných levými stranami jednotlivých rovnic (1.15). Můžeme tedy naše rovnice napsat jako jediný vztah $F(v) = w$, kde F je přiřazení, které vektor v popisující polohu obecného bodu v rovině (v našich souřadnicích) zobrazí na vektor zadaný levou stranou rovnic, a požadujeme, aby se toto zobrazení strefilo do předem zadané hodnoty $w = (r, s)$.

1.26. Lineární zobrazení a matice. Přiřazení F , se kterými jsme pracovali při popisu průniku přímek, mají jednu velice podstatnou společnou vlastnost: respektují operace sčítání a násobení s vektory a skaláry, tj. respektují lineární kombinace:

$$F(a \cdot v + b \cdot w) = a \cdot F(v) + b \cdot F(w)$$

pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^2$. Říkáme, že F je *lineární zobrazení* z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 , a píšeme $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Slovy lze podmínku také vyjádřit tak, že lineární kombinace vektorů se zobrazuje na tutéž lineární kombinaci jejich obrazů, tj. lineární zobrazení jsou ta zobrazení, která zachovávají lineární kombinace.

Se stejným chováním jsme se setkali i v rovnici (1.13) pro přímkou, kde šlo o lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a jeho předepsanou hodnotu c . To je také důvodem, proč jsou hodnoty zobrazení $z = F(x, y)$ na obrázku vyobrazeny jako rovina v \mathbb{R}^3 .

Stručně budeme zapisovat taková zobrazení pomocí tzv. *matic* a jejich násobení. Maticí rozumíme obdélníkové schéma skalárů, např.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

hovoříme o (čtvercové) matici A a (sloupcovém) vektoru v . Jejich násobení definujeme takto:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Podobně, můžeme místo vektoru v zprava násobit jinou maticí B stejného rozměru jako je A . Prostě aplikujeme předchozí formule po jednotlivých sloupcích matice B a obrátíme jako výsledek opět čtvercovou maticí.

Neumíme násobit vektor v zprava maticí A protože nám nevychází počty skalárů na řádcích v s počty skalárů ve sloupcích A . Umíme však napsat vektor w do řádku skalárů (tzv. transponovaný vektor) $w^T = (a \ b)$ a ten zprava našimi maticemi A nebo vektory v již násobit umíme.

Snadno ověříme tzv. asociativitu násobení (propočítejte pro obecné matice A, B a vektor v detailně):

$$(A \cdot B) \cdot v = A \cdot (B \cdot v).$$

Místo vektoru v můžeme samozřejmě psát i libovolnou matici C správného rozměru. Stejně snadno je vidět i distributivita

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

neplatí však komutativita a existují „dělitelé nuly“. Např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zejména vidíme, že násobení vektorů pevnou maticí zadává lineární zobrazení, a naopak, pomocí hodnot lineárního zobrazení F na dvou pevných vektorech báze už dostaneme celé příslušné zobrazení. Body v rovině jsou tedy obecně vzory hodnot lineárních zobrazení F roviny do roviny, přímky jsou obecně vzory hodnot lineárních zobrazení z roviny do reálné přímky \mathbb{R} . S maticemi a vektory umíme rovnice pro přímky a body psát

$$w^T \cdot v = (a \ b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = u.$$

Samozřejmě, ve zvláštních situacích tomu tak být nemusí. Tak třeba průnikem dvou stejných přímek je opět sama přímka (a vzorem vhodné hodnoty pro takové lineární zobrazení bude celá přímka), nulové zobrazení má za vzor nuly

Poznámka. Odras paprsku v třírozměrném prostoru je studován v příkladu 3.47.

1.72. Z bodu $[-2, 0]$ vyrazila v pravé poledne konstantní rychlostí 1 ms^{-1} ve směru $(3, 2)$ úsečka délky 1. Rovněž v poledne vyrazila z bodu $[5, -2]$ druhá úsečka délky 1 ve směru $(-1, 1)$, ovšem dvojnásobnou rychlostí. Srazí se?

Řešení. Přímky, po kterých se pohybují dané úsečky, můžeme popsat parametrickým vyjádřením:

$$p : [-2, 0] + r(3, 2),$$

$$q : [5, -2] + s(-1, 1).$$

Obecná rovnice přímky p je

$$2x - 3y + 4 = 0.$$

Dosažením parametrického vyjádření přímky q získáme průsečík $P = [1, 2]$.

Nyní se snažme zvolit jediný parametr t pro obě úsečky tak, aby nám odpovídající bod na přímkách p , resp. q , popisoval polohu počátku první, resp. druhé, úsečky v čase t . V čase 0 je první úsečka v bodě $[-2, 0]$, druhá v bodě $[5, -2]$. Za čas t sekund urazí první úsečka t jednotek délky ve směru $(3, 2)$ druhá pak $2t$ jednotek délky ve směru $(-1, 1)$. Odpovídající parametrizace jsou tedy

$$p : [-2, 0] + \frac{t}{\sqrt{13}}(3, 2),$$

$$q : [5, -2] + t\sqrt{2}(-1, 1).$$

Počátek první úsečky dorazí do bodu $[1, 2]$ v čase $t_1 = \sqrt{13}$ s, počátek druhé úsečky v čase $t = 2\sqrt{2}$ s, tedy více než o půl vteřiny dříve. Tedy v době, kdy dorazí do průsečíku P počátek první úsečky, bude již konec druhé úsečky pryč a úsečky se tak nesrazí. \square

1.73. Rovinný fotbalista vystřelí míč z bodu $F = [1, 0]$ ve směru $(3, 4)$ na bránu (úsečku) ohraničenou body $A = [23, 36]$ a $B = [26, 30]$. Směřuje míč do brány?

Řešení. Vzhledem k tomu, že se situace odehrává v prvním kvadrantu, stačí uvažovat směrnice vektorů \vec{FA} , $(3, 4)$, \vec{FB} . Tvoří-li (v tomto pořadí) buď rostoucí nebo klesající posloupnost, míč směřuje na bránu. Tato posloupnost je $36/22, 4/3, 30/25$, což je klesající posloupnost, míč tedy směřuje do brány. \square

1.74. Upravte $(A - B)^T \cdot 2C \cdot u$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Dosažením

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - B)^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

a násobením matic dostáváme

$$(A - B)^T \cdot 2C \cdot u = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

□

1.75. Uvedte příklad matic A a B , pro něž

e1.15

(a) $(A + B) \cdot (A - B) \neq A \cdot A - B \cdot B$;

(b) $(A + B) \cdot (A + B) \neq A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B$.

1.25a

Řešení. Připomeňme, že uvažujeme dvojrozměrné (čtvercové) matice A a B . Pro libovolné matice A a B ovšem platí

$$(A + B) \cdot (A - B) = A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B.$$

Identitu

$$(A + B) \cdot (A - B) = A \cdot A - B \cdot B$$

tak dostaneme, právě když je $-A \cdot B + B \cdot A$ nulovou maticí, tj. právě když matice A a B komutují. Příkladem hledaných matic jsou tedy právě ty dvojice matic, které nekomutují (matice součinu se při záměně pořadí násobených matic změní). Můžeme např. zvolit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

neboť při této volbě je

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.25b

Analogicky pro každou dvojici matic A, B platí

$$(A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B.$$

To znamená, že

$$(A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B + A \cdot B + B \cdot B$$

je splněno tehdy a jenom tehdy, když $A \cdot B = B \cdot A$. Ve druhém případě jsou tak hledané dvojice matic A, B zcela totožné s případem prvním. □

1.76. Rozhodněte, zda jsou zobrazení $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadaná přiřazeními

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x - 3y \\ -2x + 5y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$G: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 2y - 4 \\ 4x - 9y + 3 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

lineární.

Řešení. Pro libovolný vektor $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ můžeme vyjádřit

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad G \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

celou rovinu. V prvním případě to poznáme tak, že jsou nalevo v rovnicích (1.15) stejné výrazy až na skalární násobek (nebo jinak řečeno, řádky matice A jsou stejné až na skalární násobek). V takovém případě buď nebude v průniku příslušných přímek žádný bod (rovnoběžné různé přímky) nebo tam budou všechny body přímky (stejně přímky). Tuto podmínku může vyjádřit tak, že poměry a/c a b/d musí být stejné, neboli

$$(1.16) \quad ad - bc = 0.$$

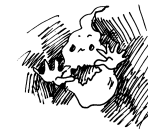
Všimněme si, že toto vyjádření už zahrnuje i případy, kdy c nebo d je nulové.

1.27. Determinant matice. Výrazu nalevo v (1.16) říkáme *determinant* matice A a píšeme pro něj

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Naši diskusi teď můžeme vyjádřit takto:

Tvrzení. *Determinant je skalární funkce det A definovaná na všech maticích A a rovnice $A \cdot v = u$ je jednoznačně řešitelná, právě když je $\det A \neq 0$.*



Zkuste promyslet, že pro tuto úvahu bylo podstatné, že pracujeme s polem skalárů. Například nad celými čísly obecně neplatí. Když prostě spočteme řešení rovnic s celočíselnými koeficienty (tj. matice A má pouze celočíselné vstupy), tak toto řešení celočíselné být nemusí.



1.28. Afinní zobrazení. Podíváme se, jak maticová symbolika umožňuje pracovat s jednoduchými zobrazeními v afinní rovině. Viděli jsme, že násobením maticí je dáno lineární zobrazení. Posunutí v afinní rovině \mathbb{R}^2 o pevný vektor $t = (r, s) \in \mathbb{R}^2$ umíme v maticové formě také snadno zapsat:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto P + t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + r \\ y + s \end{pmatrix}.$$

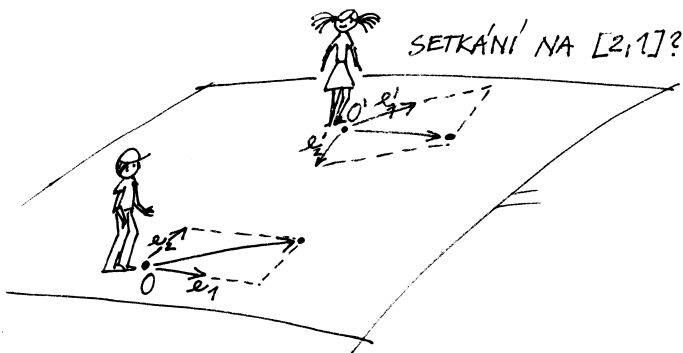
Jestliže k výsledku lineárního zobrazení ještě dovolíme přičíst pevný vektor $t = (r, s)$, pak naše zobrazení bude mít tvar

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot v + t = \begin{pmatrix} ax + by + r \\ cx + dy + s \end{pmatrix}.$$

Takto jsou popsána právě všechna tzv. *afinní zobrazení roviny* do sebe.



Taková zobrazení nám umožní přepočítávání souřadnic vzniklých různými volbami počátků a bází směrů pro posunutí. Co se stane, když náš pozorovatel z odstavce 1.23 bude tutéž rovinu shlížet z jiného bodu nebo si aspoň vybere jiné body E_1, E_2 ? Zkuste si promyslet, že na úrovni souřadnic to skutečně bude právě změna realizovaná pomocí afinního zobrazení. Časem budeme vidět obecné důvody, proč tomu tak je ve všech dimenzích.



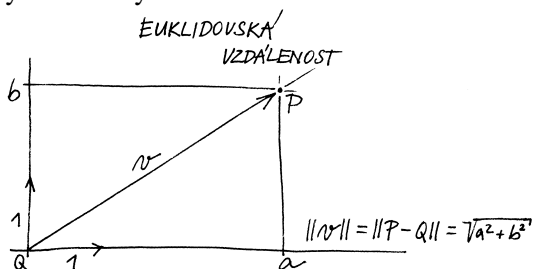
1.26

1.29. Euklidovská rovina. Přidejme nyní schopnost našeho pozorovatele vidět vzdálenosti. Např. může věřit obvyklému vzorci pro velikost vektoru $v = (a, b)$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

v jím zvolených afinních souřadnicích. Okamžitě pak můžeme definovat pojmy jako jsou úhel a otočení v rovině.

Jednoduše si to můžeme představit takto: náš člověk se rozhodne o nějakých bodech E_1 a E_2 , že jsou od něj ve vzdálenosti jedna, a zároveň si řekne, že jsou na sebe kolmé. Vzdálenosti ve směrech souřadných os pak jsou dány příslušným poměrem, obecně používá Euklidovu (nebo Pythagorovu) větu. Odtud vyjde právě výše uvedený vzorec.



Náš pozorovatel roviny může samozřejmě postupovat i jinak. Může použít nějaký standard pro skutečné měření vzdálenosti bodů P a Q v rovině a říci, že to je právě velikost vektoru $Q - P$, který potřebujeme na posunutí z P do Q . Pak si vybere nějaký z vektorů, které skutečně mají velikost 1 a třeba pomocí trojúhelníku o stranách s velikostmi 3, 4 a 5 zkonstruuje kolmý vektor o velikosti jedna a dále pokračuje jako výše.

Euklidovská rovina je afinní rovina s výše zavedeným pojmem vzdálenosti.

1.26a

1.30. Úhel vektorů. Jak jsme již používali při diskusi komplexních čísel coby bodů v rovině, tzv. goniometrická funkce $\cos \varphi$ je dána hodnotou reálné první souřadnice jednotkového vektoru, jehož úhel s vektorem $(1, 0)$ je φ .

Zjevně je pak druhá souřadnice takového vektoru dána reálnou hodnotou $0 \leq \sin \varphi \leq 1$ splňující

$$(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1.$$



Odtud vyplývá, že obě zobrazení jsou afinní. Připomeňme, že afinní zobrazení je lineární, právě když se nulový vektor zobrazí sám na sebe. Neboť

$$F \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

zobrazení F je lineární, zobrazení G nikoli. \square

1.77. Buď dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ (vrcholy jsou označeny pořadě v kladném smyslu) se středem v bodě $S = [1, 0]$ a vrcholem $A = [0, 2]$. Určete souřadnice vrcholu C .

Řešení. Souřadnice vrcholu C získáme otočením bodu A okolo středu S šestiúhelníka o 120° v kladném smyslu:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{pmatrix} (A - S) + S \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + [1, 0] = \left[\frac{3}{2} - \sqrt{3}, -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]. \end{aligned}$$

 \square

1.78. Buď dán rovnostranný trojúhelník s vrcholy $[1, 0]$ a $[0, 1]$ ležící celý v prvním kvadrantu. Určete souřadnice jeho třetího vrcholu.

Řešení. Třetí souřadnice je $[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}]$ (otáčíme bod $[1, 0]$ o 60° kolem bodu $[0, 1]$ v kladném smyslu). \square

1.79. Určete souřadnice vrcholů trojúhelníka, který vznikne otočením rovnostranného trojúhelníka, jehož dva vrcholy jsou $A = [1, 1]$ a $B = [2, 3]$ (třetí pak v polorovině dané přímkou AB a bodem $S = [0, 0]$) o 60° v kladném smyslu kolem bodu S .

Řešení. Třetí vrchol trojúhelníka dostaneme např. otočením o 60° jednoho z vrcholů kolem druhého (ve správném smyslu). Hledané body mají pak souřadnice $[-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}]$, $[1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3} + \frac{3}{2}]$. \square

1.80. Určete úhel, který svírají vektory

(a) $u = (-3, -2)$, $v = (-2, 3)$;

(b) $u = (2, 6)$, $v = (-3, -9)$.

Řešení. Hledaný úhel φ vypočítáme ze vzorce (1.36). Všimněme si, že vektor $(-3, -2)$ můžeme získat tak, že zaměníme pořadí souřadnic ve vektoru $(-2, 3)$ a jednu z nich vynásobíme číslem -1 . To je ovšem úprava, která se provádí, když chceme ze směrového vektoru přímky získat normálový (nebo naopak). Vektory ve variantě (a) jsou tedy kolmé, tj. $\varphi = \pi/2$. Neboť $-3 \cdot (2, 6) = 2 \cdot (-3, -9)$, je ve variantě (b) vektor u násobkem vektoru v . Pokud jeden vektor přejde na druhý tak, že ho vynásobíme kladným číslem, svírají tyto vektory evidentně nulový úhel. V našem příkladu je třeba násobit záporným číslem, což bezprostředně dává $\varphi = \pi$. \square

1.81. Určete úhel (odchylku) φ , který svírají úhlopříčky A_3A_7 a A_5A_{10} pravidelného dvanáctiúhelníka $A_0A_1A_2 \dots A_{11}$.

Řešení. Odchylka nezávisí na velikosti daného dvanáctiúhelníka. Volme dvanáctiúhelník vepsaný do kružnice o poloměru 1. Jako v předchozím příkladě určíme souřadnice jeho vrcholů a podle vzorce snadno dopočítáme, že $\cos(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, tedy $\varphi = 75^\circ$.

Jiné řešení. Úlohu lze řešit čistě metodami syntetické geometrie: označíme S střed dvanáctiúhelníka a T průsečík úhlopříček A_3A_7 a A_5A_{10} . Nyní $|\angle A_7A_5A_{10}| = 45^\circ$ (obvodový úhel příslušný středovému úhlu A_7SA_{10} , který je pravý), dále $|\angle A_5A_7A_3| = 30^\circ$ (obvodový úhel příslušný středovému úhlu A_5SA_3 , jehož velikost je 60°). Velikost úhlu A_5TA_7 je pak doplnkem výše zmíněných úhlů do 180° , tedy je rovna 105° . Hledaná odchylka je pak $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. \square

1.82. Spočítejte délky stran trojúhelníku s vrcholy $A = [2, 2]$, $B = [3, 0]$, $C = [4, 3]$.

Řešení. Užítím známého vzorce pro velikost vektoru

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

obdržíme výsledky

$$|AB| = \|A - B\| = \sqrt{(2-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5},$$

$$|BC| = \|B - C\| = \sqrt{(3-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10},$$

$$|AC| = \|A - C\| = \sqrt{(2-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}.$$

1.26b

1.83. Najděte matice A takové, že

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nápověda: jaké geometrické zobrazení v rovině zadává matice A^2 ?

Řešení. A^2 je matice rotace o 60° v kladném smyslu, takže hledané matice jsou

$$A = \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

tj. jsou to matice rotace o 30° , resp. o 210° . \square

1.84. Stanovte $A \cdot A$ pro

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Víme, že zobrazení

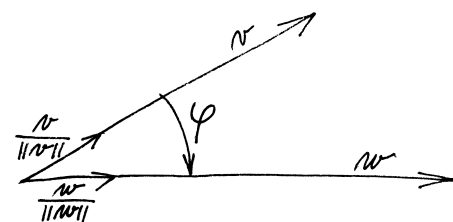
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

je rotací roviny \mathbb{R}^2 kolem počátku soustavy souřadnic o úhel φ v kladném smyslu. Vzhledem k asociativitě násobení matic dostáváme, že zobrazení

Obecně pak pro dva vektory v a w můžeme jejich úhel popsat pomocí souřadnic $v = (v_x, v_y)$, $w = (w_x, w_y)$ takto:

$$\cos \varphi = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

ODCHYLKA DVOU VEKTORŮ

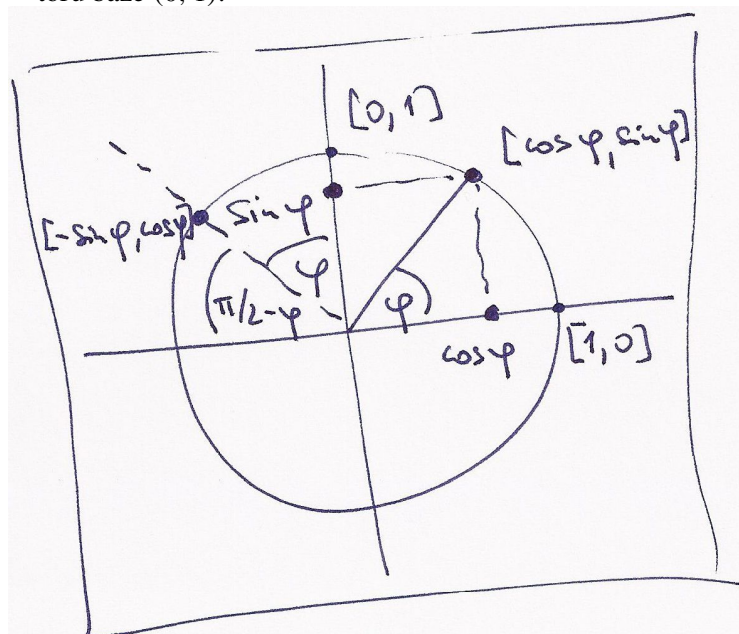


Tento vztah si snadno ověříme, pokud věříme, že otočení roviny kolem počátku nemění úhly. Pak totiž můžeme napřed libovolně zvolené vektory vynásobit vhodnými skaláry tak, abychom dostali vektory velikosti jedna (naš vzorec totiž po násobení vektorů libovolnými skaláry dává pochopitelně neměnné výsledky). Poté můžeme vhodným otočením naší roviny dosáhnout toho, že první z vektorů bude právě prvním bázovým vektorem $(1, 0)$. Potom dává náš vzorec

$$\cos \varphi = \frac{w_x}{\|w\|},$$

což je pouze opakováním definice funkce $\cos \varphi$.

1.31. Rotace kolem bodu v rovině. Matici libovolného známého zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lze vcelku snadno uhádnout: Je-li totiž výsledkem matice se sloupci (a, c) a (b, d) , pak první sloupec dostaneme násobením této matice s prvním vektorem báze $(1, 0)$ a druhý je vyčíslením na druhém vektoru báze $(0, 1)$.



Z obrázku je proto vidět, že pro rotaci o úhel ψ proti směru hodinových ručků jsou v matici sloupce

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}$$

Směr proti směru hodinových ručků označujeme jako *kladný směr rotace*, opačný je pak *záporný*. Proto dostáváme tvrzení:

MATICE ROTACE

Rotace o předem daný úhel ψ v kladném směru kolem počátku souřadnic je dána maticí R_ψ :

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R_\psi \cdot v = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Nyní, když už víme, jak vypadá matice otočení v rovině, můžeme ověřit, že otočení zachovává vzdálenosti a úhly (definované předěšlým vzorcem). Označíme-li obraz vektoru v jako

$$v' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = R_\psi \cdot v = \begin{pmatrix} v_x \cos \psi - v_y \sin \psi \\ v_x \sin \psi + v_y \cos \psi \end{pmatrix},$$

a podobně $w' = R_\psi \cdot w$, pak lze snadno přepočítat, že opravdu platí

$$\|v'\| = \|v\| \\ v'_x w'_x + v'_y w'_y = v_x w_x + v_y w_y.$$

Předchozí výraz lze pomocí vektorů a matic napsat následovně

$$(R_\psi \cdot w)^T (R_\psi \cdot v) = w^T v.$$

Transponovaný vektor $(R_\psi \cdot w)^T$ je roven $w^T \cdot R_\psi^T$, kde R_ψ^T je tzv. transponovaná matice k matici R_ψ . To je matice, jejíž řádky tvoří sloupce původní matice a sloupce naopak tvoří řádky původní matice. Vidíme tedy, že matice otočení splňují vztah $R_\psi^T \cdot R_\psi = I$, matice I (někdy píšeme prostě 1 a máme tím na mysli jednotku v okruhu matic), je tzv. *jednotková matice*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme odvodili pozoruhodné tvrzení — matice F s vlastností, že $F \cdot R_\psi = I$ (budeme takové říkat inverzní matice k matici rotace R_ψ) je maticí transponovanou k původní. To je logické, neboť inverzní zobrazení k rotaci o úhel ψ je opět rotace, ale o úhel $-\psi$, tj. inverzní matice R_ψ^T je rovna matici

$$R_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos(-\psi) & -\sin(-\psi) \\ \sin(-\psi) & \cos(-\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom chtěli zapsat rotaci kolem jiného bodu $P = O + w$, $P = [w_x, w_y]$, opět pomocí matice, snadno napíšeme potřebný vzorec pomocí posunutí:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

je rotací o úhel 2φ . To znamená, že platí

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že jsme samozřejmě mohli přímo vynásobit $A \cdot A$ (a aplikovat vzorce pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu). Opakováním výše uvedeného (příp. použitím matematické indukce) lze ovšem snadněji obdržet

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

jestliže klademe $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$ atd. \square

1.85. Zrcadlení. Najděte matici zrcadlení v rovině (tj. osové symetrie) podle přímky $y = x$.

Řešení. Namalujte si obrázek. V bázi určené vektory $(1, 1)$, $(1, -1)$ je matice zrcadlení zřejmě $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ve standardní bázi je tedy rovna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matici je v tomto případě jednoduché najít, protože vektory ve sloupcích jsou kolmé, tj. matice je (skoro) ortogonální. Máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vynásobením příslušných matic dostaneme výsledek $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tento výsledek se dá uhádnout i přímo z obrázku. \square

1.86. Zjistěte, jaká lineární zobrazení \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 jsou zadána maticemi (tj. popište jejich geometrický význam)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

Řešení. Nechť $(x, y)^T$ je nadále libovolný reálný vektor. Pro matici A_1 dostáváme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

což znamená, že lineární zobrazení, které tato matice zadává, je projekce na osu x . Podobně vidíme, že matice A_2 určuje zrcadlení vzhledem k ose y , protože

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matici A_3 lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

pro $\varphi = \pi/4$, a tudíž zadává otočení roviny kolem počátku o úhel $\pi/4$ (v kladném smyslu, tj. proti pohybu hodinových ručiček). \square

1.87. Rovnoběžníková rovnost. Dokažme jako ilustraci našich nástrojů tzv. „rovnoběžníkovou rovnost“: Jsou-li $u, v \in \mathbb{R}^2$, pak:

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2.$$

Neboli součet druhých mocnin délek úhlopříček rovnoběžníka je roven dvojnásobku součtu druhých mocnin délek jeho stran.

Řešení. Rozepsáním obou stran do souřadnic $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ obdržíme:

$$\begin{aligned} 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) &= 2(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2) \\ &= u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 + \\ &\quad + u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 \\ &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 \\ &= \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

□

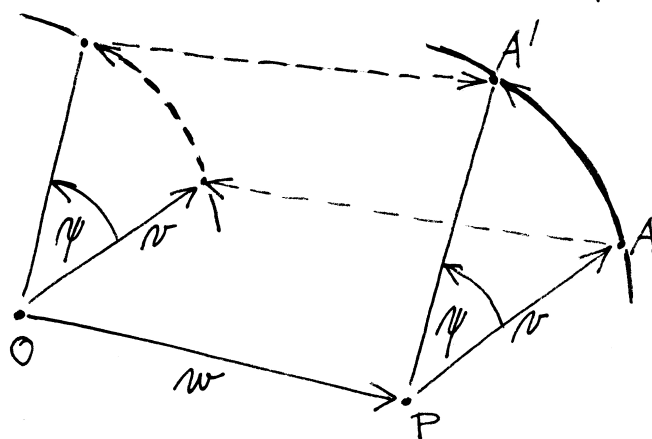
1.88. Ukažte, že složením lichého počtu středových souměrností v rovině dostaneme opět středovou symetrii.

Řešení. Středovou souměrnost v rovině se středem S reprezentujeme předpisem $X \mapsto S - (X - S)$, neboli $X \mapsto 2S - X$. (Obraz bodu X vzhledem k S dostaneme tak, že k souřadnicím bodu S přičteme souřadnice vektoru opačného k vektoru $X - S$.) Postupnou aplikací tří středových souměrností se středy S, T a U tak dostáváme $X \mapsto 2S - X \mapsto 2T - (2S - X) \mapsto 2U - (2T - (2S - X)) = 2(U - T + S) - X$, celkem $X \mapsto 2(U - T + S) - X$, což je středová souměrnost se středem $S - T + U$. Složením libovolného lichého počtu středových souměrností tak postupně redukuje až na složení tří středových souměrností, jde tedy o středovou symetrii (v principu se jedná o důkaz matematickou indukcí, zkuste si jej sami zformulovat). □

1.89. Sestrojte $(2n + 1)$ -úhelník, jsou-li dány všechny středy jeho stran.

Řešení. K řešení využijeme toho, že složením lichého počtu středových souměrností je opět středová souměrnost (viz předchozí příklad). Označme vrcholy hledaného $(2n + 1)$ -úhelníka po řadě $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ a středy stran (počínaje středem strany A_1A_2) postupně $S_1, S_2, \dots, S_{2n+1}$. Provedeme-li středové souměrnosti po řadě podle těchto středů, tak bod A_1 je zjevně pevným bodem výsledné středové souměrnosti, tedy jejím středem. K jeho nalezení tedy stačí provést uvedenou středovou souměrnost s libovolným bodem X roviny. Bod A_1 leží pak ve středu úsečky XX' , kde X' je obrazem bodu X ve zmíněné

ROTACE S POSUNUTÍM



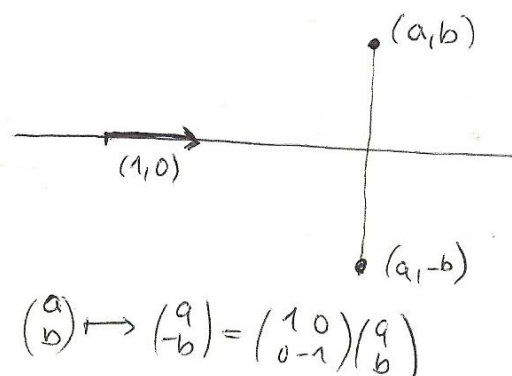
Stačí si k tomu uvědomit, že můžeme místo rotace kolem daného bodu P napřed posunout P do našeho počátku, pak provést rotaci a pak udělat opačné posunutí, kterým celou rovinu vrátíme tam, kde měla celou dobu být, viz obrázek. Počítejme tedy

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto v - w \mapsto R_\psi \cdot (v - w) \\ &\mapsto R_\psi \cdot (v - w) + w \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi(x - w_x) - \sin \psi(y - w_y) + w_x \\ \sin \psi(x - w_x) + \cos \psi(y - w_y) + w_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.32. Zrcadlení. Dalším dobře známým příkladem zobrazení, která zachovávají velikosti, je tzv. zrcadlení vzhledem k přímce. Opět nám bude stačit popsat zrcadlení vzhledem k přímkám procházejícím počátkem O a ostatní se z nich odvodí pomocí posunutí, resp. rotací.

Hledejme tedy matici Z_ψ zrcadlení vzhledem k přímce s jednotkovým směrovým vektorem v svírajícím úhel ψ s vektorem $(1, 0)$. Nejprve si uvědomme, že

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Obecně můžeme každou přímku otočit do směru vektoru $(1, 0)$ a tedy zapsat obecnou matici zrcadlení jako

$$Z_\psi = R_\psi \cdot Z_0 \cdot R_{-\psi},$$

kdy nejprve otočíme maticí $R_{-\psi}$ přímku do „nulové“ polohy, odzrcadíme maticí Z_0 a vrátíme zpět otočením R_ψ .

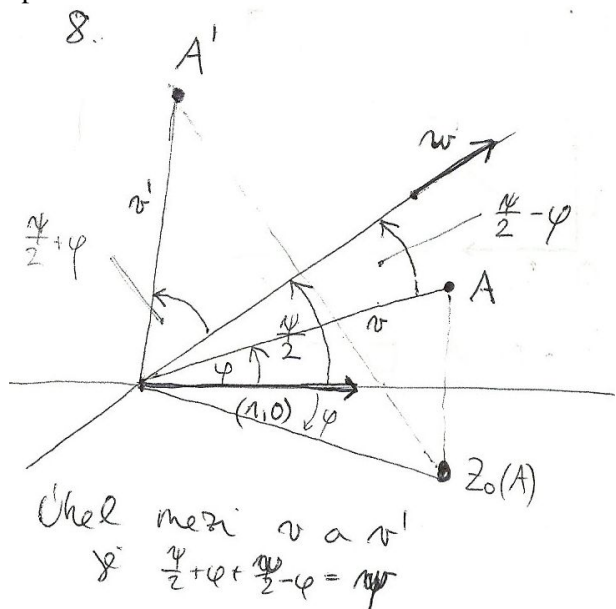
Můžeme proto (díky asociativitě násobení matic) spočítat:

$$\begin{aligned} Z_\psi &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \psi - \sin^2 \psi & 2 \sin \psi \cos \psi \\ 2 \sin \psi \cos \psi & -(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Použili jsme přitom obvyklé součtové vzorce pro goniometrické funkce. Povšimněme si také, že $Z_\psi \cdot Z_0$ je dáno:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix}.$$

Toto pozorování lze zakreslit a zformulovat následovně



Tvrzení. Otočení o úhel ψ obdržíme následným provedením dvou zrcadlení vzhledem ke směrům, které spolu svírají úhel $\frac{1}{2}\psi$.

Pokud umíme odůvodnit předchozí tvrzení ryze geometrickou úvahou (zkuste si zahrát na „syntetického geometra“), dokázali jsme právě standardní vzorce pro goniometrické funkce dvojnásobného úhlu.

Hlubší je následující rekapitulace předchozích úvah (skoro si můžeme říci, že už umíme dokázat skutečně zajímavý matematický výsledek):

ZOBRAZENÍ ZACHOVÁVAJÍCÍ VELIKOSTI

1.27

1.33. Věta. Lineární zobrazení euklidovské roviny je složeno z jednoho nebo více zrcadlení, právě když je dáno maticí R splňující

středové symetrii. Další vrcholy A_2, \dots, A_{2n+1} získáme zobrazováním bodu A_1 ve středových souměrnostech podle S_1, \dots, S_{2n+1} . \square

1.90. Určete obsah trojúhelníku ABC , je-li $A = [-8, 1]$, $B = [-2, 0]$, $C = [5, 9]$.

Řešení. Víme, že obsah je roven polovině determinantu matice, jejíž první sloupec je dán vektorem $B - A$ a druhý sloupec vektorem $C - A$, tj. determinantu matice

$$\begin{pmatrix} -2 - (-8) & 5 - (-8) \\ 0 - 1 & 9 - 1 \end{pmatrix}.$$

Jednoduchý výpočet tak dává výsledek

$$\frac{1}{2} ((-2 - (-8)) \cdot (9 - 1) - (5 - (-8)) \cdot (0 - 1)) = \frac{61}{2}.$$

Dodejme, že při záměně pořadí vektorů by hodnota determinantu měla opačné znaménko (její absolutní hodnota by tedy zůstala stejná) a že by se vůbec nezměnila, kdybychom vektory (při zachování pořadí) napsali do řádků. \square

1.91. Spočítejte obsah S čtyřúhelníku vymezeného jeho vrcholy $[1, 1]$, $[6, 1]$, $[11, 4]$, $[2, 4]$.

Řešení. Nejprve si označme vrcholy (proti směru pohybu hodinových ručiček)

$$A = [1, 1], \quad B = [6, 1], \quad C = [11, 4], \quad D = [2, 4].$$

Pokud rozdělíme čtyřúhelník $ABCD$ na trojúhelníky ABC a ACD , můžeme získat jeho obsah jako součet obsahů těchto trojúhelníků, a to vyčíslením determinantů

$$d_1 = \begin{vmatrix} 6 - 1 & 11 - 1 \\ 1 - 1 & 4 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 11 - 1 & 2 - 1 \\ 4 - 1 & 4 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix},$$

kde ve sloupcích jsou postupně vektory $B - A$, $C - A$ (pro d_1) a $C - A$, $D - A$ (pro d_2). Potom

$$S = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{5 \cdot 3 - 10 \cdot 0}{2} + \frac{10 \cdot 3 - 1 \cdot 3}{2} = \frac{15 + 27}{2} = 21.$$

(díky uspořádání vrcholů v kladném smyslu, vyšli všechny determinanty kladné). Správnost výsledku můžeme snadno potvrdit, neboť čtyřúhelník $ABCD$ je lichoběžníkem se základnami délek 5, 9 a její vzdáleností $v = 3$. \square

1.92. Stanovte rozlohu louky, která je na pozemkové mapě ohraničena body o kótách $[-7, 1]$, $[-1, 0]$, $[29, 0]$, $[25, 1]$, $[24, 2]$ a $[17, 5]$. (Jednotky neuvažujte. Jsou určeny poměrem pozemkové mapy vůči skutečnosti.)

Řešení. Uvažovaný šestiúhelník můžeme rozdělit např. na čtyři trojúhelníky s vrcholy

$$[-7, 1], [-1, 0], [17, 5]; \quad [-1, 0], [24, 2], [17, 5];$$

$$[-1, 0], [25, 1], [24, 2]; \quad [-1, 0], [29, 0], [25, 1].$$

Jejich obsahy jsou po řadě 24, 89/2, 27/2 a 15, což dává výsledek

$$24 + 44\frac{1}{2} + 13\frac{1}{2} + 15 = 97.$$

□

1.93. Určete obsah trojúhelníka $A_2A_3A_{11}$, kde $A_0A_1 \dots A_{11}$ jsou vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru 1.

Řešení. Vrcholy dvanáctiúhelníka můžeme ztotožnit s dvanáctými odmocninami z čísla 1 v komplexní rovině. Zvolíme-li navíc $A_0 = 1$, pak můžeme psát $A_k = \cos(2k\pi/12) + i \sin(2k\pi/12)$. Pro vrcholy zkoumaného trojúhelníka máme: $A_2 = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $A_3 = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$, $A_{11} = \cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6) = \sqrt{3}/2 - i/2$, neboli souřadnice těchto bodů v komplexní rovině jsou $A_2 = [1/2, \sqrt{3}/2]$, $A_3 = [0, 1]$, $A_{11} = [\sqrt{3}/2, -1/2]$. Podle vzorce pro obsah trojúhelníka je potom hledaný obsah S roven

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_2 - A_{11} \\ A_3 - A_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}.$$

Vzhledem ke kladnosti předchozího determinantu jsme mohli z estetických důvodů vynechat jeho absolutní hodnotu. □

1.94. Které strany čtyřúhelníku zadaného vrcholy $[-2, -2]$, $[1, 4]$, $[3, 3]$ a $[2, 1]$ jsou viditelné z pozice bodu $[3, \pi - 2]$?

Řešení. Jedná se o modelovou úlohu na viditelnost stran konvexního mnohoúhelníku v rovině. V prvním kroku uspořádáme vrcholy tak, aby jejich pořadí odpovídalo směru proti pohybu hodinových ručiček. Když jako první vrchol zvolíme např. $A = [-2, -2]$, je další pořadí $B = [2, 1]$, $C = [3, 3]$, $D = [1, 4]$. Uvažujme nejprve stranu AB . Ta společně s bodem $X = [3, \pi - 2]$ zadává matici

$$\begin{pmatrix} -2 - 3 & 2 - 3 \\ -2 - (\pi - 2) & 1 - (\pi - 2) \end{pmatrix}$$

tak, že její první sloupec je rozdílem $A - X$ a druhý sloupec je $B - X$. 1.28

To, zda je vidět z bodu $[3, \pi - 2]$, pak určuje znaménko determinantu

$$\begin{vmatrix} -2 - 3 & 2 - 3 \\ -2 - (\pi - 2) & 1 - (\pi - 2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -\pi & 3 - \pi \end{vmatrix} = -5 \cdot (3 - \pi) - (-1)(-\pi) < 0.$$

Záporná hodnota znamená, že strana je vidět. Doplňme, že nezáleží na tom, zda uvažujeme rozdíly $A - X$ a $B - X$, nebo $X - A$ a $X - B$. Kdybychom však zaměnili pořadí sloupců, příslušná strana by byla vidět právě tehdy, když by byl determinant kladný.

Pro stranu BC analogicky obdržíme

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ab + cd = 0, \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1.$$

To nastane, právě když toto zobrazení zachovává velikosti.

Otočením je takové zobrazení přitom právě tehdy, když je determinant matice R roven jedné, což odpovídá sudému počtu zrcadlení. Při lichém počtu zrcadlení je determinant roven -1 .



DŮKAZ. Zkusme napřed spočítat, jak může vypadat obecně matice A , když příslušné zobrazení zachovává velikosti. Tj. máme zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Zachování velikosti tedy znamená, že pro všechna x a y je

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = \\ &= (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy. \end{aligned}$$

Protože má tato rovnost platit pro všechna x a y , musí si být rovny koeficienty u jednotlivých mocnin x^2 , y^2 a xy na pravé i levé straně. Tím jsme spočetli, že rovnosti kladené na matici R v prvním tvrzení dokazované věty jsou ekvivalentní vlastnosti, že příslušné zobrazení zachovává velikosti.

Díky vztahu $a^2 + c^2 = 1$ můžeme předpokládat, že $a = \cos \varphi$ a $c = \sin \varphi$ pro vhodný úhel φ . Jakmile takto zvolíme první sloupec matice R , až na násobek nám vztah $ab + cd = 0$ určuje i druhý sloupec. Zároveň ale víme, že i velikost vektoru ve druhém sloupci je jedna a dostáváme tedy právě dvě možnosti pro matici R :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

V prvním případě jde o rotaci o úhel φ , ve druhém pak o rotaci složenou se zrcadlením podle první souřadné osy. Jak jsme viděli v předchozím tvrzení 1.31, každá rotace odpovídá dvěma zrcadlením a determinant matice R je v těchto dvou případech skutečně jedna nebo minus jedna a rozlišuje je. □

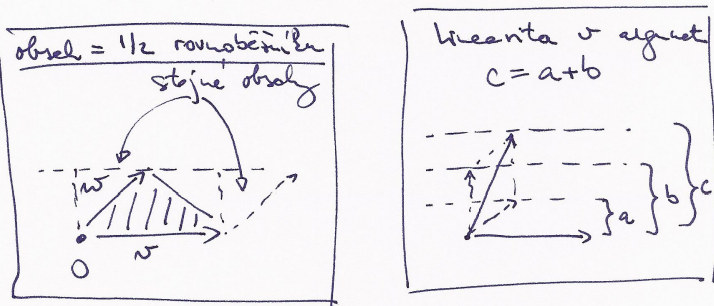
1.34. Obsah trojúhelníka. Závěrem našeho malého výletu do geometrie se zaměříme na obsah rovinných objektů. Budou nám stačit trojúhelníky. Každý trojúhelník je vymezen dvojicí vektorů v a w , které, přiloženy do jednoho z vrcholů P , zadají zbylé dva vrcholy. Chtěli bychom tedy najít vzorec (skalární funkci vol), která dvěma vektorům přiřadí číslo rovné obsahu vol $\Delta(v, w)$ takto definovaného trojúhelníku $\Delta(v, w)$, kde si pro určitost za P volíme počátek a posunutím se obsah stejně nemění.

Ze zadání je vidět, že hledaná hodnota je polovinou plochy rovnoběžníku nataženého na vektory v a w a snadno se

spočte (pomocí známého vzorečku: základna krát příslušná výška) nebo prostě vidí z obrázku, že nutně platí

$$\text{vol } \Delta(v + v', w) = \text{vol } \Delta(v, w) + \text{vol } \Delta(v', w)$$

$$\text{vol } \Delta(av, w) = a \text{ vol } \Delta(v, w).$$



Nakonec ještě přidáme k našemu zadání požadavek

$$\text{vol } \Delta(v, w) = -\text{vol } \Delta(w, v),$$

který odpovídá představě, že opatříme plochu znaménkem podle toho, v jakém pořadí bereme vektory (tj. jestli se na ni díváme shora nebo zespodu).

Pokud vektory v a w napíšeme do sloupců matice A , pak

$$A = (v, w) \mapsto \det A$$

splňuje všechny tři naše požadavky. Kolik takových zobrazení ale může být? Každý vektor umíme vyjádřit pomocí dvou bázových vektorů $e_1 = (1, 0)$ a $e_2 = (0, 1)$ a díky linearitě je tedy každá možnost pro $\text{vol } \Delta$ jednoznačně určena už vyčíslením na těchto vektorech. Protože ale pro obsah, stejně jako pro determinant, je zjevně $\text{vol } \Delta(e_1, e_1) = \text{vol } \Delta(e_2, e_2) = 0$ (kvůli požadované antisymetrii), je nutně každá taková skalární funkce jednoznačně zadána hodnotou na jediné dvojici argumentů (e_1, e_2) . Jsou si tedy všechny možnosti rovny až na skalární násobek. Ten umíme určit požadavkem

$$\text{vol } \Delta(e_1, e_2) = \frac{1}{2},$$

tj. volíme *orientaci* a *měřítko* pomocí volby bázových vektorů a chceme aby jednotkový čtverec měl plochu jedna.

Vidíme tedy, že determinant zadává plochu rovnoběžníku určeného sloupci matice A a plocha trojúhelníku je tedy poloviční.

1.29

1.35. Viditelnost v rovině. Předchozí popis hodnot pro orientovaný obsah nám dává do rukou elegantní nástroj pro určování pozice bodu vůči orientovaným úsečkám. Orientovanou úsečkou rozumíme dva body v rovině \mathbb{R}^2 s určeným pořadím. Můžeme si ji představit jako šipku od prvního k druhému bodu. Taková orientovaná úsečka nám rozděljuje rovinu na dvě poloroviny, říkáme jim „levou“ a „pravou“. Pro daný bod chceme poznat, jestli je v té levé nebo pravé.

Takové úlohy často potkáváme v počítačové grafice při řešení viditelnosti objektů. Pro zjednodušení si zde jen představme, že úsečku „je vidět“ z bodů napravo a není vidět z

$$\begin{vmatrix} 2-3 & 3-3 \\ 1-(\pi-2) & 3-(\pi-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3-\pi & 5-\pi \end{vmatrix} = -1 \cdot (5-\pi) - 0 < 0.$$

Tato strana je tudíž vidět. Zbývají strany CD a DA . Pro ně dostáváme po řadě

$$\begin{vmatrix} 3-3 & 1-3 \\ 3-(\pi-2) & 4-(\pi-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5-\pi & 6-\pi \end{vmatrix} = 0 - (-2) \cdot (5-\pi) > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1-3 & -2-3 \\ 4-(\pi-2) & -2-(\pi-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 6-\pi & -\pi \end{vmatrix} = -2 \cdot (-\pi) - (-5) \cdot (6-\pi) > 0.$$

Z bodu X jsou tedy vidět právě strany určené dvojicemi vrcholů $[-2, -2]$, $[2, 1]$ a $[2, 1]$, $[3, 3]$. \square

1.95. Uvedte strany pětiúhelníku s vrcholy v bodech $[-2, -2]$, $[-2, 2]$, $[1, 4]$, $[3, 1]$ a $[2, -11/6]$, které je možné vidět z bodu $[300, 1]$.

Řešení. Pro zjednodušení zápisů „tradičně“ položíme

$$A = [-2, -2], \quad B = [2, -11/6], \quad C = [3, 1], \quad D = [1, 4], \quad E = [-2, 2].$$

Strany BC a CD jsou zjevně z pozice bodu $[300, 1]$ viditelné; naopak strany DE a EA být vidět nemohou. Pro stranu AB raději určíme

$$\begin{vmatrix} -2-300 & 2-300 \\ -2-1 & -\frac{11}{6}-1 \end{vmatrix} = -302 \cdot \left(-\frac{17}{6}\right) - (-298) \cdot (-3) < 0.$$

Odsud plyne, že tato strana je z bodu $[300, 1]$ vidět. \square

1.96. Viditelnost stran trojúhelníka. Je dán trojúhelník s vrcholy $A = [5, 6]$, $B = [7, 8]$, $C = [5, 8]$. Určete, které jeho strany je vidět z bodu $P = [0, 1]$.

Řešení. Uspořádáme vrcholy v kladném smyslu, tedy proti směru hodinových ručiček: $[5, 6]$, $[7, 8]$, $[5, 8]$. Pomocí příslušných determinantů určíme, je-li bod $[0, 1]$ „nalevo“ či „napravo“ od jednotlivých stran trojúhelníka uvažovaných jako orientované úsečky,

$$\begin{vmatrix} B-P \\ C-P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} C-P \\ A-P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} < 0,$$

$$\begin{vmatrix} A-P \\ B-P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Z nulovosti posledního determinantu vidíme, že body $[0, 1]$, $[5, 6]$ a $[7, 8]$ leží na přímkce, stranu AB tedy nevidíme. Stranu BC rovněž tak nevidíme, na rozdíl od strany AC , pro kterou je příslušný determinant záporný. \square

1.97. Určete, které strany čtyřúhelníka s vrcholy $A = [95, 99]$, $B = [130, 106]$, $C = [40, 60]$, $D = [130, 120]$ jsou viditelné z bodu $[2, 0]$.

Řešení. Nejprve je třeba určit strany čtyřúhelníka („správné“ pořadí vrcholů): $ACBD$. Po spočítání příslušných determinantů jako v předchozích příkladech zjistíme, že je vidět pouze strana CB . □

F. Zobrazení a relace

1.98. Rozhodněte, zda následující relace na množině M jsou relace ekvivalence:

- i) $M = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, kde $(f \sim g)$, pokud $f(0) = g(0)$.
- ii) $M = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, kde $(f \sim g)$, pokud $f(0) = g(1)$.
- iii) M je množina přímek v rovině, přičemž dvě přímky jsou v relaci, jestliže se neprotínají.
- iv) M je množina přímek v rovině, přičemž dvě přímky jsou v relaci, jestliže jsou rovnoběžné.
- v) $M = \mathbb{N}$, kde $(m \sim n)$, pokud $S(m) + S(n) = 20$, přičemž $S(n)$ značí ciferný součet čísla n .
- vi) $M = \mathbb{N}$, kde $(m \sim n)$, pokud $C(m) = C(n)$, kde $C(n) = S(n)$, pokud je ciferný součet $S(n)$ menší než 10, jinak definujeme $C(n) = C(S(n))$ (je tedy vždy $C(n) < 10$).

Řešení.

- i) Ano. Ověříme tři vlastnosti ekvivalence:
 - i) Reflexivita: pro libovolnou reálnou funkci f je $f(0) = f(0)$.
 - ii) Symetrie: jestliže platí $f(0) = g(0)$, pak i $g(0) = f(0)$.
 - iii) Transitivita: jestliže platí $f(0) = g(0)$ a $g(0) = h(0)$, pak platí i $f(0) = h(0)$.
- ii) Ne. Definovaná relace není reflexivní, např. pro funkci \sin máme $\sin 0 \neq \sin 1$ a není ani transitivní.
- iii) Ne. Relace opět není reflexivní (každá přímka protíná sama sebe) ani transitivní.
- iv) Ano. Třídy ekvivalence pak tvoří množinu neorientovaných směrů v rovině.
- v) Ne. Relace není reflexivní. $S(1) + S(1) = 2$.
- vi) Ano.

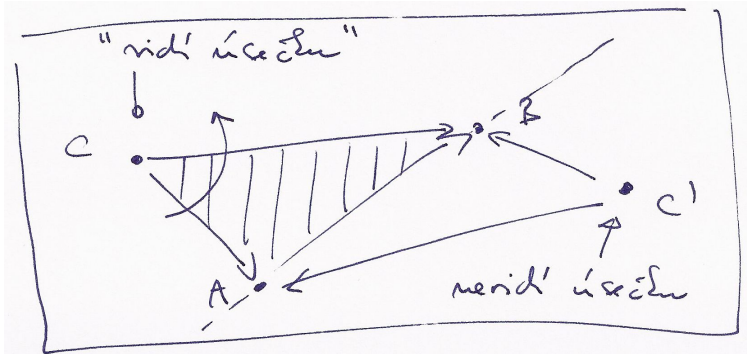
□

1.99. Máme množinu $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Napište explicitně relaci

- i) a dělí b
- ii) a dělí b nebo b dělí a
- iii) a a b jsou soudělná

1.100. Nechť je na \mathbb{R}^2 definována relace R tak, že $((a, b), (c, d)) \in R$ pro libovolná $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, právě když $b = d$. Zjistěte, zda se

těch nalevo (což odpovídá představě, že objekt ohraničený orientovanými hranami proti směru hodinových ručiček má nalevo od nich svůj vnitřek, přes který tedy není hranu vidět).



Máme-li dán nějaký bod C , spočteme orientovanou plochu příslušného trojúhelníku zadaného vektory $A - C$ a $B - C$. Pokud jsme s bodem C nalevo od úsečky, pak při obvyklé kladné orientaci proti směru hodinových ručiček bude vektor $A - C$ dříve než ten druhý a proto výsledná plocha (tj. hodnota determinantu matice jejímiž sloupci jsou tyto dva vektory) bude kladná. Naopak, při opačné poloze bude výsledkem záporná hodnota determinantu a podle záporné hodnoty determinantu zjistíme, že je náš bod od úsečky napravo.

Uvedený jednoduchý postup je skutečně často využíván pro testování polohy při standardních úlohách v 2D grafice.

6. Relace a zobrazení

V této závěrečné části úvodní motivační kapitoly se vrátíme k formálnímu popisu matematických struktur, budeme se je ale průběžně snažit ilustrovat na již známých příkladech. Zároveň můžeme tuto část brát jako cvičení ve formálním přístupu k objektům a konceptům matematiky.



1.36. Relace mezi množinami. Nejprve potřebujeme definovat *kartézský součin* $A \times B$ dvou množin A a B . Je to množina všech uspořádaných dvojic (a, b) takových, že $a \in A$ a $b \in B$. *Binární relací* mezi množinami A a B pak rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Často píšeme $a \simeq_R b$ pro vyjádření skutečnosti, že $(a, b) \in R$, tj. že body $a \in A$ a $b \in B$ jsou v relaci R . *Definičním oborem relace* je podmnožina

$$D \subseteq A, \quad D = \{a \in A; \exists b \in B, (a, b) \in R\}.$$

Slovy vyjádřené, je to množina prvků a z množiny A takových, že existuje prvek b z množiny B tak, že (a, b) patří do relace R . Stručněji, jsou to takové prvky z A , které mají obraz v B . Podobně *oborem hodnot relace* je podmnožina

$$I \subseteq B, \quad I = \{b \in B; \exists a \in A, (a, b) \in R\},$$

to znamená takové prvky v B , které mají vzor v A .

Speciálním případem relace mezi množinami je *zobrazení z množiny A do množiny B*. Je to případ, kdy pro každý prvek definičního oboru relace existuje právě jeden prvek z oboru hodnot, který je s ním v relaci. Nám známým případem zobrazení jsou všechny skalární funkce, kde oborem hodnot zobrazení je množina skalárů, třeba celých nebo reálných čísel. Pro zobrazení zpravidla používáme značení, které jsme také u skalárních funkcí zavedli. Píšeme

$$f : D \subseteq A \rightarrow I \subseteq B, f(a) = b$$

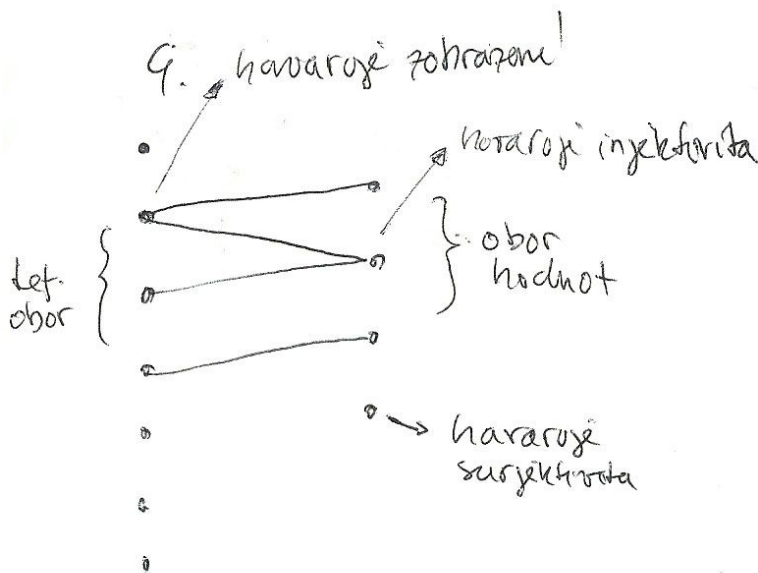
pro vyjádření skutečnosti, že (a, b) patří do relace, a říkáme, že b je hodnotou zobrazení f v bodě a . Dále říkáme, že f je

- zobrazení množiny A do množiny B , jestliže je $D = A$,
- zobrazení množiny A na množinu B , jestliže je $D = A$ a $I = B$, často také *surjektivní zobrazení*
- prosté (často také *injektivní zobrazení*), jestliže je $D = A$ a pro každé $b \in I$ existuje právě jeden vzor $a \in A$, $f(a) = b$.

Vyjádření zobrazení $f : A \rightarrow B$ jakožto relace

$$f \subseteq A \times B, \quad f = \{(a, f(a)); a \in A\}$$

známe také pod názvem *graf zobrazení f*.



1.31

1.37. Skládání relací a funkcí. U zobrazení je jasná koncepce, jak se skládají. Máme-li dvě zobrazení $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$, pak jejich *složení* $g \circ f : A \rightarrow C$ je definováno

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Ve značení používaném pro relace totéž můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} f &\subseteq A \times B, & f &= \{(a, f(a)); a \in A\} \\ g &\subseteq B \times C, & g &= \{(b, g(b)); b \in B\} \\ g \circ f &\subseteq A \times C, & g \circ f &= \{(a, g(f(a))); a \in A\}. \end{aligned}$$

jedná o relaci ekvivalence. Pokud jde o relaci ekvivalence, popište geometricky rozklad, který určuje.

Řešení. Z $((a, b), (a, b)) \in R$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ plyne, že relace je reflexivní. Stejně snadno vidíme, že relace je symetrická, neboť v rovnosti (druhých složek) můžeme zaměnit levou a pravou stranu. Je-li $((a, b), (c, d)) \in R$ a $((c, d), (e, f)) \in R$, tj. platí-li $b = d$ a $d = f$, lehce dostáváme splnění tranzitivní podmínky $((a, b), (e, f)) \in R$, tj. $b = f$. Relace R je relací ekvivalence, kdy body roviny jsou spolu v relaci, právě když mají stejnou druhou souřadnici (přímka jimi zadaná je kolmá na osu y). Příslušný rozklad proto rozdělí rovinu na přímky rovnoběžné s osou x . \square

1.101. Určete, kolik různých binárních relací lze zavést mezi množinou X a množinou všech jejích podmnožin, má-li množina X právě 3 prvky.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že množina všech podmnožin X má $2^3 = 8$ prvků, a tudíž její kartézský součin s množinou X má $8 \cdot 3 = 24$ prvků. Uvažovanými binárními relacemi jsou právě podmnožiny tohoto kartézského součinu, kterých je celkem 2^{24} . \square

1.102. Uvedte definiční obor D a obor hodnot I relace

$$R = \{(a, v), (b, x), (c, x), (c, u), (d, v), (f, y)\}$$

mezi množinami $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $B = \{x, y, u, v, w\}$. Je relace R zobrazení?

Řešení. Přímo z definice definičního oboru a oboru hodnot relace dostáváme

$$D = \{a, b, c, d, f\} \subset A, \quad I = \{x, y, u, v\} \subset B.$$

Nejedná se o zobrazení, protože $(c, x), (c, u) \in R$, tj. $c \in D$ má dva obrazy. \square

1.103. O každé z následujících relací na množině $\{a, b, c, d\}$ rozhodněte, zda se jedná o relaci uspořádání (příp. zda se jedná o úplné uspořádání):

$$\begin{aligned} R_a &= \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, a), (b, c), (b, d) \}, \\ R_b &= \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, a), (a, d) \}, \\ R_c &= \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (b, d) \}, \\ R_d &= \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d) \}, \\ R_e &= \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), \\ &\quad (c, d) \}. \end{aligned}$$

Řešení. R_a je uspořádání, které není úplné (např. $(a, c) \notin R_a$ ani $(c, a) \notin R_a$). Relace R_b není antisymetrická (je totiž $(a, d) \in R_b$ i

$(d, a) \in R_b$), a tudíž se nejedná o uspořádání (jde o ekvivalenci). Relace R_c a R_d rovněž nejsou uspořádáními, protože nejsou tranzitivní (např. $(a, b), (b, c) \in R_c, R_d, (a, c) \notin R_c, R_d$) a dokonce ani reflexivní ($(d, d) \notin R_c, (d, d) \notin R_d$). Relace R_e je úplné uspořádání (pokud budeme $(a, b) \in R$ interpretovat jako $a \leq b$, pak $a \leq b \leq c \leq d$).

□

1.104. Rozhodněte, zda je zobrazení f injektivní, resp. surjektivní, jestliže

$$(a) f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f((x, y)) = x + y - 10x^2;$$

$$(b) f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f(x) = (2x, x^2 + 10).$$

Řešení. Ve variantě (a) je uvedeno surjektivní zobrazení (postačuje položit $x = 0$), které není injektivní (stačí zvolit $(x, y) = (0, -9)$ a $(x, y) = (1, 0)$). Ve variantě (b) se naopak jedná o injektivní zobrazení (obě jeho složky, tj. funkce $y = 2x$ a $y = x^2 + 10$, jsou evidentně rostoucí na \mathbb{N}), které není surjektivní (např. dvojice $(1, 1)$ nemá vzor).

□

1.105. Stanovte počet zobrazení množiny $\{1, 2\}$ do množiny $\{a, b, c\}$. Kolik z nich je surjektivních a kolik injektivních?

Řešení. Prvku 1 můžeme v rámci zobrazení přiřadit libovolně jeden ze tří prvků a, b, c . Podobně také pro prvek 2 máme tři možnosti. Podle (kombinatorického) pravidla součinu tak existuje celkem 3^2 zobrazení množiny $\{1, 2\}$ do množiny $\{a, b, c\}$. Surjektivní žádné z nich být nemůže, neboť konečná množina $\{a, b, c\}$ má více prvků než množina $\{1, 2\}$. Při libovolném zobrazení prvku 1 (tři možnosti) obdržíme injektivní zobrazení, právě když prvek 2 zobrazíme na jiný prvek (dvě možnosti). Vidíme tedy, že injektivních zobrazení množiny $\{1, 2\}$ do množiny $\{a, b, c\}$ je 6.

□

1.106. Určete počet injektivních zobrazení množiny $\{1, 2, 3\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

Řešení. Libovolné injektivní zobrazení mezi uvažovanými množinami je dáno výběrem (uspořádané) trojice z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ (prvky ve vybrané trojici budou po řadě obrazy čísel 1, 2, 3) a obráceně každé injektivní zobrazení nám zadává takovou trojici. Je tedy hledaných injektivních zobrazení stejně jako možností výběru uspořádaných trojic ze čtyř prvků, tedy $v(3, 4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

□

1.107. Určete počet surjektivních zobrazení množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ na množinu $\{1, 2, 3\}$.

Řešení. Hledaný počet určíme tak, že od počtu všech zobrazení odečteme ta, která nejsou surjektivní, to jest ta, jejichž obor hodnot je buď jednoprvkovou nebo dvouprvkovou množinou. Všech zobrazení



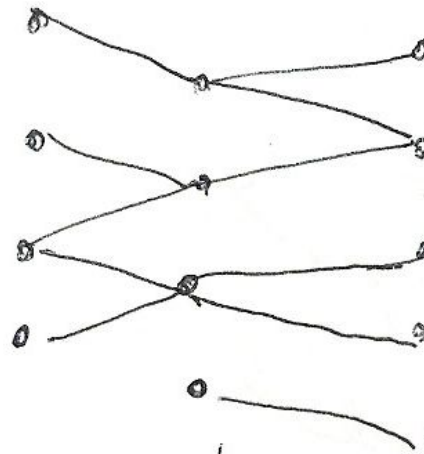
Zcela obdobně definujeme *skládání relací*, v předchozích vztazích jen doplníme existenční kvantifikátory, tj. musíme uvažovat všechny „vzory“ a všechny „obrazy“. Uvažme relace $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$. Potom $S \circ R \subseteq A \times C$,

$$S \circ R = \{(a, c); \exists b \in B, (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Zvláštním případem relace je *identické zobrazení*

$$\text{id}_A = \{(a, a) \in A \times A; a \in A\}$$

na množině A . Je neutrální vzhledem ke skládání s každou relací s definičním oborem nebo oborem hodnot A .



složením relací =
vše, co lze nějakou cestou
spojit.

Pro každou relaci $R \subseteq A \times B$ definujeme *inverzní relaci*

$$R^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in R\} \subseteq B \times A.$$

Pozor, u zobrazení, je stejný pojem užíván ve specifičtější situaci. Samozřejmě, že existuje pro každé zobrazení jeho inverzní relace, ta však nemusí být zobrazením. Zcela logicky proto hovoříme o existenci inverzního zobrazení, pokud každý prvek $b \in B$ je obrazem pro právě jeden vzor v A . V takovém případě je samozřejmě inverzní zobrazení právě inverzní relací.

Všimněme si, že složením zobrazení a jeho inverzního zobrazení (pokud obě existují) vždy vznikne identické zobrazení, u obecných relací tomu tak být nemusí.

1.38. Relace na množině. V případě $A = B$ hovoříme o relaci na množině A . Říkáme, že relace R je:

- *reflexivní*, pokud $\text{id}_A \subseteq R$, tj. $(a, a) \in R$ pro všechny $a \in A$,
- *symetrická*, pokud $R^{-1} = R$, tj. pokud $(a, b) \in R$, pak i $(b, a) \in R$,

- *antisymetrická*, pokud $R^{-1} \cap R \subseteq \text{id}_A$, tj. pokud $(a, b) \in R$ a zároveň $(b, a) \in R$, pak $a = b$,
- *tranzitivní*, pokud $R \circ R \subseteq R$, tj. pokud $z (a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$ vyplývá i $(a, c) \in R$.

Relace se nazývá *ekvivalence*, pokud je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní.



Relace se nazývá *uspořádání* jestliže je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická. Relaci uspořádání obvykle značíme symbolem \leq , tj. skutečnost, že prvek a je v relaci s prvkem b , značíme $a \leq b$.

Zde je dobré si uvědomit, že relace $<$, tj. „býtí ostře menší než“, mezi reálnými (racionálními, celými, přirozenými) čísly není relace uspořádání, protože není reflexivní.

Dobrym příkladem uspořádání je inkluze. Uvažme množinu 2^A všech podmnožin konečné množiny A (značení je speciálním případem obvyklé notace B^A pro množinu všech zobrazení z A do B ; prvky množiny 2^A jsou tedy zobrazení $A \rightarrow \{0, 1\}$, které "říkají", zda určitý prvek je či není v dané podmnožině). Na množině 2^A máme relaci \subseteq danou vlastností „být podmnožinou“. Je tedy $X \subseteq Z$ právě, když je X podmnožinou v Z . Evidentně jsou přitom splněny všechny tři vlastnosti pro uspořádání: skutečně, je-li $X \subseteq Y$ a zároveň $Y \subseteq X$ musí být nutně množiny X a Y stejné. Je-li $X \subseteq Y \subseteq Z$ je také $X \subseteq Z$ a také reflexivita je zřejmá.

Říkáme, že uspořádání \leq na množině A je *úplné*, když pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí, že jsou *srovnatelné*, tj. buď $a \leq b$ nebo $b \leq a$. Všimněme si, že ne všechny dvojice (X, Y) podmnožin v A jsou srovnatelné v tomto smyslu. Přesněji, pokud je v A více než jeden prvek, existují podmnožiny X a Y , kdy není ani $X \subseteq Y$ ani $Y \subseteq X$.

Připomeňme rekurentní definici přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, kde

$$0 = \emptyset, \quad n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Na této množině \mathbb{N} definujeme relaci \leq následovně: $m \leq n$, právě když $m \in n$ nebo $m = n$. Evidentně jde o úplné uspořádání. Např. $2 \leq 4$, protože

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 4.$$

Jinak řečeno, samotná rekurentní definice zadává vztah $n \leq n + 1$ a tranzitivně pak $n \leq k$ pro všechna k , která jsou tímto postupem definována později.

1.33

1.39. Rozklad podle ekvivalence. Každá ekvivalence R na množině A zadává zároveň *rozklad* množiny



A na podmnožiny vzájemně ekvivalentních prvků, tzv. *třídy ekvivalence*. Pro libovolné $a \in A$ uvažujeme třídu (množinu) prvků, které jsou ekvivalentní s prvkem a , tj.

$$R_a = \{b \in A; (a, b) \in R\}.$$

Často budeme psát pro R_a prostě $[a]$, je-li z kontextu zřejmé, o kterou ekvivalenci jde.

je $V(3, 4) = 3^4$, zobrazení, jejichž oborem hodnot je jednoprvková množina, jsou tři. Počet zobrazení, jejichž oborem hodnot je dvouprvková množina, je $\binom{3}{2}(2^4 - 2)$ ($\binom{3}{2}$ způsoby můžeme vybrat obor hodnot a máme-li již dva prvky fixovány, máme $2^4 - 2$ možností, jak na ně zobrazit čtyři prvky). Celkem je tedy počet hledaných surjektivních zobrazení

$$(1.3) \quad 3^4 - \binom{3}{2}(2^4 - 2) - 3 = 36. \quad \square$$

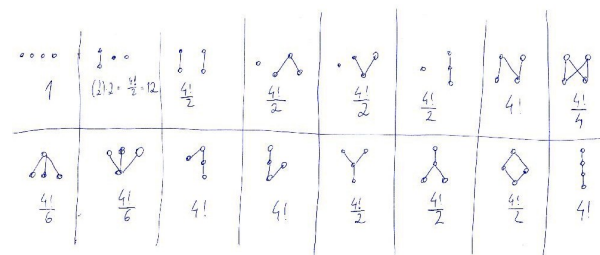
1.108. Určete počet surjektivních zobrazení f množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ na množinu $\{1, 2, 3\}$ takových, že $f(1) = f(2)$.

Řešení. Každé takové zobrazení je jednoznačně dáno obrazem prvků $\{1, 3, 4, 5\}$, těchto zobrazení je tedy přesně tolik, kolik je zobrazení surjektivních zobrazení množiny $\{1, 3, 4, 5\}$ na množinu $\{1, 2, 3\}$, tedy 36, jak víme z předchozího příkladu. \square

1.109. Hasseův diagram uspořádání. Hasseův diagram daného uspořádání $<$ na n -prvkové množině M je diagram s n vrcholy (každý vrchol odpovídá právě jednomu prvku množiny), přičemž dva vrcholy (prvky) a, b jsou spojeny (víceméně svislou) čarou (tak, že a je „dole“ a b „nahore“), právě když b pokrývá a , tj. $a < b$ a neexistuje $c \in M$ tak, že $a < c$ a $c < b$.

1.110. Určete počet relací uspořádání na čtyřprvkové množině.

Řešení. Postupně projdeme všechny možné Hasseovy diagramy uspořádání na nějaké čtyřprvkové množině M a spočítáme, kolik různých uspořádání (tj. podmnožin množiny $M \times M$) má daný Hasseův diagram, viz obr.:



Celkem tedy je 219 uspořádání na čtyřprvkové množině. \square

1.111. Určete počet relací uspořádání množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ takových, že právě dvě dvojice prvků jsou nesrovnatelné.

1.112. Vypište všechny relace na dvouprvkové množině $\{1, 2\}$, jež současně nejsou reflexivní, jsou symetrické a nejsou tranzitivní.

Řešení. Reflexní relace jsou právě ty, které obsahují obě dvojice $(1, 1)$, $(2, 2)$. Tím jsme vyloučili relace

$$\{(1, 1), (2, 2)\}, \quad \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}, \quad \{(1, 1), (2, 2), (2, 1)\}, \\ \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}.$$

Zbývající relace, které jsou symetrické a nejsou tranzitivní, musejí obsahovat $(1, 2), (2, 1)$. Pokud taková relace obsahuje jednu z těchto dvou uspořádaných dvojic, musí obsahovat rovněž druhou (podmínka symetrie). Kdyby neobsahovala ani jednu z těchto dvou uspořádaných dvojic, pak by očividně byla tranzitivní. Z celkového počtu 16 relací na dvouprvkové množině jsme tak vybrali

$$\{(1, 2), (2, 1)\}, \quad \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}, \quad \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Je vidět, že každá z těchto 3 relací není reflexivní, je symetrická a není tranzitivní. \square

1.113. Určete počet relací ekvivalence na množině $\{1, 2, 3, 4\}$.

Řešení. Ekvivalence můžeme počítat podle toho, kolik prvků mají jejich třídy rozkladu. Pro počty prvků tříd rozkladu ekvivalencí na čtyřprvkové množině jsou tyto možnosti:

Počty prvků ve třídách rozkladu	počet ekvivalencí daného typu
1,1,1,1	1
2,1,1	$\binom{4}{2}$
2,2	$\frac{1}{2} \binom{4}{2}$
3,1	$\binom{4}{1}$
4	1

Celkem tedy máme 15 různých ekvivalencí. \square

Poznámka. Obecně počet tříd rozkladu n -prvkové množiny udává *Bellovo číslo* B_{n+k} , pro které lze odvodit rekurentní formuli

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

1.114. Kolik existuje relací na n -prvkové množině?

Řešení. Relace je libovolná podmnožina kartézského součinu množiny se sebou samou. Tento kartézský součin má n^2 prvků, a je tedy počet všech relací na n -prvkové množině 2^{n^2} . \square

1.115. Kolik existuje reflexivních relací na n -prvkové množině?

Řešení. Relace na množině M je reflexivní, právě když je diagonální relace $\Delta_M = \{(a, a), \text{ kde } a \in M\}$ její podmnožinou. U zbylých $n^2 - n$ uspořádaných dvojic v kartézském součinu $M \times M$ máme nezávislou volbu, jestli daná dvojice v dané relaci bude či ne. Celkem tedy máme $2^{n^2 - n}$ různých reflexivních relací na n -prvkové množině. \square

1.116. Kolik existuje symetrických relací na n -prvkové množině?

Řešení. Relace na množině M je symetrická, právě když je její průnik s každou množinou $\{(a, b), (b, a), \text{ kde } a \neq b, a, b \in M\}$ buď

Zjevně $R_a = R_b$, právě když $(a, b) \in R$ a každá taková třída ekvivalence je tedy reprezentována kterýmkoliv svým prvkem, tzv. *reprezentantem*. Zároveň $R_a \cap R_b \neq \emptyset$, právě když $R_a = R_b$, tj. třídy ekvivalence jsou po dvou disjunktní. Konečně, $A = \cup_{a \in A} R_a$, tj. celá množina A se skutečně rozloží na jednotlivé třídy.

Můžeme také třídám rozkladu rozumět tak, že třídu $[a]$ vnímáme jako prvek a „až na ekvivalenci“.

1.40. Konstrukce celých a racionálních čísel. Na přiroze-



ných číslech umíme sice sčítat a víme, že přičtením nuly se číslo nezmění. Umíme i definovat odečítání, při něm ale jen někdy existuje výsledek v množině \mathbb{N} .

Základní ideou konstrukce celých čísel z přirozených je tedy přidat k nim chybějící rozdíly. To můžeme udělat tak, že místo výsledku odečítání budeme pracovat s uspořádanými dvojicemi čísel, které nám samozřejmě vždy výsledek dobře reprezentují. Zbývá jen dobře definovat, kdy jsou (z hlediska výsledku odečítání) takové dvojice ekvivalentní. Potřebný vztah tedy je:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a - b = a' - b' \iff a + b' = a' + b.$$

Všimněme si, že zatímco výrazy v prostřední rovnosti v přirozených číslech neumíme, výrazy vpravo už ano. Snadno ověříme, že skutečně jde o ekvivalenci a její třídy označíme jako celá čísla \mathbb{Z} . Na nich definujeme operaci sčítání (a s ní i odečítání) pomocí reprezentantů. Např.

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)],$$

což zjevně nezávisí na výběru reprezentantů.

Lze si přitom vždy volit reprezentanty $(a, 0)$ pro kladná čísla a reprezentanty $(0, a)$ pro čísla záporná, se kterými se nám bude patrně počítat nejlépe.

Tento jednoduchý příklad ukazuje, jak důležité je umět nahlížet na třídy ekvivalence jako na celistvý objekt a soustředit se na vlastnosti těchto objektů, nikoliv formální popisy jejich konstrukcí. Ty jsou však důležité k ověření, že takové objekty vůbec existují.

U celých čísel nám už platí všechny vlastnosti skalárů (KG1)–(KG4) a (O1)–(O4), viz odstavce 1.1 a 1.3. Pro násobení je neutrálním prvkem jednička, ale pro všechna čísla a různá od nuly a jedničky neumíme najít číslo a^{-1} s vlastností $a \cdot a^{-1} = 1$, tzn. chybí nám inverzní prvky pro násobení.

Zároveň si povšimněme, že platí vlastnost oboru integrity (OI), viz 1.3, tzn. je-li součin dvou čísel nulový, musí být alespoň jedno z nich nula.

Díky poslední jmenované vlastnosti můžeme zkonstruovat racionální čísla \mathbb{Q} přidáním všech chybějících inverzí zcela obdobným způsobem, jak jsme konstruovali \mathbb{Z} z množiny \mathbb{N} . Na množině uspořádaných dvojic $(p, q), q \neq 0$, celých čísel definujeme relaci \sim tak, jak očekáváme, že se

mají chovat podíly p/q :

$$(p, q) \sim (p', q') \iff p/q = p'/q' \iff p \cdot q' = p' \cdot q.$$

Opět neumíme očekávané chování v prostřední rovnosti v množině \mathbb{Z} formulovat, nicméně rovnost na pravé straně ano. Zjevně jde o dobře definovanou relaci ekvivalence (ověřte podrobnosti!) a racionální čísla jsou pak její třídy ekvivalence. Když budeme formálně psát p/q místo dvojice (p, q) , budeme definovat operace násobení a sčítání právě pomocí formulí, které nám jsou jistě dobře známy.

1.35

1.41. Zbytkové třídy. Jiným dobrým a jednoduchým příkladem jsou tzv. zbytkové třídy celých čísel. Pro pevně zvolené přirozené číslo k definujeme ekvivalenci \sim_k tak, že dvě čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou ekvivalentní, jestliže jejich zbytek po dělení číslem k je stejný. Výslednou množinu tříd ekvivalence označujeme \mathbb{Z}_k . Nejjednodušší je tato procedura pro $k = 2$. To dostáváme $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, kde nula reprezentuje sudá čísla, zatímco jednička čísla lichá. Opět lze snadno zjistit, že pomocí reprezentantů můžeme koorektně definovat násobení a sčítání na každém \mathbb{Z}_k .



Věta. Zbytkové třídy \mathbb{Z}_k jsou komutativním tělesem skalárů (tj. splňují i vlastnost (P) z odstavce 1.3), právě když je k prvočíslo.

Pokud k prvočíslem není, obsahuje \mathbb{Z} vždy dělitele nuly, není proto ani obor integrity.

DŮKAZ. Okamžitě je vidět druhé tvrzení — jestliže $x \cdot y = k$ pro přirozená čísla x, y , pak samozřejmě je výsledek násobení příslušných tříd $[x] \cdot [y]$ nulový.

Naopak, jsou-li x a k nesoudělná, existují podle tzv. Bezoutovy rovnosti, kterou dovodíme později (viz ??) přirozená čísla a a b splňující

$$ax + bk = 1,$$

což pro odpovídající třídy ekvivalence dává

$$[a] \cdot [x] + [0] = [a] \cdot [x] = [1]$$

a proto je $[a]$ inverzním prvkem k $[x]$. □

celá daná dvouprvková množina, nebo je tento průnik prázdný. Dvouprvkových podmnožin množiny M je $\binom{n}{2}$ a pokud kromě průniků s těmito množinami ještě určíme průnik dané relace s diagonální relací $\Delta_M = \{(a, a), \text{ kde } a \in M\}$, je tímto daná relace jednoznačně určena. Celkem můžeme provést $\binom{n}{2} + n$ nezávislých voleb mezi dvěma alternativami: každá množina typu $\{(a, b), (b, a) \mid \text{ kde } a, b \in M, a \neq b\}$ je buď podmnožinou dané relace, nebo ani jeden z jejích prvků v dané relaci neleží a každá dvojice $(a, a), a \in M$, potom také buď v relaci leží nebo ne. Celkem tedy máme $2^{\binom{n}{2}+n}$ symetrických relací na n -prvkové množině. □

1.117. Kolik existuje antisymetrických relací na n -prvkové množině?

Řešení. Relace na množině M je antisymetrická, právě když její průnik s každou množinou $\{(a, b), (b, a) \mid a \neq b, a, b \in M\}$ není dvouprvkový (jsou tedy tři možnosti jak průnik vypadá, buď je to množina $\{(a, b)\}$, nebo $\{(b, a)\}$, nebo je průnik prázdný). Průnik s diagonální relací pak může být libovolný. Určením těchto všech průniků je relace jednoznačně určena. Celkem máme $3^{\binom{n}{2}} 2^n$ antisymetrických relací na n -prvkové množině. □

1.118. Určete počet relací na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, které jsou současně symetrické i tranzitivní.

1.119. Určete počet relací uspořádání na tříprvkové množině.

1.120. Určete počet relací uspořádání na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ takových, že prvky 1 a 2 jsou nesrovnatelné (tedy neplatí $1 < 2$ ani $2 < 1$, kde $<$ je označení uvažované relace uspořádání).

1.121. Nechť pro libovolná celá čísla k, l platí $(k, l) \in R$ právě tehdy, když je číslo $4k - 4l$ celočíselným násobkem 7. Je takto zavedená relace R ekvivalence, uspořádání?

Řešení. Uvědomme si, že dvě celá čísla jsou spolu v relaci R , právě když dávají stejný zbytek po dělení 7. Jde tedy o příklad tzv. zbytkové třídy celých čísel. Proto víme, že relace R je relací ekvivalence. Její symetrie (např. $(3, 10), (10, 3) \in R, 3 \neq 10$) pak implikuje, že se nejedná o uspořádání. □

1.122. Nechť je na množině $N = \{3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots\}$ definována relace R tak, že dvě čísla jsou v relaci, právě když jsou nesoudělná (tedy neobsahuje-li prvočíselný rozklad uvažovaných dvou čísel ani jedno stejné prvočíslo). Zjistěte, zda je tato relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní.

Řešení. Pro dvojici stejných čísel platí, že $(n, n) \notin R$. Nejedná se tedy o reflexivní relaci. Být „soudělný“ nebo „nesoudělný“ pro dvojici čísel

$z \in N$ je zřejmě vlastnost neuspořádané dvojice – nezávisí na uvedeném pořadí uvažovaných čísel, a proto je relace R symetrická. Ze symetrie relace R plyne, že není antisymetrická (např. $(3, 5) \in R, 3 \neq 5$). Neboť je R symetrická a $(n, n) \notin R$ pro libovolné číslo $n \in N$, volba dvou různých čísel, která jsou spolu v této relaci, dává, že R není tranzitivní.

□

G. Doplnující příklady k celé kapitole

Vidíme tedy, že již hledání odmocnin nás nutí k rozšíření racionálních čísel na reálná. Jako cvičení si dokažte

1.123. Nechť t a m jsou kladná celá čísla. Ukažte, že číslo $\sqrt[m]{t}$ je buď přirozené, nebo není racionální.

1.124. Setkání se zúčastnilo šest mužů. Pokud si všichni navzájem potřásli rukama, vyčíslete počet potřesení.

Řešení. Počet potřesení rukou zřejmě odpovídá počtu způsobů, jak lze vybrat neuspořádanou dvojici ze 6 prvků, tj. výsledek je $c(6, 2) = \binom{6}{2} = 15$. \square

1.125. Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.

Řešení. Výsledek je

$$\binom{15}{4} - \binom{13}{2} = 1287.$$

Obdržíme ho tak, že nejprve určíme počet všech možných výběrů čtyřčlenné komise, potom od něj odečteme počet těch výběrů, kdy oba zmínění poslanci budou vybráni (v takovém případě vybíráme pouze 2 další členy komise ze 13 poslanců). \square

1.126. Kolika způsoby můžeme rozdělit 8 žen a 4 muže do 2 šestičlenných skupin (v nichž nerozlišujeme pořadí – jsou neuspořádané) tak, aby v obou skupinách byl alespoň 1 muž?

Řešení. Rozdělení 12 osob do 2 šestičlenných skupin bez jakýchkoli podmínek je dáno libovolným výběrem 6 z nich do první ze skupin, což lze provést $\binom{12}{6}$ způsoby. Skupiny ale nejsou rozlišitelné (nevíme, která z nich je první), a proto je počet všech možných rozdělení $\frac{1}{2} \cdot \binom{12}{6}$. V $\binom{8}{2}$ případech pak budou všichni muži v jedné skupině (volíme 2 ženy z 8, které skupinu doplní). Správná odpověď je tudíž

$$\frac{1}{2} \cdot \binom{12}{6} - \binom{8}{2} = 434.$$

\square

1.127. Jaký je počet čtyřciferných čísel složených z číslic 1, 3, 5, 6, 7 a 9, ve kterých se žádná z cifer neopakuje?

Řešení. K dispozici máme šest různých číslic. Ptáme se: Kolik různých uspořádaných čtveřic z nich můžeme vybrat? Výsledek je proto $v(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. \square

1.128. Řecká abeceda se skládá z 24 písmen. Kolik různých slov majících právě pět písmen z ní lze utvořit? (Bez ohledu na to, zda tato slova mají nějaký jazykový význam.)

Řešení. Pro každou z pěti pozic ve slově máme 24 možností, neboť písmena se mohou opakovat. Výsledek je tedy $V(24, 5) = 24^5$. \square

1.129. K vytrvalostnímu závodu, v němž běžci vyběhají jeden po druhém s danými časovými odstupy, se přihlásilo k závodníků, mezi nimi také tři kamarádi. Stanovte počet startovních listin, v rámci kterých žádní dva z trojice kamarádů nestartují těsně po sobě. Pro jednoduchost uvažujte $k \geq 5$.

Řešení. Ostatních $k - 3$ závodníků můžeme seřadit $(k - 3)!$ způsoby. Pro uvažované tři kamarády pak máme $k - 2$ míst (začátek, konec a $k - 4$ mezer), na které je můžeme rozmístit v $(k - 2, 3)$ způsoby. Podle (kombinatorického) pravidla součinu je tak výsledek

$$(k - 3)! \cdot (k - 2) \cdot (k - 3) \cdot (k - 4) = (k - 2)! \cdot (k - 3) \cdot (k - 4).$$

□

1.130. Turnaje se zúčastní 32 lidí. Podle požadavků organizátorů se musí libovolným způsobem rozdělit do čtyř skupin tak, aby první skupina měla 10 účastníků, druhá 8, třetí také 8 a poslední čtvrtá potom 6. Kolika způsoby se mohou takto rozdělit?

Řešení. Můžeme si představit, že z 32 účastníků vytvoříme řadu, kdy prvních 10 utvoří první skupinu, dalších 8 druhou atd. Celkem můžeme účastníky seřadit $32!$ způsoby. Uvědomme si ovšem, že na rozdělení do skupin nemá vliv, když zaměníme pořadí osob, které patří do stejné skupiny. Proto je počet navzájem různých rozdělení roven

$$P(10, 8, 8, 6) = \frac{32!}{10! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 6!}.$$

□

1.131. Je potřeba ubytovat 9 osob v jednom čtyřlůžkovém, jednom třílůžkovém a jednom dvoulůžkovém pokoji. Zjistěte, kolika způsoby to lze provést.

Řešení. Jestliže např. hostům ve čtyřlůžkovém pokoji, přiřadíme číslici 1, v třílůžkovém pokoji číslici 2 a v dvoulůžkovém číslici 3, pak vytváříme permutace s opakováním ze tří prvků 1, 2, 3, v nichž jednička se vyskytuje čtyřikrát, dvojka třikrát a trojka dvakrát. Příslušný počet permutací je

$$P(4, 3, 2) = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1\,260.$$

□

1.132. Určete počet způsobů, jak lze rozdělit mezi tři osoby A , B a C 33 různých mincí tak, aby osoby A a B měly dohromady právě dvakrát více mincí, než má osoba C .

Řešení. Ze zadání vyplývá, že osoba C má obdržet 11 mincí. To lze provést $\binom{33}{11}$ způsoby. Každou ze zbývajících 22 mincí může získat osoba A nebo B , což dává 2^{22} možností. Z (kombinatorického) pravidla součinu plyne výsledek $\binom{33}{11} \cdot 2^{22}$. □

1.133. Kolika způsoby můžete mezi 4 chlapce rozdělit 40 stejných kuliček?

Řešení. Přidejme ke 40 kuličkám troje zápalky. Poskládáme-li kuličky a zápalky do řady, rozdělí zápalky kuličky na 4 úseky. Náhodně seřadíme chlapce. Dáme-li prvnímu chlapci všechny kuličky z prvního úseku, druhému chlapci všechny kuličky z druhého úseku atd., je již vidět, že všech rozdělení je právě $\binom{43}{3} = 12\,341$. □

1.134. Podle kvality dělíme výrobky do skupin *I, II, III, IV*. Zjistěte počet všech možných rozdělení 9 výrobků do těchto skupin, která se liší počtem výrobků v jednotlivých skupinách.

Řešení. Zapisujeme-li přímo uvažované devítičlenné skupiny z prvků *I, II, III, IV*, vytváříme kombinace s opakováním deváté třídy ze čtyř prvků. Počet takových kombinací je $\binom{12}{9} = 220$. \square

1.135. Kolika způsoby mohla skončit tabulka první fotbalové ligy, víme-li o ní pouze, že alespoň jeden z týmů z dvojice Ostrava, Olomouc je v tabulce za týmem Brna (ligu hraje 16 mužstev).

Řešení. Nejprve určíme tři místa, na kterých se umístily celky Brna, Olomouce a Ostravy. Ty lze vybrat $c(3, 16) = \binom{16}{3}$ způsoby. Z šesti možných pořadí zmíněných tří týmů na vybraných třech místech vyhovují podmínce ze zadání čtyři. Pro libovolné pořadí těchto týmů na libovolně vybraných třech místech pak můžeme nezávisle volit pořadí zbylých 13 týmů na ostatních místech tabulky. Podle pravidla součinu je tedy hledaný počet tabulek roven

$$\binom{16}{3} \cdot 4 \cdot 13! = 13948526592000.$$

\square

1.136. Kolik je možných uspořádání (v řadě) na fotce volejbalového týmu (6 hráčů), když

- i) Gouald a Bamba chtějí stát vedle sebe
- ii) Gouald a Bamba chtějí stát vedle sebe a uprostřed
- iii) Gouald a Kamil nechtějí stát vedle sebe

Řešení.

- i) Goualda a Bambu můžeme v tomto případě počítat za jednoho, rozlišíme jen jak stojí vzájemně. Máme $2 \cdot 5! = 240$ pořadí.
- ii) Tady je to podobné, jen pozice Goualda a Bamby je pevně daná. Dostáváme $2 \cdot 4! = 48$ možností.
- iii) Nejjednodušší je asi odečíst případy, kdy stojí vedle sebe (viz (i)) od všech pořadí. Dostaneme $6! - 2 \cdot 5! = 720 - 240 = 480$.

\square

1.137. Házení mincí. Šestkrát hodíme mincí.

- i) Kolik je všech různých posloupností panna, orel
- ii) Kolik je takových, že padnou právě čtyři panny.
- iii) Kolik je takových, že padnou aspoň dvě panny.

1.138. Kolik existuje přesmyček slova BAZILIKA takových, že se v nich střídají souhlásky a samohlásky?

Řešení. Protože souhlásky i samohlásky jsou v daném slově čtyři, tak se v každé takové přesmyčce střídají pravidelně souhlásky a samohlásky. Slovo tedy může být typu *BABABABA* nebo *ABABABAB*. Na daných čtyřech místech můžeme pak samohlásky permutovat mezi sebou ($P_o(2, 2) = \frac{4!}{2!2!}$ způsoby) a nezávisle na tom i souhlásky ($4!$ způsoby). Hledaný počet je pak dle pravidla součinu $2 \cdot 4! \cdot \frac{4!}{2!2!} = 288$. \square

1.139. Kolika způsoby lze rozdělit 9 děvčat a 6 chlapců do dvou skupin tak, aby každá skupina obsahovala alespoň dva chlapce?

Řešení. Rozdělíme zvlášť děvčata a chlapce: $2^9(2^5 - 7) = 12800$. □

1.140. Materiál je tvořen pěti vrstvami, každá z nich má vlákna v jednom z daných šesti směrů. Kolik takových materiálů existuje? Kolik je jich takových, že dvě sousední vrstvy nemají vlákna ve stejném směru?

Řešení. 6^5 a $6 \cdot 5^5$. □

1.141. Na kružnici stojí n pevností ($n \geq 3$), očíslovaných po řadě čísly $1, \dots, n$. V jeden okamžik každá vystřelí na jednu ze dvou sousedních (pevnost 1 sousedí s pevností n). Označme $P(n)$ počet možných výsledků střelby (za výsledek střelby považujeme množinu čísel právě těch pevností, které byly při střelbě zasaženy, nerozlišujeme přitom mezi jedním a dvěma zásahy). Dokažte, že $P(n)$ a $P(n + 1)$ jsou nesoudělná.



Řešení. Označíme-li zasažené pevnosti černým kolečkem a nezasažené bílým, úloha je ekvivalentní úloze určit počet všech možných obarvení n koleček, umístěných na kružnici, černou a bílou barvou tak, aby nebyla žádná dvě bílá kolečka „objedno“. Pro lichá n je tento počet roven počtu $K(n)$ obarvení černou a bílou barvou tak, aby žádná dvě bílá kolečka nestála vedle sebe (přecházíme pevnosti tak, že začneme u kolečka 1 a číslováme popořadě vzestupně po lichých číslech a poté vzestupně po sudých). V případě sudého n je tento počet roven $K(n/2)^2$, kvadrátu počtu obarvení $n/2$ koleček na obvodu kruhu tak, aby žádná dvě bílá nestála vedle sebe (barvíme nezávisle kolečka na lichých a na sudých pozicích).

Pro $K(n)$ snadno odvodíme rekurentní formuli $K(n) = K(n - 1) + K(n - 2)$. Navíc snadno spočteme, že $K(2) = 3$, $K(3) = 4$, $K(4) = 7$, tedy $K(2) = F(4) - F(0)$, $K(3) = F(5) - F(1)$, $K(4) = F(6) - F(2)$ a indukci snadno dokážeme $K(n) = F(n + 2) - F(n - 2)$, kde $F(n)$ značí n -tý člen Fibonacciho posloupnosti ($F(0) = 0$, $F(1) = F(2) = 1$). Navíc protože $(K(2), K(3)) = 1$, máme pro $n \geq 3$ obdobně jako u Fibonacciho posloupnosti

$$\begin{aligned} (K(n), K(n - 1)) &= (K(n) - K(n - 1), K(n - 1)) = \\ &= (K(n - 2), K(n - 1)) = \dots = 1. \end{aligned}$$

Ukážeme nyní, že pro každé sudé $n = 2a$ je $P(n) = K(a)^2$ nesoudělné jak s $P(n + 1) = K(2a + 1)$, tak s $P(n - 1) = K(2a - 1)$. K tomu stačí následující: pro $a \geq 2$ je totiž

$$\begin{aligned} (K(a), K(2a + 1)) &= (K(a), F(2)K(2a) + F(1)K(2a - 1)) = \\ &= (K(a), F(3)K(2a - 1) + F(2)K(2a - 2)) = \dots \\ &= (K(a), F(a + 1)K(a + 1) + F(a)K(a)) = \\ &= (K(a), F(a + 1)) = (F(a + 2) - F(a - 2), F(a + 1)) = \\ &= (F(a + 2) - F(a + 1) - F(a - 2), F(a + 1)) = \\ &= (F(a) - F(a - 2), F(a + 1)) = \\ &= (F(a - 1), F(a + 1)) = (F(a - 1), F(a)) = 1 \\ (K(a), K(2a - 1)) &= (K(a), F(2)K(2a - 2) + F(1)K(2a - 3)) = \\ &= (K(a), F(3)K(2a - 3) + F(2)K(2a - 4)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \dots = (K(a), F(a)K(a) + F(a-1)K(a-1)) = \\
 &= (K(a), F(a-1)) = (F(a+2) - F(a-2), F(a-1)) = \\
 &= (F(a+2) - F(a), F(a-1)) = \\
 &= (F(a+2) - F(a+1), F(a-1)) = (F(a), F(a-1)) = 1.
 \end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

1.142. Kolik peněz naspořím na stavebním spoření za pět let, vkládám-li 3000 Kč měsíčně (vždy k 1. v měsíci), vklad je úročen roční úrokovou mírou 3% (úročení probíhá jednou za rok) a od státu obdržím ročně příspěvek 1500 Kč (státní příspěvek se připisuje vždy až 1. května následujícího roku)?

Řešení. Označme množství naspořených peněz po n -tém roce jako x_n . Potom dostáváme (pro $n > 2$) následující rekurentní formuli (navíc předpokládáme, že každý měsíc je přesně dvanáctina roku)

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= 1,03(x_n) + 36000 + 1500 + \\
 &\quad \underbrace{0,03 \cdot 3000 \left(1 + \frac{11}{12} + \dots + \frac{1}{12}\right)}_{\text{úroky z vkladů za aktuální rok}} + \\
 &\quad + \underbrace{0,03 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1500}_{\text{úrok ze státního příspěvku připsaného v aktuálním roce}} = \\
 &= 1,03(x_n) + 38115.
 \end{aligned}$$

Tedy

$$x_n = 38115 \sum_{i=0}^{n-2} (1,03)^i + (1,03)^{n-1} x_1 + 1500,$$

přičemž $x_1 = 36000 + 0,03 \cdot 3000 \left(1 + \frac{11}{12} + \dots + \frac{1}{12}\right) = 36585$, celkem

$$x_5 = 38115 \left(\frac{(1,03)^4 - 1}{0,03} \right) + (1,03)^4 \cdot 36585 + 1500 \doteq 202136.$$

□

1.143. Poznámka. Ve skutečnosti úročení probíhá podle počtu dní, které jsou peníze na účtu. Obstarejte si skutečný výpis ze stavebního spoření, zjistěte si jeho úročení a zkuste si spočítat připsané úroky za rok. Porovnejte je se skutečně připsanou sumou. Počítejte tak dlouho, dokud sumy nebudou souhlasit ...

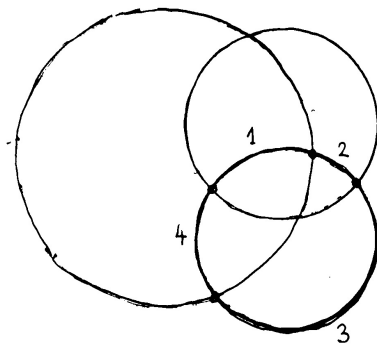
1.144. Na kolik maximálně částí dělí rovinu n kružnic?

Řešení. Pro maximální počet p_n oblastí, na které dělí rovinu kružnice odvodíme rekurentní vzorec

$$p_{n+1} = p_n + 2n.$$

Všimněme si totiž, že $(n+1)$ -ní kružnice protíná n předchozích maximálně v $2n$ průsečících (a tato situace skutečně může nastat).

přidání třetí kružnice



Navíc zřejmě $p_1 = 2$. Pro počet p_n tedy dostáváme

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + 2(n-1) = p_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = \dots \\ &= p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2i = n^2 - n + 2. \end{aligned}$$

□

1.145. Na kolik nejvýše částí dělí třírozměrný prostor n rovin?

Řešení. Označme hledaný počet r_n . Vidíme, že $r_0 = 1$. Podobně jako příkladu (1.39) uvažujme, že máme v prostoru n rovin, přidejme jednu další a ptejme se, kolik nejvýše částí prostoru přibude. Opět to bude přesně tolik, kolika původními částmi prostoru přidaná rovina prochází. Kolik to může být? Počet částí prostoru, kterými $(n+1)$ -ní rovina prochází je roven počtu částí, na které je přidaná $(n+1)$ -ní rovina rozdělena průsečnicemi s n rovinami, které v prostoru již byly rozmístěny. Těchto částí však může být podle předchozího příkladu nejvýše $1/2 \cdot (n^2 + n + 2)$, dostáváme tak rekurentní formuli

$$r_{n+1} = r_n + \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Danou rovnicí opět můžeme vyřešit přímo:

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-1} + \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} = r_{n-1} + \frac{n^2 - n + 2}{2} = \\ &= r_{n-2} + \frac{(n-1)^2 - (n-1) + 2}{2} + \frac{n^2 - n + 2}{2} = \\ &= r_{n-2} + \frac{n^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{(n-1)}{2} + 1 + 1 = \\ &= r_{n-3} + \frac{n^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-3)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{(n-1)}{2} - \frac{(n-2)}{2} + \\ &\quad + 1 + 1 + 1 = \\ &= \dots = r_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 = \\ &= 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} + n = \end{aligned}$$

$$= \frac{n^3 + 6n + 5}{6},$$

kde jsme použili známého vztahu

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

který lze snadno dokázat matematickou indukcí.

□

1.146. Na kolik maximálně částí dělí trojrozměrný prostor n koulí?

1.147. Na kolik částí dělí prostor n navzájem různých rovin, které všechny prochází jedním daným bodem?

Řešení. Pro hledaný počet x_n odvodíme rekurentní formuli

$$x_n = x_{n-1} + 2(n-1),$$

dále $x_1 = 2$, tedy

$$x_n = n(n-1) + 2.$$

□

1.148. Z balíčku 52 karet náhodně vybereme 16 karet. Vyjádřete pravděpodobnost, že vybereme právě 10 červených a 6 černých karet.

Řešení. Nejdříve si uvědomme, že nemusíme zohledňovat pořadí výběru karet. (Ve výsledném zlomku bychom uspořádané výběry získali tak, že bychom číslem 16! vynásobili čitatele i jmenovatele.) Počet všech možných (neuspořádaných) výběrů 16 karet z 52 je $\binom{52}{16}$. Podobně je počet všech možných výběrů 10 karet z 26 roven $\binom{26}{10}$ a 6 karet z 26 pak $\binom{26}{6}$. Neboť vybíráme nezávisle na sobě 10 karet z 26 červených a 6 karet z 26 černých, užití (kombinatorického) pravidla součinu dává výsledek

$$\frac{\binom{26}{10} \cdot \binom{26}{6}}{\binom{52}{16}} \doteq 0,118.$$

□

1.149. V urně je 7 bílých, 6 žlutých a 5 modrých koulí. Vylosujeme (bez vracení) 3 koule. Určete pravděpodobnost, že právě 2 jsou bílé.

Řešení. Celkem máme $\binom{7+6+5}{3}$ způsobů, jak lze vybrat 3 koule. Vylosovat právě 2 bílé umožňuje $\binom{7}{2}$ výběrů bílých a současně $\binom{11}{1}$ výběrů zbylé (třetí) koule. Podle pravidla součinu je tak počet způsobů, jak lze vylosovat právě 2 bílé, roven $\binom{7}{2} \cdot \binom{11}{1}$. Odsud již plyne výsledek

$$\frac{\binom{7}{2} \cdot 11}{\binom{18}{3}} \doteq 0,283.$$

□

1.150. Z karetní hry o 108 kartách ($2 \times 52 + 4$ žolíci) bez vracení vybereme 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedna z nich je eso nebo žolík?

Řešení. Lehce můžeme určit pravděpodobnost opačného (komplementárního) jevu znamenajícího, že ve vybrané čtveřici není žádná z 12 uvažovaných karet (8 es a 4 žolíků). Tato pravděpodobnost je dána poměrem počtu výběrů 4 karet z 96 a počtu výběrů 4 karet ze 108, tj. je rovna $\binom{96}{4} / \binom{108}{4}$. Opačný jev má tudíž pravděpodobnost

$$1 - \frac{\binom{96}{4}}{\binom{108}{4}} \doteq 0,380.$$

□

1.151. Při házení kostkou padla jedenáctkrát po sobě čtyřka. Uvedte pravděpodobnost, že padne podvanácté.

Řešení. Předchozí výsledky (podle našich předpokladů) nijak neovlivňují, co padne na kostce při dalších hodech. Proto je hledaná pravděpodobnost $1/6$. □

1.152. Z balíčku 32 karet náhodně vypadne 6 karet. Jaká je pravděpodobnost, že jsou všechny téže barvy?

Řešení. K tomu, abychom získali výsledek

$$\frac{4 \cdot \binom{8}{6}}{\binom{32}{6}} \doteq 1,234 \cdot 10^{-4},$$

stačí nejprve zvolit jednu ze 4 barev a uvědomit si, že existuje $\binom{8}{6}$ způsobů, jak vybrat 6 karet z 8 této barvy. □

1.153. Tři hráči dostanou po 10 kartách a 2 zbudou (z balíčku připraveného na mariáš nebo prší – 32 karet, z toho 4 esa). Je pravděpodobnější, že někdo dostane listovou sedmu, osmu a devítku, nebo to, že zbyla dvě esa?

Řešení. Protože pravděpodobnost, že nějaký z hráčů dostane uvedené tři karty, je rovna hodnotě

$$3 \frac{\binom{29}{7}}{\binom{32}{10}},$$

zatímco pravděpodobnost, že zbudou dvě esa, je rovna číslu

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}},$$

je pravděpodobnější, že nějaký z hráčů dostal zmíněné tři karty. Poznamenejme, že dokázat nerovnost

$$\frac{3 \cdot \binom{29}{7}}{\binom{32}{10}} > \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}}$$

lze úpravou obou jejích stran, kdy opakovaným krácením (po vyjádření kombinačních čísel dle definice) lehce dostaneme $6 > 1$. □

1.154. Hodíme n kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že mezi čísly, která padnou, nebudou hodnoty 1, 3 a 6?

Řešení. Úlohu můžeme přeformulovat tak, že n -krát po sobě hodíme 1 kostkou. Pravděpodobnost, že při prvním hodu nepadne 1, 3 nebo 6, je $1/2$. Pravděpodobnost, že při prvním a druhém hodu nepadne 1, 3 ani 6, je zjevně $1/4$ (výsledek prvního hodu neovlivňuje výsledek druhého). Vzhledem k tomu, že jev určený výsledkem jistého hodu a jakýkoli jev určený výsledkem jiného hodu jsou vždy (stochasticky) nezávislé, hledaná pravděpodobnost je $1/2^n$. □

1.155. Dva přátelé střílejí nezávisle na sobě do jednoho terče, každý po jednom výstřelu. Pravděpodobnost zásahu terče pro prvního je 0,4, pro druhého je 0,3. Nalezněte pravděpodobnost P jevu, že po střelbě bude v terči právě jeden zásah.

Řešení. Výsledek stanovíme tak, že sečteme pravděpodobnosti těchto dvou neslučitelných jevů: trefil se první střelec a druhý nikoli; první střelec minul, zatímco druhý terč zasáhl. Při nezávislosti jevů (která se zachovává také tehdy, když uvažujeme komplementy některých z jevů) je pravděpodobnost společného nastoupení dána součinem pravděpodobností jednotlivých jevů. Užitím toho dostáváme

$$P = 0,4 \cdot (1 - 0,3) + (1 - 0,4) \cdot 0,3 = 0,46.$$

□

1.156. Dvanáctkrát po sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padnou tři líce?

Řešení. Uvážíme-li, že při opakování téhož pokusu jsou jednotlivé výsledky nezávislé, a označíme-li pro $i \in \{1, \dots, 12\}$ jako A_i jev „při i -tém hodu padly tři líce“, určujeme

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{12} A_i\right) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_{12})).$$

Pro každé $i \in \{1, \dots, 12\}$ je však $P(A_i) = 1/8$, neboť na každé ze tří mincí padne líc s pravděpodobností $1/2$ nezávisle na tom, zda na ostatním mincích padl líc, příp. rub. Nyní již můžeme napsat výsledek

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{12}.$$

□

1.157. Z deseti karet, z nichž právě jedna je eso, namátkou vybereme kartu a vrátíme ji zpět. Kolikrát takový výběr musíme provést, aby pravděpodobnost, že aspoň jednou vybereme eso, byla větší než 0,9?

Řešení. Označme A_i jev „při i -tém výběru bylo vytaženo eso“. Neboť jednotlivé jevy A_i jsou (stochasticky) nezávislé, víme, že

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n))$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Připomeňme, že hledáme $n \in \mathbb{N}$ takové, aby platilo

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n)) > 0,9.$$

Zřejmě je $P(A_i) = 1/10$ pro libovolné $i \in \mathbb{N}$. Proto stačí vyřešit nerovnici

$$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n > 0,9,$$

ze které lze vyjádřit

$$n > \frac{\log_a 0,1}{\log_a 0,9}, \quad \text{kde } a > 1.$$

Vyčíslením potom zjistíme, že daný pokus musíme provést alespoň dvaadvacetkrát.

□

1.158. Texas hold'em. Nyní spočítejme několik jednoduchých úloh týkajících se populární karetní hry Texas hold'em, jejíž pravidla zde nebudeme uvádět (pokud je čtenář nezná, snadno je dohledá na internetu). Jaká je pravděpodobnost, že

- i) jako startovní kominaci dostanu dvojici stejných symbolů?
- ii) ve své startovní dvojici karet budu mít eso?
- iii) na konci budu mít jednu z šesti nejlepších kombinací karet?
- iv) vyhraji, pokud držím v ruce eso a trojku (libovolné barvy), na flopu je eso a dvě dvojky a na turnu je třetí trojka a všechny tyto čtyři karty mají různou barvu? (poslední karta river ještě není otočena)

Řešení.

- i) Počet různých symbolů je 13 a jsou vždy čtyři (pro každou barvu jeden). Proto je počet dvojic se stejnými symboly $13 \binom{4}{2} = 78$. Počet všech možných dvojic je $\binom{13 \cdot 4}{2} = 1326$. Pravděpodobnost stejných symbolů je tedy $\frac{1}{17} \doteq 0,06$.
- ii) Jedna karta je eso, to jsou čtyři možnosti a druhá je libovolná, to je 51 možností. Dvojice s oběma esama, kterých je $\binom{4}{2} = 6$ jsme ale takto započítali dvakrát. Dostáváme tedy $4 \cdot 51 - 6 = 198$ dvojic a pravděpodobnost je $\frac{198}{1326} \doteq 0,15$.
- iii) Spočítáme pravděpodobnosti jednotlivých nejlepších kombinací:

ROYAL FLUSH: Takové kombinace jsou zřejmě jen čtyři - pro každou barvu jedna. Všechny kombinace pěti karet je $\binom{52}{5} = 2598960$. Pravděpodobnost je tak rovna asi $1,5 \cdot 10^{-6}$. Hodně malá :)

STRAIGHT FLUSH: Postupka, která končí nejvyšší kartou v rozmezí 6 až K, tj. 8 možností pro každou barvu. Dostáváme $\frac{32}{2598960} \doteq 1,2 \cdot 10^{-5}$.

POKER: Čtyři stejné symboly - 13 možností (pro každý symbol jedna). Pátá karta může být libovolná, to znamená 48 možností. Odtud: $\frac{624}{2598960} \doteq 2,4 \cdot 10^{-4}$.

FULL HOUSE: Tři stejné symboly $13 \binom{4}{3} = 52$ možností a k tomu dva stejné symboly je $12 \binom{4}{2} = 72$ možností. Pravděpodobnost je $\frac{3744}{2598960} \doteq 1,4 \cdot 10^{-3}$.

FLUSH: Všechny pět karet stejné barvy znamená $4 \binom{13}{5} = 5148$ možností a pravděpodobnost je pak $\frac{5148}{2598960} \doteq 2 \cdot 10^{-3}$.

STRAIGHT: Nejvyšší karta postupky je v rozmezí 6 až A, tj. 9 možností. Barva každé karty je pak libovolná, tj. dohromady $9 \cdot 4^5 = 9216$ možností. Zde jsme ale započítali jak straight flush, tak i royal flush. Ty je potřeba odečíst.

Pro zjištění pravděpodobnosti nějaké z šesti nejlepších kombinací to ale ani nemusíme dělat, jen první dvě kombinace nezapočteme. Celkově tedy dostáváme pravděpodobnost zhruba $3,5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-3} + 2,4 \cdot 10^{-4} = 7,14 \cdot 10^{-3}$.
- iv) Evidentně je situace hodně dobrá a proto bude lepší spočítat nepříznivé situace, tj. kdy bude mít soupeř lepší kombinaci. Já mám v tuto chvíli full house ze dvou es a tří dvojek. Jediná kombinace, která by mohl porazit v tuto chvíli je buď full house ze tří es a dvou dvojek nebo dvojkový poker. To znamená, že soupeř by určitě musel držet eso nebo poslední dvojku. Pokud drží dvojku a libovolnou jinou kartu, pak určitě vyhraje bez ohledu na kartu na riveru. Kolik je možností pro tuto kartu ke dvojce? $3 + 4 + \dots + 4 + 2 = 45$ (jednu trojku a dvě esa už mít v ruce nemůže). Všechny zbylé kombinace je $\binom{46}{2} = 1035$ a pravděpodobnost takové prohry je tak 0,043. Pokud drží v ruce eso, pak se může stát následující. Pokud drží

(zbylá) dvě esa, tak opět vyhraje, pokud na riveru nepřijde dvojka - pak by byl split poker. Pravděpodobnost (podmíněná) mé prohry je tedy $\frac{1}{1035} \cdot \frac{43}{44} \doteq 10^{-3}$. pokud drží soupeř v ruce eso a nějakou jinou kartu, než 2 a A, tak následuje remíza bez ohledu na river. Celková pravděpodobnost výhry je tak skoro 96 %.

□

1.159. Zjistěte pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padla alespoň na jedné kostce čtyřka, jestliže padl součet 7.

Řešení. Příklad řešíme pomocí klasické pravděpodobnosti, kdy podmínku interpretujeme jako zúžení pravděpodobnostního prostoru. Ten má vzhledem k podmínce tedy 6 prvků, z čehož právě 2 jsou příznivé vyšetřovanému jevu. Správná odpověď je $2/6 = 1/3$.

□

1.160. Hodíme dvěma kostkami. Určete podmíněnou pravděpodobnost, že na první kostce padla pětka za podmínky, že padl součet 9. Na základě tohoto výsledku rozhodněte o nezávislosti jevů „na první kostce padla pětka“ a „padl součet 9“.

Řešení. Označíme-li jev „na první kostce padla pětka“ jako A a jev „padl součet 9“ jako H , pak platí

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}.$$

Uvědomme si, že součet 9 můžeme získat tak, že na první kostce padne 3 a na druhé 6, na první 4 a na druhé 5, na první 5 a na druhé 4 nebo na první 6 a na druhé 3. Z těchto čtyř (stejně pravděpodobných) výsledků jevu A vyhovuje právě jeden. Protože pravděpodobnost jevu A je očividně $1/6 \neq 1/4$, nejsou uvedené jevy nezávislé.

□

1.161. Mějme balíček 32 karet. Vytáhneme-li dvakrát po jedné kartě, nalezněte pravděpodobnost, že druhá tažená karta bude eso, když první kartu vrátíme, a také tehdy, když ji do balíčku nevrátíme (druhou kartu potom vybíráme z balíčku 31 karet).

Řešení. Pokud kartu do balíčku vrátíme, zjevně opakujeme pokus, který má 32 možných (stejně pravděpodobných) výsledků, přičemž právě 4 z nich vyhovují námi uvažovanému jevu. Vidíme, že tomto případě je hledaná pravděpodobnost $1/8$. Ve druhém případě, kdy první kartu do balíčku nevrátíme, je ovšem hledaná pravděpodobnost stejná. Postačuje např. uvážít, že při vytažení postupně všech karet je pravděpodobnost vytažení esa jako první karty totožná s pravděpodobností, že druhá vytažená karta bude eso. Pochopitelně bylo možné využít toho, že máme zavedenu podmíněnou pravděpodobnost. Tak bychom mohli obdržet

$$\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} + \frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{8}.$$

□

1.162. Uvažujme rodiny se dvěma dětmi a pro jednoduchost předpokládejme, že všechny možnosti v množině $\Omega = \{kk, kh, hk, hh\}$, kde k značí „kluk“ a h znamená „holka“ při zohlednění stáří dětí, jsou stejně pravděpodobné. Zaveďme náhodné jevy

$$H_1 - \text{rodina má kluka}, \quad A_1 - \text{rodina má 2 kluky}.$$

Vypočtěte $P(A_1|H_1)$.

Podobně uvažujme rodiny se třemi dětmi, kdy je

$$\Omega = \{kkk, kkh, khk, hkk, khh, hkh, hkh, hhh\}.$$

Jestliže

H_2 – rodina má kluka i holku, A_2 – rodina má nejvýše jednu holku,

rozhodněte o nezávislosti náhodných jevů A_2 a H_2 .

Řešení. Uvážení, které ze čtyř prvků množiny Ω (ne)vyhovují jevu A_1 , resp. H_1 , lehce získáváme

$$P(A_1|H_1) = \frac{P(A_1 \cap H_1)}{P(H_1)} = \frac{P(A_1)}{P(H_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Dále máme zjistit, zda platí

$$P(A_2 \cap H_2) = P(A_2) \cdot P(H_2).$$

Opět si stačí pouze uvědomit, že jevu A_2 vyhovují právě prvky kkk, kkh, khk, hkk množiny Ω , jevu H_2 prvky $kkh, khk, hkk, khh, hkh, hhh$ a jevu $A_2 \cap H_2$ prvky kkh, khk, hkk . Odtud plyne

$$P(A_2 \cap H_2) = \frac{3}{8} = \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{8} = P(A_2) \cdot P(H_2),$$

což znamená, že jevy A_2 a H_2 jsou nezávislé. \square

1.163. Pětkrát jsme hodili mincí. Pokud padl líc, dali jsme do klobouku bílou kuličku. Když padl rub, dali jsme do téhož klobouku kuličku černou. Vyjádřete pravděpodobnost, že v klobouku je více černých kuliček než bílých, je-li v klobouku alespoň jedna černá kulička.

Řešení. Zavedme jevy

A – v klobouku je víc černých kuliček než bílých,

H – v klobouku je aspoň jedna černá kulička.

Chceme stanovit $P(A|H)$. Uvědomme si, že pravděpodobnost $P(H^C)$ opačného jevu k jevu H je 2^{-5} a že pravděpodobnost jevu A je stejná jako pravděpodobnost $P(A^C)$ jevu opačného (v klobouku je víc bílých kuliček). Nutně tedy $P(H) = 1 - 2^{-5}$, $P(A) = 1/2$. Dále je $P(A \cap H) = P(A)$, neboť jev H obsahuje jev A (jev A má za důsledek jev H). Celkem jsme obdrželi

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{16}{31}.$$

\square

1.164. V osudí je 9 červených a 7 bílých koulí. Postupně vytáhneme 3 koule (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že první dvě budou červené a třetí bílá.

Řešení. Příklad budeme řešit pomocí věty o násobení pravděpodobností. Nejprve požadujeme vytažení červené koule, což se podaří s pravděpodobností $9/16$. Pokud byla poprvé vytažena červená koule, při druhém tahu vytáhneme znovu červenou kouli s pravděpodobností $8/15$ (v osudí je 15 koulí, z toho 8 červených). Konečně, pokud byla dvakrát vytažena červená koule, pravděpodobnost, že potom bude vytažena bílá, je $7/14$ (v osudí je 7 bílých koulí a 7 červených koulí). Celkem dostáváme

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = 0,15.$$

\square

1.165. V osudí je 10 koulí, a to 5 černých a 5 bílých. Postupně budeme losovat po jedné kouli, přičemž vytaženou kouli nevrátíme zpět. Stanovte pravděpodobnost, že nejprve vytáhneme bílou, poté černou, pak bílou a v posledním čtvrtém tahu opět bílou kouli.

Řešení. Použijeme větu o násobení pravděpodobností. V prvním tahu vytáhneme bílou kouli s pravděpodobností $5/10$, poté černou s pravděpodobností $5/9$, následně bílou s pravděpodobností $4/8$ a na závěr bílou s pravděpodobností $3/7$. Dohromady to dává

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{84}.$$

□

1.166. Z balíčku 32 karet náhodně vybereme šestkrát po sobě po jedné kartě, a to bez vracení. Spočítejte pravděpodobnost, že první král bude vybrán až při šestém výběru.

Řešení. Podle věty o násobení pravděpodobností je výsledek

$$\frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{29} \cdot \frac{24}{28} \cdot \frac{4}{27} \doteq 0,0723.$$

□

1.167. Jaká je pravděpodobnost, že součet dvou náhodně zvolených kladných čísel menších než 1 bude menší než $3/7$?

Řešení. Je vidět, že jde o jednoduchý příklad na geometrickou pravděpodobnost, kdy jako základní prostor Ω se nabízí čtverec s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[1, 1]$, $[0, 1]$ (volíme dvě čísla mezi 0 a 1). Zajímá nás pravděpodobnost jevu udávajícího, že pro náhodně zvolený bod $[x, y]$ v tomto čtverci bude platit $x + y < 3/7$; tj. pravděpodobnost toho, že zvolený bod se bude nacházet uvnitř trojúhelníku A s vrcholy $[0, 0]$, $[3/7, 0]$, $[0, 3/7]$. Nyní již snadno vyčíslíme

$$P(A) = \frac{\text{vol } A}{\text{vol } \Omega} = \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^2/2}{1} = \frac{9}{98}.$$

□

1.168. Nechť je náhodně rozlomena tyč na tři části. Stanovte pravděpodobnost, že délka druhé (prostřední) části bude větší než dvě třetiny délky tyče před jejím rozlomením.

Řešení. Nejprve si označme délku uvažované tyče jako d . Rozlomení tyče ve dvou místech je dáno volbou bodů, kde ji zlomíme. Označme jako x bod, ve kterém je první (např. blíže nějakému předmětu) zlom, a jako $x + y$ bod, ve kterém je druhý zlom. To nám říká, že za základní prostor lze považovat množinu $\{[x, y]; x \in (0, d), y \in (0, d - x)\}$, tj. trojúhelník s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[d, 0]$, $[0, d]$. Délka prostřední části je dána hodnotou y . Požadavek ze zadání lze nyní zapsat v jednoduchém tvaru $y > 2d/3$, což odpovídá trojúhelníku s vrcholy $[0, 2d/3]$, $[d/3, 2d/3]$, $[0, d]$. Obsahy uvažovaných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků jsou $d^2/2$ a $(d/3)^2/2$, a proto je hledaná pravděpodobnost

$$\frac{\frac{d^2}{3^2 \cdot 2}}{\frac{d^2}{2}} = \frac{1}{9}.$$

□

1.169. Tyč o délce 2 m je náhodně rozřezána na tři části. Nalezněte pravděpodobnost jevu, že třetí část měří méně než 1,5 m.

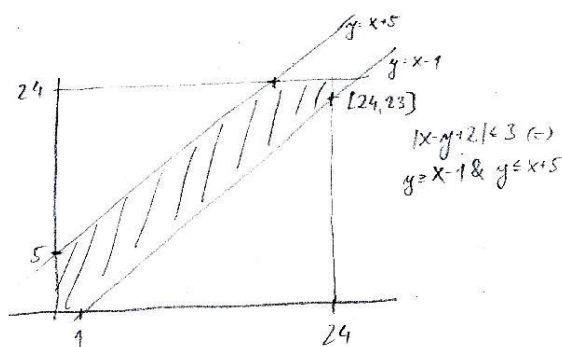
Řešení. Tento příklad je na užití geometrické pravděpodobnosti, kdy hledáme pravděpodobnost toho, že součet délek prvních dvou částí je větší než čtvrtina délky tyče. Určeme pravděpodobnost opačného jevu, tj. pravděpodobnost, když budou náhodně (a nezávisle na sobě) zvolena dvě místa, ve kterých bude tyč rozřezána, že budou obě v první čtvrtině tyče. Pravděpodobnost tohoto jevu je $1/4^2$, neboť pravděpodobnost výběru místa v první čtvrtině tyče je zřejmě $1/4$ a tento výběr se (nezávisle) jednou opakuje. Pravděpodobnost hledaného (opačného) jevu je tak $15/16$. \square

1.170. Mirek a Marek chodí na obědy do univerzitní menzy. Menza má otevřeno od 11h do 14h. Každý z nich stráví na obědě půl hodiny a dobu příchodu (mezi 11h a 14h) si vybírá náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se na obědě v daný den potkají, sedávají-li oba u stejného stolu?

Řešení. Prostor všech možných jevů je čtverec 3×3 . Označíme-li x dobu příchodu Mirka a y dobu příchodu Marka, tak tito se potkají, právě když $|x - y| \leq 1/2$. Tato nerovnost vymezuje ve čtverci možných událostí oblast, jejíž obsah je roven $11/36$ obsahu čtverce. Tomuto zlomku je tedy rovna i hledaná pravděpodobnost. \square

1.171. Z Brna vyrazí náhodně někdy mezi polednem a čtvrtou hodinou odpolední Honza autem do Prahy a opačným směrem někdy ve stejném intervalu autem Martin. Oba si dávají půl hodiny pauzu v motorestu v polovině cesty (přístupném pro oba směry). Jaká je pravděpodobnost, že se tam potkají, jezdí-li Honza rychlostí 150 km/h a Martin 100 km/h? (Vzdálenost Brno-Praha je 200 km)

Řešení. Označíme-li dobu odjezdu Martina x a dobu odjezdu Honzy y a pro menší výskyt zlomků v následujících výpočtech zvolíme za jednotku deset minut, tak stavovým prostorem bude čtverec 24×24 . Doba příjezdu Martina do motorestu je $x + 6$, do příjezdu Honzy $x + 4$. Stejně jako v předchozím příkladu to, že se v motorestu potkají, je ekvivalentní tomu, že doby jejich příjezdu se neliší o více než o půl hodiny, tedy $|(x + 6) - (y + 4)| \leq 3$. Tato podmínka nám pak ve stavovém čtverci vymezuje oblast o obsahu $24^2 - \frac{1}{2}(23^2 + 19^2)$ (viz obr.) a hledaná pravděpodobnost je

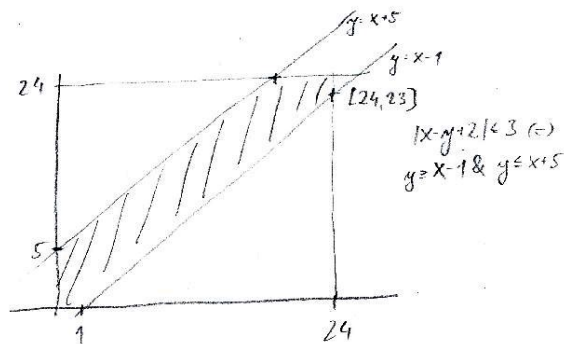


$$p = \frac{24^2 - \frac{1}{2}(23^2 + 19^2)}{24^2} = \frac{131}{576} \doteq 0,227.$$

\square

1.172. Mirek vyjede náhodně mezi desátou hodinou dopolední a osmou hodinou večerní z Brna do Prahy. Marek vyjede náhodně ve stejném intervalu z Prahy do Brna. Oběma trvá cesta 2 hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že se po cestě potkají (jezdí po stejné trase)?

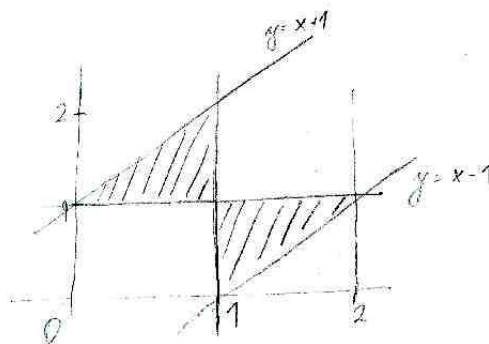
Řešení. Řešíme naprosto analogicky jako v předchozím příkladě. Prostor všech možných jevů je čtverec 10×10 , Mirek, vyjíždějící v čase x , potká Marka, vyjíždějícího v čase y právě když $|x - y| \leq 2$. Hledaná pravděpodobnost je $p = \frac{36}{100} = \frac{9}{25} = 0,36$.



□

1.173. Dvoumetrová tyč je náhodně rozdělena na tři díly. Určete pravděpodobnost, že ze vzniklých dílů půjde sestavit trojúhelník.

Řešení. Rozdělení tyče je dáno stejně jako v předchozím příkladě body řezu x a y a jevovým prostorem je opět čtverec 2×2 . Aby z částí bylo možno sestavit trojúhelník, musejí jejich délky splňovat tzv. trojúhelníkové nerovnosti, tedy součet délek libovolných dvou částí musí být větší než délka třetí části. Vzhledem k tomu, že součet délek je roven 2 m, je tato podmínka ekvivalentní podmínce, že každá s částí musí být menší než 1 m. To pomocí řezů x a y vyjádříme tak, že nesmí platit současně $x \leq 1$ a $y \leq 1$ nebo současně $x \geq 1$ a $y \geq 1$ (odpovídá podmínkám, že krajní díly tyče jsou menší než 1), navíc $|x - y| \leq 1$ (prostřední díl musí být menší než jedna). Tyto podmínky splňuje vyšrafovaná oblast na obrázku a jak snadno nahlédneme, její obsah je $1/4$.



□

1.174. Je rovnice

- (a) $4x_1 - \sqrt{3}x_2 = 3,$
 $x_1 - 2\sqrt{7}x_2 = -2;$
- (b) $4x_1 - \sqrt{3}x_2 = 16,$
 $x_1 - 2\sqrt{7}x_2 = -7;$
- (c) $4x_1 + 2x_2 = 7,$
 $-2x_1 - x_2 = -3$

jednoznačně řešitelná (má právě 1 řešení)?

Řešení. Soustava lineárních rovnic je jednoznačně řešitelná právě tehdy, když je nenulový determinant matice určené koeficienty na levé straně soustavy. Zvláště řečeno, absolutní členy (čísla na pravé straně) neovlivňují jednoznačnost řešení soustavy. Musíme tedy ve variantách (a) a (b) dostat stejnou odpověď. Protože

$$\begin{vmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2\sqrt{7} \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2\sqrt{7}) - (-\sqrt{3} \cdot 1) \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - (2 \cdot (-2)) = 0,$$

mají soustavy ve variantách (a) a (b) právě 1 řešení a poslední soustava nikoliv. Vynásobíme-li druhou rovnici v (c) číslem -2 , vidíme, že tato soustava nemá řešení. \square

1.175. Vypočítejte obsah S čtyřúhelníku zadaného vrcholy

$$[0, -2], \quad [-1, 1], \quad [1, 5], \quad [1, -1].$$

Řešení. Při obvyklém označení vrcholů

$$A = [0, -2], \quad B = [1, -1], \quad C = [1, 5], \quad D = [-1, 1]$$

a neméně obvyklém rozdělení čtyřúhelníku na trojúhelníky ABC a ACD s obsahy S_1 a S_2 , dostáváme

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1-0 & 1-0 \\ -1+2 & 5+2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1-0 & -1-0 \\ 5+2 & 1+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(7-1) + \frac{1}{2}(3+7) = 8.$$

\square

1.176. Určete obsah čtyřúhelníka $ABCD$ s vrcholy $A = [1, 0]$, $B = [11, 13]$, $C = [2, 5]$ a $D = [-2, -5]$.

Řešení. Čtyřúhelník rozdělíme na dva trojúhelníky ABC a ACD . Jejich obsahy pak spočítáme pomocí patřičných determinantů, viz 1.34,

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 13 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{47}{2}.$$

\square

1.177. Spočítejte obsah rovnoběžníku s vrcholy v bodech $[5, 5]$, $[6, 8]$ a $[6, 9]$.

Řešení. Přestože takový rovnoběžník není zadán jednoznačně (není uveden čtvrtý vrchol), trojúhelník s vrcholy $[5, 5]$, $[6, 8]$ a $[6, 9]$ musí být nutně polovinou každého rovnoběžníku s těmito třemi vrcholy (jedna ze stran trojúhelníku se stane úhlopříčkou rovnoběžníku). Proto je hledaný obsah vždy roven determinantu

$$\begin{vmatrix} 6-5 & 6-5 \\ 8-5 & 9-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 1.$$

\square

1.178. Výčtem prvků zadejte $S \circ R$, je-li

$$R = \{(2, 4), (4, 4), (4, 5)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

$$S = \{(3, 1), (3, 2), (3, 5), (4, 1), (4, 4)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Řešení. Uvážení všech výběrů dvou uspořádaných dvojic

$$(2, 4), (4, 1); \quad (2, 4), (4, 4); \quad (4, 4), (4, 1); \quad (4, 4), (4, 4)$$

splňujících, že druhá složka první uspořádané dvojice, která je prvkem R , je rovna první složce druhé uspořádané dvojice, která je prvkem S , dostáváme

$$S \circ R = \{(2, 1), (2, 4), (4, 1), (4, 4)\}.$$

□

1.179. Nechť je dána binární relace

$$R = \{(0, 4), (-3, 0), (5, \pi), (5, 2), (0, 2)\}$$

mezi množinami $A = \mathbb{Z}$ a $B = \mathbb{R}$. Vyjádřete R^{-1} a $R \circ R^{-1}$.

Řešení. Ihned vidíme, že

$$R^{-1} = \{(4, 0), (0, -3), (\pi, 5), (2, 5), (2, 0)\}.$$

Odtud pak dále

$$R \circ R^{-1} = \{(4, 4), (0, 0), (\pi, \pi), (2, 2), (4, 2), (\pi, 2), (2, \pi), (2, 4)\}.$$

□

1.180. Rozhodněte, zda je relace R určená podmínkou

$$(a) \quad (a, b) \in R \iff |a| < |b|;$$

$$(b) \quad (a, b) \in R \iff |a| = |2b|$$

na množině celých čísel \mathbb{Z} tranzitivní.

Řešení. V prvním případě relace R tranzitivní je, protože platí

$$|a| < |b|, |b| < |c| \implies |a| < |c|.$$

Ve druhém případě relace R tranzitivní není. Stačí např. uvážít, že

$$(4, 2), (2, 1) \in R, \quad (4, 1) \notin R.$$

□

1.181. Najděte všechny relace na $M = \{1, 2\}$, které nejsou antisymetrické. Které z nich jsou tranzitivní?

Řešení. Hledané relace, jež nejsou antisymetrické, jsou čtyři. Jsou to právě ty podmnožiny $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$, které obsahují prvky $(1, 2), (2, 1)$ (jinak nemůže být podmínka antisymetrie porušena). Z těchto čtyř je tranzitivní pouze jediná relace

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} = M \times M,$$

protože nezahrnutí dvojic $(1, 1)$ a $(2, 2)$ do tranzitivní relace by znamenalo, že nemůže obsahovat zároveň $(1, 2)$ a $(2, 1)$.

□

1.182. Existuje relace ekvivalence, která je současně relací uspořádání, na množině všech přímek v rovině?

Řešení. Relace ekvivalence (příp. relace uspořádání) musí být reflexivní, a proto každá přímka musí být v relaci sama se sebou. Dále požadujeme, aby hledaná relace byla symetrická (ekvivalence) a zároveň antisymetrická (uspořádání). To dává, že přímka může být v relaci pouze sama se sebou. Zavedeme-li ovšem relaci tak, že dvě přímky jsou v relaci právě tehdy, když jsou totožné, dostaneme „velmi přirozenou“ relaci ekvivalence i relací uspořádání. Stačí si uvědomit, že je triviálně tranzitivní. Hledanou relací je právě identické zobrazení množiny všech přímek v rovině. \square

1.183. Určete, zda je relace

$$R = \{(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; |k| \geq |l|\}$$

na množině \mathbb{Z} ekvivalence, uspořádání.

Řešení. Relace R není ekvivalencí: není symetrická (kupř. $(6, 2) \in R$, $(2, 6) \notin R$); není uspořádáním: není antisymetrická (mj. $(2, -2) \in R$, $(-2, 2) \in R$). \square

1.184. Ukažte, že průnik libovolných relací ekvivalence na libovolně dané množině X je rovněž relace ekvivalence a že sjednocení dvou relací uspořádání na X nemusí být relace uspořádání.

Řešení. Postupně uvidíme, že průnik relací ekvivalence je reflexivní, symetrický a tranzitivní. Všechny relace ekvivalence na X musí obsahovat dvojici (x, x) pro každé $x \in X$, a proto ji musí obsahovat také daný průnik. Pokud v průniku ekvivalencí je prvek (x, y) , musí v něm být rovněž prvek (y, x) (stačí využít toho, že každá ekvivalence je symetrická). To, že do průniku ekvivalencí náleží prvky (x, y) a (y, z) , znamená, že se jedná o prvky každé z ekvivalencí. Z tranzitivnosti všech jednotlivých ekvivalencí již vyplývá, že do průniku náleží také prvek (x, z) .

Zvolíme-li $X = \{1, 2\}$ a relace uspořádání

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}, \quad R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 1)\}$$

na X , dostáváme relaci

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\},$$

která zřejmě není antisymetrická, a tedy ani uspořádáním. \square

1.185. Na množině $M = \{1, 2, \dots, 19, 20\}$ je zavedena relace ekvivalence \sim tak, že $a \sim b$ pro libovolná $a, b \in M$ právě tehdy, když první cifry čísel a, b jsou stejné. Sestrojte rozklad daný touto ekvivalencí.

Řešení. Dvě čísla z množiny M jsou ve stejné třídě ekvivalence, právě když jsou spolu v relaci (první cifra je stejná). Rozklad jí určený se tedy skládá z množin

$$\{1, 10, 11, \dots, 18, 19\}, \{2, 20\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}.$$

\square

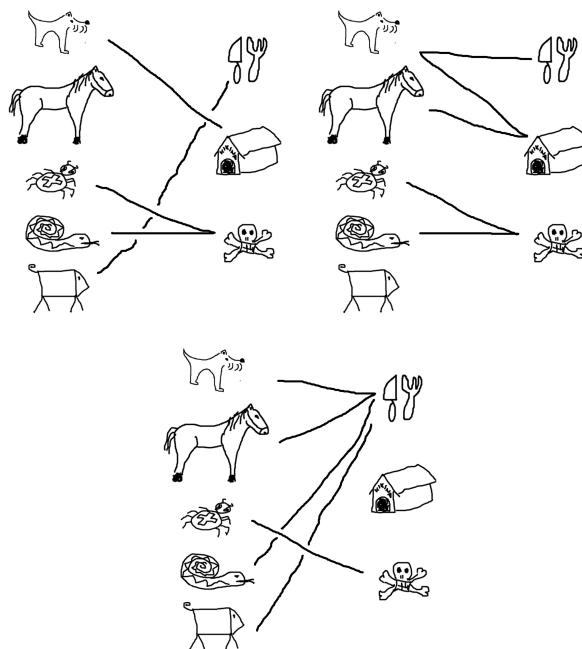
1.186. Je dán rozklad se dvěma třídami $\{b, c\}, \{a, d, e\}$ množiny $X = \{a, b, c, d, e\}$. Napište relaci ekvivalence R na množině X příslušnou tomuto rozkladu.

Řešení. Ekvivalence R je určena tím, že v relaci jsou spolu ty prvky, které jsou ve stejné třídě rozkladu, a to v obou pořadích (R musí být symetrická) a každý sám se sebou (R musí být reflexivní). Proto R obsahuje právě

$(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e),$
 $(b, c), (c, b), (a, d), (a, e), (d, a), (d, e), (e, a), (e, d).$

□

1.187. Na následujících třech obrázkách jsou ikony spojeny čarami tak, jak by je možná přiřadili lidé v různých částech světa. Určete, zda jde o zobrazení, zda je injektivní, surjektivní nebo bijektivní.



Řešení. V prvním případě jde o zobrazení, které je surjektivní, ale není injektivní, protože had i pavouk jsou označeni jako jedovatí. Druhý případ není zobrazení ale jen relace, protože pes je určen jako domácí zvíře i na jídlo. V třetím případě máme opět zobrazení. Tentokrát není ani injektivní, ani surjektivní. □

1.188. Mějme množinu $\{a, b, c, d\}$ a na ní relaci

$\{(a, a), (b, b), (a, b), (b, c), (c, b)\}.$

Jaké členy je potřeba minimálně doplnit do této relace, aby to byla ekvivalence?

Řešení. Postupně projdeme všechny tři vlastnosti, které definují ekvivalenci. Za prvé je to reflexivita. Musíme tedy doplnit dvojice $\{(c, c), (d, d)\}$. Za druhé symetrie – musíme doplnit (b, a) a za třetí musíme udělat tzv. tranzitivní obal. Protože je a v relaci s b a b v relaci s c , musí být i a v relaci s c . Nakonec tedy potřebujeme přidat (a, c) a (c, a) . □

1.189. Uvažme množinu čísel, které mají pět cifer ve dvojkovém zápisu a relaci takovou, že dvě čísla jsou v relaci, právě když jejich ciferný součet má stejnou paritu. Napište příslušné třídy ekvivalence.

Řešení. Dostáváme dvě třídy ekvivalence (o osmi členech):

$[10000] = \{10000, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100, 11111\}$

odpovídá množině {16, 19, 21, 22, 25, 26, 28, 31} a

$$[10001] = \{10001, 10010, 10100, 11000, 10111, 11011, 11101, 11110\}$$

odpovídá množině {17, 18, 20, 24, 23, 27, 29, 30}. □

1.190. Uvažme množinu čísel, které mají tři cifry ve trojkové soustavě a relaci takovou, že dvě čísla jsou v relaci, právě když v této soustavě

- i) začínají stejným dvojčíslem.
- ii) končí stejným dvojčíslem.

Napište příslušné třídy ekvivalence.

Řešení.

- i) Dostáváme šest tříprvkových tříd

$$[100] = \{100, 101, 102\} \text{ odpovídá } \{9, 10, 11\}$$

$$[110] = \{110, 111, 112\} \text{ odpovídá } \{12, 13, 14\}$$

$$[120] = \{120, 121, 122\} \text{ odpovídá } \{15, 16, 17\}$$

$$[200] = \{200, 201, 202\} \text{ odpovídá } \{18, 19, 20\}$$

$$[210] = \{210, 211, 212\} \text{ odpovídá } \{21, 22, 23\}$$

$$[220] = \{220, 221, 222\} \text{ odpovídá } \{24, 25, 26\}$$

- ii) V tomto případě máme devět dvouprvkových tříd

$$[100] = \{100, 200\} \text{ odpovídá } \{9, 18\}$$

$$[101] = \{101, 201\} \text{ odpovídá } \{10, 19\}$$

$$[102] = \{102, 202\} \text{ odpovídá } \{11, 20\}$$

$$[110] = \{110, 210\} \text{ odpovídá } \{12, 21\}$$

$$[111] = \{111, 211\} \text{ odpovídá } \{13, 22\}$$

$$[112] = \{112, 212\} \text{ odpovídá } \{14, 23\}$$

$$[120] = \{120, 220\} \text{ odpovídá } \{15, 24\}$$

$$[121] = \{121, 221\} \text{ odpovídá } \{16, 25\}$$

$$[122] = \{122, 222\} \text{ odpovídá } \{17, 26\}$$

□

1.191. Pro jaký maximální definiční obor D a obor hodnot H je zobrazení bijektivní a jaká je v tom případě inverzní funkce?

i) $x \mapsto x^4$

ii) $x \mapsto x^3$

iii) $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

Řešení.

i) $D = [0, \infty)$ a $H = [0, \infty)$ nebo také $D = (-\infty, 0]$ a $H = [0, \infty)$. Inverzní funkce je $x \mapsto \sqrt[4]{x}$.

ii) $D = H = \mathbb{R}$ a inverze je $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

iii) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ a $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inverzní funkce je $x \mapsto \frac{1}{x} - 1$.

□

1.192. Uvažme relaci na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bod je v relaci, pokud pro něj platí

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

Můžeme body popsat pomocí funkce $y = f(x)$? Nakreslete obrázek bodů v relaci.

Řešení. Nemůžeme, protože např. $y = -1$ má dva vzory: $x = 0$ a $x = 2$. Body leží na kružnici se středem v bodě $(1, -1)$ s poloměrem 1. □

Řešení cvičení

1.14.

- i) $1 - 3 - 2i + 4i = -2 + 2i$, $1 \cdot (-3) - 8i^2 + 6i + 4i = 5 + 10i$, $1 + 2i$, $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$,
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = 1 \cdot (-3) + 8i^2 + 6i - 4i \cdot 25 = -\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$.
- ii) $2 + i$, $2i$, 2 , 1 , $\frac{2}{i} = -2i$.

1.38. $y_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2$.

1.49. Jedná se o známý problém permutací s pevnými body.

- i) Pokud šest lidí dostane ten svůj, tak zákonitě i ten šestý. pravděpodobnost je tedy nulová.
- ii) Nechť M je množina všech uspořádání a jev A_i je uspořádání, kdy i -tý hráč dostane svůj krígl. Chceme spočítat $|M - \cup_i A_i|$. Dostáváme $7! \sum_{k=0}^7 \frac{(-1)^k}{k!} = 1854$. A pravděpodobnost je $\frac{1854}{5040} = \frac{103}{280} \doteq 0,37$.
- iii) Vybereme, kteří tři dostanou ten svůj - $\binom{7}{3} = 35$ možností. Zbylí čtyři musí dostat jiné než svoje. To je opět vzorec z minulého bodu, konkrétně jde o $4! \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{k!} = 9$ možností. Máme tedy dohromady $9 \cdot 35 = 315$ možností a pravděpodobnost je $\frac{315}{5040} = \frac{1}{16}$.

1.99.

- i) $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$, $(7, 7)$, $(3, 6)$ ověřte, že jde o relaci uspořádání
- ii) opět (i, i) pro $i = 1, \dots, 7$ a k tomu $(3, 6)$, $(6, 3)$ ověřte, že jde o relaci ekvivalence
- iii) (i, i) pro $i = 1, \dots, 7$ a k tomu $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$ ověřte, že nejde o relaci ekvivalence, protože není splněna tranzitivita.

1.111. Tři různé Hasseovy diagramy vyhovujících uspořádání. Celkem $5! + 5! + 5!/4 = 270$.1.118. Relace uvedených vlastností je relací ekvivalence na nějaké podmnožině množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Celkem $1 + 4 \cdot 1 + \binom{4}{2} \cdot 2 + \binom{4}{3} \cdot 5 + 15 = 52$.

1.119. 19.

1.120. 87.

1.123. Ukažte, že pokud uvažovaná odmocnina není přirozená, pak není ani racionální. Pokud $\sqrt[m]{t}$ není přirozená, tak existuje prvočíslo r a přirozené s taková, že r^s dělí t , r^{s+1} nedělí t a m nedělí s (zápis $\text{ord}_r t = s$)
 Předpokládejte, že $\sqrt[m]{t} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, neboli $t \cdot p^m = q^m$. Uvažte $\text{ord}_r L$ a $\text{ord}_r R$ a jejich dělitelnost číslem m . (L značí levou stranu rovnice, ...)

1.137.

- i) $2^6 = 64$
- ii) $\binom{6}{4} = 15$
- iii) Žádná panna je jedna možnost $\binom{6}{0} = 1$, jedna panna $\binom{6}{1} = 6$ možností. Posloupností s nejvýše jednou pannou je teda jen 7 a proto posloupností, kde jsou aspoň dvě panny je $64 - 7 = 57$.

1.146. Maximální počet y_n částí, na které rozdělí n kružnic rovinu, je $y_n = y_{n-1} + 2(n-1)$, $y_1 = 2$, tedy $y_n = n^2 - n + 2$.

Pro maximální počet p_n částí, na které potom rozdělí n koulí prostor, pak dostáváme rekurentní vztah $p_{n+1} = p_n + y_n$, $p_1 = 2$, tedy celkem $p_n = \frac{n}{3}(n^2 - 3n + 8)$.

Elementární lineární algebra

*neumíte ještě počítat se skaláry?
– zkusme to rovnou s maticemi...*

V minulé kapitole jsme se snad rozešli s relativně jednoduchými úlohami, k jejichž řešení nebylo potřeba složitých nástrojů. Vystačili jsme si přitom se sčítáním a násobením skalárů. V této a dalších kapitolách se postupně budeme věnovat jednotlivým tématům související.

Hned tři kapitoly budou věnovány nástrojům pro práci s daty, kdy operace spočívají v obzvlášť jednoduchých úkonech se skaláry, jen je těch skalárů povíce naráz. Hovoříme o „lineárních objektech“ a „lineární algebře“. Jakkoliv to teď může vypadat jako hodně speciální nástroj, uvidíme později, že složitější objekty a závislosti stejně studujeme hlavně pomocí jejich „lineárních přiblížení“.

V této kapitole budeme pracovat přímo s konečnými posloupnostmi skalárů. Takové se objevují v praktických úlohách všude, kde máme objekty popisovány pomocí několika parametrů. Nedělejme si přitom problémy s představou, jak vypadá prostor s více než třemi „souřadnicemi“. Smiřme se se skutečností, že malovat si budeme umět jednu, dvě nebo tři dimenze, ale představovat ty obrázky mohou jakýkoliv jiný počet. A když budeme sledovat jakýkoliv parametr u třeba 500 studentů (např. jejich studijní výsledky), budou naše data mít hned zrovna několikrát 500 položek a budeme s nimi chtít pracovat. Naším cílem bude vytvořit nástroje, které budou dobře fungovat nezávisle na skutečném počtu těchto položek.



Také se neděsme slovních spojení jako pole či okruh skalárů \mathbb{K} . Prostě si můžeme představit jakýkoliv konkrétní číselný obor. Okruhy skalárů pak zahrnují i celá čísla \mathbb{Z} a všechny zbytkové třídy, zatímco mezi poli jsou pouze \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{C} a zbytkové třídy \mathbb{Z}_k s prvočíselným k . Zvláštní je mezi nimi \mathbb{Z}_2 , kde ze vztahu $x = -x$ nemůžeme usoudit, že $x = 0$, zatímco u všech ostatních číselných oborů tomu tak je.



1. Vektory a matice

Většinou se o vektorech hovoří pouze ve spojení s poli skalárů, protože obecná teorie je při existenci neinvertibilních nenulových skalárů nesrovnatelně složitější. Jen v prvních dvou částech této kapitoly budeme pracovat s vektory a maticemi v kontextu konečných posloupností skalárů a tam bude

A. Soustavy lineárních rovnic

Na vektorové prostory půjdeme od lesa. Začneme s něčím známým, totiž soustavami lineárních rovnic. I za nimi jsou totiž skryty vektorové prostory.

2.1. A teď vám to pěkně natřeme. Firma zabývající se velkoplošnými nátěry si objednala 810 litrů barvy, která má obsahovat stejné množství červené, zelené a modré barvy (tj. 810 litrů černé barvy). Obchod může splnit tuto zakázku smícháním běžně prodávaných barev (má skladem jejich dostatečné zásoby), a to

- načervenalé barvy – obsahuje 50 % červené, 25 % zelené a 25 % modré barvy;
- nazelenalé barvy – obsahuje 12,5 % červené, 75 % zelené a 12,5 % modré barvy;
- namodralé barvy – obsahuje 20 % červené, 20 % zelené a 60 % modré barvy.

Kolik litrů od každé z uskladněných barev se musí smíchat, aby byly splněny požadavky zákazníka?

Řešení. Označme jako

- x – množství (v litrech) načervenalé barvy, které se použije;
- y – množství (v litrech) nazelenalé barvy, které se použije;
- z – množství (v litrech) namodralé barvy, které se použije.

Smícháním barev chceme získat barvu, která bude obsahovat 270 litrů červené barvy. Uvědomme si, že načervenalá barva obsahuje 50 % červené, nazelenalá obsahuje 12,5 % červené a namodralá 20 % červené barvy. Musí tudíž platit

$$0,5x + 0,125y + 0,2z = 270.$$

Analogicky požadujeme (pro zelenou a modrou barvu)

$$0,25x + 0,75y + 0,2z = 270,$$

$$0,25x + 0,125y + 0,6z = 270.$$

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď budeme postupně vyjadřovat proměnné pomocí ostatních (z první rovnice je $x = 540 - 0,25y - 0,4z$, dosadíme za x do druhé a třetí rovnice a dostaneme dvě lineární rovnice o dvou neznámých $2,75y + 0,4z = 540$ a $0,25y + 2z = 540$. Ze druhé rovnice vyjádříme $z = 270 - 0,125y$ a dosazením do první dostáváme $2,7y = 432$, neboli $y = 160$, odkud $z = 270 - 0,125 \cdot 160 = 250$ a $x = 540 - 0,25 \cdot 160 + 0,4 \cdot 250 = 400$.

Druhým způsobem je zapsat si soustavu do matice, jejíž první řádek bude tvořen koeficienty u neznámých v první rovnici, druhý koeficienty ve druhé rovnici a třetí ve třetí. Je tedy *matice soustavy*

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,125 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 & 0,2 \\ 0,25 & 0,125 & 0,6 \end{pmatrix},$$

rozšířenou matici soustavy potom získáme z matice soustavy připsáním sloupce pravých stran jednotlivých rovnic v systému:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,125 & 0,2 & 270 \\ 0,25 & 0,75 & 0,2 & 270 \\ 0,25 & 0,125 & 0,6 & 270 \end{array} \right)$$

Jejím postupným upravováním pomocí tzv. elementárních řádkových úprav (odpovídají ekvivalentním úpravám rovnic, více viz 2.7) pak dostáváme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,125 & 0,2 & 270 \\ 0,25 & 0,75 & 0,2 & 270 \\ 0,25 & 0,125 & 0,6 & 270 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 1 & 3 & 0,8 & 1080 \\ 1 & 0,5 & 2,4 & 1080 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 0 & 2,75 & 0,4 & 540 \\ 0 & 0,25 & 2 & 540 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 0 & 11 & 1,6 & 2160 \\ 0 & 1 & 8 & 2160 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 0 & 1 & 8 & 2160 \\ 0 & 11 & 1,6 & 2160 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 0 & 1 & 8 & 2160 \\ 0 & 0 & -86,4 & -21600 \end{array} \right).$$

A opět zpětně vypočítáme

$$z = \frac{-21600}{-86,4} = 250,$$

$$y = 2160 - 8 \cdot 250 = 160,$$

$$x = 540 - 0,4 \cdot 250 - 0,25 \cdot 160 = 400.$$

Je tedy potřeba smísit po řadě 400 l, 160 l, 250 l uvedených barev. \square

zajímavé si i třeba případu celých čísel povšimnout. Bude přitom snad pěkně vidět, jak silné výsledky lze důsledným formálním uvažováním odvodit.

2.1

2.1. Vektory nad skaláry. Prozatím budeme *vektorem* rozumět uspořádanou n -tici skalárů z \mathbb{K} , kde pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ budeme nazývat *dimenzí*.



Skaláry umíme sčítat a násobit. Vektory budeme také sčítat, násobit však vektor budeme umět jen skalárem. To odpovídá představě, kterou jsme již viděli v rovině \mathbb{R}^2 , kde sčítání odpovídalo skládání vektorů coby šipek vycházejících z počátku a násobení skalárem pak jejich příčinnému natahování.

Násobení vektoru $u = (a_1, \dots, a_n)$ skalárem c tedy definujeme tak, že každý prvek n -tice u vynásobíme stejným skalárem c a také sčítání vektorů definujeme po složkách. To znamená

ZÁKLADNÍ OPERACE S VEKTORY

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \end{aligned}$$

$$c \cdot u = c \cdot (a_1, \dots, a_n) = (c \cdot a_1, \dots, c \cdot a_n).$$

Pro sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry budeme používat stále stejné symboly jako u skalárů samotných, tj. symboly plus a buď tečku nebo prosté zřetězení znaků.

Konvence zápisu vektorů. Nebudeme, na rozdíl od mnoha jiných učebnic, v textu používat pro vektory žádné speciální značení a ponecháváme na čtenáři, aby udržoval svoji pozornost přemýšlením o kontextu. Pro skaláry ale spíše budeme používat písmena ze začátku abecedy a pro vektory od konce (prostředek nám zůstane na indexy proměnných či komponent a také pro sčítací indexy v součtech).



Často budeme požadovat, aby skaláry byly z nějakého pole, viz 1.1, ale v této kapitole budeme vesměs pracovat s operacemi, které tento předpoklad nepotřebují. V literatuře se pak většinou místo o vektorových prostorech hovoří o *modulech nad okruhy*. U obecné teorie se ale v příští kapitole již zcela omezíme na pole skalárů.

Pro sčítání vektorů v \mathbb{K}^n zjevně platí (KG1)–(KG4) s nulovým prvkem

$$0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Schválně zde používáme i pro nulový prvek stejný symbol jako pro nulový prvek skalárů.

VLASTNOSTI VEKTORŮ

Pro všechny vektory $v, w \in \mathbb{K}^n$ a skaláry $a, b \in \mathbb{K}$ platí

$$(V1) \quad a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$$

$$(V2) \quad (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

$$(V3) \quad a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$$

$$(V4) \quad 1 \cdot v = v$$

Vlastnosti (V1)–(V4) našich vektorů, coby n -tic skalárů v \mathbb{K}^n , se snadno ověří pro kterýkoliv okruh skalárů \mathbb{K} , protože při ověřování vždy používáme pro jednotlivé souřadnice vektorů pouze vlastnosti skalárů uvedené v 1.1 a 1.3.

Budeme takto pracovat např. s \mathbb{R}^n , \mathbb{Q}^n , \mathbb{C}^n , ale také \mathbb{Z}^n , $(\mathbb{Z}_k)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

2.2

2.2. Matice nad skaláry. O něco složitějším objektem, který budeme při práci s vektory používat, jsou matice.

MATICE TYPU m/n

Maticí typu m/n nad skaláry \mathbb{K} rozumíme obdélníkové schéma A s m řádky a n sloupci

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Pro matici A s prvky a_{ij} používáme také zápis $A = (a_{ij})$.

Vektory $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ nazýváme (i -té) řádky matice A , $i = 1, \dots, m$, vektory $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ nazýváme (j -té) sloupce matice A , $j = 1, \dots, n$.

Matici můžeme také chápat jako zobrazení

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K},$$

kde $A(i, j) = a_{ij}$. Matice typu $1/n$ nebo $n/1$ jsou vlastně právě vektory v \mathbb{K}^n .

I obecné matice lze chápat jako vektory v $\mathbb{K}^{m \cdot n}$, prostě zapomeneme na řádkování. Zejména tedy je definováno sčítání matic a násobení matic skaláry:



$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad a \cdot A = (a \cdot a_{ij})$$

kde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $a \in \mathbb{K}$.

Matice $-A = (-a_{ij})$ se nazývá *matice opačná* k matici A a matice

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

se nazývá *nulová matice*. Zapomenutím řádkování tak získáme následující tvrzení, že matice jsou jen specificky zapsané vektory:

Poznámka. Druhý způsob je vhodný pro teoretické úvahy (například o počtu řešení daného systému) a také je vhodnější pro počítačové zpracování problému. V následujícím dvou kapitolách se naučíme „přemýšlet v maticích“ a uvidíme, že nám to pomůže při řešení celé řady úloh.

2.2. Vypočtete

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= -3, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Řešení. Zadanou soustavu lineárních rovnic zapíšeme ve tvaru rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right),$$

kteřou pomocí elementárních řádkových transformací postupně převedeme na schodovitý tvar

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 11 & 3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Nejdříve jsme přitom dvojnásobek prvního řádku odečetli od druhého a jeho trojnásobek přičetli ke třetímu. Poté jsme sečetli druhý a třetí řádek (součet napsali do třetího řádku) a druhý řádek vynásobili číslem $-1/7$. Přejdeme nyní zpět k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 1, \\ x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Okamžitě vidíme, že $x_3 = -1$. Dosadíme-li $x_3 = -1$ do rovnice $x_2 + x_3 = 1$, dostaneme $x_2 = 2$. Podobně dosazení získaných hodnot $x_3 = -1$, $x_2 = 2$ do první rovnice dává $x_1 = 1$. □

Systémy lineárních rovnic tedy lze zapisovat v maticovém tvaru. Ale je to nějaká výhoda, když je stejně umíme řešit, aniž bychom hovořili o maticích? Ano je, o řešení můžeme hovořit koncepčněji a jazyk matic pak daleko lépe navádí k počítačovému zpracování problému. Zkusme si tedy osvojit lépe různé operace, které můžeme s maticemi provádět. Jak jsme viděli v předchozích příkladech, tak ekvivalentní úpravy lineárních rovnic odpovídají v řeči matic elementárním řádkovým (sloupcovým) úpravám. Dále jsme viděli, že převedeme-li těmito úpravami matici soustavy do schodovitého tvaru (tomuto procesu říkáme Gaussova eliminace, viz 2.7), tak je již vyřešení soustavy velmi jednoduché. Ukažme si to ještě na dalších příkladech, na kterých

uvidíme, že soustava lineárních rovnic může mít nekonečně mnoho řešení.

2.3. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

2.3

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 16x_2 + 7x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0, \\ -7x_1 + 7x_2 + -10x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. Vzhledem k nulovosti pravých stran všech rovnic (jedná se tedy o homogenní systém) budeme upravovat pouze matici systému. Řešení nalezneme převodem na schodovitý tvar pomocí elementárních řádkových transformací, které odpovídají záměně pořadí rovnic, vynásobení rovnice nenulovým číslem a přičítání násobků rovnic. Navíc můžeme kdykoli od maticového zápisu přejít zpět k zápisu rovnic s neznámými x_i . Nejprve docílíme toho, aby se proměnná x_1 vyskytovala pouze v první rovnici. Zřejmě postačuje $(-3/2)$ násobek prvního řádku přičíst ke druhému a ke třetímu řádku a jeho $(7/2)$ násobek k poslednímu řádku, což v maticovém zápisu dává

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 16 & 7 \\ 3 & -5 & 4 \\ -7 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 35/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Odtud je vidět, že druhá, třetí a čtvrtá rovnice jsou násobky rovnice $7x_2 + x_3 = 0$. Při maticovém zápisu můžeme např. $(1/5)$ násobek druhého řádku přičíst ke třetímu a jeho $(-1/5)$ násobek k poslednímu řádku, čímž obdržíme schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 35/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 35/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

který jsme v posledním kroku zjednodušili tak, že jsme druhý řádek (druhou rovnici) vynásobili číslem $2/5$. Přestože byly zadány čtyři rovnice pro tři neznámé, má celá soustava nekonečně mnoho řešení, neboť pro libovolné $x_3 \in \mathbb{R}$ mají zbylé rovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

řešení. Nahradíme tak proměnnou x_3 parametrem $t \in \mathbb{R}$ a vyjádříme

2.4

$$x_2 = -\frac{1}{7}x_3 = -\frac{1}{7}t \quad \text{a} \quad x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3) = -\frac{11}{7}t.$$

Pokud ještě nahradíme $t = -7s$, obdržíme výsledek v jednoduchém tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (11s, s, -7s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

□

Tvrzení. Předpisy pro $A + B$, $a \cdot A$, $-A$, 0 zadávají na množině všech matic typu m/n operace sčítání a násobení skaláry splňující axiomy (V1)–(V4).

2.3. Matice a rovnice. Velmi častý nástroj pro popis nějakých matematických modelů jsou systémy lineárních rovnic. Právě matice lze vhodně využít pro jejich zápis. Zavedeme si k tomu účelu pojem *skalární součin* dvou vektorů, který vektorům (a_1, \dots, a_n) a (x_1, \dots, x_n) přiřadí jejich součin

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

tj. postupně násobíme po dvou souřadnice vektorů a výsledky sčítáme.

Každý systém m lineárních rovnic v n proměnných

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Lze tedy vidět jako požadavek na hodnoty m skalárních součinů neznámého vektoru (x_1, \dots, x_n) s vektory souřadnic (a_{i1}, \dots, a_{in}) .

Vektor proměnných můžeme také vidět jako sloupec v matici typu $n/1$, a podobně hodnoty b_1, \dots, b_n můžeme vnímat jako vektor u a to opět jako jediný sloupec v matici typu $n/1$. Náš systém rovnic lze pak formálně psát ve tvaru $A \cdot x = u$ takto:



$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

kde levou stranu interpretujeme jako m skalárních součinů jednotlivých řádků matice vytvářejících sloupcový vektor, jehož hodnotu rovnice určují. To znamená, že skutečně rovnost i -tých souřadnic zadává podmínku původní rovnice

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

a zápis $A \cdot x = u$ tak dává skutečně původní systém lineárních rovnic.

2.4. Součin matic. V rovině, tj. pro vektory dimenze 2, jsme už zavedli počet s maticemi a viděli jsme, že s ním lze pracovat velice efektivně (viz 1.26). Nyní budeme postupovat obecněji a zavedeme všechny nástroje již známé z roviny pro všechny dimenze n .



Násobení matic je možné definovat pouze, když to rozměry sloupců a řádků v maticích dovolí, tj. když je pro ně definován skalární součin jako výše:

SOUČIN MATIC

Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/q nad okruhem skalárů \mathbb{K} definujeme jejich součin $C = A \cdot B = (c_{ik})$ jako matici typu m/q s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \text{ pro libovolné } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq q.$$

Je tedy prvek c_{ik} součinu právě skalárním součinem i -tého řádku matice nalevo a k -tého sloupce matice napravo. Například máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5

2.5. Čtvercové matice. Je-li v matici stejný počet řádků a sloupců, hovoříme o *čtvercové matici*. Počet řádků a sloupců pak nazýváme také *dimenzí matice*. Matici

$$E = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se říká *jednotková matice*. Takto definovaným číslem δ_{ij} se říká *Kroneckerovo delta*. Na množině čtvercových matic nad \mathbb{K} dimenze n je součin matic definován pro každé dvě matice, je tam tedy definována operace násobení, jejíž vlastnosti jsou velice podobné jako u skalárů:

Tvrzení. Na množině všech čtvercových matic dimenze n nad libovolným okruhem skalárů \mathbb{K} je definována operace násobení s následujícími vlastnostmi okruhů (viz 1.3):

- (1) Platí asociativita násobení (O1).
- (2) Jednotková matice $E = (\delta_{ij})$ je jednotkovým prvkem pro násobení dle (O3).
- (3) Platí distributivita sčítání a násobení (O4).

Obecně však neplatí axiomy (O2) ani (O1). Čtvercové matice pro $n > 1$ proto netvoří obor integrity, zejména tedy nejsou ani (nekomutativním) tělesem.

DŮKAZ. Asociativita násobení – (O1): Protože skaláry jsou asociativní, distributivní i komutativní, můžeme pro tři matice $A = (a_{ij})$ typu m/n , $B = (b_{jk})$ typu n/p a $C = (c_{kl})$ typu p/q spočítat

$$A \cdot B = \left(\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk} \right), \quad B \cdot C = \left(\sum_k b_{jk} \cdot c_{kl} \right),$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \left(\sum_k \left(\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} \right) = \left(\sum_{j,k} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \right),$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \left(\sum_j a_{ij} \cdot \left(\sum_k b_{jk} \cdot c_{kl} \right) \right) = \left(\sum_{j,k} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \right).$$

2.4. Nalezněte všechna řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ 3x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Řešení. Soustavě rovnic odpovídá rozšířená matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

Záměnou pořadí řádků (rovnic) potom obdržíme matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{array} \right),$$

kteřou převedeme na schodovitý tvar. Nejprve přičteme (-2) násobek, 2násobek a (-3) násobek prvního řádku po řadě ke druhému, třetímu a čtvrtému řádku, čímž získáme 0 pod prvním nenulovým číslem v prvním řádku. Analogicky poté získáme 0 pod prvním nenulovým číslem ve druhém řádku tak, že tento řádek a jeho (-1) násobek přičteme po řadě ke třetímu a čtvrtému řádku. Takto dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Odtud vyplývá (čtvrtý řádek je pouhou kopií třetího – lze jej tedy „vynulovat“), že soustava bude mít nekonečně mnoho řešení, neboť dostáváme tři rovnice pro čtyři neznámé, které očividně budou mít právě jedno řešení pro každou volbu proměnné $x_4 \in \mathbb{R}$. Neznámou x_4 proto nahradíme parametrem $t \in \mathbb{R}$ a od maticového zápisu přejdeme zpět k rovnicím

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - t &= -2, \\ 3x_2 - 3x_3 + t &= 1, \\ 3x_3 - 3t &= -3. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme $x_3 = t - 1$. Dosazení za x_3 do druhé rovnice potom dává

$$3x_2 - 3t + 3 + t = 1, \quad \text{tj.} \quad x_2 = \frac{1}{3}(2t - 2).$$

Konečně podle první rovnice je

$$x_1 - \frac{1}{3}(2t - 2) + t - 1 - t = -2, \quad \text{tj.} \quad x_1 = \frac{1}{3}(2t - 5).$$

Množinu řešení můžeme tudíž zapsat (pro $t = 3s$) ve tvaru

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(2s - \frac{5}{3}, 2s - \frac{2}{3}, 3s - 1, 3s \right), s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nyní se vraťme k rozšířené matici naší soustavy a upravujeme ji dále užitím řádkových transformací tak, aby (při schodovitém tvaru) první nenulové číslo každého řádku (tzv. *pivot*) bylo právě číslo 1 a aby všechna ostatní čísla v jeho sloupci byla 0. Platí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

přičemž nejdříve jsme vynásobili druhý a třetí řádek číslem $1/3$, pak přičetli třetí řádek ke druhému a jeho (-1) násobek k prvnímu a na závěr přičetli druhý řádek k prvnímu. Z poslední matice snadno dostáváme výsledek

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Volné proměnné jsou totiž ty, jejichž sloupce neobsahují žádného pivota (v našem případě neobsahuje pivota čtvrtý sloupec, je tedy volná čtvrtá proměnná, tj. používáme ji jako parametr). \square

2.5. Určete řešení systému rovnic

$$\begin{array}{rccccrcr} 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 8, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení. Uvědomme si, že soustava rovnic v tomto příkladu se od soustavy z předešlého příkladu liší pouze v hodnotě 8 (místo -8) na pravé straně první rovnice. Provedeme-li totožné řádkové úpravy jako v minulém příkladu, obdržíme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & 8 \end{array} \right) \dots$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{array} \right),$$

kde poslední úpravou bylo odečtení třetího řádku od čtvrtého. Ze čtvrté rovnice $0 = 16$ vyplývá, že soustava nemá řešení. Vyzdvihněme, že

Všimněme si, že jsme při výpočtu vycházeli z toho, že je jedno v jakém pořadí uvedené součty a součiny provádíme, tj. využíváme podstatně našich vlastností skalárů.

Velmi snadno vidíme, že násobení jednotkovou maticí má skutečně vlastnost jednotkového prvku:

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A$$

a stejně pro násobení E zleva.

Zbývá ukázat distributivitu násobení a sčítání. Opět díky distributivitě skalárů snadno spočteme pro matice $A = (a_{ij})$ typu m/n , $B = (b_{jk})$ typu n/p , $C = (c_{jk})$ typu n/p , $D = (d_{kl})$ typu p/q

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \left(\sum_j a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) \right) \\ &= \left(\left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right) + \left(\sum_j a_{ij} c_{jk} \right) \right) = A \cdot B + A \cdot C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B + C) \cdot D &= \left(\sum_k (b_{jk} + c_{jk}) d_{kl} \right) \\ &= \left(\left(\sum_k b_{jk} d_{kl} \right) + \left(\sum_k c_{jk} d_{kl} \right) \right) = B \cdot D + C \cdot D. \end{aligned}$$

Jak jsme již viděli v 1.26, dvě matice dimenze 2 nemusí komutovat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme získali zároveň protipříklad na platnost (O2) i (OI). Pro matice typu $1/1$ ovšem oba axiomy samozřejmě platí, protože je mají samy skaláry. Pro větší matice získáme protipříklady snadno tak, že právě uvedené matice umístíme do levého horního rohu příslušných čtvercových schémat a doplníme nulami. (Ověřte si sami!) \square

V důkazu jsme vlastně pracovali s maticemi obecnějšího typu, dokázali jsme tedy příslušné vlastnosti obecněji:

ASOCIATIVITA A DISTRIBUTIVITA NÁSOBENÍ MATIC

Důsledek. Násobení matic je asociativní a distributivní, tj.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

kdykoliv jsou všechny uvedené operace definovány. Jednotková matice je neutrálním prvkem pro násobení zleva i zprava.

2.6

2.6. Inverzní matice. Se skaláry umíme počítat tak, že z rovnosti $a \cdot x = b$ umíme vyjádřit $x = a^{-1} \cdot b$, kdykoliv inverze k a existuje. Podobně bychom to chtěli umět i s maticemi, máme ale problém, jak poznat, zda taková existuje, a jak ji spočítat.



Říkáme, že B je *matice inverzní* k matici A , když

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

Píšeme pak $B = A^{-1}$ a z definice je samozřejmé, že obě matice musí mít být čtvercové se stejnou dimenzí n . Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme *invertibilní matice* nebo také *regulární čtvercová matice*.

V následujících odstavcích mimo jiné odvodíme, že B je inverzní k A , jakmile platí jedna z požadovaných identit (tj. druhá je pak důsledkem).

Pokud A^{-1} a B^{-1} existují, pak existuje i inverze k součinu $A \cdot B$

e2.0 (2.1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$

Je totiž, díky právě dokázané asociativitě násobení,

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E$$

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = E.$$



Protože s maticemi umíme počítat podobně jako se skaláry, jen mají složitější chování, může nám existence inverzní matice skutečně hodně pomoci s řešením systémů lineárních rovnic: Jestliže vyjádříme soustavu n rovnic pro n neznámých součinem matic

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = u$$

a jestliže existuje matice inverzní k matici A , pak lze násobit zleva A^{-1} a dostaneme

$$A^{-1} \cdot u = A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x,$$

tj. $A^{-1} \cdot u$ je hledané řešení.

Naopak rozepsáním podmínky $A \cdot A^{-1} = E$ pro neznámé skaláry v hledané matici A^{-1} dostaneme n systémů lineárních rovnic se stejnou maticí na levé straně a různými vektory napravo.

2.7

2.7. Ekvivalentní úpravy matic. Zkusme se praktičtěji zorientovat v předchozí úvaze o systémech rovnic a jejich maticích. Samozřejmě nás nalezení inverzní matice stojí jisté úsilí – větší než přímé vyřešení rovnice. Podstatné však je, že pokud máme mnohokrát za sebou řešit systémy se stejnou maticí A ale různými pravými stranami u , pak se nám nalezení A^{-1} opravdu hodně vyplatí.

při úpravě na schodovitý tvar obdržíme rovnici $0 = a$ pro nějaké $a \neq 0$ (tj. nulový řádek na levé straně a nenulové číslo za svislou čarou) právě tehdy, když soustava nemá řešení. \square

B. Manipulace s maticemi

V této podkapitole budeme pracovat pouze s maticemi, abychom si osvojili jejich vlastnosti.

2.6. Násobení matic. Provedte násobení matic a zkontrolujte si vý-



sledek. Všimněte si, že proto, abychom mohli dvě matice násobit je nutná a postačující podmínka, aby měla první matice stejně sloupců, jako druhá řádků.

Počet řádků výsledné matice je pak dán počtem řádků první matice, počet sloupců je roven počtu sloupců druhé matice.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix},$

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix},$

v) $(1 \ 3 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} = (-14 \ 1 \ 12),$

vi) $(1 \ 2 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-2).$

Poznámka. Body i) a ii) v předchozím příkladu ukazují, že násobení čtvercových matic není komutativní, v bodě iii) vidíme, že pokud můžeme násobit obdélníkové matice, tak pouze v jednom ze dvou možných pořadí. V bodech iv) a v) si pak všimněme, že $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.

2.7. Nechť je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -19 & \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Lze matici A převést na matici B pomocí elementárních řádkových transformací (pak říkáme, že jsou řádkově ekvivalentní)?

Řešení. Obě matice jsou zřejmě řádkově ekvivalentní s trojrozměrnou jednotkovou maticí. Snadno se vidí, že řádková ekvivalence na množině všech matic daných rozměrů je relací ekvivalence. Matice A a B jsou tudíž řádkově ekvivalentní. \square

2.8. Řešte maticovou rovnici

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.9. Nalezněte libovolnou matici B , pro kterou je matice $C = B \cdot A$ ve schodovitém tvaru, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Budeme-li matici A postupně násobit zleva elementárními maticemi (uvažte, jakým řádkovým úpravám toto násobení matic odpovídá)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obdržíme

$$B = E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/12 & -5/12 & 0 \\ 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -4/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 9/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Z hlediska řešení systémů rovnic $A \cdot x = u$ je jistě přirozené považovat za ekvivalentní matice A a vektory u , které zadávají systémy rovnic se stejným řešením. Zkusme se teď zamyslet nad možnostmi, jak zjednodušovat matici A tak, abychom se k řešení blížili.

Začneme jednoduchými manipulacemi s řádky rovnic, které řešení ovlivňovat nebudou, a stejným způsobem pak můžeme upravovat i vektor napravo. Když se nám u čtvercové matice podaří vlevo dostat systém s jednotkovou maticí, bude napravo řešení původního systému. Pokud při našem postupu nějaké řádky úplně vypadnou (při úpravách se vynulují), bude to také dávat další přímé informace o řešení. Naše jednoduché úpravy jsou:

ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ TRANSFORMACE

- záměna dvou řádků,
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem,
- přičtení řádku k jinému řádku.

Těmto operacím říkáme *elementární řádkové transformace*. Je zřejmé, že odpovídající operace na úrovni rovnic v systému skutečně nemohou změnit množinu všech jeho řešení, pokud je náš okruh oborem integrity.

Analogicky, *elementární sloupcové transformace* matic jsou

- záměna dvou sloupců,
- vynásobení vybraného sloupce nenulovým skalárem,
- přičtení sloupce k jinému sloupci,

ty však nezachovávají řešení příslušných rovnic, protože mezi sebou míchají samotné proměnné.

Systematicky můžeme použít elementární řádkové úpravy k postupné eliminaci proměnných.



Postup je algoritmický a většinou se mu říká *Gaussova eliminace* proměnných.

GAUSSOVA ELIMINACE PROMĚNNÝCH

Tvrzení. *Nenulovou matici nad libovolným okruhem skalárů \mathbb{K} lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) schodovitý tvar:*

- Je-li $a_{ik} = 0$ pro všechna $k = 1, \dots, j$, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$,
- je-li $a_{(i-1)j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$ -ním řádku, pak $a_{ij} = 0$.

DŮKAZ. Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{lp} & \dots \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky. K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus, kterým se postupně, řádek za řádkem, blížíme k výslednému schodovitému tvaru:

ALGORITMUS GAUSSOVY ELIMINACE

- (1) Případnou záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j -tý sloupec.
- (2) Pro $i = 2, \dots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij} , i -tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i -tém řádku.
- (3) Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro dosud neupravený zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

Tím je tvrzení dokázáno \square

Uvedený postup je skutečně právě obvyklá eliminace proměnných v systémech lineárních rovnic.

Zcela analogickým postupem definujeme sloupcově schodovitý tvar matic a záměnou řádkových na sloupcové transformace obdržíme algoritmus převádějící matici na takový tvar.

Poznámka. Gaussovu eliminaci jsme zformulovali pro obecné skaláry z nějakého okruhu. Zdá se být přirozené, že ve schodovitém tvaru ještě vynásobením vhodnými skaláry dosáhneme jednotkových koeficientů na výsledné nenulové „diagonále“ nad nulami v matici a dopočítáme řešení. To ale pro obecné skaláry nepůjde, představte si třeba celá čísla \mathbb{Z} .

Pro řešení systémů rovnic nemá ale vůbec uvedený postup rozumný smysl, když jsou mezi skaláry dělitelé nuly. Promyslete si pečlivě rozdíl mezi $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a případně \mathbb{Z}_2 nebo \mathbb{Z}_4 .

2.8

2.8. Matice elementárních transformací. V dalším budeme už pracovat jen s polem skalárů \mathbb{K} , každý nenulový skalár tedy má inverzní prvek.

Všimněme si, že elementární řádkové (resp. sloupcové) transformace odpovídají vynásobením zleva (resp. zprava) následujícími maticemi:

- (1) Přehození i -tého a j -tého řádku (resp. sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & 0 & \dots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

2.10. Komplexní čísla jako matice. Uvažme množinu matic $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Všimněte si, že C je uzavřená na sčítání a násobení matic a dále ukažte, že přiřazení $f : C \rightarrow \mathbb{C}$,

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$ splňuje $f(M + N) = f(M) + f(N)$ i $f(M \cdot N) = f(M) \cdot f(N)$ (na levých stranách rovností se jedná o sčítání a násobení matic, na pravých o sčítání a násobení komplexních čísel). Na množinu C spolu s násobením a sčítáním matic lze tedy nahlížet jako na těleso \mathbb{C} komplexních čísel. Zobrazení f se pak nazývá izomorfismem (těles). Je tedy například

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 13 \\ -13 & 69 \end{pmatrix},$$

což odpovídá tomu, že $(3 + 5i) \cdot (8 - 9i) = 69 - 13i$.

2.11. Vyřešte maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zjevně neznámé X_1 a X_2 musejí být matice 2×2 (aby uvažované součiny matic existovaly a výsledkem byla matice 2×2). Položme

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

a roznásobme matice v první zadané rovnici. Má platit

$$\begin{pmatrix} a_1 + 3c_1 & b_1 + 3d_1 \\ 3a_1 + 8c_1 & 3b_1 + 8d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

tj. má být

$$\begin{aligned} a_1 &+ 3c_1 & &= 1, \\ &b_1 &+ 3d_1 &= 2, \\ 3a_1 &+ 8c_1 & &= 3, \\ &3b_1 &+ 8d_1 &= 4. \end{aligned}$$

Sečtením (-3) násobku první rovnice se třetí dostáváme $c_1 = 0$ a následně $a_1 = 1$. Podobně sečtením (-3) násobku druhé rovnice se čtvrtou dostáváme $d_1 = 2$ a poté $b_1 = -4$. Je tedy

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnoty a_2, b_2, c_2, d_2 najdeme odlišným způsobem. Např. použitím vzorce

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

který platí pro libovolná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (přičemž inverzní matice existuje právě tehdy, když $ad - bc \neq 0$), spočtěme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením zadané rovnice touto maticí zprava dává

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

a tudíž

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

2.12. Které z matic

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 \\ 1 & 6/7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 5/6 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou regulární?

Řešení. Neboť

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1/7 & 6/49 \\ 6/7 & 43/49 \end{pmatrix}, \quad C^3 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/8 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & 1/2 \end{pmatrix},$$

matice A a C jsou regulární; a neboť

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bude prostřední sloupec matice B^n vždy (pro $n \in \mathbb{N}$) vektorem $(0, 1, 0)^T$, tj. matice B nemůže být regulární. Součin

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 5/6 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a/6 + b/3 \\ 5a/6 + 2b/3 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

implikuje, že matice D^2 bude mít v pravém horním rohu nulovou dvourozměrnou (čtvercovou) submatici. Opakováním této implikace dostáváme, že stejnou vlastnost mají matice $D^3 = D \cdot D^2$, $D^4 = D \cdot D^3$, ..., $D^n = D \cdot D^{n-1}$, ..., tudíž matice D není regulární. Matice E je permutační (v každém řádku a sloupci má právě jeden nenulový prvek, a to 1). Není obtížné si uvědomit, že mocniny permutační matice jsou opět permutační matice. Matice E proto také není regulární. To lze rovněž ověřit výpočtem mocnin E^2 , E^3 , E^4 . Matice E^4 je totiž jednotková. □

2.13. Výpočet inverzní matice. Spočítejte inverzní matice k maticím

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poté určete matice $(A^T \cdot B)^{-1}$.

(2) Vynásobení i -tého řádku (resp. sloupce) skalárem a :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & a & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

(3) Sečtení i -tého řádku (resp. sloupce) s j -tým:

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \uparrow j$$



Toto prostinké pozorování je ve skutečnosti velice podstatné, protože součin invertibilních matic je invertibilní (viz rovnost (2.1)) a všechny elementární transformace jsou nad polem skalárů invertibilní (sama definice elementárních transformací zajišťuje, že inverzní transformace je stejného typu a je také snadné určit její matici).

Pro libovolnou matici A tedy dostaneme násobením vhodnou invertibilní maticí $P = P_k \cdots P_1$ zleva (postupné násobení k maticemi zleva) její ekvivalentní řádkový schodovitý tvar $A' = P \cdot A$.

Jestliže obecně aplikujeme tentýž eliminační postup na sloupce, dostaneme z každé matice B její sloupcový schodovitý tvar B' vynásobením zprava vhodnou invertibilní maticí $Q = Q_1 \cdots Q_\ell$. Pokud ale začneme s maticí $B = A'$ v řádkově schodovitém tvaru, eliminuje takový postup pouze všechny dosud nenulové prvky mimo diagonálu matice a závěrem lze ještě i tyto elementárními operacemi změnit na jedničky. Celkem jsme tedy ověřili důležitý výsledek, ke kterému se budeme mnohokrát vracet:

2.9. Věta. Pro každou matici A typu m/n nad polem skalárů \mathbb{K} existují čtvercové invertibilní matice P dimenze m a Q dimenze n takové, že matice $P \cdot A$ je v řádkově schodovitém tvaru a

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

2.10

2.10. Algoritmus pro výpočet inverzní matice. V předchozích úvahách jsme se dostali prakticky k úplnému algoritmu pro výpočet inverzní matice. Během jednoduchého níže uvedeného postupu buď zjistíme, že inverze neexistuje, nebo bude inverze spočtena. I nadále pracujeme nad polem skalárů.



Ekvivalentní řádkové transformace se čtvercovou maticí A dimenze n vedou k matici P' takové, že matice $P' \cdot A$ bude v řádkově schodovitém tvaru. Přitom může (ale nemusí) být jeden nebo více posledních řádků nulových. Jestliže má existovat inverzní matice k A , pak existuje i inverzní matice k $P' \cdot A$. Jestliže však je poslední řádek v $P' \cdot A$ nulový, bude nulový i poslední řádek v $P' \cdot A \cdot B$ pro jakoukoliv matici B dimenze n . Existence takového nulového řádku ve výsledku (řádkové) Gaussovy eliminace tedy vylučuje existenci A^{-1} .

Předpokládejme nyní, že A^{-1} existuje. Podle předchozího, nalezneme řádkově schodovitý tvar bez nulového řádku, tzn. že všechny diagonální prvky v $P' \cdot A$ jsou nenulové. Pak ovšem pokračováním eliminace pomocí řádkových elementárních transformací od pravého dolního rohu zpět a vynormováním diagonálních prvků na jedničky získáme jednotkovou matici E . Jinými slovy, najdeme další invertibilní matici P'' takovou, že pro $P = P'' \cdot P'$ platí $P \cdot A = E$. Výměnou řádkových a sloupcových transformací lze za předpokladu existence A^{-1} stejným postupem najít Q takovou, že $A \cdot Q = E$. Odtud

$$P = P \cdot E = P \cdot (A \cdot Q) = (P \cdot A) \cdot Q = Q.$$

To ale znamená, že jsme našli hledanou inverzní matici

$$A^{-1} = P = Q$$

k matici A . Zejména se tedy v okamžiku nalezení matice P s vlastností $P \cdot A = E$ už nemusíme s žádnými dalšími výpočty namáhat, protože víme, že již jistě jde o inverzní matici.

Prakticky tedy můžeme postupovat takto:

VÝPOČET INVERZNÍ MATICE

Vedle sebe napíšeme původní matici A a jednotkovou matici E , matici A upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar, potom tzv. zpětnou eliminací na diagonální matici a v té násobíme řádky inverzními prvky z \mathbb{K} . Tytéž úpravy postupně prováděné s E vedou právě k hledané matici A^{-1} . Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že matice inverzní neexistuje.

2.10a

2.11. Lineární závislost a hodnost. V předchozích úvahách a počtech s maticemi jsme stále pracovali se sčítáním řádků nebo sloupců coby vektorů, spolu s jejich násobením skaláry. Takové operaci říkáme *lineární kombinace*. V abstraktním pojetí se k



Řešení. Inverzní matici nalezneme tak, že vedle sebe napíšeme matici A a matici jednotkovou. Pomocí řádkových transformací pak převedeme matici A na jednotkovou. Tímto matice jednotková přejde na matici A^{-1} . Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \end{array} \right), \end{aligned}$$

přičemž v prvním kroku jsme odečetli od prvního řádku třetí, ve druhém jsme (-5) násobek prvního přičetli ke druhému a současně jeho (-3) násobek ke třetímu, ve třetím kroku jsme odečetli od druhého řádku třetí, ve čtvrtém jsme (-2) násobek druhého přičetli ke třetímu, v pátém kroku jsme (-5) násobek třetího řádku přičetli ke druhému a jeho 2násobek k prvnímu, v posledním kroku jsme pak zaměnili druhý a třetí řádek. Zdůrazněme výsledek

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

Upozorníme, že při určování matice A^{-1} jsme díky vhodným řádkovým úpravám nemuseli počítat se zlomky. Přestože bychom si mohli obdobně počínat při určování matice B^{-1} , budeme raději provádět více názorné (nabízející se) řádkové úpravy. Platí

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right), \end{aligned}$$

tj.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Využitím identity

$$(A^T \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot (A^T)^{-1} = B^{-1} \cdot (A^{-1})^T$$

a znalosti výše vypočítaných inverzních matic lze obdržet

$$\begin{aligned} (A^T \cdot B)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ -4 & -2 & 11 \\ 3 & 2 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & -9 & 42 \\ -10 & -5 & 27 \\ 17 & 10 & -49 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.14. Vypočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.15. Nalezněte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.16. Zjistěte, zda existuje inverzní matice k matici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, určete tuto matici C^{-1} .

2.17. Stanovte A^{-1} , je-li

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}, \text{ přičemž } i \text{ je imaginární jednotka;} \\ \text{(b)} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.18. Napište inverzní matici k $n \times n$ matici ($n > 1$)

$$A = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

2.10b

C. Determinanty

Ověřte si nejprve na následujícím příkladu, že umíte počítat determinanty matic 2×2 a 3×3 (pomocí Saarusova pravidla):

operacím s vektory vrátíme za chvíli v 2.24, bude ale užitečné pochopit podstatu už nyní. Lineární kombinací řádků (nebo sloupců) matice $A = (a_{ij})$ typu m/n rozumíme výraz

$$c_1 u_{i_1} + \cdots + c_k u_{i_k},$$

kde c_i jsou skaláry, $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ jsou řádky (nebo $u_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ jsou sloupce) matice A .

Jestliže existuje lineární kombinace daných řádků s alespoň jedním nenulovým skalárním koeficientem, jejímž výsledkem je nulový řádek, říkáme, že jsou tyto řádky *lineárně závislé*. V opačném případě, tj. když jedinou možností jak získat nulový řádek je vynásobením výhradně nulovými skaláry, jsou tyto řádky *lineárně nezávislé*.

Obdobně definujeme lineárně závislé a nezávislé sloupce matice.

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme teď interpretovat tak, že počet výsledných nenulových „schodů“ v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven počtu lineárně nezávislých řádků matice, resp. počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Označme E_h matici z věty 2.9 s h jedničkami na diagonále a předpokládejme, že dvěma různými postupy dostaneme různá $h' < h$. Pak ovšem podle našeho postupu budou existovat také invertibilní matice P a Q takové, že

$$P \cdot E_{h'} \cdot Q = E_h.$$

V součinu $E_{h'} \cdot Q$ bude více nulových řádků ve spodní části matice, než kolik má být jedniček v E_h a přitom se k nim máme dostat už jen řádkovými transformacemi. Zvýšit počet lineárně nezávislých řádků ale pomocí elementárních řádkových transformací nelze. Proto je počet jedniček v matici $P \cdot A \cdot Q$ ve větě 2.9 nezávislý na volbě našeho postupu eliminace a je roven jak počtu lineárně nezávislých řádků v A , tak počtu lineárně nezávislých sloupců v A . Tomuto číslu říkáme *hodnota matice* a značíme je $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Věta. *Nechť A je matice typu m/n nad polem skalárů \mathbb{K} . Matice A má stejný počet $h(A)$ lineárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců. Zejména je hodnota vždy nejvýše rovna menšímu z rozměrů matice A .*

Algoristmus pro výpočet inverzních matic také říká, že čtvercová matice A dimenze m má inverzi, právě když je její hodnota rovna počtu řádků m .

2.12. Matice jako zobrazení. Zcela stejně, jak jsme s maticemi pracovali v geometrii roviny, viz 1.29, můžeme každou čtvercovou matici A interpretovat jako zobrazení

$$A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto A \cdot x.$$

Díky distributivitě násobení matic je zřejmé, jak jsou zobrazovány lineární kombinace vektorů takovými zobrazeními:

$$A \cdot (a x + b y) = a (A \cdot x) + b (A \cdot y).$$

Přímo z definice je také vidět (díky asociativitě násobení matic), že skládání zobrazení odpovídá násobení matic v daném pořadí. Invertibilní matice tedy odpovídají bijektivním zobrazením.

Z tohoto pohledu je velice zajímavá věta 2.9. Můžeme ji číst tak, že hodnost matice určuje, jak velký je obraz celého \mathbb{K}^n v tomto zobrazení. Skutečně, je-li $A = P \cdot E_k \cdot Q$ s maticí E_k s k jedničkami jako v 2.9, pak invertibilní Q napřed jen bijektivně „zamíchá“ n -rozměrné vektory v \mathbb{K}^n , matice E_k pak „zkopíruje“ prvních k souřadnic a vynuluje $n - k$ zbývajících. Tento „ k -rozměrný“ obraz už pak následně násobení invertibilní P nemůže zvětšit.



2.10c

2.13. Řešení systémů lineárních rovnic. K pojům dimenze, lineární nezávislost apod. se vrátíme ve třetí části této kapitoly. Již teď si ale můžeme povšimnout, co právě dovozené výsledky říkají o řešení systému lineárních rovnic. Jestliže budeme uvažovat matici systému rovnic a přidáme k ní ještě sloupec požadovaných hodnot, hovoříme o rozšířené matici systému. Postup, který jsme předvedli odpovídá postupné eliminaci proměnných v rovnicích a vyškrtání lineárně závislých rovnic (ty jsou prostě důsledkem ostatních).



Dovodili jsme tedy kompletní informaci o velikosti množiny řešení systému lineárních rovnic v závislosti na hodnotě matice systému. Pokud nám při přechodu na řádkově schodovitý tvar zůstane v rozšířené matici více nenulových řádků než v matici systému, pak žádné řešení nemůže existovat (prostě se daným lineárním zobrazením do požadované hodnoty vůbec netrefíme). Pokud je hodnost obou matic stejná, pak nám při zpětném dopočtu řešení zůstane právě tolik volných parametrů, kolik je rozdíl mezi počtem proměnných n a hodnotami $h(A)$.

2. Determinanty

V páté části první kapitoly jsme viděli (viz 1.27), že pro čtvercové matice dimenze 2 nad reálnými čísly existuje skalární funkce \det , která matici přiřadí nenulové číslo, právě když existuje její inverze. Neříkali jsme to sice stejnými slovy, ale snadno si to ověříte (viz odstavce počínaje 1.26 a vzorec (1.16)). Determinant byl užitečný i jinak, viz odstavce 1.33 a 1.34, kde jsme si volnou úvahou odvodili, že obsah rovnoběžníka by měl být lineárně závislý na každém ze dvou vektorů definujících rovnoběžník a že je užitečné zároveň požadovat změnu znaménka při změně pořadí těchto vektorů. Protože tyto vlastnosti měl, až na pevný skalární násobek, jedině determinant, odvodili jsme, že je obsah dán právě takto. Nyní uvidíme, že podobně lze postupovat v každé konečné dimenzi.

V této části budeme pracovat s libovolnými skaláry \mathbb{K} a maticemi nad těmito skaláry. Naše výsledky o determinantech tedy budou vesměs platit pro všechny komutativní okruhy, zejména tedy třeba pro celočíselné matice.

2.19. Určete determinanty matic: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.20. Spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Začneme rozvíjet podle prvního sloupce, kde máme nejvíce (jednu) nul. Postupně dostáváme

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Podle Saarusova pravidla $= -2 - 2 + 6 = 2.$

□

2.21. Nalezněte všechny hodnoty argumentu a takové, že

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = 1.$$

Pro komplexní a uveďte buď jeho algebraický nebo goniometrický tvar.

Řešení. Spočítáme determinant rozvinutím podle prvního sloupce matice:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix},$$

dále rozvíjíme podle posledního řádku:

$$D = a \cdot (-a) \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a^2(a^2 - 1).$$

Celkem dostáváme následující podmínku pro a : $a^4 - a^2 + 1 = 0$. Substitucí $t = a^2$, pak máme $t^2 - t + 1$ s kořeny $t_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)$, $t_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) - i \sin(\pi/3) = \cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3)$, odkud snadno určíme čtyři možné hodnoty parametru a : $a_1 = \cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$, $a_2 = \cos(7\pi/6) + i \sin(7\pi/6) = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $a_3 = \cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6) = \sqrt{3}/2 - i/2$, $a_4 = \cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + i/2$. □

2.22. Vandermondův determinant. Dokažte vzorec pro tzv. Vandermondův determinant, tj. determinant Vandermondovy matice:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i),$$

kde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a na pravé straně rovnosti je součin všech rozdílů $a_j - a_i$, kde $j > i$.

Řešení.

Ukážeme opravdu nádherný důkaz indukcí, nad nímž srdce matematika zaplesá. Pro $n = 2$ vztah triviálně platí. Nechť tedy platí pro determinant matice určené čísly a_1, \dots, a_k a dokážeme, že platí i pro výpočet determinantu Vandermondovy matice určenou čísly a_1, \dots, a_{k+1} . Uvažme determinant V_{k+1} jako polynom P v proměnné a_{k+1} . Z definice determinantu vyplývá, že tento polynom bude stupně k v této proměnné a navíc čísla a_1, \dots, a_k budou jeho kořeny: nahradíme-li totiž ve Vandermondově matici V_{k+1} poslední sloupec tvořený mocninami čísla a_{k+1} libovolným z předchozích sloupců tvořeným mocninami čísla a_i , tak hodnota tohoto pozmeněného determinantu je vlastně hodnotou Vandermondova determinantu (jakožto polynomu v proměnné a_{k+1}) v bodě a_i . Tato je ovšem nulová, neboť determinant z matice se dvěma shodnými, tedy lineárně závislými, sloupci je nulový. To znamená, že a_i je kořenem P . Nalezli jsme tedy k kořenů polynomu stupně k , tudíž všechny jeho kořeny a P musí být tvaru $P = C(a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2) \cdots (a_{k+1} - a_k)$, kde C je nějaká konstanta, resp. vedoucí koeficient polynomu P . Uvážíme-li však výpočet determinantu V_{k+1} pomocí rozvoje podle posledního sloupce, tak vidíme, že $C = V_k$, což už dokazuje vzorec pro V_{k+1} . \square

Jiné řešení. (viz Návody a řešení cvičení)

2.23. Nenulovost determinantu čtvercové matice charakterizuje všechny invertibilní čtvercové matice: zjistěte, zda je matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

invertibilní.

2.14. Definice determinantu. Připomeňme, že bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá *permutace množiny* X , viz 1.7. Je-li $X = \{1, 2, \dots, n\}$, lze permutace zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prvek $x \in X$ se nazývá *samodružným bodem* permutace σ , je-li $\sigma(x) = x$. Permutace σ taková, že existují právě dva různé prvky $x, y \in X$ s $\sigma(x) = y$, zatímco všechna ostatní $z \in X$ jsou samodružná, se nazývá *transpozice*, značíme ji (x, y) . Samozřejmě pro takovou transpozici platí také $\sigma(y) = x$, odtud název.

V dimenzi 2 byl vzorec pro determinant jednoduchý – vezmeme všechny možné součiny dvou prvků, po jednom z každého sloupce a řádku matice, opatříme je znaménkem tak, aby při přehození dvou sloupců došlo ke změně celkového znaménka, a výrazy všechny (tj. oba) sečteme:



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = ad - bc.$$

Obecně, uvažujme čtvercové matice $A = (a_{ij})$ dimenze n nad \mathbb{K} . Vzorec pro determinant matice A bude také poskládaný ze všech možných součinů prvků z jednotlivých řádků a sloupců:

DEFINICE DETERMINANTU
Determinant matice A je skalár $\det A = |A|$ definovaný vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \dots, n\}$ a znaménko sgn pro každou permutaci σ ještě musíme popsát. Každý z výrazů

$$\text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

nazýváme *člen determinantu* $|A|$.

V dimenzích 2 a 3 snadno uhádneme i správná znaménka. Součin prvků z diagonály má být s kladným znaménkem a chceme antisymetrii při přehození dvou sloupců nebo řádků.

DETERMINANTY V DIMENZI 2 A 3
 Pro $n = 2$ je, jak jsme čekali

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Podobně pro $n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tomuto vzorci se říká *Sarusovo pravidlo*.

2.13a

2.15. Parita permutace. Jak tedy najít správná znaménka permutací? Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří *inverzi* v permutaci σ , je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá *sudá* (resp. *lichá*), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.



Parita permutace σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ a značíme ji $\text{sgn}(\sigma)$. Tolik tedy definice znamének našich členů determinantu. Chceme ale vědět, jak s paritou počítat. Z následujícího tvrzení o permutacích už je jasně vidět, že Saarusovo pravidlo skutečně počítá determinant v dimenzi 3.

Věta. Na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Tyto lze seřadit do posloupnosti tak, že každé dvě po sobě jdoucí se liší právě jednou transpozicí. Lze při tom začít libovolnou permutací. Každá transpozice mění paritu.

DŮKAZ. Pro jednoprvkové a dvouprvkové X tvrzení samozřejmě platí. Budeme postupovat indukcí přes dimenzi.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny množiny s $n - 1$ prvky a uvažme permutaci $\sigma(1) = a_1, \dots, \sigma(n) = a_n$. Podle indukčního předpokladu všechny permutace, které mají na posledním místě a_n , dostaneme z tohoto pořadí postupným prováděním transpozic. Přitom jich bude $(n - 1)!$. V posledním z nich prohodíme $\sigma(n) = a_n$ za některý z prvků, který dosud nebyl na posledním místě, a znovu uspořádáme všechny permutace s tímto vybraným prvkem na posledním místě do posloupnosti s požadovanými vlastnostmi. Po n -násobné aplikaci tohoto postupu získáme $n(n - 1) = n!$ zaručeně různých permutací, tzn. všechny, právě předepsaným způsobem.

Všimněme si, že poslední věta dokazovaného tvrzení se nezdá příliš důležitá pro jeho využití. Je však velice důležitou částí postupu v našem důkazu indukcí přes počet prvků v X .

Zbývá tvrzení věty o paritách. Uvažme pořadí

$$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

ve kterém je r inverzí. Pak zjevně je v pořadí

$$(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n)$$

buď $r - 1$ nebo $r + 1$ inverzí. Každou transpozici (a_i, a_j) lze přitom získat postupným provedením $(j - i) + (j - i - 1) = 2(j - i) - 1$ transpozic sousedních prvků. Proto se provedením libovolné transpozice parita permutace změní. Navíc již víme, že všechny permutace lze získat prováděním transpozic. \square

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Dokázali jsme proto:

Důsledek. Na každé konečné množině $X = \{1, \dots, n\}$ s n prvky, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.

Řešení. Matice je invertibilní (existuje k ní inverzní matice) právě tehdy, když ji lze pomocí řádkových transformací převést na jednotkovou matici. To je ekvivalentní např. s tím, že má nenulový determinant. Ten spočítáme pomocí Laplaceovy věty (2.32) například rozvojem podle prvního řádku:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 90 - 2 \cdot 180 + (-1) \cdot 110 - 2 \cdot (-100) = 0,$$

tedy daná matice není invertibilní. \square

2.24. Nalezněte matici algebraicky adjungovanou a matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Adjungovaná matice je

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}^T,$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} matice A , tedy součin čísla $(-1)^{i+j}$ a determinantu trojrozměrné matice vzniklé z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce. Platí

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0, \dots$$

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12.$$

Dosazením získáme

$$A^* = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 28 \\ 8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & -12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 16 \\ 20 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici A^{-1} určíme ze vztahu $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$. Determinant matice A je (rozvojem podle prvního řádku) roven

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 16.$$

Dostáváme tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 5/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 7/4 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

□

2.25. Najděte algebraicky adjungovanou matici F^* , je-li

2.13b

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

2.26. Vypočítejte algebraicky adjungované matice k maticím

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 3-2i & 6 \end{pmatrix},$$

přičemž i označuje imaginární jednotku.

D. Soustavy lineárních rovnic podruhé

Se soustavami lineárních rovnic jsme se již setkali na začátku kapitoly. Nyní se budeme věnovat této problematice podrobněji. Zkusme nejprve využít výpočtu inverzní matice k řešení systému lineárních soustav rovnic.

2.27. Účastníci zájezdu. Dvoudenního autobusového zájezdu se zúčastnilo 45 osob. První den se platilo vstupné na rozhlednu 30 Kč za dospělého, 16 Kč za dítě a 24 Kč za seniora, celkem 1 116 Kč. Druhý den se platilo vstupné do botanické zahrady 40 Kč za dospělého, 24 Kč za dítě a 34 Kč za seniora, celkem 1 542 Kč. Kolik bylo mezi výletníky dospělých, dětí a seniorů?

Řešení. Zavedme proměnné

x udávající „počet dospělých“;

y udávající „počet dětí“;

z udávající „počet seniorů“.

Zájezdu se zúčastnilo 45 osob, a proto

$$x + y + z = 45.$$

Celkové vstupné na rozhlednu a do botanické zahrady při zavedení našich proměnných a při zachování pořadí činí $30x + 16y + 24z$ a $40x + 24y + 34z$. My je ovšem známe (1 116 Kč a 1 542 Kč). Máme tak

$$\begin{aligned} 30x + 16y + 24z &= 1116, \\ 40x + 24y + 34z &= 1542. \end{aligned}$$

Soustavu tří lineárních rovnic zapíšeme maticově jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 16 & 24 \\ 40 & 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 1116 \\ 1542 \end{pmatrix}.$$

Jestliže složíme dvě permutace za sebou, znamená to provést napřed všechny transpozice tvořící první a pak druhou. Proto pro libovolné permutace $\sigma, \eta : X \rightarrow X$ platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta)$$

a proto také

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

2.16. Rozklad permutace na cykly. Dobrým nástrojem pro praktickou práci s permutacemi je jejich rozklad na tzv. cykly.

CYKLY

Permutace σ na množině $X = \{1, \dots, n\}$ se nazývá *cyklus* délky k , jestliže je možné najít prvky $a_1, \dots, a_k \in X$, $2 \leq k \leq n$, takové, že $\sigma(a_i) = a_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$, zatímco $\sigma(a_k) = a_1$ a ostatní prvky v X jsou pro σ samodružné. Cykly délky dva jsou právě transpozice.

Každá permutace je složením cyklů. Cykly sudé délky mají paritu -1 , cykly liché délky mají paritu 1 .



Poslední tvrzení musíme ještě dokázat. Jestliže definujeme pro danou permutaci σ relaci R tak, že dva prvky $x, y \in X$ jsou v relaci právě když $\sigma^r(x) = y$ pro nějakou iteraci permutace σ , pak zjevně jde o relaci ekvivalence (ověřte si podrobně!). Protože je X konečná množina, musí pro nějaké ℓ být $\sigma^\ell(x) = x$. Jestliže zvolíme jednu třídu ekvivalence $\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{\ell-1}(x)\} \subset X$ a ostatní prvky definujeme jako samodružné, dostáváme cyklus. Evidentně je pak celá původní permutace X složením všech těchto cyklů pro jednotlivé třídy naší ekvivalence a je jedno v jakém pořadí cykly skládáme.

Pro určení parity si nyní stačí povšimnout, že cykly sudé délky lze napsat jako lichý počet transpozic, proto mají paritu -1 . Obdobně cyklus liché délky dostaneme ze sudého počtu transpozic a proto mají paritu 1 .

2.17. Jednoduché vlastnosti determinantu. Poznání vlastností permutací a jejich parit z předchozích odstavců nám teď umožní rychle odvodit základní vlastnosti determinantů.



Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad skaláry z \mathbb{K} definujeme *matici transponovanou* k A . Jde o matici $A^T = (a'_{ij})$ s prvky $a'_{ij} = a_{ji}$, která je typu n/m .

Čtvercová matice A s vlastností $A = A^T$ se nazývá *symetrická*. Jestliže platí $A = -A^T$, pak se A nazývá *antisymetrická*.

JEDNODUCHÉ VLASTNOSTI DETERMINANTŮ

Věta. Pro každou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ platí následující tvrzení:

$$(1) |A^T| = |A|$$

(2) Je-li jeden řádek v A tvořen nulovými prvky z \mathbb{K} , pak $|A| = 0$.

- (3) Jestliže matice B vznikla z A výměnou dvou řádků, pak $|A| = -|B|$.
- (4) Jestliže matice B vznikla z A vynásobením řádku skalárem $a \in \mathbb{K}$, pak $|B| = a|A|$.
- (5) Jsou-li prvky k -tého řádku v A tvaru $a_{kj} = c_{kj} + b_{kj}$ a všechny ostatní řádky v maticích A , $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ jsou stejné, pak $|A| = |B| + |C|$.
- (6) Determinant $|A|$ se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku A lineární kombinaci ostatních řádků.

DŮKAZ. (1) Členy determinantů $|A|$ a $|A^T|$ jsou v bijektivní korespondenci. Člen $\text{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ přitom v A^T odpovídá člen (na pořadí skalárů v součinu totiž nezáleží)

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} &= \\ &= \text{sgn}(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}, \end{aligned}$$

přičemž musíme ověřit, že je tento člen opatřen správným znaménkem. Parita σ a σ^{-1} je ale stejná, jde tedy opravdu o člen v determinantu $|A^T|$ a první tvrzení je dokázáno.

(2) Plyne přímo z definice determinantu, protože všechny jeho členy obsahují z každého řádku právě jeden člen. Je-li jeden z řádků nulový, budou tedy všechny členy determinantu nulové.

(3) Ve všech členech $|B|$ dojde ve srovnání s determinan-tem $|A|$ u permutací k přidání jedné transpozice, znaménko všech členů determinantu tedy bude opačné.

(4) Vyplývá přímo z definice, protože členy determinantu $|B|$ jsou členy $|A|$ vynásobené skalárem a .

(5) V každém členu $|A|$ je právě jeden součinitel z k -tého řádku matice A . Protože platí distributivní zákon pro násobení a sčítání v \mathbb{K} , vyplývá tvrzení přímo z definičního vztahu pro determinanty.

(6) Jsou-li v A dva stejné řádky, jsou mezi členy determinantu vždy dva sčítance stejné až na znaménko. Proto je v takovém případě $|A| = 0$. Je tedy podle tvrzení (5) možné přičíst k vybranému řádku libovolný jiný řádek, aniž by se změnila hodnota determinantu. Vzhledem k tvrzení (4) lze ale přičíst i skalární násobek libovolného jiného řádku. \square

Řešením je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & 5 & -4 \\ 30 & 3 & -3 \\ -40 & -8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 1116 \\ 1542 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 132 \\ 72 \\ 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 16 & 24 \\ 40 & 24 & 34 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & 5 & -4 \\ 30 & 3 & -3 \\ -40 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Slovně vyjádřeno, zájezdu se zúčastnilo 22 dospělých, 12 dětí, 11 seniorů. \square

2.28. Za pomoci výpočtu inverzní matice určete řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Co když však matice soustavy není invertibilní? Potom nemůžeme k jejímu řešení inverzní matice využít. Taková soustava pak má jiný počet než jedno řešení. Jak možná čtenář již ví, tak systém lineárních rovnic buď nemá řešení, nebo má jedno řešení, nebo jich má nekonečně mnoho (například nemůže mít právě dvě řešení). Prostor řešení je buď vektorový prostor (v případě, že pravá strana všech rovnic v systému je nulová, hovoříme o *homogenním systému* lineárních rovnic) nebo afinní prostor, viz 4.1, (v případě, že pravá strana alespoň jedné z rovnic je nenulová, hovoříme o *nehomogenním systému* lineárních rovnic). Ukažme si tedy různé možné typy řešení soustavy lineárních rovnic na příkladech.

2.29. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má lineární systém

$$\begin{aligned} x_1 - ax_2 - 2x_3 &= b, \\ x_1 + (1-a)x_2 &= b-3, \\ x_1 + (1-a)x_2 + ax_3 &= 2b-1 \end{aligned}$$

- (a) právě 1 řešení;
 (b) žádné řešení;
 (c) alespoň 2 řešení?

Řešení. Soustavu „tradičně“ přepíšeme do rozšířené matice a upravíme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 1 & 1-a & 0 & b-3 \\ 1 & 1-a & a & 2b-1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & a+2 & b-1 \end{array} \right)$$

2.13

2.18. Výpočetní důsledky. Podle předchozí věty umíme převést elementárními řádkovými transformacemi každou čtvercovou matici A na řádkově schodovitý tvar, aniž bychom změnila hodnotu jejího determinantu. Jen musíme dávat pozor, abychom vždy k upravovanému řádku pouze přičítali lineární kombinace řádků ostatních.



$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a & b+2 \end{array} \right).$$

Dodejme, že v prvním kroku jsme první řádek odečetli od druhého a od třetího a ve druhém kroku pak druhý od třetího. Vidíme, že soustava bude mít právě jedno řešení (které lze určit zpětnou eliminací) tehdy a jenom tehdy, když $a \neq 0$. Pro $a = 0$ totiž ve třetím sloupci není první nenulové číslo nějakého řádku. Je-li $a = 0$ a $b = -2$, dostáváme nulový řádek, kdy volba $x_3 \in \mathbb{R}$ jako parametru dává nekonečně mnoho různých řešení. Pro $a = 0$ a $b \neq -2$ poslední rovnice $a = b+2$ nemůže být splněna – soustava nemá řešení.

Poznamenejme, že pro $a = 0$, $b = -2$ jsou řešeními

$$(x_1, x_2, x_3) = (-2 + 2t, -3 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

a pro $a \neq 0$ je jediným řešením trojice

$$\left(\frac{-3a^2 - ab - 4a + 2b + 4}{a}, -\frac{2b + 3a + 4}{a}, \frac{b + 2}{a} \right).$$

2.30. Zjistěte počet řešení soustav

(a)

$$\begin{aligned} 12x_1 + \sqrt{5}x_2 + 11x_3 &= -9, \\ x_1 &- 5x_3 = -9, \\ x_1 &+ 2x_3 = -7; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 4; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. Vektory $(1, 0, -5)$, $(1, 0, 2)$ jsou očividně lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého) a vektor $(12, \sqrt{5}, 11)$ nemůže být jejich lineární kombinací (jeho druhá složka je nenulová), a proto matice, jejímiž řádky jsou tyto tři lineárně nezávislé vektory, je invertibilní. Soustava ve variantě (a) má tedy právě jedno řešení.

U soustav ve variantách (b), (c) si stačí povšimnout, že je

$$(4, 2, -12) = -2(-2, -1, 6).$$

V případě (b) tak sečtení první rovnice s dvojnásobkem třetí dává $0 = 8$ – soustava nemá řešení; v případě (c) je třetí rovnice násobkem první – soustava má zřejmě nekonečně mnoho řešení. 2. 14

VÝPOČET DETERMINANTŮ ELIMINACÍ

Je-li matice A v řádkovém schodovitém tvaru, pak v každém členu $|A|$ je alespoň jeden součinitel prvkem pod diagonálou s výjimkou případu, kdy jsou všechny jen na diagonále. Pak je ale jediným nenulovým členem determinantu ten, který odpovídá identické permutaci. Vidíme tedy, že determinant takové matice ve schodovitém tvaru je

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Předchozí věta tedy poskytuje velice efektivní metodu výpočtu determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody, viz odstavec 2.7.



Všimněme si také hezkého důsledku prvního tvrzení předchozí věty o rovnosti determinantů matice a matice transponované. Zaručuje totiž, že kdykoliv se nám podaří dokázat nějaké tvrzení o determinantech formulované s využitím řádků příslušné matice, pak analogické tvrzení platí i pro sloupce. Např. tedy můžeme okamžitě všechna tvrzení (2)–(6) této věty přeformulovat i pro přičítání lineárních kombinací ostatních sloupců k vybranému. To můžeme hned použít pro odvození následujícího vzorce pro přímý výpočet řešení systémů lineárních rovnic:

CRAMMEROVO PRAVIDLO

Uvažme systém n lineárních rovnic pro n proměnných s maticí systému $A = (a_{ij})$ a sloupcem hodnot $b = (b_1, \dots, b_n)$, tj. v maticovém zápisu řešíme rovnici $A \cdot x = b$. Jestliže existuje inverze A^{-1} , pak jsou jednotlivé komponenty jediného řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ dány vztahem

$$x_i = |A_i| |A|^{-1},$$

kde matice A_i vznikne z matice systému A výměnou i -tého sloupce za sloupec hodnot b .

Skutečně, jak jsme viděli, inverze k matici systému existuje právě tehdy, když má systém jediné řešení. Jestliže tedy takové řešení x máme, můžeme za sloupec b dosadit do matice A_i příslušnou kombinaci sloupců matice A , tj. hodnoty $b_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$. Pak ale odečtením x_k -násobků všech ostatních sloupců zůstane v i -tém sloupci pouze x_i -násobek původního sloupce z A . Číslo x_i tedy můžeme vytknout před determinant a získáme rovnost $|A_i| |A|^{-1} = x_i |A| |A|^{-1} = x_i$, což je požadované tvrzení.

Dále si všimněme, že vlastnosti (3)–(5) z předchozí věty říkají, že determinant jakožto zobrazení, které n vektorům dimenze n (řádkům nebo sloupcům matice) přiřadí skalár, je antisymetrické zobrazení lineární v každém svém argumentu, přesně jako jsme podle analogie z dimenze 2 požadovali.

2.19. Další vlastnosti determinantu. Časem uvidíme, že skutečně stejně jako v dimenzi dva je determinant matice roven orientovanému objemu rovnoběžnostěny určeného jejími sloupci. Uvidíme také, že když uvážíme zobrazení $x \mapsto A \cdot x$ zadané čtvercovou maticí A na \mathbb{R}^n , pak můžeme determinant této matice vidět jako vyjádření poměru mezi objemem rovnoběžnostěnů daných vektory x_1, \dots, x_n a jejich obrazy $A \cdot x_1, \dots, A \cdot x_n$. Protože skládání zobrazení $x \mapsto A \cdot x \mapsto B \cdot (A \cdot x)$ odpovídá násobení matic, je snad docela pochopitelná tzv. *Cauchyova věta*:



CAUCHYOVA VĚTA

Věta. Necht' $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou čtvercové matice dimenze n nad okruhem skalárů \mathbb{K} . Pak $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Všimněme si, že z Cauchyovy věty a z reprezentace elementárních řákových transformací pomocí násobení vhodnými maticemi (viz 2.8), okamžitě vyplývají tvrzení (2), (3) a (6) z Věty 2.17.

My teď tuto větu odvodíme ryze algebraicky už proto, že předchozí odvolávka na geometrický argument těžko může fungovat pro libovolné skaláry. Základním nástrojem je tzv. *rozvoj determinantu* podle jednoho nebo více řádků či sloupců. Budeme proto potřebovat něco málo technické přípravy. Čtenář, který by snad tolik abstrakce nestrávil může tyto pasáže přeskočit a vstřebet pouze znění Laplaceovy věty a jejich důsledků.



1.14a

2.20. Minory matice. Při úvahách o maticích a jejich vlastnostech budeme často pracovat jen s jejich částmi. Budeme si proto muset zavést několik pojmů.



SUBMATICE A MINORY

Necht' $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_l} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_l} \end{pmatrix}$$

typu k/l nazýváme *submaticí matice* A určenou řádky i_1, \dots, i_k a sloupci j_1, \dots, j_l . Zbývajícimi $(m - k)$ řádky a $(n - l)$ sloupci je určena matice M^* typu $(m - k)/(n - l)$, která se nazývá *doplňková submatice* k M v A . Při $k = l$ je definován $|M|$, který nazýváme *subdeterminant* nebo *minor* řádu k matice A . Je-li $m = n$, pak při $k = l$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá *doplňěk minoru* $|M|$, nebo *doplňkový minor* k submatici M v matici A . Skalár

$$(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá *algebraický doplněk* k minoru $|M|$.

2.31. Najděte (libovolný) lineární systém, jehož množina řešení je právě

$$\{(t + 1, 2t, 3t, 4t); t \in \mathbb{R}\}.$$

Řešení. Takovým systémem je např.

$$2x_1 - x_2 = 2, \quad 2x_2 - x_4 = 0, \quad 4x_3 - 3x_4 = 0.$$

Těmto rovnicím totiž uvedené řešení vyhovuje pro každé $t \in \mathbb{R}$ a vektory

$$(2, -1, 0, 0), \quad (0, 2, 0, -1), \quad (0, 0, 4, -3)$$

zadávající levé strany rovnic jsou zřejmě lineárně nezávislé (množina řešení obsahuje jeden parametr). \square

2.32. Stanovte hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poté stanovte počet řešení systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5, \\ + 2x_2 &+ x_4 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

a také všechna řešení systému

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ + 2x_2 &+ x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a systému

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -4, \\ x_1 - x_2 &= 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Řešení. Protože je $\det A = -10$, tedy nenulový, jsou sloupce matice A lineárně nezávislé, a tudíž se její hodnota rovná jejímu rozměru.

První z uvedených třech systémů je zadán rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Ovšem levá strana je právě A^T s determinantem $|A^T| = |A| \neq 0$. Existuje tedy matice $(A^T)^{-1}$ a soustava má právě 1 řešení

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (A^T)^{-1} \cdot (4, 5, 1, 3)^T.$$

Druhý ze systémů má totožnou levou stranu (určenou maticí A^T) s prvním. Protože absolutní členy na pravé straně lineárních systémů

neovlivňují počet řešení a protože každý homogenní systém má nulové řešení, dostáváme jako jediné řešení druhého systému uspořádanou čtveřici

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Třetí systém má rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right), \quad \boxed{2.14b}$$

což je matice A (pouze poslední sloupec je uveden za svislou čarou). Pokud budeme tuto matici upravovat na schodovitý tvar, musíme obdržet řádek

$$(0 \ 0 \ 0 \ | \ a), \quad \text{kde } a \neq 0.$$

Víme totiž, že sloupec na pravé straně není lineární kombinací sloupců na levé straně (hodnota matice je 4). Tento systém nemá řešení. \square

2.33. Vyřešte systém homogenních lineárních rovnic zadaný maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{3} & -2 & -\sqrt{5} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & 3 & \sqrt{3} & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.34. Určete všechna řešení systému

$$\begin{array}{rccccrcrcl} & & x_2 & & + & x_4 & = & 1, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2, \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1. \end{array}$$

2.35. Vyřešte

$$3x - 5y + 2u + 4z = 2,$$

$$5x + 7y - 4u - 6z = 3,$$

$$7x - 4y + u + 3z = 5.$$

2.36. Rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8,$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4,$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$

Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají *vedoucí hlavní submatice*, jejich determinanty *vedoucí hlavní minory* matice A . Zvolíme-li k po sobě jdoucích řádků a sloupců, počínaje i -tým řádkem, hovoříme o *hlavních submaticích*, resp. *hlavních minorech*.

Při speciální volbě $k = \ell = 1$, $m = n$ říkáme příslušnému doplňkovému minoru *algebraický doplněk* A_{ij} prvku a_{ij} matice A .

2.21. Laplaceův rozvoj determinantu. Pokud je $|M|$ hlavní minor matice A řádu k , pak přímo z definice determinantu je vidět, že každý z jednotlivých $k!(n-k)!$ sčítanců v součinu $|M|$ s jeho algebraickým doplňkem je členem determinantu $|A|$.



Obecně, uvažme submatici M , tj. čtvercovou matici, určenou řádky $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ a sloupci $j_1 < \dots < j_k$. Pak pomocí $(i_1 - 1) + \dots + (i_k - k)$ výměn sousedních řádků a $(j_1 - 1) + \dots + (j_k - k)$ výměn sousedních sloupců v A převedeme tuto submatici M na hlavní submatici a doplňková matice přitom přejde právě na doplňkovou matici. Celá matice A přejde přitom v matici B , pro kterou platí podle 2.17 a definice determinantu $|B| = (-1)^\alpha |A|$, kde $\alpha = \sum_{h=1}^k (i_h - j_h) - 2(1 + \dots + k)$. Tím jsme ověřili:

Tvrzení. *Jestliže je A je čtvercová matice dimenze n a $|M|$ je její minor řádu $k < n$, pak součin libovolného členu $|M|$ s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem $|A|$.*

Toto tvrzení už podbízí představu, že by se pomocí takových součinů menších determinantů skutečně mohl determinant matic vyjadřovat. Víme, že $|A|$ obsahuje právě $n!$ různých členů, právě jeden pro každou permutaci. Tyto členy jsou navzájem různé jakožto polynomy v prvcích (neznámé obecné) matice A . Jestliže tedy ukážeme, že navzájem různých výrazů z předchozího tvrzení je právě tolik, jako je tomu u determinantu $|A|$, pak dostaneme jejich součtem právě determinant $|A|$.

Zbývá proto ukázat, že uvažované součiny $|M| \cdot |M^*|$ obsahují právě $n!$ různých členů z $|A|$.

Ze zvolených k řádků lze vybrat $\binom{n}{k}$ minorů M a podle předchozího lematu je každý z $k!(n-k)!$ členů v součinech $|M|$ s jejich algebraickými doplňky členem $|A|$. Přitom pro různé výběry M nemůžeme nikdy obdržet stejné členy a jednotlivé členy v $(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \cdot |M| \cdot |M^*|$ jsou také po dvou různé. Celkem tedy máme právě požadovaný počet $k!(n-k)!\binom{n}{k} = n!$ členů.

Tím jsme bezesbytku dokázali:

LAPLACEOVA VĚTA

Věta. *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad libovolným okruhem skalárů a nechť je pevně zvoleno k jejích řádků. Pak $|A|$ je součet všech $\binom{n}{k}$ součinů $(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \cdot |M| \cdot |M^*|$ minorů řádu k vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

Laplaceova věta převádí výpočet $|A|$ na výpočet determinantů nižšího stupně. Těto metodě výpočtu se říká *Laplaceův rozvoj* podle zvolených řádků či sloupců. Např. rozvoj podle i -tého řádku nebo podle j -tého sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplněk k prvku a_{ij} (tj. k minoru stupně 1).

Při praktickém počítání determinantů bývá výhodné kombinovat Laplaceův rozvoj s přímou metodou přičítání lineárních kombinací řádků či sloupců.

2.22. Důkaz Cauchyovy věty. Důkaz se opírá o trikovou ale elementární aplikaci Laplaceovy věty. Použijeme prostě dvakrát Laplaceův rozvoj na vhodné matice.



Uvažme nejprve následující matici H dimenze $2n$ (používáme tzv. blokovou symboliku, tj. píšeme matici jakoby složenou ze (sub)matic A, B atd.)

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Laplaceovým rozvojem podle prvních n řádků obdržíme právě $|H| = |A| \cdot |B|$.

Nyní budeme k posledním n sloupcům postupně přičítat lineární kombinace prvních n sloupců tak, abychom obdrželi matici s nulami v pravém dolním rohu. Dostaneme

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky submatice nahoře vpravo přitom musí splňovat

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

neboli jde právě o prvky součinu $A \cdot B$ a $|K| = |H|$. Přitom rozvojem podle posledních n sloupců dostáváme

$$|K| = (-1)^{n+1+\dots+2n} |A \cdot B| = (-1)^{2n \cdot (n+1)} \cdot |A \cdot B| = |A \cdot B|.$$

Tím je Cauchyova věta bezzbytku dokázána.

třech proměnných x_1, x_2, x_3 .

2.37. Stanovte počet řešení 2 soustav 5 lineárních rovnic

$$A^T \cdot x = (1, 2, 3, 4, 5)^T, \quad A^T \cdot x = (1, 1, 1, 1, 1)^T,$$

kde

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T \quad \text{a} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.38. Nechť je dáno

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Najděte taková reálná čísla b_1, b_2, b_3 , aby systém lineárních rovnic $A \cdot x = b$ měl:

- (a) nekonečně mnoho řešení;
- (b) právě jedno řešení;
- (c) žádné řešení;
- (d) právě 4 řešení.

2.39. Určete řešení soustavy lineárních rovnic

$$ax_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

2.40. V závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$ rozhodněte o počtu řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & a \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2.41. Rozhodněte, zda existuje homogenní soustava lineárních rovnic tří proměnných, jejíž množinou řešení je

- (a) $\{(0, 0, 0)\}$;
- (b) $\{(0, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 0)\}$;
- (c) $\{(x, 1, 0); x \in \mathbb{R}\}$;
- (d) $\{(x, y, 2y); x, y \in \mathbb{R}\}$.

2.42. Řešte soustavu lineárních rovnic v závislosti na reálných parametrech a, b .

$$\begin{aligned}x + 2y + bz &= a \\x - y + 2z &= 1 \\3x - y &= 1.\end{aligned}$$

E. Vektorové prostory

Vlastnosti vektorového prostoru, kterých jsme si všimli u roviny či třírozměrného prostoru, ve kterém žijeme, má celá řada jiných množin. Ukažme si to na příkladech.

2.43. Vektorový prostor ano či ne? Rozhodněte o následujících množinách, jestli jsou vektorovými prostory nad tělesem reálných čísel:

i) Množina řešení soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_{98} + x_{99} + x_{100} &= 100x_1, \\x_1 + x_2 + \dots + x_{98} + x_{99} &= 99x_1, \\x_1 + x_2 + \dots + x_{98} &= 98x_1, \\&\vdots \\x_1 + x_2 &= 2x_1.\end{aligned}$$

ii) Množina řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 0$$

iii) Množina řešení rovnice

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 100x_{100} = 1.$$

iv) Množina všech reálných, resp. komplexních, posloupností. (Reálnou, resp. komplexní posloupností rozumíme zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, resp. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. O obrazu čísla n pak hovoříme jako o n -tém členu posloupnosti, většinou jej označujeme dolním indexem, např. a_n .)

v) Množina řešení homogenní diferenční rovnice.

vi) Množina řešení nehomogenní diferenční rovnice.

vii) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = f(2) = c, c \in \mathbb{R}\}$

Řešení.

i) Ano. Jsou to všechny reálné násobky vektoru $(\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{100 \text{ jedniček}})$, tedy vektorový prostor dimenze 1 (viz dále (2.29)).

2.23. Determinant a inverzní matice. Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A , tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a díky Cauchyově větě platí $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

My však nyní kombinací Laplaceovy věty a Cauchyho věty umíme říci víc.

VZOREC PRO INVERZNÍ MATICI

Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a_{ij}^*)$, kde $a_{ij}^* = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A . Matici A^* nazýváme *algebraicky adjungovaná matice* k matici A .

Věta. Pro každou čtvercovou matici A nad okruhem skalárů \mathbb{K} platí

$$(2.2) \quad AA^* = A^*A = |A| \cdot E.$$

Zejména tedy

(1) A^{-1} existuje jako matice nad okruhem skalárů \mathbb{K} , právě když $|A|^{-1}$ existuje v \mathbb{K} .

(2) Pokud existuje A^{-1} , pak platí $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

DŮKAZ. Jak jsme již zmínili, Cauchyova věta ukazuje, že z existence A^{-1} vyplývá invertibilita $|A| \in \mathbb{K}$.

Pro libovolnou čtvercovou matici A spočteme přímým výpočtem $A \cdot A^* = (c_{ij})$, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}^* = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}.$$

Pokud $i = j$ je to právě Laplaceův rozvoj $|A|$ podle i -tého řádku. Pokud $i \neq j$ jde o rozvoj determinantu matice v níž je i -tý a j -tý řádek stejný a proto je $c_{ij} = 0$. Odtud plyne $A \cdot A^* = |A| \cdot E$ a dokázali jsme rovnost (2.2).

Předpokládejme navíc, že $|A|$ je invertibilní skalár. Jestliže zopakujeme předešlý výpočet pro $A^* \cdot A$, obdržíme $|A|^{-1}A^* \cdot A = E$. Proto náš výpočet skutečně dává inverzní matici A , jak je tvrzeno ve větě. \square

Jako přímý důsledek této věty můžeme znovu ověřit Cramerovo pravidlo pro řešení systémů lineárních rovnic, viz 2.18. Skutečně, pro řešení systému $A \cdot x = b$ stačí důsledně přečíst v rovnosti

$$x = A^{-1} \cdot b = |A|^{-1}A^* \cdot b$$

poslední výraz jako Laplaceův rozvoj determinantu matice A_i vzniklé výměnou i -tého sloupce v A za sloupec hodnot b .

2.17

3. Vektorové prostory a lineární zobrazení



2.24. Abstraktní vektorové prostory. Vraťme se teď na chvíli k systémům m lineárních rovnic pro n proměnných z 2.3 a předpokládejme navíc, že jde o homogenní systém rovnic $A \cdot x = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Díky vlastnosti distributivity pro násobení matic je zřejmé, že součet dvou řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ splňuje

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$

a je tedy také řešením. Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek $a \cdot x$. Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v \mathbb{K}^n , viz 2.1. Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a „rozměr“ tohoto prostoru je dán rozdílem počtu proměnných a hodnotí matice A . Můžeme tedy snadno mít při řešení 1000 souřadnic a jen jeden nebo dva volné parametry. Celý prostor řešení se pak bude chovat jako rovina nebo přímka, jak jsme je poznali již v 1.25 na straně 31.

Už v odstavci 1.9 jsme ale potkali ještě zajímavější příklad prostoru všech řešení homogenní lineární diferenciální rovnice (prvního řádu). Všechna řešení jsme dostali z jednoho pomocí násobení skaláry a jsou tedy také uzavřená na součty a skalární násobky. Tyto „vektory“ řešení ovšem jsou nekonečné posloupnosti čísel, přestože intuitivně očekáváme, že „rozměr“ celého prostoru řešení by měl být jedna. Potřebujeme proto obecnější definici vektorového prostoru a jeho dimenze:

DEFINICE VEKTOROVÉHO PROSTORU

Vektorovým prostorem V nad polem skalárů \mathbb{K} rozumíme množinu, na které jsou definovány

- operace sčítání splňující axiomy (KG1)–(KG4) z odstavce 1.1 na straně 6,
- násobení skaláry, pro které platí axiomy (V1)–(V4) z odstavce 2.1 na straně 72.

Připomeňme také naši jednoduchou konvenci ohledně značení: skaláry budou zpravidla označovány znaky z počátku abecedy, tj. a, b, c, \dots , zatímco pro vektory budeme užívat znaky z konce, u, v, w, x, y, z . Přitom ještě navíc většinou x, y, z budou opravdu n -tice skalárů. Pro úplnost výčtu, písmena z prostředka, např. i, j, k, ℓ budou nejčastěji označovat indexy výrazů.

Abychom se trochu pocvičili ve formálním postupu,



ověříme jednoduché vlastnosti vektorů, které pro n -tice skalárů byly samozřejmé, nicméně teď je musíme odvodit z axiomů.

- Ano. Jedná se o prostor dimenze 99 (odpovídá počtu volných parametrů řešení). Obecně je tvoří množina řešení libovolné homogenní soustavy lineárních rovnic vektorový prostor.
- Ne. Např. dvojnásobek řešení $x_1 = 1, x_i = 0, i = 2, \dots, 100$ není řešením dané rovnice. Množina řešení však tvoří tzv. afinní prostor (viz (??)).
- Ano. Množina všech reálných, resp. komplexních, posloupností tvoří zřejmě reálný, resp. komplexní, vektorový prostor. Sčítání posloupností a násobení posloupnosti skalárem je totiž definováno člen po členu, kde se jedná o vektorový prostor reálných, resp. komplexních, čísel.
- Ano. Abychom ukázali, že množina posloupností vyhovujících dané diferenciální homogenní rovnici tvoří vektorový prostor, stačí ukázat, že je uzavřená vzhledem ke sčítání i násobení reálným číslem (neboť se jedná o podmnožinu vektorového prostoru) mějme posloupnosti $(x_j)_{j=0}^{\infty}$ a $(y_j)_{j=0}^{\infty}$ vyhovující stejné homogenní diferenciální rovnici, tedy

$$a_n x_{n+k} + a_{n-1} x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_k = 0$$

$$a_n y_{n+k} + a_{n-1} y_{n+k-1} + \dots + a_0 y_k = 0.$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$a_n (x_{n+k} + y_{n+k}) + a_{n-1} (x_{n+k-1} + y_{n+k-1}) + \dots + a_0 (x_k + y_k) = 0,$$

tedy i posloupnost $(x_j + y_j)_{j=0}^{\infty}$, vyhovuje stejné diferenciální rovnici. Rovněž tak pokud posloupnost $(x_j)_{j=0}^{\infty}$ vyhovuje dané rovnici, tak i posloupnost $(u x_j)_{j=0}^{\infty}$, kde $u \in \mathbb{R}$.

- Ne. Součet dvou řešení nehomogenní rovnice

$$a_n x_{n+k} + a_{n-1} x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_k = c$$

$$a_n y_{n+k} + a_{n-1} y_{n+k-1} + \dots + a_0 y_k = c, \quad c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

vyhovuje rovnici

$$a_n (x_{n+k} + y_{n+k}) + a_{n-1} (x_{n+k-1} + y_{n+k-1}) + \dots + a_0 (x_k + y_k) = 2c,$$

zejména pak nevyhovuje původní nehomogenní rovnici. Množina řešení však tvoří afinní prostor, viz 4.1.

- Je to vektorový prostor právě, když $c = 0$. Vezme-li dvě funkce f a g z dané množiny, pak $(f+g)(1) = (f+g)(2) = f(1) + g(1) = 2c$. Má-li funkce $f+g$ být prvkem dané množiny, musí být $(f+g)(1) = c$, tedy $2c = c$, tedy $c = 0$.

□

2.44. Zjistěte, zda je množina

2.17a

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2| = |x_3|\}$$

podprostorem vektorového prostoru \mathbb{R}^3 a množina

$$U_2 = \{ax^2 + c; a, c \in \mathbb{R}\}$$

podprostorem prostoru polynomů stupně nejvýše 2.

Řešení. Množina U_1 není vektorovým (pod)prostorem. Vidíme např., že je

$$(1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2) \notin U_1.$$

Množina U_2 ovšem podprostor tvoří (nabízí se přirozené ztotožnění s \mathbb{R}^2), protože

$$(a_1x^2 + c_1) + (a_2x^2 + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (c_1 + c_2),$$

$$k \cdot (ax^2 + c) = (ka)x^2 + kc$$

pro všechna čísla $a_1, c_1, a_2, c_2, a, c, k \in \mathbb{R}$. □

2.45. Je množina $V = \{(1, x); x \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad (1, y) \oplus (1, z) = (1, z + y) \quad \text{pro všechna}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad z \odot (1, y) = (1, y \cdot z) \quad \text{pro všechna}$$

vektorovým prostorem?

F. Lineární závislost a nezávislost, báze

2.46. Výpočtem determinantu vhodné matice rozhodněte o lineární nezávislosti vektorů $(1, 2, 3, 1)$, $(1, 0, -1, 1)$, $(2, 1, -1, 3)$ a $(0, 0, 3, 2)$.

2.17a

Řešení. Protože

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

uvedené vektory jsou lineárně nezávislé. □

2.47. Nechť jsou dány libovolné lineárně nezávislé vektory u, v, w, z ve vektorovém prostoru V . Rozhodněte, zda jsou ve V lineárně závislé, či nezávislé, vektory

$$u - 2v, \quad 3u + w - z, \quad u - 4v + w + 2z, \quad 4v + 8w + 4z.$$

Řešení. Uvažované vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé vektory $(1, -2, 0, 0)$, $(3, 0, 1, -1)$, $(1, -4, 1, 2)$, $(0, 4, 8, 4) \in \mathbb{R}^4$. Je však

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -36 \neq 0,$$

2.25. **Tvrzení.** Nechť V je vektorový prostor nad polem skalárů \mathbb{K} , dále uvažme $a, b, a_i \in \mathbb{K}$, vektory $u, v, u_j \in V$. Potom

(1) $a \cdot u = 0$, právě když $a = 0$ nebo $u = 0$,

(2) $(-1) \cdot u = -u$,

(3) $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$,

(4) $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$,

(5) $(\sum_{i=1}^n a_i) \cdot (\sum_{j=1}^m u_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot u_j$.

DŮKAZ. Můžeme rozepsat

$$(a + 0) \cdot u \stackrel{(V2)}{=} a \cdot u + 0 \cdot u = a \cdot u$$

což podle axiomu (KG4) zaručuje $0 \cdot u = 0$. Nyní

$$u + (-1) \cdot u \stackrel{(V2)}{=} (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0$$

a odtud $-u = (-1) \cdot u$. Dále

$$a \cdot (u + (-1) \cdot v) \stackrel{(V2, V3)}{=} a \cdot u + (-a) \cdot v = a \cdot u - a \cdot v,$$

což dokazuje (3). Platí

$$(a - b) \cdot u \stackrel{(V2, V3)}{=} a \cdot u + (-b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$$

a tím je ověřeno (4). Vztah (5) plyne indukcí z (V2) a (V1).

Zbývá (1): $a \cdot 0 = a \cdot (u - u) = a \cdot u - a \cdot u = 0$, což spolu s prvním tvrzením tohoto důkazu ukazuje jednu implikaci. K opačné implikaci poprvé potřebujeme axiom pole pro skaláry a axiom (V4) pro vektorové prostory: je-li $p \cdot u = 0$ a $p \neq 0$, pak $u = 1 \cdot u = (p^{-1} \cdot p) \cdot u = p^{-1} \cdot 0 = 0$. □

2.26. **Lineární (ne)závislost.** V odstavci 2.11 jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky:

LINEÁRNÍ KOMBINACE A NEZÁVISLOST

Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \dots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \dots, v_k \in V$.

Konečnou posloupnost vektorů v_1, \dots, v_k nazveme *lineárně nezávislou*, jestliže jediná jejich nulová lineární kombinace je ta s nulovými koeficienty, tj. jestliže pro skaláry $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_k \cdot v_k = 0 \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Je zjevné, že v nezávislé posloupnosti vektorů jsou všechny po dvou různé a nenulové.

Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad \mathbb{K} se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže každá konečná k -tice vektorů $v_1, \dots, v_k \in M$ je lineárně nezávislá.

Množina M vektorů je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.



Přímo z definice vyplývá, že neprázdná podmnožina M vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů \mathbb{K} je závislá právě, když je jeden z jejich vektorů vyjádřitelný jako konečná lineární kombinace pomocí ostatních vektorů v M . Skutečně, alespoň jeden koeficient v příslušné nulové lineární kombinaci musí být nenulový a protože jsme nad polem skalárů, můžeme jím podělit a vyjádřit tak u něj stojící vektor pomocí ostatních.

Každá podmnožina lineárně nezávislé množiny M je samozřejmě také lineárně nezávislá (požadujeme stejné podmínky na méně vektorů). Stejně snadno vidíme, že $M \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když každá konečná podmnožina v M je lineárně nezávislá.

2.18

2.27. Generátory a podprostory. Podmnožina $M \subset V$ se nazývá *vektorovým podprostorem* jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme



$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall v, w \in M, a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Rozeberme si hned několik příkladů: Prostor m -tic skalárů \mathbb{R}^m se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad \mathbb{R} , ale také vektorový prostor nad \mathbb{Q} . Např. pro $m = 2$, jsou vektory $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ lineárně nezávislé, protože z

$$a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (0, 0)$$

plyne $a = b = 0$. Dále, vektory $(1, 0), (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad \mathbb{R} , protože $\sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$, ovšem nad \mathbb{Q} jsou lineárně nezávislé! Nad \mathbb{R} tedy tyto dva vektory „generují“ jednorozměrný podprostor, zatímco nad \mathbb{Q} je „větší“.

Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$. Polynomy můžeme chápat jako zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$. Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_\infty[x]$ a $\mathbb{R}_m[x] \subset \mathbb{R}_n[x]$ je vektorový podprostor pro všechna $m \leq n \leq \infty$. Podprostory jsou také např. všechny sudé polynomy nebo liché polynomy, tj. polynomy splňující $f(-x) = \pm f(x)$.

Úplně analogicky jako u polynomů můžeme definovat strukturu vektorového prostoru na množině všech zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nebo všech zobrazení $M \rightarrow V$ libovolné pevně zvolené množiny M do vektorového prostoru V .

Protože podmínka v definici podprostoru obsahuje pouze univerzální kvantifikátory, je jistě průnik podprostorů opět podprostor. Snadno to ověříme i přímo: Nechť $W_i, i \in I$, jsou vektorové podprostory ve V , $a, b \in \mathbb{K}, u, v \in \bigcap_{i \in I} W_i$. Pak pro všechny $i \in I$, $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$, to ale znamená, že $a \cdot u + b \cdot v \in \bigcap_{i \in I} W_i$.



tudíž jsou uvažované vektory lineárně nezávislé. \square

2.48. Určete všechny konstanty $a \in \mathbb{R}$ takové, aby polynomy $ax^2 + x + 2, -2x^2 + ax + 3$ a $x^2 + 2x + a$ byly lineárně závislé (ve vektorovém prostoru $P_3[x]$, polynomů jedné proměnné stupně nejvýše 3 nad reálnými čísly).

Řešení. V bázi $1, x, x^2$ jsou souřadnice zadaných vektorů (polynomů) následující: $(a, 1, 2), (-2, a, 3), (1, 2, a)$. Polynomy budou lineárně závislé, právě když bude mít matice, jejíž řádky jsou tvořeny souřadnicemi zadaných vektorů menší hodnot, než je počet vektorů, v tomto případě tedy hodnot dvě a menší. V případě čtvercové matice nižší hodnot než je počet řádků je ekvivalentní nulovosti determinantu dané matice. Podmínka na a tedy zní

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ -2 & a & 3 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0,$$

tj. a bude kořenem polynomu $a^3 - 6a - 5 = (a + 1)(a^2 - a - 5)$, tj. úloha má tři řešení $a_1 = -1, a_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. \square

2.49. Vektory

$$(1, 2, 1), \quad (-1, 1, 0), \quad (0, 1, 1)$$

jsou lineárně nezávislé, a proto z nich lze sestavit bázi \mathbb{R}^3 . Každý trojrozměrný vektor je tak nějakou jejich lineární kombinací. Jakou jejich lineární kombinací je vektor $(1, 1, 1)$?

2.50. Vyjádřete vektor $(5, 1, 11)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 2, 2), (2, 3, 1), (1, 1, 3)$, tj. nalezněte čísla $p, q, r \in \mathbb{R}$, pro která je

$$(5, 1, 11) = p(3, 2, 2) + q(2, 3, 1) + r(1, 1, 3).$$

2.51. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1, 1, a, 1), (1, b, 1, 1), (c, 1, 1, 1)$ lineárně závislé?

2.52. Nechť je dán vektorový prostor V a nějaká jeho báze složená z vektorů u, v, w, z . Zjistěte, zda jsou vektory

$$u - 3v + z, \quad v - 5w - z, \quad 3w - 7z, \quad u - w + z$$

lineárně (ne)závislé.

2.53. Doplňte vektory $1 - x^2 + x^3, 1 + x^2 + x^3, 1 - x - x^3$ na bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 3.

2.54. Tvoří matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

bázi vektorového prostoru čtvercových dvourozměrných matic?

Řešení. Uvedené čtyři matice jsou jako vektory v prostoru 2×2 matic lineárně nezávislé. Vyplývá to z toho, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je tzv. regulární, což je mimochodem ekvivalentní livovolnému z následujících tvrzení: její hodnost je rovna rozměru; ze z ní pomocí řádkových elementárních transformací obdržíme jednotkovou matici; existuje k ní matice inverzní; má nenulový determinant, roven 116; jí zadaná homogenní soustava lineárních rovnic má pouze nulové řešení; každý nehomogenní lineární systém s levou stranou určenou touto maticí má právě jedno řešení; obor hodnot lineárního zobrazení, jež zadává, je vektorový prostor dimenze 4; toto zobrazení je injektivní). \square

2.55. Uvažme komplexní čísla \mathbb{C} jako reálný vektorový prostor. Určete souřadnice čísla $2+i$ v bázi dané kořeny polynomu x^2+x+1 .

2.56. Uvažme komplexní čísla \mathbb{C} jako reálný vektorový prostor. Určete souřadnice čísla $2+i$ v bázi dané kořeny polynomu x^2-x+1 .

2.57. V \mathbb{R}^3 jsou dány podprostory U a V generované po řadě vektory

$$(1, 1, -3), (1, 2, 2) \quad \text{a} \quad (1, 1, -1), (1, 2, 1), (1, 3, 3) \quad \boxed{2.19}$$

Nalezněte průnik těchto podprostorů.

Řešení. Podprostor V má dimenzi pouze 2 (nejedná se tedy o celý prostor \mathbb{R}^3), neboť

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

a neboť libovolná dvojice z uvažovaných třech vektorů je očividně lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že také podprostor U má dimenzi 2. Současně je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

a proto vektor $(1, 1, -1)$ nemůže náležet do podprostoru U . Průnikem rovin procházejících počátkem (dvojrozměrných podprostorů) v trojrozměrném prostoru musí být alespoň přímka. V našem případě je jím právě přímka (podprostory nejsou totožné). Určili jsme dimenzi průniku – je jednodimenzionální. Všimneme-li si, že

$$1 \cdot (1, 1, -3) + 2 \cdot (1, 2, 2) = (3, 5, 1) = 1 \cdot (1, 1, -1) + 2 \cdot (1, 2, 1),$$

Zejména je tedy podprostorem průnik $\langle M \rangle$ všech podprostorů $W \subset V$, které obsahují předem danou množinu vektorů $M \subset V$.

Říkáme, že množina M generuje podprostor $\langle M \rangle$, nebo že prvky M jsou generátory podprostoru $\langle M \rangle$.

Zformulujeme opět několik jednoduchých tvrzení o generování podprostorů:

Tvrzení. Pro každou neprázdnou podmnožinu $M \subset V$ platí

- (1) $\langle M \rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k; k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \dots, k\}$;
- (2) $M = \langle M \rangle$, právě když M je vektorový podprostor;
- (3) jestliže $N \subset M$, pak $\langle N \rangle \subset \langle M \rangle$ je vektorový podprostor.

Podprostor $\langle \emptyset \rangle$ generovaný prázdnou podmnožinou je triviální podprostor $\{0\} \subset V$.

DŮKAZ. (1) Množina všech lineárních kombinací

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$$

na pravé straně (1) je jistě vektorový podprostor a samozřejmě obsahuje M . Naopak, každá z jednotlivých lineárních kombinací nutně musí být v $\langle M \rangle$ a první tvrzení je dokázáno.

Tvrzení (2) vyplývá okamžitě z (1) a z definice vektorového podprostoru a obdobně je z prvního tvrzení zřejmé i tvrzení třetí.

Konečně, nejmenší vektorový podprostor je $\{0\}$, protože prázdnou množinu obsahují všechny podprostory a každý z nich obsahuje vektor 0 . \square

2.28. Součty podprostorů. Když už máme představu o generátorech a jimi vytvářených podprostorech, měli bychom rozumět i možnostem, jak několik podprostorů může vytvářet celý vektorový prostor V .



SOUČTY PODPROSTORŮ

Nechť $V_i, i \in I$, jsou podprostory ve V . Pak podprostor generovaný jejich sjednocením, tj. $\langle \cup_{i \in I} V_i \rangle$, nazýváme *součtem podprostorů* V_i . Značíme $\sum_{i \in I} V_i$. Zejména pro konečný počet podprostorů $V_1, \dots, V_k \subset V$ píšeme

$$V_1 + \dots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k \rangle.$$

Vidíme, že každý prvek v uvažovaném součtu podprostorů můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z podprostorů V_i . Protože však je sčítání vektorů komutativní, lze k sobě poskládat členy patřící do stejného podprostoru a pro konečný součet k podprostorů tak dostáváme

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{v_1 + \dots + v_k; v_i \in V_i, i = 1, \dots, k\}.$$

Součet $W = V_1 + \dots + V_k \subset V$ se nazývá *přímý součet* podprostorů, jsou-li průniky všech dvojic triviální, tj. $V_i \cap V_j = \{0\}$ pro všechny $i \neq j$. Ukážeme, že v takovém případě

Ize každý vektor $w \in W$ napsat právě jedním způsobem jako součet

$$w = v_1 + \dots + v_k,$$

kde $v_i \in V_i$. Skutečně, pokud by tento vektor šlo zároveň vyjádřit, jako $w = v'_1 + \dots + v'_k$, potom

$$0 = w - w = (v_1 - v'_1) + \dots + (v_k - v'_k).$$

Pokud bude $v_i - v'_i$ první nenulový člen na pravé straně, pak tento vektor z V_i umíme vyjádřit pomocí vektorů z ostatních podprostorů. To je ale ve sporu s předpokladem, že V_i má se všemi ostatními nulový průnik. Jedinou možností tedy je, že všechny vektory na pravé straně jsou nulové a tedy je rozklad w jednoznačný.

Pro přímé součty podprostorů píšeme

$$W = V_1 \oplus \dots \oplus V_k = \bigoplus_{i=1}^k V_i.$$

2.19a

2.29. Báze. Nyní máme vše připravené pro pochopení minimálních množin generátorů tak, jak jsme se s nimi vypořádali v rovině \mathbb{R}^2 .

BÁZE VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá *báze vektorového prostoru* V , jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá.

Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme *konečněrozměrný*, počet prvků báze nazýváme *dimenzí* V . Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je *nekonečněrozměrný*. Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$.



Abychom s takovou definicí dimenze mohli být spokojeni, potřebujeme vědět, že různé báze téhož prostoru budou mít vždy stejný počet prvků. To skutečně brzy dokážeme. Všimněme si hned, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je „prázdnou“ bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

Bázi k -rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako k -tici $\underline{v} = (v_1, \dots, v_k)$ bázevých vektorů. Jde tu především o zavedení konvence: U konečněrozměrných podprostorů budeme totiž vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků i když jsme to takto, striktně vzato, nedefinovali.

Zjevně, je-li (v_1, \dots, v_n) bazí V , je celý prostor V přímým součtem jednorozměrných podprostorů

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle.$$

Okamžitým důsledkem výše odvozené jednoznačnosti rozkladu jakéhokoliv vektoru ve V do komponent v přímém součtu dává jednoznačné vyjádření

$$w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

a dovoluje nám tedy po volbě báze opět vidět vektory jako n -tice skalárů. K tomuto pohledu se vrátíme v zápětí v odstavci 2.33, jak jen dokončíme diskusi existence bazí a součtů podprostorů v obecné poloze.

dostáváme vyjádření hledaného průniku ve tvaru množiny všech skalárních násobků vektoru $(3, 5, 1)$ (jedná se o přímku procházející počátkem s tímto směrovým vektorem). \square

2.58. Stanovte vektorový podprostor (prostoru \mathbb{R}^4) generovaný vektory $u_1 = (-1, 3, -2, 1)$, $u_2 = (2, -1, -1, 2)$, $u_3 = (-4, 7, -3, 0)$, $u_4 = (1, 5, -5, 4)$. vybráním nějaké maximální množiny lineárně nezávislých vektorů u_i (tj. vybráním báze).

Řešení. Sepíšeme vektory u_i do sloupců matice a obdrženou matici upravíme pomocí řádkových elementárních transformací. Takto získáme

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odtud vyplývá, že lineárně nezávislé jsou právě vektory u_1, u_2, u_4 , tj. právě ty vektory odpovídající sloupcům, které obsahují první nenulové číslo nějakého řádku. Navíc odsud plyne (viz třetí sloupec)

$$2 \cdot (-1, 3, -2, 1) - (2, -1, -1, 2) = (-4, 7, -3, 0).$$

\square

G. Lineární zobrazení

Jak popsat analyticky shodná zobrazení v rovině či prostoru jako je rotace, osová symetrie či zrcadlení, nebo projekci třírozměrného prostoru na dvojrozměrné plátno? Jak popsat zvětšení obrázku? Co mají společného? Jsou to všechno lineární zobrazení. Znamená to, že zachovávají jistou strukturu roviny či prostoru. Jakou strukturu? Strukturu vektorového prostoru. Každý bod v rovině je popsán dvěma v prostoru pak třema souřadnicemi. Pokud zvolíme počátek souřadnic, tak má smysl mluvit o tom, že nějaký bod je dvakrát dál od počátku stejným směrem než jiný bod. Také víme, kam se dostaneme, posuneme-li se o nějaký úsek v jistém směru a pak o jiný úsek v jiném směru. Tyto vlastnosti můžeme zformalizovat, hovoříme-li o vektorech v rovině, či prostoru a o jejich násobcích, či součtech. Lineární zobrazení má pak tu vlastnost, že obraz součtu vektorů je součet obrazů sčítaných vektorů a obraz násobku vektoru je ten stejný násobek obrazu násobného vektoru. Tyto vlastnosti právě mají zobrazení zmíněná v úvodu tohoto odstavce. Takové zobrazení je pak jednoznačně určeno tím, jak se chová na vektorech nějaké báze (to je v rovině obrazem dvou vektorů neležících na přímce, v prostoru obrazem tří vektorů neležících v rovině).

A jak tedy zapsat nějaké lineární zobrazení f na vektorovém prostoru V ? Začneme pro jednoduchost s rovinou \mathbb{R}^2 : předpokládejme, že obraz bodu (vektoru) $(1, 0)$ je (a, b) a obraz bodu $(0, 1)$ je (c, d) . Tím už je jednoznačně určený obraz libovolného bodu o souřadnicích (u, v) : $f((u, v)) = f(u(1, 0) + v(0, 1)) = uf(1, 0) + vf(0, 1) = (ua, ub) + (vc, vd) = (au + cv, bu + dv)$, což můžeme výhodně zapsat následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + cv \\ bu + dv \end{pmatrix}$$

Lineární je tedy zobrazení jednoznačně dané maticí. Navíc pokud máme další lineární zobrazení g , dané maticí $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, tak snadno spočítáme (čtenář si jistě ze zájmu sám ověří), že jejich složení $g \circ f$ je dáno maticí $\begin{pmatrix} ae + fc & be + df \\ ag + ch & bg + dh \end{pmatrix}$.

To nás vede k tomu, abychom násobení matic definovali tímto způsobem, tedy aby aplikace zobrazení na vektor byla dána maticovým násobením matice zobrazení se zobrazovaným vektorem a aby složení zobrazení bylo dáno součinem matic jednotlivých zobrazení. Obdobně to funguje v prostorech vyšší dimenze. Zároveň tato úvaha znovu ukazuje to, co již bylo dokázáno v (2.5), totiž že násobení matic je asociativní, ale není komutativní, neboť tomu tak je u skládání zobrazení. To je tedy další z motivací, proč se zabývat vektorovými prostory a proč je s pojmem vektorového

2, 29

2.59. Popište si nejprve některá lineární zobrazení. Začneme několika příklady v prostorech malých dimenzí. Ve standardní bázi \mathbb{R}^2 uvažujme následující matice zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A zadává kolmou projekci podél podprostoru

$$W \subset \{(0, a); a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

na podprostor

$$V \subset \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Evidentně pro toto zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí $f \circ f = f$ a tedy $f|_{\text{Im } f}$ je identické zobrazení. Jádrem f je právě podprostor W .

Matice B má vlastnost $B^2 = 0$, platí tedy totéž o příslušném zobrazení f . Můžeme si jej představit jako matici derivování polynomů $\mathbb{R}_1[x]$ stupně nejvýše jedna v bázi $(1, x)$.

Matice C zadává zobrazení f , které první vektor báze zvětší a -krát, druhý b -krát. Tady se nám tedy celá rovina rozpadá na dva podprostory, které jsou zobrazením f zachovány a ve kterých jde o pouhou *homotetii*, tj. roztážení skalárním násobkem. Např. volba $a = 1$,

2.30. Věta. Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi. Každá báze koeficientně rozměrného prostoru V má přitom stejný počet prvků.

DŮKAZ. První tvrzení ukážeme snadno indukcí přes počet generátorů k .



Jedině nulový podprostor nepotřebuje žádný generátor a tedy umíme vybrat prázdnou bázi. Naopak, nulový vektor vybrat nesmíme (generátory by byly lineárně závislé) a nic jiného už v podprostoru není.

Abychom měli indukční krok přirozenější, probereme ještě přímo případ $k = 1$. Máme $V = \langle \{v\} \rangle$ a $v \neq 0$, protože $\{v\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů. Pak je ovšem $\{v\}$ zároveň báze vektorového prostoru V .

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = n$, a uvažme $V = \langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$. Jsou-li v_1, \dots, v_{n+1} lineárně nezávislé, pak tvoří bázi. V opačném případě existuje index i takový, že

$$v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_{n+1} v_{n+1}.$$

Pak ovšem $V = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1} \rangle$ a již umíme vybrat bázi (podle indukčního předpokladu).

Zbývá ověřit, že báze mají vždy stejný počet prvků. Uvažujme bázi (v_1, \dots, v_n) prostoru V a libovolný nenulový vektor

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V$$

s $a_i \neq 0$ pro jisté i . Pak

$$v_i = \frac{1}{a_i} (u - (a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n))$$

a proto také $\langle u, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = V$.

Ověříme, že je to opět báze: Kdyby přidáním u k lineárně nezávislým vektorům $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ vznikly lineárně závislé vektory, pak by u bylo jejich lineární kombinací. To by znamenalo

$$V = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle,$$

což není možné.

Takže jsme dokázali, že pro libovolný nenulový vektor $u \in V$ existuje i , $1 \leq i \leq n$, takové, že $(u, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ je opět báze V .

Dále budeme místo jednoho vektoru u uvažovat lineárně nezávislou množinu u_1, \dots, u_k a budeme postupně přidávat u_1, u_2, \dots , vždy výměnou za vhodné v_i podle předchozího postupu. Musíme přitom ověřit, že takové v_i vždy bude existovat (tj. že se nebudou vektory u vyměňovat vzájemně). Předpokládejme tedy, že již máme umístěné u_1, \dots, u_ℓ . Pak se $u_{\ell+1}$ jistě vyjádří jako lineární kombinace těchto vektorů a zbylých v_j . Pokud by pouze koeficienty u u_1, \dots, u_ℓ byly nenulové, znamenalo by to, že již samy vektory $u_1, \dots, u_{\ell+1}$ byly lineárně závislé, což je ve sporu s našimi předpoklady.

Pro každé $k \leq n$ tak po k krocích získáme bázi ve které z původní báze došlo k výměně k vektorů za nové. Pokud by $k > n$, pak již v n -tém kroku obdržíme bázi vybranou z

nových vektorů u_i , což znamená, že tyto nemohou být lineárně nezávislé. Zejména tedy není možné, aby dvě báze měly různý počet prvků. \square

Ve skutečnosti jsme dokázali silnější tvrzení, tzv. *Steinitzovu větu o výměně*, která říká, že pro každou konečnou bázi v a každý systém lineárně nezávislých vektorů ve V umíme najít podmnožinu bázevých vektorů v_i , po jejichž záměně za zadané nové vektory opět dostaneme bázi.

2.20a

2.31. Důsledky Steinitzovy věty o výměně. Díky mož-



nosti volně volit a vyměňovat bázevé vektory můžeme okamžitě dovodit pěkné (a intuitivně snad také očekávané) vlastnosti bází vektorových prostorů:

Tvrzení. (1) Každé dvě báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet vektorů, tzn. že naše definice dimenze nezávisí na volbě báze.

(2) Má-li V konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.

(3) Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny.

(4) Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů.

Malinko složitější, ale nyní snadno zvládnutelná, je situace kolem dimenzí podprostorů a jejich součtů:

Důsledek. Necht' $W, W_1, W_2 \subset V$ jsou podprostory v prostoru V konečné dimenze. Pak platí

(1) $\dim W \leq \dim V$,

(2) $V = W$, právě když $\dim V = \dim W$,

(3) $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

DŮKAZ. Zbývá dokázat pouze poslední tvrzení. To je zřejmé, pokud je dimenze jednoho z prostorů nulová. Předpokládejme tedy $\dim W_1 = r \geq 1$, $\dim W_2 = s \geq 1$ a nechť (w_1, \dots, w_r) je báze $W_1 \cap W_2$ (nebo prázdná množina, pokud je průnik triviální).



Podle Steinitzovy věty o výměně lze tuto bázi průniku doplnit na bázi $(w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_r)$ pro W_1 a na bázi $(w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_s)$ pro W_2 . Vektory

$$w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_s$$

jistě generují $W_1 + W_2$. Ukážeme, že jsou přitom lineárně nezávislé. Nechť tedy

$$a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_{r+1} u_{r+1} + \dots + b_r u_r + c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_s v_s = 0.$$

Pak nutně

$$\begin{aligned} & -(c_{r+1} \cdot v_{r+1} + \dots + c_s \cdot v_s) = \\ & = a_1 \cdot w_1 + \dots + a_r \cdot w_r + b_{r+1} \cdot u_{r+1} + \dots + b_r \cdot u_r \end{aligned}$$

$b = -1$ odpovídá komplexní konjugaci $x + iy \mapsto x - iy$ na dvourozměrném reálném prostoru $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ v bázi $(1, i)$. Toto je lineární zobrazení reálného vektorového prostoru, nikoliv však jednorozměrného komplexního prostoru \mathbb{C} . V geometrii roviny jde o zrcadlení podle osy x .

Matrice D je maticí rotace o pravý úhel ve standardní bázi. Jako pro každé lineární zobrazení, které je bijekcí, umíme najít báze na definičním oboru a oboru hodnot, ve kterých bude jeho maticí jednotková matice E (prostě vezmeme jakoukoliv bázi na definičním oboru a její obraz na oboru hodnot). Neumíme ale v tomto případě totéž s jednou bází na začátku i konci. Zkusme však uvažovat matici C jako matici zobrazení $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Pak umíme najít vektory $u = (i, 1)$, $v = (1, i)$, pro které bude platit

$$g(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \cdot u, \quad g(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot v.$$

To ale znamená, že v bázi (u, v) na \mathbb{C}^2 má g matici

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

a povšimněme si, že tato komplexní analogie k případu matice C má na diagonále prvky $\pm a$, $a = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi)$. Jinými slovy, argument v goniometrickém tvaru tohoto komplexního čísla udává úhel otočení. Navíc, můžeme si označit reálnou a imaginární část vektoru u takto

$$u = x_u + iy_u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a zúžení komplexního zobrazení g na reálný vektorový podprostor generovaný vektory x_u a iy_u (tj. násobení komplexní jednotkou i) je právě otočení o úhel $\frac{1}{2}\pi$.

Nyní zkusme přejít do lineárních zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^3 . Jedním z nich je například rotace.

2.60. Nalezněte matici rotace v kladném smyslu o úhel $\pi/3$ kolem přímky procházející počátkem s orientovaným směrovým vektorem $(1, 1, 0)$ ve standardní bázi \mathbb{R}^3 .

Řešení. Uvedené otočení lze získat složením po řadě těchto tří zobrazení:

- rotace o $\pi/4$ v záporném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu x);
- rotace o $\pi/3$ v kladném smyslu podle osy x ;
- rotace o $\pi/4$ v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde na osu rotace).

Matrice výsledné rotace bude součinem matic odpovídajících uvedeným třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení – prvnímu zobrazení odpovídá v součinu

matice nejvíce napravo. Takto dostaneme hledanou matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Uvědomme si, že výslednou rotaci bylo možné získat např. také složením následujících tří zobrazení: 2.21

- rotace o $\pi/4$ v kladném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu y);
- rotace o $\pi/3$ v kladném smyslu podle osy y ;
- rotace o $\pi/4$ v záporném smyslu podle osy z (osa y přejde na osu rotace).

Analogicky tak dostáváme

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.22

2.61. Matice obecné rotace v \mathbb{R}^3 . Ve vedlejším sloupci umí kolega v \mathbb{R}^3 popsat pouze matice rotace kolem souřadnicových os. V tomto sloupci umíme odvodit i matici obecné rotace v \mathbb{R}^3 . Úvahu z předchozího příkladu totiž můžeme provést i s obecnými hodnotami. Uvažme libovolný jednotkový vektor (x, y, z) . Rotace v kladném smyslu o úhel φ kolem tohoto vektoru pak můžeme zapsat jako složení následujících rotací, jejichž matice již známe:

- i) rotace \mathcal{R}_1 v záporném smyslu kolem osy z o úhel s kosinem $x/\sqrt{x^2+y^2} = x/\sqrt{1-z^2}$, tedy sinem $y/\sqrt{1-z^2}$, ve které přejde přímka se směrovým vektorem (x, y, z) na přímku se směrovým vektorem $(0, y, z)$. Matice této rotace je

$$R_1 = \begin{pmatrix} x/\sqrt{1-z^2} & y/\sqrt{1-z^2} & 0 \\ -y/\sqrt{1-z^2} & x/\sqrt{1-z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- ii) rotace \mathcal{R}_2 v kladném smyslu podle osy y o úhel s kosinem $\sqrt{1-z^2}$, tedy sinem z , ve které přejde přímka se směrovým vektorem $(0, y, z)$ na přímku se směrovým vektorem

musí patřit do $W_2 \cap W_1$. To ale má za následek, že

$$b_{t+1} = \dots = b_r = 0,$$

protože tak jsem doplňovali naše báze. Pak ovšem i

$$a_1 \cdot w_1 + \dots + a_t \cdot w_t + c_{t+1} \cdot v_{t+1} + \dots + c_s \cdot v_s = 0$$

a, protože příslušné vektory tvoří bázi W_2 , jsou všechny koeficienty nulové.

Tvrzení (3) nyní vyplývá z přímého přepočítání generátorů. \square

2.32. Příklady. (1) \mathbb{K}^n má (jako vektorový prostor nad \mathbb{K}) dimenzi n . Bazí je např. n -tice vektorů

$$((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)).$$

Tuto bázi nazýváme *standardní báze* v \mathbb{K}^n . Všimněme si, že případě konečného pole skalárů, např. \mathbb{Z}_k , má celý vektorový prostor \mathbb{K}^n jen konečný počet k^n prvků.

(2) \mathbb{C} jako vektorový prostor nad \mathbb{R} má dimenzi 2, bázi tvoří např. čísla 1 a i .

(3) $\mathbb{K}_m[x]$, tj. prostor polynomů stupně nejvýše m , má dimenzi $m+1$, bazí je např. posloupnost $1, x, x^2, \dots, x^m$.

Vektorový prostor všech polynomů $\mathbb{K}[x]$ má dimenzi ∞ , umíme však ještě stále najít bázi (i když s nekonečně mnoha prvky): $1, x, x^2, \dots$.

(4) Vektorový prostor \mathbb{R} nad \mathbb{Q} má dimenzi ∞ a nemá spočetnou bázi.

(5) Vektorový prostor všech zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má také dimenzi ∞ a nemá spočetnou bázi.

2.33. Souřadnice vektorů. Jestliže pevně zvolíme bázi

(v_1, \dots, v_n) konečněrozměrného prostoru V , pak můžeme každý vektor $w \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n$$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Dospěli jsme proto k závěru:

V konečněrozměrném vektorovém prostoru lze každý vektor zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinaci bázevých vektorů. Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $w \in V$ ve zvolené bázi $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ se nazývají *souřadnice vektoru w* v této bázi.

Kdykoliv budeme mluvit o souřadnicích (a_1, \dots, a_n) vektoru w , které vyjadřujeme jako posloupnost, musíme mít pevně zvolenu i posloupnost bázevých vektorů $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Jakkoliv jsme tedy báze zavedli jako minimální množiny generátorů, ve skutečnosti s nimi budeme pracovat

jako s posloupnostmi (tedy s uspořádanými množinami, kde je pevně zadáno pořadí báze prvků).

PŘÍRAZENÍ SOUŘADNIC VEKTORŮM

Přiřazení, které vektoru $u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi \underline{v} , budeme značit stejným symbolem $\underline{v} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$. Má tyto vlastnosti:

- (1) $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w); \forall u, w \in V,$
- (2) $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u); \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$

Všimněme si, že operace na levých a pravých stranách těchto rovnic nejsou totožné, naopak, jde o operace na různých vektorových prostorech! Při této příležitosti se také můžeme zamyslet nad obecným případem báze M (možná nekonečněrozměrného) prostoru V . Báze pak nemusí být spočetná, pořadí ale ještě můžeme definovat zobrazení $\underline{M} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ (tj. souřadnice vektoru jsou zobrazení z M do \mathbb{K}).

Uvedené vlastnosti přiřazení souřadnic jsme viděli už dříve u zobrazení, kterým jsme v geometrii roviny říkali lineární (zachovávaly naši lineární strukturu v rovině). Než se budeme věnovat podrobněji závislosti souřadnic na volbě báze, podíváme se obecněji na pojem linearit y zobrazení.

2.23

2.34. Lineární zobrazení. Pro jakékoliv vektorové prostory (konečné i nekonečné dimenze), definujeme „linearitu“ zobrazení mezi prostory obdobně, jako jsme to viděli již v rovině \mathbb{R}^2 :

DEFINICE LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍ

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů \mathbb{K} . Zobrazení $f : V \rightarrow W$ se nazývá *lineární zobrazení (homomorfismus)* jestliže platí:

- (1) $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V$
- (2) $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$

Samozřejmě, že jsme taková zobrazení již viděli ve formě násobení matic:

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto A \cdot x$$

s maticí typu m/n nad \mathbb{K} .

Obraz $\text{Im } f := f(V) \subset W$ je vždy vektorový podprostor, protože lineární kombinace obrazů $f(u_i)$ je obrazem lineární kombinace vektorů u_i se stejnými koeficienty.

Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\text{Ker } f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$, protože lineární kombinace nulových obrazů bude vždy zase nulovým vektorem. Podprostor $\text{Ker } f$ se nazývá *jádro lineárního zobrazení* f .

Lineární zobrazení, které je bijekcí nazýváme *izomorfismus*.

Podobně jako u abstraktní definice vektorových prostorů, opět je třeba ověřit zdánlivě samozřejmá tvrzení vyplývající z axiomů:

Tvrzení. *Nechť $f : V \rightarrow W$ je lineární zobrazení mezi libovolnými vektorovými prostory nad týmž polem skalárů \mathbb{K} . Pro*

$(1, 0, 0)$. Matice této rotace je

$$R_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & \sqrt{1-z^2} \end{pmatrix},$$

iii) rotace \mathcal{R}_3 v kladném smyslu kolem osy x o úhel φ s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

iv) rotace \mathcal{R}_2^{-1} s maticí R_2^{-1} ,

v) rotace \mathcal{R}_1^{-1} s maticí R_1^{-1} .

Matice složení těchto zobrazení, tedy hledaná matice, je dána součinem matic jednotlivých rotací v opačném pořadí:

(2.1)

$$R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 =$$

(2.2)

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)x^2 & (1 - \cos \varphi)xy - z \sin \varphi & (1 - \cos \varphi)xz + y \sin \varphi \\ yx(1 - \cos \varphi) + z \sin \varphi & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)y^2 & (1 - \cos \varphi)yz - x \sin \varphi \\ zx(1 - \cos \varphi) - y \sin \varphi & (1 - \cos \varphi)zy + x \sin \varphi & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)z^2 \end{pmatrix}$$

2.62. Je dáno lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi následující maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište matici tohoto zobrazení v bázi

$$(f_1, f_2, f_3) = ((1, 1, 0), (-1, 1, 1), (2, 0, 1)).$$

Řešení. Matice přechodu T od báze $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ k standardní bázi, tj. bázi danou vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, získáme podle Tvrzení 2.25 zapsáním souřadnic vektorů f_1, f_2, f_3 ve standardní bázi do sloupců matice přechodu T . Máme tedy

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od standardní báze k bázi \underline{f} je potom

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení v bázi \underline{f} je potom

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & -2 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

□

2.63. Uvažme vektorový prostor mnohočlenů jedné neznámé stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty. V tomto prostoru uvažme bázi $1, x, x^2$. Napište matici zobrazení derivace v této bázi a také v bázi $1 + x^2, x, x + x^2$.

Řešení. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. \square

2.64. Ve standardní bázi v \mathbb{R}^3 určete matici rotace o 90° v kladném smyslu kolem přímky (t, t, t) , $t \in \mathbb{R}$, orientované ve směru vektoru $(1, 1, 1)$. Dále určete matici této rotace v bázi

$$g = ((1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 1)).$$

Řešení. Snadno určíme matici uvažované rotace a to ve vhodné bázi, totiž v bázi dané směrovým vektorem přímky a dále dvěma navzájem kolmými vektory v rovině $x + y + z = 0$, tedy v rovině vektorů kolmých k vektoru $(1, 1, 1)$. Uvědomme si, že matice rotace v kladném smyslu o 90° v nějaké ortonormální bázi v \mathbb{R}^2 je $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, v orto-

gonální s velikostmi vektorů k, l potom $\begin{pmatrix} 0 & -k/l \\ l/k & 0 \end{pmatrix}$. Zvolíme-li v rovině $x + y + z = 0$ kolmé vektory $(1, -1, 0)$ a $(1, 1, -2)$ o velikostech $\sqrt{2}$ a $\sqrt{6}$, tak v bázi $\underline{f} = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, -2))$ má

uvažovaná rotace matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. Abychom získali matici uvažované rotace ve standardní bázi, stačí nám transformovat matici již známým způsobem. Matici přechodu T od báze \underline{f} ke standardní dostaneme zapsáním souřadnic (ve standardní bázi) vektorů báze \underline{f} do

sloupců matice T : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Celkem tedy pro hledanou matici R máme

$$(2.3) \quad R = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$$

$$(2.4) \quad = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 \\ 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 \\ 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Tento výsledek můžeme ověřit dosazením do matice obecné rotace (2.1), normováním vektoru $(1, 1, 1)$ dostáváme vektor $(x, y, z) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\cos(\varphi) = 0$, $\sin(\varphi) = 1$. \square

2.65. Matice obecné rotace podruhé. Zkusme odvodit matici (obecné) rotace (2.1) o úhel φ v kladném smyslu kolem jednotkového vektoru (x, y, z) jiným způsobem než, jsme učinili v [], analogicky jako v předchozím příkladě. V bázi

všechny vektory $u, u_1, \dots, u_k \in V$, a skaláry $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

- (1) $f(0) = 0$,
- (2) $f(-u) = -f(u)$,
- (3) $f(a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k) = a_1 \cdot f(u_1) + \dots + a_k \cdot f(u_k)$,
- (4) pro každý vektorový podprostor $V_1 \subset V$ je jeho obraz $f(V_1)$ vektorový podprostor ve W ,
- (5) pro každý podprostor $W_1 \subset W$ je množina $f^{-1}(W_1) = \{v \in V; f(v) \in W_1\}$ vektorový podprostor ve V .

DŮKAZ. Počítáme s využitím axiomů a definic a již dokázaných výsledků (dohleďte si případně samostatně!):

$$f(0) = f(u - u) = f((1 - 1) \cdot u) = 0 \cdot f(u) = 0,$$

$$f(-u) = f((-1) \cdot u) = (-1) \cdot f(u) = -f(u).$$

Vlastnost (3) se ověří snadno z definičního vztahu pro dva sčítance indukci přes počet sčítanců. Z platnosti (3) nyní plyne, že $\langle f(V_1) \rangle = f(V_1)$, je to tedy vektorový podprostor.

Je-li naopak $f(u) \in W_1$ a $f(v) \in W_1$, pak pro libovolné skaláry bude i $f(a \cdot u + b \cdot v) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v) \in W_1$. \square

2.35. Jednoduché důsledky.

- (1) Složení $g \circ f : V \rightarrow Z$ dvou lineárních zobrazení $f : V \rightarrow W$ a $g : W \rightarrow Z$ je opět lineární zobrazení.
- (2) Lineární zobrazení $f : V \rightarrow W$ je izomorfismus, právě když $\text{Im } f = W$ a $\text{Ker } f = \{0\} \subset V$. Inverzní zobrazení k izomorfismu je opět izomorfismus.
- (3) Pro libovolné podprostory $V_1, V_2 \subset V$ a lineární zobrazení $f : V \rightarrow W$ platí

$$f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2),$$

$$f(V_1 \cap V_2) \subset f(V_1) \cap f(V_2).$$

- (4) Zobrazení „přiřazení souřadnic“ $\underline{u} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ dané libovolně zvolenou bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ vektorového prostoru V je izomorfismus.
- (5) Dva konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.
- (6) Složení dvou izomorfismů je izomorfismus.

DŮKAZ. Ověření prvního tvrzení je velmi snadné cvičení.



Pro důkaz druhého si uvědomme, že je-li f lineární bijekce, pak je vektor w vzorem lineární kombinace $au + bv$, tj. $w = f^{-1}(au + bv)$, právě když

$$f(w) = au + bv = f(a \cdot f^{-1}(u) + b \cdot f^{-1}(v)).$$

Je tedy také $w = af^{-1}(u) + bf^{-1}(v)$ a tedy je inverze k lineární bijekci opět lineární zobrazení.

Dále, f je surjektivní, právě když $\text{Im } f = W$ a pokud $\text{Ker } f = \{0\}$, pak $f(u) = f(v)$ zaručuje $f(u - v) = 0$, tj. $u = v$. Je tedy v tom případě f injektivní.

Další tvrzení se dokáže snadno přímo z definic. Najděte si protipříklad, že v dokazované inkluzi opravdu nemusí nastat rovnost! Zbývající body jsou již zřejmé. \square

2.25

2.36. Opět souřadnice. Uvažujme libovolné vektorové prostory V a W nad \mathbb{K} s $\dim V = n$, $\dim W = m$ a mějme lineární zobrazení $f : V \rightarrow W$. Pro každou volbu bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V , $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ na W , máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic a celou situaci několika právě zmíněných zobrazení zachycuje následující diagram:



$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \underline{u} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \underline{v} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_{\underline{u}, \underline{v}}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Spodní šipka $f_{\underline{u}, \underline{v}}$ je definována zbylými třemi, tj. jako zobrazení jde o složení

$$f_{\underline{u}, \underline{v}} = \underline{v} \circ f \circ \underline{u}^{-1}.$$

MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

Každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na vektorech báze \underline{u} . Označme

$$f(u_1) = a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 + \dots + a_{m1} v_m$$

$$f(u_2) = a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{m2} v_m$$

$$\vdots$$

$$f(u_n) = a_{1n} \cdot v_1 + a_{2n} \cdot v_2 + \dots + a_{mn} v_m$$

tj. skaláry a_{ij} tvoří matici A , kde sloupce jsou souřadnice hodnot $f(u_j)$ zobrazení f na báze vektorů vyjádření v bázi \underline{v} na cílovém prostoru W .

Matici $A = (a_{ij})$ nazýváme *maticí zobrazení* f v bázích $\underline{u}, \underline{v}$.

Pro obecný vektor $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \in V$ spočteme (vzpomeňme, že sčítání vektorů je komutativní a distributivní vůči násobení skaláry)

$$f(u) = x_1 f(u_1) + \dots + x_n f(u_n)$$

$$= x_1 (a_{11} v_1 + \dots + a_{m1} v_m) + \dots + x_n (a_{1n} v_1 + \dots + a_{mn} v_m)$$

$$= (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}) v_1 + \dots + (x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn}) v_m.$$

Pomocí násobení matic lze nyní velice snadno a přehledně zapsat hodnoty zobrazení $f_{\underline{u}, \underline{v}}(w)$ definovaného jednoznačně předchozím diagramem. Připomeňme si, že vektory v \mathbb{K}^r chápeme jako sloupce, tj. matice typu $r/1$

$$f_{\underline{u}, \underline{v}}(\underline{u}(w)) = \underline{v}(f(w)) = A \cdot \underline{u}(w).$$

Naopak, máme-li pevně zvoleny báze na V i W , pak každá volba matice A typu m/n zadává jednoznačně lineární zobrazení $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ a tedy i zobrazení $f : V \rightarrow W$. Máme-li tedy zvoleny báze prostorů V a W , odpovídá každé volbě matice typu m/n právě jedno lineární zobrazení $V \rightarrow W$ a

$f = ((x, y, z), (-y, x, 0), (zx, zy, z^2 - 1))$, tedy v ortogonální bázi tvořené směrovým vektorem osy rotace a dvěma navzájem kolmými vektory o shodných velikostech $\sqrt{1 - z^2}$ ležícími v rovině kolmé na osu, má uvažovaná rotace matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$. Matice přechodu od báze \underline{f} ke standardní bázi je potom $T = \begin{pmatrix} x & -y & zx \\ y & x & zy \\ z & 0 & z^2 - 1 \end{pmatrix}$ s inverzní maticí

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ -\frac{y}{1-z^2} & \frac{x}{1-z^2} & 0 \\ \frac{zx}{1-z^2} & \frac{zy}{1-z^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Celkem pak pro matici R hledané rotace dostáváme

$$R = T \cdot A \cdot T^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)x^2 & (1 - \cos \varphi)xy - z \sin \varphi & (1 - \cos \varphi)xz + y \sin \varphi \\ yx(1 - \cos \varphi) + z \sin \varphi & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)y^2 & (1 - \cos \varphi)yz - x \sin \varphi \\ zx(1 - \cos \varphi) - y \sin \varphi & (1 - \cos \varphi)zy + x \sin \varphi & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)z^2 \end{pmatrix}$$

Při násobení a následném zjednodušování je nutno opakovaně použít předpokladu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Podrobnějším rozbořením vlastností různých typů lineárních zobrazení se nyní dostaneme k pořádnějšímu pochopení nástrojů, které nám vektorové prostory pro lineární modelování procesů a systémů nabízejí.

2.66. Najděte matici zrcadlení vzhledem k rovině $x + y + z = 0$.

Řešení. Z tvaru rovnice roviny zjistíme její jednotkový normálový vektor. V našem případě to je $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Zrcadlení Z na vektoru v lze pak vyjádřit $Zv = v - 2(v \cdot n)n = (1 - 2nn^T)v$ (pro standardní skalární součin je $v \cdot n = vn^T$). Matice zrcadlení je tedy

$$1 - 2nn^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

 \square

Nyní jeden známý, ale velmi pěkný příklad.

2.67. Určete součet úhlů, které v rovině \mathbb{R}^2 svírají s osou x postupně vektory $(1, 1)$, $(2, 1)$ a $(3, 1)$ (obrázek).

Řešení. Uvážíme-li rovinu \mathbb{R}^2 jakožto Gaussovu rovinu komplexních čísel, tak uvedené vektory odpovídají komplexním číslům $1 + i$, $2 + i$ a $3 + i$ a máme najít součet jejich argumentů, tedy podle Moivreovy věty argument jejich součinu. Jejich součin je $(1 + i)(2 + i)(3 + i) = (1 + 3i)(3 + i) = 10i$, tedy ryze imaginární číslo s argumentem $\pi/2$ a tedy hledaný součet je roven právě $\pi/2$. \square

2.68. Uvažme komplexní čísla jako reálný vektorový prostor a za



jeho bázi zvolme 1 a i . V této bázi určete matici následujících lineárních zobrazení:

- konjugace,
- násobení číslem $(2 + i)$.

Určete matici těchto zobrazení v bázi $(1 - i), (1 + i)$.

Řešení.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

b) V obou bazích je matice stejná a to $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Zamyslete se, proč tomu tak je. □

2.69. Určete matici A , která ve standardní bázi prostoru \mathbb{R}^3 zadává kolmou projekci do vektorového podprostoru generovaného vektory $u_1 = (-1, 1, 0)$ a $u_2 = (-1, 0, 1)$.

Řešení. Nejprve poznamenejme, že uvedený podprostor je rovinou procházející počátkem s normálovým vektorem $u_3 = (1, 1, 1)$. Uspořádaná trojice $(1, 1, 1)$ je totiž očividným řešením soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0, \\ -x_1 + x_3 &= 0, \end{aligned}$$

tj. vektor u_3 je kolmý na vektory u_1, u_2 . Podotkněme rovněž, že jsme tento příklad již vyřešili (matici A známe z dřívějšího příkladu).

Při dané projekci se vektory u_1 a u_2 musejí zobrazit na sebe a vektor u_3 potom na nulový vektor. V bázi složené po řadě z vektorů u_1, u_2, u_3 je proto matice této projekce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí matic přechodu

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

od báze (u_1, u_2, u_3) ke standardní bázi a od standardní báze k bázi (u_1, u_2, u_3) získáme □

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ukázali jsme bijekci mezi maticemi příslušného rozměru a lineárními zobrazeními $V \rightarrow W$.

2.37. Matice přechodu mezi souřadnicemi. Jestliže za V



i W zvolíme tentýž prostor, ale s různými bázi, a za f identické zobrazení, vyjadřuje postup z předchozího odstavce vektory báze \underline{u} v souřadnicích vzhledem k \underline{v} . Označme výslednou matici T . Když pak zadáme vektor u

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

v souřadnicích vzhledem k \underline{u} a dosadíme za u_i jejich vyjádření pomocí vektorů z \underline{v} , obdržíme souřadné vyjádření $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ téhož vektoru v bázi \underline{v} . Stačí k tomu přeskádat pořadí sčítanců a vyjádřit skaláry u jednotlivých vektorů báze.

Ve skutečnosti teď děláme totéž, co v předchozím odstavci pro speciální případ identického zobrazení id_V na vektorovém prostoru V . Matice tohoto identického zobrazení je T a tedy nutně musí naznačený příčný výpočet dát $\bar{x} = T \cdot x$. Situace se zobrazuje na diagramu:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{T=(\text{id}_V)_{\underline{u},\underline{v}}} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Výslednou matici T nazýváme *matice přechodu* od báze \underline{u} vektorového prostoru V k bázi \underline{v} téhož prostoru.

Přímo z definice vyplývá:

VÝPOČET MATICE PŘECHODU

Tvrzení. Matici T přechodu od báze \underline{u} k bázi \underline{v} získáme tak, že souřadnice vektorů báze \underline{u} v bázi \underline{v} napíšeme do sloupců matice T .

Funkce matice přechodu je taková, že známe-li souřadnice x vektoru v bázi \underline{u} , pak jeho souřadnice v bázi \underline{v} se obdrží vynásobením sloupce x maticí přechodu (zleva). Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze \underline{v} k bázi \underline{u} .

2.38. Více souřadnic. Nyní si ukážeme, jak se skládají sou-



řadná vyjádření lineárních zobrazení. Uvažme ještě další vektorový prostor Z nad \mathbb{K} dimenze k s bází \underline{w} , lineární zobrazení $g : W \rightarrow Z$ a označme příslušnou matici $g_{\underline{v},\underline{w}}$.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_{\underline{u},\underline{v}}} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{g_{\underline{v},\underline{w}}} & \mathbb{K}^k \end{array}$$

Složení $g \circ f$ na horním řádku odpovídá matici zobrazení $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ dole a přímo spočteme (píšeme A pro matici f a B pro matici g ve zvolených bazích):

$$\begin{aligned} g_{\underline{v}, \underline{w}} \circ f_{\underline{u}, \underline{v}}(x) &= \underline{w} \circ g \circ \underline{v}^{-1} \circ \underline{v} \circ f \circ \underline{u}^{-1} \\ &= B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x = (g \circ f)_{\underline{u}, \underline{w}}(x) \end{aligned}$$

pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Skládání obrazení tedy odpovídá násobení příslušných matic. Všimněte si také, že isomorfismy odpovídají právě invertibilním maticím.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změni matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\text{id}_W} & W \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{T} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_{\underline{u}, \underline{v}}} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{S^{-1}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

kde T je matice přechodu od \underline{u}' k \underline{u} a S je matice přechodu od \underline{v}' k \underline{v} . Je-li tedy A původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.

Ve speciálním případě lineárního zobrazení $f : V \rightarrow V$, tj. zobrazení má stejný prostor V jako definiční obor i obor hodnot, vyjadřujeme zpravidla f pomocí jediné báze \underline{u} prostoru V . Pak tedy přechod k nové bázi \underline{u}' s maticí přechodu T od \underline{u}' k \underline{u} bude znamenat změnu matice zobrazení na $A' = T^{-1}AT$.

2.27

2.39. Lineární formy. Obzvláště jednoduchým a zároveň



důležitým případem lineárních zobrazení jsou tzv. *lineární formy*. Jde o lineární zobrazení z vektorového prostoru V nad polem skalárů \mathbb{K} do skalárů \mathbb{K} . Jsou-li dány souřadnice na V , je přiřazení jednotlivé i -té souřadnice vektorům právě takovou lineární formou. Přesněji řečeno, pro každou volbu báze $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ máme k dispozici lineární formy $v_i^* : V \rightarrow \mathbb{K}$ takové, že $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, tj. nula pro různé indexy i a j a jednička pro stejné.

Vektorový prostor všech lineárních forem na V značíme V^* a říkáme mu *duální prostor* vektorovému prostoru V . Předpokládejme nyní, že prostor V má konečnou dimenzi n . Bázi V^* sestavenou z přiřazování jednotlivých souřadnic jako výše nazýváme *duální báze*. Skutečně se jedná o bázi prostoru V^* , protože jsou tyto formy zjevně lineárně nezávislé (prověřte si!) a je-li α libovolná forma, pak platí pro každý vektor $u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= x_1 \alpha(v_1) + \dots + x_n \alpha(v_n) \\ &= \alpha(v_1) v_1^*(u) + \dots + \alpha(v_n) v_n^*(u) \end{aligned}$$

a je tedy α lineární kombinací forem v_i^* .

Při pevně zvolené bázi $\{1\}$ na jednorozměrném prostoru skalárů \mathbb{K} jsou s každou volbou báze \underline{v} na V lineární formy α ztotožněny s maticemi typu $1/n$, tj. s řádky y . Právě komponenty těchto řádků jsou souřadnicemi obecných lineárních forem v duální bázi \underline{v}^* . Vyčíslení takové formy na vektoru je

2.70. Napište matici zobrazení kolmé projekce do roviny procházející počátkem a kolmé na vektor $(1, 1, 1)$.

Řešení. Obraz libovolného bodu (vektoru) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ v uvažovaném zobrazení získáme tak, že od daného bodu odečteme jeho kolmou projekci do normálového směru dané roviny, tedy do směru $(1, 1, 1)$. Tato projekce \mathbf{p} je dána (viz přednáška) jako

$$\frac{(\mathbf{x}, (1, 1, 1))}{|(1, 1, 1)|^2} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right).$$

Výsledné zobrazení je tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{p} &= \left(\frac{2x_1}{3} - \frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{2x_2}{3} - \frac{x_1 + x_3}{3}, \frac{2x_3}{3} - \frac{x_1 + x_2}{3} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

2.71. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 určete matici kolmé projekce na rovinu $x + y - 2z = 0$.

2.72. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 určete matici kolmé projekce na rovinu $2x - y + 2z = 0$.

H. Vlastní čísla a vlastní vektory

2.73. Vlastní čísla a vlastní vektory mohou sloužit k názornému popisu lineárních zobrazení, zejména v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 . (1) Uvažme zobrazení s maticí ve standardní bázi

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak dostáváme

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1,$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$. Vlastní vektory s vlastní hodnotou $\lambda = 1$ se spočtou:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

s bázi prostoru řešení, tj. všech vlastních vektorů s touto vlastní hodnotou

$$u_1 = (0, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1).$$

Podobně pro $\lambda = -1$ dostáváme třetí nezávislý vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = (-1, 0, 1).$$

V bázi u_1, u_2, u_3 (všimněte si, že u_3 musí být lineárně nezávislý na zbylých dvou díky předchozí větě a u_1, u_2 vyšly jako dvě nezávislá řešení) má f diagonální matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Celý prostor \mathbb{R}^3 je přímým součtem vlastních podprostorů, $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$. Tento rozklad je dán jednoznačně a vypovídá mnoho o geometrických vlastnostech zobrazení f . Vlastní podprostor V_1 je navíc přímým součtem jednorozměrných vlastních podprostorů, které lze však zvolit mnoha různými způsoby (takový další rozklad nemá tedy již žádný geometrický význam).

(2) Uvažme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definované derivováním polynomů, tj. $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x$. Zobrazení f má tedy v obvyklé bázi $(1, x, x^2)$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $|A - \lambda \cdot E| = -\lambda^3$, existuje tedy pouze jediná vlastní hodnota, $\lambda = 0$. Spočtete vlastní vektory: 2.28

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prostor vlastních vektorů je tedy jednorozměrný, generovaný konstantním polynomem 1.

2.74. Příklad i se změnou báze. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Popište toto zobrazení a napište jeho matici v bázi:

$$\begin{aligned} e_1 &= [1, -1, 1] \\ e_2 &= [1, 2, 0] \\ e_3 &= [0, 1, 1] \end{aligned}$$

Řešení. Charakteristický polynom dané matice je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2).$$

Kořeny tohoto polynomu, vlastní čísla, udávají, kdy nebude mít matice

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

pak dáno vynásobením příslušného řádkového vektoru y se sloupcem souřadnic x vektoru $u \in V$ v bázi \underline{v} :

$$\alpha(u) = y \cdot x = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n.$$

Zejména tedy vidíme, že pro každý konečněrozměrný prostor V je V^* izomorfní prostoru V . Realizace takového izomorfismu je dána např. naší volbou duální báze ke zvolené bázi na prostoru V .

V tomto kontextu tedy znovu potkáváme skalární součin řádku n skalárů se sloupcem n skalárů, jak jsme s ním pracovali již v odstavci 2.3 na straně 74.

U nekonečně rozměrného prostoru se věci mají jinak.



Např. už nejjednodušší příklad prostoru všech polynomů $\mathbb{K}[x]$ v jedné proměnné je vektorovým prostorem se spočetnou bází s prvky $v_i = x^i$ a stejně jako výše můžeme definovat lineárně nezávislé formy v_i^* . Jakýkoliv formální nekonečný součet $\sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i^*$ je nyní dobře definovanou lineární formou na $\mathbb{K}[x]$, protože bude vyčíslován vždy pouze na konečné lineární kombinaci bázevých polynomů x^i , $i = 0, 1, 2, \dots$

Spočetná množina všech v_i^* tedy není bází. Ve skutečnosti lze ukázat, že tento duální prostor ani spočetnou bází mít nemůže.

2.40. Velikost vektorů a skalární součin. V úvahách o geometrii roviny \mathbb{R}^2 jsme již v první kapitole v odstavci 1.29 pracovali nejen s bázemi a lineárními zobrazeními, ale také s velikostí vektorů a jejich úhly. Pro zavedení těchto pojmů jsme také použili skalárního součinu dvou vektorů $v = (x, y)$ a $v' = (x', y')$ ve tvaru $u \cdot v = xx' + yy'$. Skutečně, souřadné vyjádření pro velikost $v = (x, y)$ je dáno



$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{v \cdot v}$, zatímco (orientovaný) úhel φ dvou vektorů $v = (x, y)$ a $v' = (x', y')$ je v rovinné geometrii dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{xx' + yy'}{\|v\| \|v'\|}.$$

Povšimněte si, že tento skalární součin je lineární v každém ze svých argumentů, značíme jej $u \cdot v$ nebo $\langle v, v' \rangle$. Takto definovaný skalární součin je také symetrický ve svých argumentech a samozřejmě platí, že $\|v\| = 0$, právě když $v = 0$. Z našich úvah je také vidět, že v Euklidovské rovině jsou dva vektory kolmé, právě když je jejich skalární součin nulový.

V případě reálného vektorového prostoru jakékoliv dimenze budeme hledat obdobný postup, protože koncept úhlu dvou vektorů je samozřejmě vždy dvourozměrný (jistě chceme, aby úhel byl stejný v dvourozměrném podprostoru obsahujícím u a v jako úhel v celém prostoru). Budeme v několika dalších odstavcích uvažovat pouze konečněrozměrné vektorové prostory nad reálnými skaláry \mathbb{R} .

SKALÁRNÍ SOUČIN A KOLMOST

Skalární součin na vektorovém prostoru V nad reálnými čísly je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, které je symetrické ve svých argumentech, lineární v každém z nich a takové, že $\langle v, v \rangle \geq 0$ a $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 0$ pouze při $v = 0$.

Číslu $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ říkáme velikost vektoru v .

Vektory v a $w \in V$ se nazývají *ortogonální* nebo *kolmé*, jestliže $\langle v, w \rangle = 0$. Píšeme také $v \perp w$. Vektor v se nazývá *normovaný*, jestliže $\|v\| = 1$.

Báze prostoru V složená z ortogonálních vektorů se nazývá *ortogonální báze*. Jsou-li bázevé vektory navíc i normované, je to *ortonormální báze*.

Skalární součin se také často zapisuje pomocí obvyklé tečky, tj. $\langle u, v \rangle = u \cdot v$. Z kontextu je pak třeba poznat, zda jde o součin dvou vektorů (tedy výsledkem je skalár) nebo něco jiného (stejně jsme značili součin matic a také někdy součin skalárů).

Protože je skalární součin lineární v každém ze svých argumentů, bude jistě úplně určen již svými hodnotami na dvojicích bázevých vektorů. Skutečně, zvolme si bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ prostoru V a označme

$$s_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle.$$

Pak ze symetričnosti skalárního součinu plyne $s_{ij} = s_{ji}$ a z linearity součinu v každém z argumentů dostáváme:

$$\left\langle \sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j \right\rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i,j} s_{ij} x_i y_j.$$

Pokud je báze ortonormální, je matice S jednotkovou maticí. Tím jsme dokázali následující užitečné tvrzení:

SKALÁRNÍ SOUČIN A ORTONORMÁLNÍ BÁZE

Tvrzení. Skalární součin je v každé ortonormální bázi dán v souřadnicích výrazem

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y.$$

Pro každou obecnou bázi prostoru V existuje symetrická matice S taková, že souřadně vyjádření skalárního součinu je

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot S \cdot y.$$

2.33b

2.41. Ortogonální doplňky a projekce. Pro každý pevně zvolený podprostor $W \subset V$ v prostoru se skalárním součinem definujeme jeho *ortogonální doplněk* takto

$$W^\perp = \{u \in V; u \perp v \text{ pro všechny } v \in W\}.$$

Přímo z definice je zjevné, že W^\perp je vektorový podprostor. Jestliže $W \subset V$ má bázi (u_1, \dots, u_k) , je podmínka pro W^\perp dána jako k homogenních rovnic pro n proměnných. Bude tedy mít W^\perp dimenzi alespoň $n-k$. Zároveň ale $u \in W \cap W^\perp$

plnou hodnotu, tedy soustava rovnic

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

bude mít i jiné řešení než řešení $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$. Vlastní čísla tedy jsou $0, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$. Spočítejme vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním hodnotám:

- 0: Řešíme tedy soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Její řešení je jednodimenzionální vektorový prostor vlastních vektorů $\langle (1, -1, 1) \rangle$.

- $2 + \sqrt{2}$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -(1 + \sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & -(1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Řešením je jednodimenzionální prostor $\langle (1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \rangle$.

- $2 - \sqrt{2}$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} (\sqrt{2} - 1) & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & (\sqrt{2} - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Řešením je prostor vlastních vektorů $\langle (1, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}) \rangle$.

Daná matice má vlastní čísla $0, 2 + \sqrt{2}$ a $2 - \sqrt{2}$, kterým přísluší po řadě jednorozměrné prostory vlastních vektorů $\langle (1, -1, 1) \rangle, \langle (1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \rangle$ a $\langle (1, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}) \rangle$.

Zobrazení tedy můžeme interpretovat jako projekci podél vektoru $(1, -1, 1)$ do roviny dané vektory $(1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ a $(1, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ složenou s lineárním zobrazením daným „natažením“ daným vlastními čísly ve směru uvedených vlastních vektorů.

Nyní jej vyjádříme v uvedené bázi. K tomu budeme potřebovat matici přechodu T od standardní báze k dané nové bázi. Tu získáme tak, že souřadnice vektorů staré báze v bázi nové napíšeme do sloupců matice T . My však snadněji zapíšeme matici přechodu od dané báze k bázi standardní, tedy matici T^{-1} . Souřadnice vektorů nové báze pouze zapíšeme do sloupců:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$T = T^{-1^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

a pro matici B zobrazení v nové bázi pak máme (viz 2.38)

$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 14 & 6 \end{pmatrix}.$$

□

2.75. Naleznete vlastní čísla a jim příslušné vektorové prostory vlastních vektorů matice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

2.76. Určete charakteristický polynom $|A - \lambda E|$, vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.77. Stanovte vlastní hodnoty matice

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.78. Udejte příklad čtyřrozměrné matice s vlastními čísly $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ a $\lambda_4 = 7$ takové, aby násobnost λ_2 jako kořene charakteristického polynomu byla 3 a aby

- (a) dimenze podprostoru vlastních vektorů λ_2 byla 3;
- (b) dimenze podprostoru vlastních vektorů λ_2 byla 2;
- (c) dimenze podprostoru vlastních vektorů λ_2 byla 1.

2.79. Víte-li, že čísla 1, -1 jsou vlastní hodnoty matice

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -21 & 11 & 8 & 2 \\ -9 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

uvedte v echna ře ení charakteristické rovnice $|A - \lambda E| = 0$. Ná-pověďa: Označíme-li kořeny polynomu $|A - \lambda E|$ jako $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, je

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4, \quad \text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4.$$

2.80. Pro libovolnou $n \times n$ matici A je její charakteristický poly-nom $|A - \lambda E|$ stupně n , je tedy tvaru

$$|A - \lambda E| = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

přičem platí

$$c_n = (-1)^n, \quad c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr } A, \quad c_0 = |A|.$$

Jestliže je matice A trojrozměrná, obdržíme

$$|A - \lambda E| = -\lambda^3 + (\text{tr } A) \lambda^2 + c_1 \lambda + |A|.$$

znamená $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$ podle definice skalárního součinu. Zřejmě je tedy vždy celý prostor V přímým součtem

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Lineární zobrazení $f : V \rightarrow V$ na libovolném vektoro-vém prostoru se nazývá *projekce*, jestliže platí

$$f \circ f = f.$$

V takovém případě je pro každý vektor $v \in V$

$$v = f(v) + (v - f(v)) \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = V$$

a je-li $v \in \text{Im}(f)$ a $f(v) = 0$, pak je $v = 0$. Je tedy pře-chozí součet podprostorů přímý. Říkáme, že f je projekce na podprostor $W = \text{Im}(f)$ podél podprostoru $U = \text{Ker}(f)$. Slovy se dá projekce popsat přirozeně takto: rozložíme daný vektor na komponentu ve W a v U a tu druhou zapomeneme.

Je-li na V navíc skalární součin, říkáme že jde o kol-mou projekci, když je jádro kolmé na obraz. Každý podprostor $W \neq V$ tedy definuje *kolmou projekci* na W . Je to projekce na W podél W^\perp , která je dána pomocí jednozna-čného rozkladu každého vektoru u na komponenty $u_W \in W$ a $u_{W^\perp} \in W^\perp$, tj. lineární zobrazení, které $u_W + u_{W^\perp}$ zobrazí na u_W .

2.42. Existence ortonormální báze. Povšimněme si, že



na každém konečněrozměrném reálném vektoro-vém prostoru jistě existují skalární součiny. Prostě si stačí vybrat libovolnou bázi, prohlásit ji za ortonormální a hned jeden dobře definovaný skalární součin máme. V této bázi pak skalární součiny počítáme podle vzorce v Tvzení 2.40.

Umíme to ale i naopak. Máme-li zadán skalární součin na vektorovém prostoru V , můžeme vcelku jednoduše početně využít vhodných kolmých projekcí a jakoukoliv zvolenou bázi upravit na ortonormální. Jde o tzv. *Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces*. Cílem této procedury bude z dané posloupnosti nenulových generátorů v_1, \dots, v_k konečněrozměrného prostoru V vytvořit ortogonální množinu nenulových generátorů pro V .

GRAMMOVA-SCHMIDTOVA ORTOGONALIZACE

Tvrzení. *Necht' (u_1, \dots, u_k) je lineárně nezávislá k -tice vektorů prostoru V se skalárním součinem. Pak existuje ortogonální systém vektorů (v_1, \dots, v_k) takový, že $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$. Získáme je následující procedu-rou:*

- *Nezávislost vektorů u_i zaručuje, že $u_1 \neq 0$; zvolíme $v_1 = u_1$.*
- *Máme-li již vektory v_1, \dots, v_ℓ potřebných vlastností, zvolíme $v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell$, kde $a_i = -\frac{\langle u_{\ell+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$.*

DŮKAZ. Začneme prvním (nenulovým) vektorem v_1 a spočteme kolmou projekci v_2 do

$$\langle v_1 \rangle^\perp \subset \langle \{v_1, v_2\} \rangle.$$

Výsledek bude nenulový právě, když je v_2 nezávislé na v_1 . Ve všech dalších krocích budeme postupovat obdobně.

V ℓ -tém kroku tedy chceme, aby pro $v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell$ platilo $\langle v_{\ell+1}, v_i \rangle = 0$, pro všechny $i = 1, \dots, \ell$. Odtud plyne

$$0 = \langle u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell, v_i \rangle = \langle u_{\ell+1}, v_i \rangle + a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

a je vidět, že vektory s požadovanými vlastnostmi jsou určeny jednoznačně až na násobek. \square

Kdykoliv máme ortogonální bázi vektorového prostoru V , stačí vektory vynormovat a získáme bázi ortonormální. Dokázali jsme proto:

Důsledek. Na každém konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

V ortonormální bázi se obzvlášť snadno spočtou souřadnice a kolmé projekce. Skutečně, mějme ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) prostoru V . Pak každý vektor $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ splňuje

$$\langle e_i, v \rangle = \langle e_i, x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \rangle = x_i$$

a platí tedy vždy

$$\boxed{e2.2} \quad (2.3) \quad v = \langle e_1, v \rangle e_1 + \dots + \langle e_n, v \rangle e_n.$$

Pokud máme zadán podprostor $W \subset V$ a jeho ortonormální bázi (e_1, \dots, e_k) , jde ji jistě doplnit na ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) celého V . Kolmá projekce obecného vektoru $v \in V$ do W pak bude dána vztahem

$$v \mapsto \langle e_1, v \rangle e_1 + \dots + \langle e_n, v \rangle e_k.$$

Pro kolmou projekci nám tedy stačí znát jen ortonormální bázi podprostoru W , na nějž promítáme.

Povšimněme si také, že obecně jsou projekce f na podprostor W podél U a projekce g na U podél W svázaný vztahem $g = \text{id}_V - f$. Je tedy u kolmých projekcí na daný podprostor W vždy výhodnější počítat ortonormální bázi toho z dvojice W, W^\perp , který má menší dimenzi.

Uvědomme si také, že existence ortonormální báze nám zaručuje, že pro každý reálný prostor V dimenze n se skalárním součinem existuje lineární zobrazení, které je izomorfismem mezi V a prostorem \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem. Podrobně to bylo ukázáno již ve Tvzení 2.40, kde jsme ukázali, že hledaným izomorfismem je právě přiřazení souřadnic. Řečeno volnými slovy – v ortonormální bázi se skalární součin pomocí souřadnic počítá stejnou formulí jako standardní skalární součin v \mathbb{R}^n .

K otázkám velikosti vektorů a projekcím se vrátíme ještě v příští kapitole v obecnějších souvislostech.

Volbou $\lambda = 1$ dostáváme

$$|A - E| = -1 + \text{tr } A + c_1 + |A|.$$

Odsud získáváme vyjádření

$$|A - \lambda E| = -\lambda^3 + (\text{tr } A) \lambda^2 + (|A - E| + 1 - \text{tr } A - |A|) \lambda + |A|.$$

Využijte toto vyjádření k určení charakteristického polynomu a vlastních hodnot matice

$$A = \begin{pmatrix} 32 & -67 & 47 \\ 7 & -14 & 13 \\ -7 & 15 & -6 \end{pmatrix}.$$

2.81. Vypočítejte A^5 a A^{-3} , je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.82. Bez počítání napište spektrum lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaného přiřazením $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_3, x_2, x_1 + x_3)$.

2.83. Pauliho matice. Ve fyzice se stav částice se spinem $\frac{1}{2}$ popisuje Pauliho maticemi. Jsou to následující matice 2×2 nad komplexními čísly

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ukažte, že pro komutátor matic (značený hranatými závorkami) platí $[\sigma_1, \sigma_2] := \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i\sigma_3$ a podobně $[\sigma_1, \sigma_3] = 2i\sigma_2$ a $[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$. Dále ukažte, že $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$ a vlastní hodnoty matic jsou ± 1 .

Ukažte, že pro matice popisující stav částice se spinem 1

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

platí stejné komutační relace jako v případě Pauliho matic.

Řešení. Označme $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I := i\sigma_3$, $J := i\sigma_2$, $K := i\sigma_1$. Ukažte, že I, J, K tvoří algebru kvaternionů, tj. $I^2 = J^2 = K^2 = -I$ a $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$ a $KI = -IK = J$. \square

2.84. Uveďte dimenze vlastních podprostorů jednotlivých vlastních hodnot λ_i matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.85. Lze vyjádřit matici

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

ve tvaru součinu $B = P^{-1} \cdot D \cdot P$ pro nějakou diagonální matici D a invertibilní matici P ? Pokud je to možné, udejte příklad takové dvojice matic D , P a zjistěte, kolik takových dvojic existuje.

2.86. Určete, jaké lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadává matice

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Dvojnásobná vlastní hodnota -1 , příslušné vlastní vektory $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, jednonásobná vlastní hodnota 0 , vlastní vektor $(1, 4, -3)$. Osová souměrnost podle přímky dané posledním vektorem složená s projekcí na rovinu kolmou k poslednímu vektoru, tedy danou obecnou rovnicí $x + 4y - 3z = 0$.

I. Báze a skalární součiny

2.87. Pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu získáte ortogonální bázi podprostoru

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

prostoru \mathbb{R}^4 .

Řešení. Množina řešení uvedené homogenní lineární rovnice je zřejmě vektorovým prostorem s bází

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory ortogonální báze získané užitím Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu budeme značit v_1, v_2, v_3 . Nejprve položíme $v_1 = u_1$. Dále

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2^T \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 = u_2 - \frac{1}{2} v_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)^T,$$

resp. zvolme násobek $v_2 = (-1, -1, 2, 0)^T$. Následně je

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{u_3^T \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{u_3^T \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 = u_3 - \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{6} v_2 = \\ &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T. \end{aligned}$$

Máme tedy celkem

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.43. Úhel dvou vektorů. Jak jsme již zmínili, úhel dvou lineárně nezávislých vektorů musí být stejný, když je budeme uvažovat v dvourozměrném podprostoru, který generují, nebo v okolním prostoru větším. Ve své podstatě je proto pojem úhlu dvou vektorů nezávislý na dimenzi okolního prostoru a pokud si zvolíme ortonormální bázi, jejíž první dva vektory budou generovat tentýž podprostor jako dané vektory u a v , můžeme doslova převzít definici z rovinné geometrie. I bez volby báze tedy musí platit:

ÚHEL DVOU VEKTORŮ

Úhel φ dvou vektorů v a w ve vektorovém prostoru se skalárním součinem je dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Takto definovaný úhel nezávisí na uvažovaném pořadí vektorů v, w a je v intervalu $0 \leq \varphi \leq \pi$.

K problematice skalárních součinů a úhlů vektorů se vrátíme v dalších kapitolách.

2.44. Multilineární formy. Skalární součin byl dán jako zobrazení ze součinu dvou kopií vektorového prostoru V do prostoru skalárů, které bylo lineární v každém ze svých argumentů. Podobně budeme pracovat i se zobrazeními ze součinu k kopií vektorového prostoru V do skalárů, která jsou lineární v každém ze svých k argumentů. Hovoříme o k -lineárních formách.

Nejčastěji se budeme setkávat s *bilineárními formami*, tj. případem $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, kde pro jakékoliv vektory u, v, w, z a skaláry a, b, c a d platí, stejně jako u skalárního součinu

$$\begin{aligned} \alpha(au + bv, cw + dz) &= ac \alpha(u, w) + ad \alpha(u, z) \\ &\quad + bc \alpha(v, w) + bd \alpha(v, z). \end{aligned}$$

Pokud navíc platí

$$\alpha(u, w) = \alpha(w, u),$$

hovoříme o *symetrické bilineární formě*. Jestliže záměna argumentů vede k obrácení znaménka výsledku, hovoříme o *antisymetrické bilineární formě*.

Již v rovinné geometrii jsme zavedli determinant jako bilineární antisymetrickou formu α , tj. $\alpha(u, w) = -\alpha(w, u)$. Obecně víme z věty 2.17, že je determinant v dimenzi n možno nahlížet jako n -lineární antisymetrickou formu.

Jako u lineárních zobrazení je zřejmé, že každá k -lineární forma je úplně určena svými hodnotami na všech k -tícih bázových prvků v pevné bázi. V analogii k lineárním zobrazením tyto hodnoty můžeme vnímat jako k -rozměrné analogie matic. Ukážeme si to v případě $k = 2$, kde půjde doopravdy o matice, jak jsme je zavedli.

MATICE BILINEÁRNÍ FORMY

Jestliže zvolíme bázi u na V a definujeme pro danou bilineární formu α skaláry $a_{ij} = \alpha(u_i, u_j)$, pak zjevně dostaneme pro vektory v, w se souřadnicemi x a y (jakožto sloupce souřadnic)

$$\alpha(v, w) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j = y^T \cdot A \cdot x,$$

kde A je matice $A = (a_{ij})$.

Přímo z definice matice bilinerární formy je vidět, že forma je symetrická nebo antisymetrická, právě když má tutéž vlastnost její matice.

Každá bilineární forma α na vektorovém prostoru V definuje zobrazení $V \rightarrow V^*$, $v \mapsto \alpha(\cdot, v)$, tj. dosazením pevného vektoru v za druhý argument dostáváme lineární formu, která je obrazem tohoto vektoru. Zvolíme-li pevně bázi na konečněrozměrném prostoru V a duální bázi na V^* , pak jde o zobrazení

$$y \mapsto (x \mapsto y^T \cdot A \cdot x).$$

4. Vlastnosti lineárních zobrazení

Podrobnějším rozбором vlastností různých typů lineárních zobrazení se nyní dostaneme k lepšímu pochopení nástrojů, které nám vektorové prostory pro lineární modelování procesů a systémů nabízejí.

2.29

2.45. Začneme čtyřmi příklady v nejnižší zajímavé dimenzi. Ve standardní bázi roviny \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem uvažujme následující matice zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A zadává kolmou projekci podél podprostoru

$$W \subset \{(0, a); a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

na podprostor

$$V \subset \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

tj. projekce na osu x podél osy y . Evidentně pro toto zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí $f \circ f = f$ a tedy zúžení $f|_V$ daného zobrazení na obor hodnot je identické zobrazení. Jádrem f je právě podprostor W .

Matice B má vlastnost $B^2 = 0$, platí tedy totéž o příslušném zobrazení f . Můžeme si jej představit jako matici derivování polynomů $\mathbb{R}_1[x]$ stupně nejvýše jedna v bázi $(1, x)$ (derivacemi se budeme podrobně zabývat v kapitole páté, viz ??).

Matice C zadává zobrazení f , které první vektor báze zvětší a -krát, druhý b -krát. Tady se nám tedy celá rovina

Dodejme, že pro jednoduchost příkladu lze bezprostředně uvést ortogonální bázi z vektorů

$$(1, -1, 0, 0)^T, \quad (0, 0, 1, -1)^T, \quad (1, 1, -1, -1)^T$$

nebo

$$(-1, 1, 1, -1)^T, \quad (1, -1, 1, -1)^T, \quad (-1, -1, 1, 1)^T.$$

□

2.88. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 jsou dány trojrozměrné podprostory

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \quad V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,$$

přičemž

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$v_3 = (1, -1, -1, 1)^T$. Určete dimenzi a libovolnou bázi podprostoru $U \cap V$.

Řešení. Do podprostoru $U \cap V$ náležejí právě ty vektory, které je možné obdržet jako lineární kombinaci vektorů u_i a také jako lineární kombinaci vektorů v_i . Hledáme tedy čísla $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ taková, aby platilo

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tj. hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 + y_2 + y_3, \\ x_1 + x_2 &= y_1 - y_2 - y_3, \\ x_1 + x_3 &= -y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 + x_3 &= -y_1 - y_2 + y_3. \end{aligned}$$

Při maticovém zápisu této homogenní soustavy (a při zachování pořadí proměnných) je

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak řešení

$$x_1 = -2t, x_2 = -2s, x_3 = 2s + 2t, y_1 = -s - t, y_2 = s, y_3 = t,$$

$t, s \in \mathbb{R}$. Odtud dosazením získáváme obecný vektor průniku

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t - 2s \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že

$$\dim U \cap V = 2, \quad U \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2.89. Uvedte nějakou bázi podprostoru

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vektorového prostoru reálných matic 3×2 . Tuto bázi doplňte na bázi celého prostoru.

Řešení. Připomeňme, že bázi podprostoru tvoří množina lineárně nezávislých vektorů, které generují uvažovaný podprostor. Protože

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

celý podprostor U je generován pouze prvními dvěma maticemi. Ty jsou potom lineárně nezávislé (jedna není násobkem druhé), a tak zadávají bázi. Chceme-li ji doplnit na bázi celého prostoru reálných matic 3×2 , musíme najít další čtyři matice (dimenze celého prostoru je zjevně 6) takové, aby výsledná šestice byla lineárně nezávislá. Můžeme využít toho, že známe např. standardní bázi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

prostoru reálných matic 3×2 , který lze přímo ztotožnit s \mathbb{R}^6 . Sepíšeme-li dva vektory báze U a vektory standardní báze celého prostoru v tomto pořadí, výběrem prvních 6 lineárně nezávislých

rozpadá na dva podprostory, které jsou zobrazením f zachovány a ve kterých jde o pouhou *homotetii*, tj. roztažení skalárním násobkem (první příklad byl speciální případem $s = 1, b = 0$). Např. volba $a = 1, b = -1$ odpovídá osové symetrii (zrcadlení) podle osy x , což je totéž jako komplexní konjugace $x + iy \mapsto x - iy$ na dvourozměrném reálném prostoru $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ v bázi $(1, i)$. Toto je lineární zobrazení dvourozměrného reálného vektorového prostoru \mathbb{C} , nikoliv však jedno-rozměrného komplexního prostoru \mathbb{C} .

Matice D je maticí rotace o pravý úhel ve standardní bázi a na první pohled je vidět, že žádný jednorozměrný podprostor není zobrazením zachováván.

Taková rotace je bijekcí roviny na sebe, proto jistě umíme najít (různé) báze na definičním oboru a oboru hodnot, ve kterých bude jeho maticí jednotková matice E (prostě vezmeme jakoukoliv bázi na definičním oboru a její obraz na oboru hodnot). Neumíme ale v tomto případě totéž s jednou bází na definičním oboru i oboru hodnot.

Zkusme však uvažovat matici D jako matici zobrazení $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ve standardní bázi komplexního vektorového prostoru \mathbb{C}^2 . Pak umíme najít vektory $u = (i, 1), v = (-i, 1)$, pro které bude platit



$$g(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i \cdot u,$$

$$g(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix} = -i \cdot v.$$

To ale znamená, že v bázi (u, v) na \mathbb{C}^2 má zobrazení g matici

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

a povšimněme si, že tato komplexní analogie k případu matice C má na diagonále prvky $a = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi)$ a komplexně sdružené \bar{a} . Jinými slovy, argument v goniometrickém tvaru tohoto komplexního čísla udává úhel otočení.

Tomu lze snadno porozumět, když si označíme reálnou a imaginární část vektoru u takto

$$u = x_u + iy_u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor v je komplexně sdružený k u . Zajímá nás zúžení zobrazení g na reálný vektorový podprostor $V = \mathbb{R}^2 \cap \langle u, v \rangle \subset \mathbb{C}^2$. Evidentně je

$$V = \langle u + \bar{u}, i(u - \bar{u}) \rangle = \langle x_u, -y_u \rangle$$

celá reálná rovina \mathbb{R}^2 . Zúžení zobrazení g na tuto rovinu je právě původní zobrazení dané maticí A a z definice násobení komplexní jednotkou jde o otočení o úhel $\frac{1}{2}\pi$ v kladném smyslu ve vztahu ke zvolené bázi $x_u, -y_u$ (ověřte si přímým výpočtem a uvědomte si také, proč případné prohození pořadí vektorů u a v povede k témuž výsledku, byť v jiné reálné bázi!).

2.30

2.46. Vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení. Klíčem



k popisu zobrazení v předchozích příkladech byly odpovědi na otázku „jaké jsou vektory splňující rovnici $f(u) = a \cdot u$ pro nějaké vhodné skaláry a “.

Zvolme tedy pevně lineární zobrazení $f : V \rightarrow V$ na vektorovém prostoru dimenze n nad skaláry \mathbb{K} . Jestliže si představíme takovou rovnost zapsanou v souřadnicích, tj. s využitím matice zobrazení A v nějakých bázích, jde o výraz

$$A \cdot x - a \cdot x = (A - a \cdot E) \cdot x = 0.$$

Z předchozího víme, že taková soustava rovnic má jediné řešení $x = 0$, pokud je matice $A - aE$ invertibilní. My tedy chceme najít takové hodnoty $a \in \mathbb{K}$, pro které naopak $A - aE$ invertibilní není, a nutnou a dostatečnou podmínkou je (viz Věta 2.23)

e2.1

$$(2.4) \quad \det(A - a \cdot E) = 0.$$

Jestliže považujeme $\lambda = a$ za proměnnou v předchozí skalární rovnici, hledáme ve skutečnosti kořeny polynomu stupně n . Jak jsme viděli v případě matice D výše, kořeny mohou, ale nemusí existovat podle volby pole skalárů \mathbb{K} .

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Skaláry λ vyhovující rovnici $f(u) = \lambda \cdot u$ pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme *vlastní čísla zobrazení f* , příslušné nenulové vektory u pak *vlastní vektory zobrazení f* .

Jsou-li u, v vlastní vektory příslušné k témuž vlastnímu číslu λ , pak i pro jejich jakoukoliv lineární kombinaci platí

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v) = \lambda(au + bv).$$

Proto tvoří vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ , společně s nulovým vektorem, netriviální vektorový podprostor V_λ , tzv. vlastní podprostor příslušný λ . Např., je-li $\lambda = 0$ vlastním číslem, je jádro $\text{Ker } f$ vlastním podprostorem V_0 .

Z definice vlastních čísel je zřejmé, že jejich výpočet nemůže záviset na volbě báze a tedy matice zobrazení f . Skutečně, jako přímý důsledek transformačních vlastností z odstavce 2.38 a Cauchyovy věty 2.19 pro výpočet determinantu součinu dostáváme jinou volbou souřadnic matici $A' = P^{-1}AP$ s invertibilní maticí P a

$$\begin{aligned} |P^{-1}AP - \lambda E| &= |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda EP| \\ &= |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}| |(A - \lambda E)| |P| \\ &= |A - \lambda E|, \end{aligned}$$

protože násobení skalárů je komutativní a $|P^{-1}| = |P|^{-1}$.

Z těchto důvodů používáme pro matice a zobrazení společnou terminologii:

CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM MATICE A OBRAZENÍ

Pro matici A dimenze n nad \mathbb{K} nazýváme polynom $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ *charakteristický polynom matice A* .

vektorů dostaneme hledanou bázi. Pokud však uvážíme, že kupř.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

můžeme ihned bázového vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

podprostoru U doplnit maticemi (vektory prostoru matic)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na bázi. Upozorníme, že výše uvedený determinant lze vyčíslit velmi snadno – je roven součinu prvků na diagonále, neboť matice je v dolním trojúhelníkovém tvaru (nad diagonálou jsou všechny prvky nulové). □

2.90. Napište nějakou bázi reálného vektorového prostoru matic 3×3 nad \mathbb{R} s nulovou stopou (součet prvků na diagonále) a napište souřadnice matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

v této bázi.

2.91. Zaveďte nějaký skalární součin na vektorovém prostoru matic z předchozího příkladu. Spočítejte normu matice z předchozího příkladu, která je indukovaná Vámi zavedeným součinem.

2.92. Určete nějakou bázi vektorového prostoru antisymetrických reálných čtvercových matic typu 4×4 . Uvažte standardní skalární součin v této bázi a pomocí tohoto součinu vyjádřete velikost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.93. Najděte ortogonální doplněk U^\perp podprostoru

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_3, x_2 = x_3 + 6x_4\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Řešení. Ortogonální doplněk U^\perp tvoří právě ty vektory, které jsou kolmé na každé řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0, \\ x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Vektor je ovšem řešením této soustavy tehdy a jenom tehdy, když je kolmý na oba vektory $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, -1, -6)$. Je tedy

$$U^\perp = \{a \cdot (1, 0, -1, 0) + b \cdot (0, 1, -1, -6); a, b \in \mathbb{R}\}.$$

□

2.94. Určete, zda jsou podprostory $U = \langle (2, 1, 2, 2) \rangle$ a $V = \langle (-1, 0, -1, 2), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle$ prostoru \mathbb{R}^4 na sebe kolmé. Pokud ano, je $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tj. je $U^\perp = V$?

Řešení. Vektor, který zadává podprostor U , je kolmý na každý ze tří vektorů, které generují V . Podprostory jsou tak na sebe kolmé. Avšak není pravda, že $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. Podprostor V je totiž pouze dvojdimenzionální, protože

$$(-1, 0, -1, 2) = (-1, 0, 1, 0) - 2(0, 0, 1, -1).$$

□

2.95. V závislosti na parametru $t \in \mathbb{R}$ stanovte dimenzi podprostoru U vektorového prostoru \mathbb{R}^3 , je-li U generován vektory

$$(a) u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, t, 1), \quad u_3 = (2, 2, t);$$

$$(b) u_1 = (t, t, t), \quad u_2 = (-4t, -4t, 4t), \quad u_3 = (-2, -2, -2).$$

Řešení. V prvním případě je $\dim U = 2$ pro $t \in \{1, 2\}$, jinak je $\dim U = 3$. Ve druhém případě je $\dim U = 2$ pro $t \neq 0$ a $\dim U = 1$ pro $t = 0$.

□

2.96. Sestrojte ortogonální bázi podprostoru

$$\langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -1), (-1, 1, 1, 1) \rangle$$

prostoru \mathbb{R}^4 .

Řešení. Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem lze udržet výsledek

$$((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -3), (-2, 1, 1, 0)).$$

□

2.97. V prostoru \mathbb{R}^4 nalezněte nějakou ortogonální bázi podprostoru všech lineárních kombinací vektorů $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, -7)$, $(4, -2, 4, 14)$ a podprostoru generovaného vektory $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

Řešení. Při zachování pořadí podprostorů ze zadání jsou ortogonálními bázemi např.

$$((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -7))$$

a

$$((1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)).$$

Kořeny tohoto polynomu jsou *vlastní čísla matice* A . Je-li A matice zobrazení $f : V \rightarrow V$ v jisté bázi, pak $|A - \lambda E|$ nazýváme také *charakteristický polynom zobrazení* f .

Protože je charakteristický polynom lineárního zobrazení $f : V \rightarrow V$ nezávislý na volbě báze V , jsou i jeho koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné λ skaláry vyjadřující vlastnosti zobrazení f , tj. nemohou záviset na naší volbě báze. Zejména jako jednoduché cvičení na počítání determinantů vyjádříme koeficienty u nejvyšších a nejnižších mocnin (předpokládáme $\dim V = n$ a matici zobrazení $A = (a_{ij})$ v nějaké bázi):

$$|A - \lambda \cdot E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + |A| \cdot \lambda^0.$$

Koeficient u nejvyšší mocniny říká jen, zda je dimenze prostoru V sudá nebo lichá. O determinantu matice zobrazení jsme už zmiňovali, že vyjadřuje, kolikrát dané lineární zobrazení zvětšuje objemy.

Zajímavé je, že i součet diagonálních členů matice zobrazení nezávisí na volbě báze. Nazýváme jej *stopa matice* a značíme $\text{Tr}A$. *Stopa zobrazení* je definována jako stopa jeho matice v libovolné bázi. Ve skutečnosti to natolik překvapivé není, protože v kapitole osmé si jako příklad na metody diferenciálního počtu ukážeme, že stopa je ve skutečnosti lineárním přiblížením determinantu v okolí jednotkové matice, viz ??.

V dalším si uvedeme několik podstatných vlastností vlastních podprostorů.

2.47. Věta. *Vlastní vektory lineárního zobrazení $f : V \rightarrow V$ příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

DŮKAZ. Necht' a_1, \dots, a_k jsou různé vlastní hodnoty zobrazení f a u_1, \dots, u_k vlastní vektory s těmito vlastními hodnotami. Důkaz provedeme indukcí přes počet lineárně nezávislých vektorů mezi zvolenými. Předpokládejme, že u_1, \dots, u_ℓ jsou lineárně nezávislé a $u_{\ell+1} = \sum_i c_i u_i$ je jejich lineární kombinací. Alespoň $\ell = 1$ lze zvolit, protože vlastní vektory jsou nenulové. Pak ovšem $f(u_{\ell+1}) = a_{\ell+1} \cdot u_{\ell+1} = \sum_{i=1}^{\ell} a_{\ell+1} \cdot c_i \cdot u_i$, tj.

$$f(u_{\ell+1}) = \sum_{i=1}^{\ell} a_{\ell+1} \cdot c_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cdot f(u_i) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cdot a_i \cdot u_i.$$

Odečtením druhého a čtvrtého výrazu v rovnostech dostáváme $0 = \sum_{i=1}^{\ell} (a_{\ell+1} - a_i) \cdot c_i \cdot u_i$. Všechny rozdíly vlastních hodnot jsou však nenulové a alespoň jeden koeficient c_i je nenulový. To je spor s předpokládanou nezávislostí u_1, \dots, u_ℓ , takže i vektor $u_{\ell+1}$ musí být lineárně nezávislý na předchozích. □

Na právě dokázané tvrzení se můžeme podívat jako na rozklad lineárního zobrazení f na součet jednoduchých zobrazení. Pro vesměs různé vlastní hodnoty λ_i charakteristického polynomu budeme dostávat jednorozměrné vlastní podprostory V_{λ_i} . Každý z nich pak zadává projekci na tento invariantní jednorozměrný podprostor, na němž je zobrazení dáno jako násobení vlastním číslem λ_i . Celý prostor V je tak rozložen na přímý součet jednotlivých vlastních podprostorů. Navíc lze tento rozklad na vlastní podprostory snadno spočítat:

BÁZE Z VLASTNÍCH VEKTORŮ

Důsledek. *Jestliže existuje n navzájem různých kořenů λ_i charakteristického polynomu zobrazení $f : V \rightarrow V$, na n -rozměrném prostoru V , pak existuje rozklad V na přímý součet vlastních podprostorů dimenze 1. To znamená, že existuje báze V složená výhradně z vlastních vektorů a a v této bázi má f diagonální matici. Tato báze je určena jednoznačně až na pořadí prvků.*

Příslušnou bázi (vyjádřenou v souřadnicích vzhledem k libovolně zvolené bázi V) obdržíme řešením n systémů homogenních lineárních rovnic o n neznámých s maticemi $(A - \lambda_i \cdot E)$, kde A je matice f ve zvolené bázi.

2.44

2.48. Invariantní podprostory. Viděli jsme, že každý vlastní vektor v zobrazení $f : V \rightarrow V$ generuje podprostor $\langle v \rangle \subset V$, který je zobrazením f zachováván.



Obecněji říkáme, že vektorový podprostor $W \subset V$ je *invariantní podprostor* pro lineární zobrazení f , jestliže platí $f(W) \subset W$.

Jestliže je V konečněrozměrný vektorový prostor a vybereme nějakou bázi (u_1, \dots, u_k) podprostoru W , můžeme ji vždy doplnit na bázi $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ celého V a v každé takové bázi má naše zobrazení matici A tvaru

e2.3a

$$(2.5) \quad A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

kde B je čtvercová matice dimenze k , D je čtvercová matice dimenze $n - k$ a C je matice typu $n/(n - k)$. Naopak, jestliže je v nějaké bázi (u_1, \dots, u_n) matice zobrazení f tvaru (2.5), je $W = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ invariantní podprostor zobrazení f .

Pochopitelně bude v naší matici zobrazení (2.5) submatice C nulová právě tehdy, když bude i podprostor $\langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$ generovaný doplněnými vektory báze invariantní.

Z tohoto pohledu jsou vlastní podprostory lineárního zobrazení extrémní případy invariantních podprostorů a zejména v případě existence $n = \dim V$ různých vlastních čísel zobrazení f dostáváme rozklad V na přímý součet n vlastních podprostorů. V příslušné bázi z vlastních vektorů má pak naše zobrazení diagonální tvar s vlastními čísly na diagonále.

2.98. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ jsou vektory

$$(1, 1, 2, 0, 0), \quad (1, -1, 0, 1, a), \quad (1, b, 2, 3, -2)$$

v prostoru \mathbb{R}^5 po dvou ortogonální?

Řešení. Výsledek je $a = 9/2, b = -5$, neboť musí mj. platit

$$1 + b + 4 + 0 + 0 = 0, \quad 1 - b + 0 + 3 - 2a = 0.$$

2.99. V prostoru \mathbb{R}^5 uvažujte podprostor generovaný vektory

$$(1, 1, -1, -1, 0), \quad (1, -1, -1, 0, -1), \quad (1, 1, 0, 1, 1), \\ (-1, 0, -1, 1, 1).$$

Najděte nějakou bázi jeho ortogonálního doplňku.

Řešení. Hledaná báze obsahuje jediný vektor. Je jím nějaký nenulový skalární násobek vektoru

$$(3, -7, 1, -5, 9).$$

2.100. Popište ortogonální doplněk podprostoru V prostoru \mathbb{R}^4 , je-li V generován vektory $(-1, 2, 0, 1), (3, 1, -2, 4), (-4, 1, 2, -4), (2, 3, -2, 5)$.

Řešení. Ortogonální doplněk (komplement) V^\perp je množina všech skalárních násobků vektoru $(4, 2, 7, 0)$.

2.101. V prostoru \mathbb{R}^5 určete ortogonální doplněk W^\perp podprostoru W , jestliže

$$(a) \quad W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t); r, s, t \in \mathbb{R}\};$$

$$(b) \quad W \text{ je množina řešení soustavy rovnic } x_1 - x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0.$$

Řešení.

$$(a) \quad W^\perp = \langle (1, 0, -1, 1, 0), (1, 3, 2, 1, -3) \rangle;$$

$$(b) \quad W^\perp = \langle (1, 0, -1, 0, 0), (1, -1, 1, -1, 1) \rangle.$$

2.102. Nechť jsou v prostoru \mathbb{R}^4 dány vektory

$$(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1).$$

Doplňte tyto dva vektory libovolným způsobem na ortogonální bázi celého \mathbb{R}^4 . (Můžete k tomu využít Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.)

Řešení. Hledaných doplnění je pochopitelně nekonečně mnoho. Jediným (skutečně jednoduchým) je např.

$$(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1), \quad (1, 0, 0, -1), \quad (1, 0, -1, 1).$$

2. 36

2.103. Nalezněte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V \subset \mathbb{R}^4$, kde $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

Řešení. Vidíme, že čtvrtá souřadnice se v omezení na podprostor nevykytuje, bude tedy vhodné volit jeden z vektorů hledané ortonormální báze vektor $(0, 0, 0, 1)$ a redukovat problém do prostoru \mathbb{R}^3 . I dále se zkusíme vyhnout počítání: vidíme, že položíme-li druhou souřadnici rovnu nule, tak ve vyšetřovaném prostoru leží vektory s opačnou první a třetí souřadnicí, zejména jednotkový vektor $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Na tento vektor je kolmý libovolný vektor, který má stejnou první a třetí souřadnici. Abychom se dostali do uvažovaného podprostoru, volíme druhou souřadnici rovnu záporné hodnotě součtu první a třetí souřadnice a normujeme, tedy volíme vektor $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$ a jsme hotovi. \square

2.104. Věta (2.50) nám dává do ruky nástroje, jak poznat matici rotace v \mathbb{R}^3 : má tři různá vlastní čísla s absolutní hodnotou 1, jedno z nich je přímo číslo 1 (jemu příslušný vlastní vektor je osa rotace). Argument zbylých dvou, tedy nutně komplexně sdružených, vlastních čísel potom udává úhel rotace v kladném smyslu v rovině určené bází $u_\lambda + \bar{u}_\lambda, i[u_\lambda - \bar{u}_\lambda]$.

2.105. Určete, jaké lineární zobrazení zadává matice $\begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Řešení. Již známým postupem zjistíme, že matice má následující vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory: $1, (1, 2, 0); \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i, 1, (1, 1 + i, -1 - i); \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i, (1, 1 - i, -1 + i)$. Jde tedy o matici rotace (všechna vlastní čísla mají absolutní hodnotu 1 a jedna z vlastních hodnot je přímo 1), navíc víme, že se jedná o rotaci o $\arccos(\frac{3}{5}) \doteq 0, 295\pi$, což je argument vlastního čísla $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. Zbývá určit smysl otáčení. Nejprve je dobré si připomenout, že smysl otáčení se mění s orientací osy (nemá tedy smyslu hovořit o smyslu otáčení, pokud nemáme orientovanou jeho osu. Dle úvah v důkazu věty 2.50, působí daná matice otáčením o $\arccos(\frac{3}{5})$) v kladném smyslu v rovině dané bází $((0, 1, -1), (1, 1, -1))$. První vektor báze je imaginární částí vlastního vektoru příslušného vlastní hodnotě $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, druhý pak je (společnou) reálnou částí vlastních vektorů příslušných komplexním vlastním hodnotám. Tady je důležité pořadí vektorů v bázi (prohozením vektorů se změní smysl otáčení). Osa otáčení je kolmá na uvažovanou rovinu. Pokud ji orientujeme podle pravidla pravé ruky (daný kolmý směr také dostaneme vektorovým součinem vektorů v bázi) tak bude smysl otáčení v prostoru souhlasit

2.49. **Ortogonalní zobrazení.** Podívejme se teď na speciální případ zobrazení $f : V \rightarrow W$ mezi prostory se skalárními součiny, která zachovávají velikosti pro všechny vektory $u \in V$.



DEFINICE ORTOGONÁLNÍCH ZOBRAZENÍ

Lineární zobrazení $f : V \rightarrow W$ mezi prostory se skalárním součinem se nazývá *ortogonalní zobrazení*, jestliže pro všechny $u \in V$

$$\langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle.$$

Z linearit f a ze symetrie skalárního součinu vyplývá pro všechny dvojice vektorů rovnost

$$\langle f(u + v), f(u + v) \rangle = \langle f(u), f(u) \rangle + \langle f(v), f(v) \rangle + 2\langle f(u), f(v) \rangle.$$

Proto všechny ortogonalní zobrazení splňují i zdánlivě silnější požadavek, aby platilo pro všechny vektory $u, v \in V$

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

V úvodní diskusi o geometrii v rovině jsme ve Větě 1.33 dokázali, že lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zachovává velikosti vektorů, právě když jeho matice ve standardní bázi (a ta je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) splňuje $A^T \cdot A = E$, tj. $A^{-1} = A^T$.

Obecně, ortogonalní zobrazení $f : V \rightarrow W$ musí být vždy injektivní, protože podmínka $\langle f(u), f(u) \rangle = 0$ znamená i $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$. Je tedy vždy v takovém případě dimenze oboru hodnot alespoň taková, jako je dimenze definičního oboru f . Pak ovšem je dimenze obrazu rovna dimenzi oboru hodnot a víme, že $f : V \rightarrow \text{Im } f$ je bijekce. Pokud $\text{Im } f \neq W$, doplníme ortonormální bázi na obrazu f na ortonormální bázi cílového prostoru a matice zobrazení bude obsahovat čtvercovou regulární matici A doplněnou nulovými řádky na potřebnou velikost. Bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme $W = V$.

Naše podmínka pro matici ortogonalního zobrazení v ortonormální bázi pak říká pro všechny vektory x a y v prostoru \mathbb{K}^n toto:

$$(A \cdot x)^T \cdot (A \cdot y) = x^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot y = x^T \cdot y.$$

Speciálními volbami vektorů standardní báze za x a y dostaneme přímo, že $A^T \cdot A = E$, tedy tentýž výsledek jako v dimenzi dvě. Dokázali jsme tak následující tvrzení:

MATICE ORTOGONÁLNÍCH ZOBRAZENÍ

Věta. Necht V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $f : V \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak f je ortogonalní, právě když v některé ortonormální bázi (a pak už ve všech) má matici A splňující $A^T = A^{-1}$.

DŮKAZ. Skutečně, jestliže zachovává f velikosti, musí mít uvedenou vlastnost v každé ortonormální bázi. Naopak, předchozí výpočet ukazuje, že vlastnost matice v jedné bázi už zaručuje zachovávání velikostí. \square

Čtvercovým maticím, které splňují rovnost $A^T = A^{-1}$ říkáme *ortogonální matice*.

Důsledkem předchozí věty je také popis všech matic přechodu S mezi ortonormálními bázemi. Každá totiž musí zadávat zobrazení $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ zachovávající velikosti a splňují tady také právě podmínku $S^{-1} = S^T$. Při přechodu od jedné ortonormální báze ke druhé se tedy matice (libovolných) lineárních zobrazení mění podle vztahu

$$A' = S^T A S.$$

2.45

2.50. Rozklad ortogonálního zobrazení. Podívejme se



nyní podrobněji na vlastní vektory a vlastní čísla ortogonálních zobrazení na reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem.

Uvažujme pevně zvolené ortogonální zobrazení $f : V \rightarrow V$ s maticí A v nějaké ortonormální bázi a zkusme postupovat obdobně jako s maticí rotace D v příkladu 2.59.

Nejprve se ale podívejme obecně na invariantní podprostory ortogonálních zobrazení a jejich ortogonální doplňky. Jestliže pro libovolný podprostor $W \subset V$ a ortogonální zobrazení $f : V \rightarrow V$ platí $f(W) \subset W$, pak také platí pro všechny $v \in W^\perp$, $w \in W$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle f(v), f \circ f^{-1}(w) \rangle = \langle v, f^{-1}(w) \rangle = 0$$

protože i $f^{-1}(w) \in W$. To ale znamená, že také $f(W^\perp) \subset W^\perp$. Dokázali jsme tedy jednoduché, ale velice důležité tvrzení:

Tvrzení. *Ortogonální doplněk k invariantnímu podprostoru je také invariantní.*

Kdyby byla vlastní čísla ortogonálního zobrazení reálná, zaručovalo by už toto tvrzení, že bude vždy existovat báze V z vlastních vektorů. Skutečně, zúžení f na ortogonální doplněk invariantního podprostoru je opět ortogonální zobrazení, takže můžeme do báze přibírat jeden vlastní vektor za druhým, až dostaneme celý rozklad V . Nicméně většinou nejsou vlastní čísla ortogonálních zobrazení reálná. Musíme si proto pomoci opět výletem do komplexních vektorových prostorů. Zformulujeme rovnou výsledek:

ROZKLAD ORTOGONÁLNÍCH ZOBRAZENÍ

Věta. *Nechť $f : V \rightarrow V$ je ortogonální zobrazení na prostoru se skalárním součinem. Pak všechny kořeny charakteristického polynomu f mají velikost jedna a existuje rozklad V na jednorozměrné vlastní podprostory odpovídající vlastním číslům $\lambda = \pm 1$ a dvourozměrné podprostory $P_{\lambda, \bar{\lambda}}$, na kterých působí f rotací o úhel rovný argumentu komplexního čísla λ v kladném směru. Všechny tyto různé podprostory jsou po dvou ortogonální.*

se smyslem otáčení v rovině s uvedenou bází. V našem případě dostaneme vektorovým součinem $(0, 1, -1) \times (1, 1, -1) = (0, -1, -1)$. Jedná se tedy o rotaci o $\arccos(\frac{3}{5})$ v kladném smyslu kolem vektoru $(0, -1, -1)$, neboli o rotaci o $\arccos(\frac{3}{5})$ v záporném smyslu kolem vektoru $(0, 1, 1)$.

a to v kladném smyslu. \square



DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme pracovat s prostorem $V = \mathbb{R}^m$ se standardním skalárním součinem. Zobrazení tedy bude dáno ortogonální maticí A , kterou můžeme stejně považovat za matici lineárního zobrazení na komplexním prostoru \mathbb{C}^m (která je jen shodou okolností reálná). Zaručeně bude existovat právě m (komplexních) kořenů charakteristického polynomu, včetně jejich algebraické násobnosti (viz tzv. základní věta algebry, ??). Navíc, protože charakteristický polynom zobrazení bude mít výhradně reálné koeficienty, budou tyto kořeny buď reálné, nebo půjde o dvojice komplexně sdružených kořenů λ a $\bar{\lambda}$. Příslušné vlastní vektory v \mathbb{C}^m k takové dvojici komplexně sdružených vlastních čísel budou řešením dvou komplexně sdružených systémů homogenních lineárních rovnic, neboť příslušné matice systémů rovnic jsou celé reálné, až na samotná dosazená vlastní čísla. Evidentně proto budou také řešení těchto systémů komplexně sdružené vektory.

Nyní využijeme skutečnost, že ke každému invariantnímu podprostoru je i jeho ortogonální doplněk invariantní. Nejprve si najdeme všechny vlastní podprostory $V_{\pm 1}$ příslušné k reálným vlastním hodnotám a zúžíme naše zobrazení na ortogonální doplněk k jejich součtu. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že naše ortogonální zobrazení nemá žádná reálná vlastní čísla a že je $\dim V = 2n > 0$.

Zvolme nyní nějaké vlastní číslo λ a označme u_λ vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Zcela stejně jako v případě rotace v rovině zadané v odstavci 2.59 maticí D nás zajímá reálná část součtu dvou jednorozměrných podprostorů $\langle u_\lambda \rangle \oplus \langle \bar{u}_\lambda \rangle$, kde \bar{u}_λ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$.

Jde o průnik uvedeného součtu komplexních podprostorů s \mathbb{R}^{2n} , který je generovaný vektory $u_\lambda + \bar{u}_\lambda$ a $i(u_\lambda - \bar{u}_\lambda)$, tj. reálný vektorový podprostor $P_\lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ generovaný bazí danou reálnou a imaginární částí u_λ

$$x_\lambda = \operatorname{re} u_\lambda, \quad -y_\lambda = -\operatorname{im} u_\lambda.$$

Protože $A \cdot (u_\lambda + \bar{u}_\lambda) = \lambda u_\lambda + \bar{\lambda} \bar{u}_\lambda$ a podobně s druhým bázovým vektorem, jde zjevně o invariantní podprostor vůči násobení maticí A a dostáváme

$$A \cdot x_\lambda = \alpha x_\lambda + \beta y_\lambda, \quad A \cdot y_\lambda = -\alpha y_\lambda + \beta x_\lambda.$$

Protože naše zobrazení zachovává velikosti, musí být navíc velikost vlastní hodnoty λ rovna jedné. To ale neznamená nic jiného, než že zúžení našeho zobrazení na P_λ je rotací o argument vlastní hodnoty λ . Všimněme si, že volba vlastního čísla $\bar{\lambda}$ místo λ vede na stejný podprostor se stejnou rotací, pouze ji dostaneme vyjádřenou v bázi x_λ, y_λ , tj. musíme v souřadnicích rotovat o úhel s opačným znaménkem.

Důkaz celé věty tím dokončen, protože zúžením našeho zobrazení na ortogonální doplněk a opakováním předchozí úvahy dostaneme celý rozklad po n krocích. \square

K myšlenkám tohoto důkazu se ještě vrátíme v kapitole třetí, když budeme studovat komplexní rozšíření euklidovských vektorových prostorů, viz 3.26.

Poznámka. Speciálně v dimenzi tři musí být alespoň jedno vlastní číslo ± 1 , protože je trojka liché číslo. Pak ovšem příslušný vlastní podprostor je osou rotace trojrozměrného prostoru o úhel daný argumentem dalších vlastních čísel. Zkuste si pomyslet, jak poznat, kterým směrem jde rotace a také, že vlastní číslo -1 znamená ještě dodatečné zrcadlení podle roviny kolmé na osu rotace.



K diskusi vlastností matic a lineárních zobrazení se budeme vracet. Před pokračováním obecné teorie si napřed ukážeme v následující kapitole několik aplikací, ještě ale uzavřeme naši diskusi obecnou definicí:

SPEKTRUM LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

2.32

2.51. Definice. *Spektrum lineárního zobrazení $f : V \rightarrow V$ (resp. matice) je posloupnost kořenů charakteristického polynomu zobrazení f , včetně násobností. Algebraickou násobností vlastní hodnoty rozumíme její násobnost jakožto kořenu charakteristického polynomu, geometrická násobnost vlastní hodnoty je dimenze příslušného podprostoru vlastních vektorů.*

Spektrálním poloměrem lineárního zobrazení (matice) je největší z absolutní hodnot vlastních čísel.

V této terminologii můžeme naše výsledky o ortogonálních zobrazeních zformulovat tak, že jejich spektra jsou vždy celá podmnožinou jednotkové kružnice v komplexní rovině. To znamená, že v reálné části spektra mohou být pouze hodnoty ± 1 , jejichž algebraické a geometrické násobnosti jsou stejné. Komplexní hodnoty spektra pak odpovídají rotacím ve vhodných dvourozměrných podprostorech, které jsou na sebe po dvou kolmé.

J. Doplnující příklady k celé kapitole

2.106. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 3, \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 5, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Řešení. Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & -6 & 2 \end{array} \right).$$

Přičtením prvního řádku ke třetímu a jeho dvojnásobku ke čtvrtému a poté přičtením $(-5/2)$ násobku druhého řádku ke čtvrtému obdržíme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & -10 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -9/2 \end{array} \right).$$

Poslední řádek je zřejmě násobkem předposledního, a tak jej můžeme vynechat. Pivoti se nacházejí v 1., 2. a 4. sloupci, proto jsou volné proměnné x_3 a x_5 , které nahradíme reálnými parametry t , s .

Uvažujeme tak soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + t + x_4 - 2s &= 3, \\ 2x_2 + 2t + 2x_4 - 4s &= 5, \\ 2x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Víme tedy, že $x_4 = 3/2$. Druhá rovnice dává

$$2x_2 + 2t + 3 - 4s = 5, \quad \text{tj.} \quad x_2 = 1 - t + 2s.$$

Z první potom plyne

$$x_1 + 1 - t + 2s + t + 3/2 - 2s = 3, \quad \text{tj.} \quad x_1 = 1/2.$$

Celkem máme

ves0016

(2.5)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1/2, 1 - t + 2s, t, 3/2, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Také v tomto příkladu znovu uvažujeme rozšířenou matici a převedme ji pomocí řádkových úprav do schodovitého tvaru, kde první nenulové číslo v každém řádku je 1 a kde ve sloupci, ve kterém tato 1 je, jsou ostatní čísla 0. Ještě připomeňme, že čtvrtou rovnici, jež je kombinací prvních třech rovnic, budeme vynechávat. Po řadě vynásobením druhého a třetího řádku číslem $1/2$, odečtením třetího řádku od druhého a od prvního a odečtením druhého řádku od prvního získáme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Pokud opět zvolíme $x_3 = t$, $x_5 = s$ ($t, s \in \mathbb{R}$), dostaneme odsud obecné řešení (2.5) ve stejném tvaru, a to bezprostředně. Uvažte příslušné rovnice

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 1/2, \\ x_2 + t & - 2s & = 1, \\ & x_4 & = 3/2. \end{array}$$

□

2.107. Najděte řešení soustavy lineárních rovnic zadané rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array} \right).$$

Řešení. Uvedenou rozšířenou matici upravíme na schodovitý tvar. Nejprve první a třetí řádek opíšeme a do druhého řádku napíšeme součet (-2) násobku prvního a 3 násobku druhého řádku a do čtvrtého řádku součet 5 násobku prvního a (-3) násobku posledního řádku. Takto získáme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 14 & 0 \end{array} \right).$$

Opsání prvních dvou řádků a přičtení 5 násobku druhého řádku k 3 násobku třetího a jeho 2 násobku ke čtvrtému řádku dává

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 14 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -17 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array} \right).$$

Pokud první, druhý a čtvrtý řádek opíšeme a ke třetímu přičteme čtvrtý, dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -17 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & 9 & 45 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array} \right).$$

Dále je (řádkové úpravy jsou již „obvyklé“)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & 9 & 45 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 19 \end{array} \right).$$

Vidíme, že soustava má právě 1 řešení. Určeme ho zpětnou eliminací

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledek je tak

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 1.$$

□

2.108. Uvedte všechna řešení homogenního systému

$$x + y = 2z + v, \quad z + 4u + v = 0, \quad -3u = 0, \quad z = -v$$

4 lineárních rovnic 5 proměnných x, y, z, u, v .

Řešení. Systém přepíšeme do matice tak, že v prvním sloupci budou koeficienty u x , ve druhém sloupci koeficienty u y , až v pátém sloupci koeficienty u v , přičemž všechny členy v každé rovnici převedeme na levou stranu. Tímto způsobem přísluší systému matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přičteme-li $(4/3)$ násobek třetího řádku ke druhému a odečteme-li poté druhý řádek od čtvrtého, obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále vynásobíme třetí řádek číslem $-1/3$ a přičteme 2 násobek druhého řádku k prvnímu, což dává

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z poslední matice můžeme přímo vypsát všechna řešení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

neboť máme matici ve schodovitém tvaru, přičemž první nenulové číslo v každém řádku je 1 a ve sloupci, kde se taková 1 nachází, jsou na ostatních pozicích 0. Výše uvedené řešení ve tvaru lineární kombinace dvou vektorů je určeno právě sloupci bez prvního nenulového čísla nějakého řádku, tj. druhým a pátým sloupcem, kdy volíme 1 jako druhou složku pro druhý sloupec a jako pátou složku pro pátý sloupec a kdy čísla v příslušném sloupci bereme s opačným znaménkem a umísťujeme je na

pozici danou sloupcem, ve kterém je první 1 v jejich řádku. Dodejme, že výsledek je ihned možné přepsat do tvaru

$$(x, y, z, u, v) = (-t - s, t, -s, 0, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

□

Řešení cvičení

2.8. Taková matice X existuje právě jedna, a to

$$\begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$2.14. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -4 \\ 1 & 12 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.15. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.16. C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.17. V prvním případě dostáváme

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix};$$

ve druhém potom

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.18. Platí

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.19. -3,17,-1

2.22. Odečtením prvního řádku od všech ostatních řádků a následným rozvojem podle prvního sloupce obdržíme

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \\ x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Vytkneme-li z i -tého řádku $x_{i+1} - x_1$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, dostaneme

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-j-2} x_1^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-j-2} x_1^j \end{vmatrix}.$$

Odečtením od každého sloupce (počínaje posledním a konče druhým) x_1 -násobku předcházejícího lze docílit úpravy

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \dots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-j-2} x_1^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \dots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-j-2} x_1^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Proto

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n).$$

Neboť je zřejmé

$$V_2(x_{n-1}, x_n) = x_n - x_{n-1},$$

platí (uvažme matematickou indukci)

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Všimněme si, že tento determinant je nenulový, právě když jsou čísla x_1, \dots, x_n navzájem různá.

2.25. Ze znalosti inverzní matice F^{-1} dostáváme

$$F^* = (\alpha\delta - \beta\gamma) F^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta & 0 \\ -\gamma & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix},$$

pro libovolná $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

2.26. Hledanými maticemi jsou

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 6 & -2i \\ -3 + 2i & 1 + i \end{pmatrix}.$$

2.28.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Následně lze snadno získat

$$x_1 = \frac{13}{4}, \quad x_2 = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = -\frac{3}{4}, \quad x_4 = \frac{1}{4}.$$

2.33. Řešeními jsou právě všechny skalární násobky vektoru

$$(1 + \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, 1, 0).$$

2.34. $x_1 = 1 + t, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -\frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}$.

2.35. Soustava nemá řešení.

2.36. Soustava má řešení, protože je

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2.37. Systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & + & 2x_3 = 1, \\ x_1 & + & x_3 = 2, \\ 7x_1 & + & 4x_3 = 3, \\ 5x_1 & + & 3x_3 = 4, \\ & x_2 & = 5 \end{array}$$

nemá řešení, zatímco systém

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & + & 2x_3 = 1, \\ x_1 & + & x_3 = 1, \\ 7x_1 & + & 4x_3 = 1, \\ 5x_1 & + & 3x_3 = 1, \\ & x_2 & = 1 \end{array}$$

má právě jedno řešení $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$.

2.38. Správné odpovědi zní:

- (a) $b_1 = b_2 + b_3$;
- (b) nelze;
- (c) $b_1 \neq b_2 + b_3$;
- (d) nelze.

2.39. Množina všech řešení je

$$\{(-10t, (a+4)t, (3a-8)t) ; t \in \mathbb{R}\}.$$

2.40. Pro $a = 0$ nemá uvažovaný systém řešení; pro $a \neq 0$ má nekonečně mnoho řešení.

2.41. Při zachování pořadí jsou správné odpovědi „ano“, „ne“, „ne“ a „ano“.

2.42. i) Pro $b \neq -7$ je $x = z = (2+a)/(b+7), y = (3a-b-1)/(b+7)$ (1b). ii) Pro $b = -7$ (1b) a $a \neq -2$

(1b) nemá řešení (1b), pro $a = -2$ je řešením $x = z, 3z - 1$ (2b).

2.45. Lehce se ověří, že se jedná o vektorový prostor. První souřadnice neovlivňuje výpočty součtů vektorů ani hodnoty skalárních násobků vektorů: jedná se o přeznačený prostor $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

2.49. Výsledek je

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{2} \cdot (1, 2, 1) - \frac{1}{2} \cdot (-1, 1, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, 1, 1).$$

2.50. Úloha má jediné řešení

$$p = 2, \quad q = -2, \quad r = 3.$$

2.51. Vektory jsou závislé, je-li splněna alespoň jedna z podmínek

$$a = b = 1, \quad a = c = 1, \quad b = c = 1.$$

2.52. Vektory jsou lineárně nezávislé.

2.53. Stačí připojit např. polynom x .

2.55. $(-2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, -2 - \frac{1}{\sqrt{3}})$.

2.56. $(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}})$.

2.71.

$$\begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2.72.

$$\begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -4/9 \\ 2/9 & 8/9 & 2/9 \\ -4/9 & 2/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

2.75. Trojnásobná vlastní hodnota -1 , příslušný vektorový prostor je $\langle(1, 0, 0), (0, 2, 1)\rangle$.

2.76. Charakteristický polynom je $-(\lambda - 2)^2(\lambda - 9)$, tj. vlastní čísla jsou 2 a 9 s příslušnými (po řadě) vlastními vektory

$$(1, 2, 0), (-3, 0, 1) \quad \text{a} \quad (1, 1, 1).$$

2.77. Daná matice má pouze jedno vlastní číslo, a to -1 .

2.78. Kupř.

$$(a) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.79. Kořen -1 polynomu $|A - \lambda E|$ je trojnásobný.

2.80. Je $|A - \lambda E| = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 47\lambda + 60$, tj. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 5$.

2.81.

$$A^5 = \begin{pmatrix} 122 & -121 & 121 \\ -121 & 122 & -121 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-3} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 14 & 13 & -13 \\ 13 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

2.82. Výsledkem je posloupnost $0, 1, 2$.

2.84. Dimenze je 1 pro $\lambda_1 = 4$ a 2 pro $\lambda_2 = 3$.

2.85. Matice B má dvě různá vlastní čísla, a proto takové vyjádření existuje. Např. platí

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Existují právě dvě diagonální matice D , a to

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix},$$

ovšem sloupce matice P^{-1} můžeme nahradit za jejich libovolné nenulové skalární násobky, tedy uvažovaných dvojic D, P je nekonečně mnoho.

Linární modely a maticový počet

*kde jsou matice užitečné?
– nakonec skoro všude...*

Máme už vybudován docela slušný balíček nástrojů a tak je na čase, abychom si maticový počet zkusili použít. Na docela jednoduchých úlohách uvidíme, že teorie nám umožňuje kvalitativní i kvantitativní analýzy a někdy i překvapivě snadno vede k nečekaným výsledkům.

Jakkoliv se může zdát, že předpoklad linearity vztahů mezi veličinami je příliš omezující, v reálných úlohách naopak často právě lineární závislosti buď vystupují přímo nebo je skutečný proces výsledkem iterace mnoha lineárních kroků. I když tomu tak není, můžeme tímto způsobem skutečné procesy alespoň aproximovat.

V této kapitole proto neprve zrekapitulujeme nejjednodušší případ, kdy celý proces je popsán jediným lineárním zobrazením. O co méně tady bude nové teorie, tím více snad bude zajímavé, jak takové modely vznikají v různých oblastech využití matematických nástrojů. Poté se vrátíme k tzv. lineárním diferenčním rovnicím, které lze chápat buď jako rekurentně definované funkce nebo také jako specifický případ lineárního iterovaného procesu. Právě takovým procesům bude věnována část třetí, kde si ukážeme, k jakým kouzlům vede pochopení vlastností vlastních hodnot matic.

Na matice (resp. lineární zobrazení) se také někdy rádi díváme jako na objekty, se kterými bychom rádi pracovali tak, jak to umíme se skaláry. K tomu ale bude třeba docela usilovná práce ve čtvrté části kapitoly. Rychlé a užitečné použití pak ukážeme na tzv. rozkladech matic, které jsou potřebné pro numerické zvládnutí maticového počtu co nejrobustnějším způsobem.

1. Lineární procesy

2.37

3.1. Řešení systému lineárních rovnic. Jednoduché lineární procesy jsou dány lineárními zobrazeními $\varphi : V \rightarrow W$ na vektorových prostorech. Jak si jistě umíme představit, vektor $v \in V$ může představovat stav nějakého námi sledovaného systému, zatímco $\varphi(v)$ pak dá výsledek po uskutečněním procesu.

Pokud chceme dosáhnout předem daného výsledku $b \in W$ takového jednorázového procesu, řešíme problém

$$\varphi(x) = b$$

A. Rekurentní rovnice

Různé lineární závislosti mohou být dobrým nástrojem pro popisání rozličných modelů růstu. Začneme s velmi populárním populačním modelem, který využívá lineární diferenční rovnici druhého řádu:

3.1. Fibonacciho posloupnost. Na začátku jara přinesl čáp na louku dva čerstvě narozené zajíčky, samečka a samičku. Samička je schopná od dvou měsíců stáří povít každý měsíc dva malé zajíčky (samečka a samičku). Nově narození zajíci plodí potomky po jednom měsíci a pak každý další měsíc. Každá samička je březí jeden měsíc a pak opět porodí samečka a samičku. Kolik párů zajíců bude na louce po devíti měsících (pokud žádný neuhyne a žádný se tam „nepřistěhuje“)?

Řešení. Po uplynutí prvního měsíce je na louce pořád jeden pár, nicméně samička zabřezne. Po dvou měsících se narodí první potomci, takže na louce budou dva páry. Po uplynutí každého dalšího měsíce se narodí (tedy přibude) tolik zajíců, kolik zabřezlo zaječic před měsícem, což je přesně tolik, kolik bylo před měsícem párů schopných mít potomka, což je přesně tolik, kolik bylo párů před dvěma měsíci. Celkový počet p_n zajíců po uplynutí n -tého měsíce tak je tak součtem počtů párů v předchozích dvou měsících. Pro počet párů zajíců na louce tedy dostáváme *homogenní lineární rekurentní formuli*

$$(3.1) \quad p_{n+2} = p_{n+1} + p_n, \quad n = 1, \dots,$$

která spolu s počátečními podmínkami $p_1 = 1$ a $p_2 = 1$ jednoznačně určuje počty párů zajíců na louce v jednotlivých měsících. Linearita

formule znamená, že všechny členy posloupnosti (p_n) jsou ve vztahu v první mocnině, rekurence je snad jasná a homogenita značí, že v předpisu chybí absolutní člen (viz dále pro nehomogenní formule). Pro hodnotu n -tého členu můžeme odvodit explicitní formuli. V hledání formule nám pomůže pozorování, že pro jistá r je funkce r^n řešením diferenční rovnice bez počátečních podmínek. Tato r získáme tak, že dosadíme do rekurentního vztahu:

$$\begin{aligned} r^{n+2} &= r^{n+1} + r^n \quad \text{a po vydělení } r^n \text{ dostaneme} \\ r^2 &= r + 1, \end{aligned}$$

což je tzv. *charakteristická rovnice* daného rekurentního vztahu. Naše rovnice má kořeny $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a tedy posloupnosti $a_n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ a $b_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, $n \geq 1$, vyhovují danému vztahu. Vztah také splňuje jejich libovolná tzv. lineární kombinace, tedy posloupnost $c_n = sa_n + tb_n$, $s, t \in \mathbb{R}$. Čísla s a t můžeme zvolit tak, aby výsledná kombinace splňovala dané počáteční podmínky, v našem případě $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Pro jednoduchost je vhodné navíc ještě dodefinovat nultý člen posloupnosti jako $c_0 = 0$ a spočítat s a t z rovnic pro c_0 a c_1 . Zjistíme, že $s = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a tedy

Binet

$$(3.2) \quad p_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n(\sqrt{5})}.$$

Takto zadaná posloupnost splňuje danou rekurentní formuli a navíc počáteční podmínky $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, jedná se tedy o tu jedinou posloupnost, která je těmito požadavky zadána. Všimněte si, že hodnota vzorce (3.2) je celočíselná pro libovolné přirozené n (zadává totiž celočíselnou Fibonacciho posloupnost), i když to tak na první pohled nevypadá. \square

3.2. Zjednodušený model chování hrubého národního produktu.

Uvažujme diferenční rovnici

$$(3.3) \quad y_{k+2} - a(1+b)y_{k+1} + aby_k = 1,$$

kde y_k je národní produkt v roce k . Konstanta a je takzvaný *mezní sklon ke spotřebě*, což je makroekonomický ukazatel, který udává jaký zlomek peněz, které mají obyvatelé k dispozici, utratí, a konstanta b popisuje, jak závisí míra investic soukromého sektoru na mezním sklonu ke spotřebě.

Předpokládáme dále, že velikost národního produktu je normována tak, aby na pravé straně rovnice vyšlo číslo 1.

Spočítejte konkrétní hodnoty pro $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.

Řešení. Nejprve budeme hledat řešení homogenní rovnice (pravá strana nulová) ve tvaru r^k . Číslo r musí být řešením charakteristické

pro neznámý vektor x a známý vektor b .

V pevně zvolených souřadnicích pak máme matici A zobrazení φ a souřadné vyjádření vektoru b . Jak jsme si povšimli už v úvodu druhé kapitoly, množina všech řešení tzv. *homogenní úlohy*

$$A \cdot x = 0$$

je vektorovým podprostorem.

Pokud je dimenze V konečná, řekněme n , a dimenze obrazu zobrazení φ je k , pak řešením této soustavy pomocí převodu na řádkově schodovitý tvar (viz 2.7) zjistíme, že dimenze podprostoru všech řešení je právě $n - k$. Skutečně, protože sloupce matice zobrazení jsou právě obrazy bázevých vektorů, je v matici systému právě k lineárně nezávislých sloupců a tedy i stejný počet lineárně nezávislých řádků. Proto nám zůstane při převodu na řádkový schodovitý tvar právě $n - k$ nulových řádků. Při řešení systému rovnic nám tak zůstane právě $n - k$ volných parametrů a dosazením vždy jednoho z nich s hodnotou jedna a vynulováním ostatních získáme právě $n - k$ lineárně nezávislých řešení. Všechna řešení jsou pak dána právě všemi lineárními kombinacemi těchto $n - k$ řešení. Každé takové $(n - k)$ -tici řešení říkáme *fundamentální systém řešení* daného homogenního systému rovnic. Dokázali jsme:

Věta. Množina všech řešení homogenního systému rovnic

$$A \cdot x = 0$$

pro n proměnných s maticí A hodnosti k je vektorovým podprostorem v \mathbb{K}^n dimenze $n - k$. Každá báze tohoto podprostoru tvoří fundamentální systém řešení daného homogenního systému.

3.2. Nehomogenní systémy rovnic. Uvažme nyní obecný systém rovnic

$$A \cdot x = b.$$

Znovu si uvědomme, že sloupce matice A jsou ve skutečnosti obrazy vektorů standardní báze v \mathbb{K}^n v lineárním zobrazení φ odpovídajícím matici A . Pokud má existovat řešení, musí být b v obrazu φ a tedy musí být lineární kombinací sloupců v A .

Jestliže tedy rozšíříme matici A o sloupec b , můžeme, ale nemusíme, také zvětšit počet lineárně nezávislých sloupců a tedy i řádků. Pokud se tento počet zvětší, pak b v obrazu není a tedy systém rovnic nemůže mít řešení. Jestliže ale naopak máme stejný počet nezávislých řádků i po přidání sloupce b k matici A , znamená to, že sloupec b musí být lineární kombinací sloupců matice A . Koefficienty takové kombinace jsou právě řešení našeho systému rovnic.

Uvažme nyní dvě pevně zvolená řešení x a y našeho systému a nějaké řešení z systému homogenního se stejnou maticí. Pak zjevně

$$A \cdot (x - y) = b - b = 0$$

$$A \cdot (x + z) = 0 + b = b.$$

Můžeme proto shrnout:

3.2frob

3.3. Věta. Řešení nehomogenního systému lineárních rovnic $A \cdot x = b$ existuje právě, když přidáním sloupce b k matici A nezvýšíme počet lineárně nezávislých řádků. V takovém případě je prostor všech řešení dán všemi součty jednoho pevně zvoleného partikulárního řešení systému a a všech řešení systému homogenního se stejnou maticí.

V literatuře se tomuto tvrzení často říká *Frobeniova věta* a obvyklá formulace je „systém má řešení, právě když je hodnota jeho matice rovna hodnotě matice rozšířené“.

3.2a

3.4. Optimalizační lineární modely. Ve vedlejším sloupci jsme tuto kapitolu začali problémy natěračů. Budeme v tom pokračovat. Představme si, že náš velice specializovaný natěrač v černobílém světě je ochoten natírat fasády buď malých rodinných domků nebo naopak velikých veřejných budov a že pochopitelně používá jen černou a bílou barvu. Může si zcela volně vybírat, v jakém rozsahu bude dělat x jednotek plochy prvního typu nebo y jednotek druhého. Předpokládejme však, že jeho maximální pracovní zátěž je ve sledovaném období L jednotek plochy, jeho čistý výnos (tj. po odečtení nákladů) je na jednotku plochy c_1 u malých domků a c_2 u veřejných staveb. Zároveň má k dispozici maximálně W kg bílé a B kg černé barvy. Konečně na jednotku plochy rodinného domu potřebuje w_1 kg bílé barvy a b_1 kg černé, zatímco u veřejných staveb jsou to hodnoty w_2 a b_2 .

Když si to celé shrneme do (ne)rovnic, dostáváme omezení

$$\text{zatez} \quad (3.1) \quad x_1 + x_2 \leq L$$

$$\text{bila} \quad (3.2) \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 \leq W$$

$$\text{cerna} \quad (3.3) \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 \leq B.$$

Celkový čistý výnos natěrače

$$h(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

bychom přitom rádi měli co největší.

Každá z uvedených nerovnic samozřejmě zadává v rovině proměnných (x_1, x_2) polorovinu, ohraničenou přímkou zadanou příslušnou rovnicí, a jistě musíme také předpokládat, že jak x_1 tak x_2 jsou nezáporná reálná čísla, protože záporné velikosti ploch natěrač neumí. Ve skutečnosti máme tedy omezení na hodnoty (x_1, x_2) , které může být buď nespílitelné nebo je dáno jako vnitřek mnohoúhelníku s maximálně pěti vrcholy, viz obrázek.

Obecně hovoříme o *problému lineárního programování*, jestliže hledáme buď maximum nebo minimum lineární formy h na \mathbb{R}^n na množině ohraničené pomocí systému lineárních nerovnic, kterým říkáme *lineární omezení*. Vektoru na pravé straně pak říkáme *vektor omezení*, lineární formě h také *úcelová funkce*.

Formulace s nerovnostmi \leq u omezujících podmínek, nezápornými proměnnými a maximalizací úcelové funkce říkáme *standardní maximalizační problém*. Naopak, *standardní minimalizační problém* je hledání minima úcelové

rovnice

$$x^2 - a(1+b)x + ab = 0, \quad \text{tj. } x^2 - x + \frac{1}{4} = 0,$$

která má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$. Všechna řešení homogenní rovnice jsou potom tvaru $a(\frac{1}{2})^n + bn(\frac{1}{2})^n$.

Dále si všimněme, že najdeme-li nějaké řešení nehomogení rovnice (tzv. partikulární řešení), tak pokud k němu přičteme libovolné řešení homogení rovnice, obdržíme jiné řešení nehomogení rovnice. Lze ukázat, že takto získáme všechna řešení nehomogení rovnice.

V našem případě (tj. pokud jsou všechny koeficienty i nehomogení člen konstantami) je partikulárním řešením konstanta $y_n = c$. Dosazením do rovnice máme $c - c + \frac{1}{4}c = 1$, tedy $c = 4$. Všechna řešení diferenční rovnice

$$y_{k+2} - y_{k+1} + \frac{1}{4} \cdot y_k = 1$$

jsou tedy tvaru $4 + a(\frac{1}{2})^n + bn(\frac{1}{2})^n$. Požadujeme $y_0 = y_1 = 1$ a tyto dvě rovnice dávají $a = b = -3$, tedy řešení naší nehomogení rovnice je

$$y_n = 4 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Opět, protože víme, že posloupnost zadaná touto formulí splňuje danou diferenční rovnici a zároveň dané počáteční podmínky, jedná se vskutku o tu jedinou posloupnost, která je těmito vlastnostmi charakterizována. \square

V předchozím příkladu jsme použili tzv. *metodu neurčitých koeficientů*. Ta spočívá v tom, že na základě nehomogeního členu dané diferenční rovnice „uhodneme“ tvar partikulárního řešení. Tvary partikulárních řešení jsou známy pro celou řadu nehomogeních členů. Např. rovnice

$$(3.4) \quad y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \dots + a_k y_n = P_m(n),$$

kde $P(m)$ je polynom stupně n a příslušná charakteristická rovnice má reálné kořeny má (skoro vždy) partikulární řešení tvaru $Q_m(n)$, $Q_m(n)$ je polynom stupně m .

Další možnou způsobem řešení je tzv. *metoda variace konstant*, kdy nejprve najdeme řešení

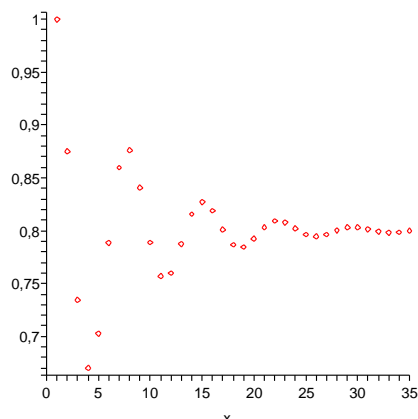
$$y(n) = \sum_{i=1}^k c_i f_i(n)$$

zhomogenizované rovnice a poté uvažujeme konstanty c_i jako funkce $c_i(n)$ proměnné n a hledáme partikulární řešení dané rovnice ve tvaru

$$y(n) = \sum_{i=1}^k c_i(n) f_i(n).$$

Ukažme si na obrázku hodnoty f_i pro $i \leq 35$ a rovnici

$$f(n) = \frac{9}{8}f(n-1) - \frac{3}{4}f(n-2) + \frac{1}{2}, \quad f(0) = f(1) = 1.$$



Dále si procvičme, jak řešit lineární diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Posloupnost vyhovující dané rekurentní rovnici druhého řádu je dána jednoznačně, pokud zadáme navíc nějaké dva její sousední členy. Znovu si povšimněme dalšího využití komplexních čísel: pro určení explicitního vzorce pro n -tý člen posloupnosti reálných čísel můžeme potřebovat výpočty s čísly komplexními (to nastává tehdy, pokud má charakteristický polynom dané diferenční rovnice komplexní kořeny).

3.3. Nalezněte explicitní vzorec pro posloupnost vyhovující následující lineární diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = 2x_n + n, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2.$$

3.2b

Řešení. Zhomogenizovaná rovnice je

$$x_{n+2} = 2x_n.$$

Její charakteristický polynom je $x^2 - 2$, jeho kořeny jsou $\pm\sqrt{2}$. Řešení zhomogenizované rovnice je tedy tvaru

$$a(\sqrt{2})^n + b(-\sqrt{2})^n, \quad \text{pro libovolné } a, b \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení budeme hledat metodou neurčitých koeficientů. Nehomogenní část dané rovnice je lineární polynom n , partikulární řešení proto budeme nejprve hledat ve tvaru lineárního polynomu v proměnné n , tedy $kn + l$, kde $k, l \in \mathbb{R}$. Dosazením do původní rovnice dostáváme

$$k(n+2) + l = 2(kn + l) + n.$$

Porovnáním koeficientů u proměnné n na obou stranách rovnice dostáváme vztah $k = 2k + 1$, tedy $k = -1$, porovnáním absolutních členů pak vztah $2k + l = 2l$, tedy $l = -2$. Celkem je tedy partikulárním řešením je posloupnost $-n - 2$.

funkce při omezujících podmínkách s nerovnostmi \geq , přičemž opět uvažujeme nezáporné proměnné.

Je snadné nahlédnout, že každý obecný problém lineárního programování lze převést na kterýkoliv ze standardních. Kromě změn znamének můžeme ještě pracovat s rozdělením případných proměnných bez omezení znaménka na rozdíl dvou kladných. Bez újmy na obecnosti se tedy budeme dále věnovat jen standardnímu maximalizačnímu problému.

Jak takový problém řešit? Hledáme maximum lineární formy h na podmnožinách M vektorového prostoru, které jsou zadány lineárními nerovnostmi, tj. v rovině pomocí průniku polorovin, obecně budeme v další kapitole hovořit o poloprostorech. Všimněme si, že každá lineární forma na reálném vektorovém prostoru $h: V \rightarrow \mathbb{R}$ (tj. libovolná lineární skalární funkce) v každém vybraném směru buď stále roste nebo stále klesá. Přesněji řečeno, jestliže vybereme pevný počáteční vektor $u \in V$ a „směrový“ vektor $v \in V$, pak složením naší formy h s parametrizací dostaneme

$$t \mapsto h(u + tv) = h(u) + th(v).$$

Tento výraz je skutečně s rostoucím parametrem t vždy buď rostoucí nebo klesající, případně konstantní (podle toho, zda je $h(v)$ kladné nebo záporné, případně nulové).

Jistě tedy musíme očekávat, že problémy podobné tomu s natěračem budou buď nespílitelné (když je množina zadaná omezením prázdná) nebo bude výnos neohraničený (když omezení zadají neomezenou část celého prostoru a forma h v některém z neomezených směrů bude nenulová) nebo budou mít maximální řešení v alespoň jednom z „vrcholů“ množiny M (přičemž zpravidla půjde o jediný vrchol, může ale jít o konstantní maximální hodnotu na části hranice oblasti M).

Tady vsunout rameček o Dantzigovi, algoritmech, odkaz apod.

3.5. Formulace pomocí lineárních rovnic. Ne vždy je nalezení optima tak snadné jako v předchozím případě. Problém může zahrnovat velmi mnoho proměnných a velmi mnoho omezení a jen rozhodnout, zda je množina M splnitelných bodů neprázdná je problematické.

Nemáme tu prostor na úplnou teorii, zmíníme ale alespoň dva směry úvah, které ukazují, že ve skutečnosti bude řešení naleznutelné vždy podobně, jako tomu bylo v dvojrozměrném problému v předchozím odstavci.

Začneme srovnáním se systémy lineárních rovnic – těm už totiž rozumíme dobře. Zapišme si rovnice (3.1)–(3.3) vektorově v obecném tvaru:

$$A \cdot x \leq b,$$

kde x je nyní n -rozměrný vektor, b je m -rozměrný vektor a A odpovídající matice a nerovností myslíme jednotlivé nerovnosti po řádcích. Maximalizovat chceme součin $c \cdot x$ pro daný řádkový vektor koeficientů lineární formy h . Jestliže si pro každou z rovnic přidáme jednu pomocnou proměnnou a ještě si přimyslíme proměnnou z jako hodnotu lineární formy

h , můžeme celý problém přepsat jako systém lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & -c & 0 \\ 0 & A & E_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ x \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

kde matice je složena z bloků o $1 + n + m$ sloupcích a $1 + m$ řádkách a tomu odpovídají jednotlivé komponenty vektorů. Dodatečně přitom požadujeme pro všechny souřadnice X i x_s nezápornost.

Pokud tedy má daný systém rovnic řešení, hledáme v této množině řešení takové hodnoty proměnných z , x a x_s , aby všechna x byla nezáporná a z maximální možné. K diskusi, jak to obecně může dopadat se vrátíme z pohledu afinní geometrie v odstavci 4.11 na straně 208.

Konkrétně v našem problému černobílého naterače bude systém lineárních rovnic vypadat takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_1 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & w_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ W \\ B \end{pmatrix}$$

3.2c

3.6. Dualita v lineárním programování. Uvažujme reálnou matici A s m řádky a n sloupci, vektor omezení b a řádkový vektor c zadávající účelovou funkci. Z těchto dat můžeme sestavit dva problémy lineárního programování pro $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^m$.

Maximalizační problém: Maximalizuj $c \cdot x$ za podmínky $A \cdot x \leq b$ a zároveň $x \geq 0$.

Minimalizační problém: Minimalizuj $y^T \cdot b$ za podmínky $y^T \cdot A \geq c^T$ a zároveň $y \geq 0$.

Říkáme, že tyto problémy jsou vzájemně duální. K odvození dalších vlastností problémů lineárního programování zavedeme trochu terminologie.

Řekneme, že jde o *idxřešitelný* problém, jestliže existuje nějaký *přípustný vektor* x , který vyhoví všem omezujícím podmínkám. Řešitelný maximalizační, resp. minimalizační problém je *ohraničený*, jestliže je účelová funkce na množině vyhovující omezením ohraničená shora, resp. zdola.

Lemma. *Je-li $x \in \mathbb{R}^n$ přípustný vektor pro standardní maximalizační problém a $y \in \mathbb{R}^m$ je přípustný vektor pro duální minimalizační problém, pak pro účelové funkce platí*

$$c \cdot x \leq y^T \cdot b$$

DŮKAZ. Jde vlastně jen o snadné pozorování: $x \geq 0$ a $c^T \leq y^T \cdot A$, ale také $y \geq 0$ a $A \cdot x \leq b$, proto musí platit i

$$c \cdot x \leq y^T \cdot A \cdot x \leq y^T \cdot b,$$

což jsme měli dokázat. \square

Řešení dané nehomogenní diferencní rovnice druhého řádu bez počátečních podmínek jsou tedy tvaru $a(\sqrt{2})^n + b(-\sqrt{2})^n - n - 2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Nyní dosazením do počátečních podmínek určíme neznámé $a, b \in \mathbb{R}$. Pro početní jednoduchost použijeme malého triku: z počátečních podmínek a daného rekurentního vztahu vypočteme člen x_0 : $x_0 = \frac{1}{2}(x_2 - 0) = 1$. Daný rekurentní vztah spolu s podmínkami $x_0 = 1$ a $x_1 = 1$ pak zřejmě splňuje tatáž posloupnost, která splňuje původní počáteční podmínky. Máme tedy následující vztahy pro a, b :

$$x_0: \quad a(\sqrt{2})^0 + b(-\sqrt{2})^0 - 2 = 1, \quad \text{tedy } a + b = 3,$$

$$x_1: \quad \sqrt{2}a - \sqrt{2}b = 5,$$

jejichž řešením dostáváme $a = \frac{6+5\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{6-5\sqrt{2}}{4}$. Řešením je posloupnost

$$x_n = \frac{6 + 5\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2})^n + \frac{6 - 5\sqrt{2}}{4}(-\sqrt{2})^n - n - 2.$$

 \square

3.4. Určete reálnou bázi prostoru řešení homogenní diferencní rovnice

$$x_{n+4} = x_{n+3} + x_{n+1} - x_n,$$

Řešení. Charakteristický polynom dané rovnice je $x^4 - x^3 - x + 1$. Hledáme-li jeho kořeny, řešíme reciprokou rovnici

$$x^4 - x^3 - x + 1 = 0$$

Standardním postupem nejprve vydělíme rovnici výrazem x^2 a poté zavedeme substituci $t = x + \frac{1}{x}$, tedy $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$. Obdržíme rovnici

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

s kořeny $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Pro obě tyto hodnoty neznámé t pak řešíme zvlášť rovnici danou substitučním vztahem:

$$x + \frac{1}{x} = -1.$$

Ta má dva komplexní kořeny $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)$ a $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) - i \sin(2\pi/3)$.

Pro druhou hodnotu neznámé t dostáváme rovnici

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

s dvojnásobným kořenem 1. Celkem je tedy bazí hledaného vektorového prostoru posloupností, které jsou řešením dané diferencní rovnice, následující čtveřice posloupností: $\{-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{-\frac{1}{2} -$

$i\sqrt{3}\}_{n=1}^{\infty}, \{1\}_{n=1}^{\infty}$ (konstantní posloupnost) a $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. Hledáme-li však reálnou bázi, musíme nahradit dva generátory (posloupnosti) z této báze s komplexními hodnotami generátory reálnými. Protože tyto generátory jsou geometrické řady, jejichž libovolné členy jsou komplexně sdružená čísla, můžeme vzít jako vhodné generátory posloupnosti dané polovinou součtu, resp. polovinou i -násobku rozdílu, daných komplexních generátorů. Takto dostaneme následující reálnou bázi řešení: $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ (konstantní posloupnost), $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos(n \cdot 2\pi/3)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\sin(n \cdot 2\pi/3)\}_{n=1}^{\infty}$. \square

3.5. Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferencní rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2.$$

Řešení. Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b2^n$. Partikulárním řešením je konstanta $-1/2$. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b2^n - \frac{1}{2}.$$

Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = -5/6$, $b = 5/6$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$-\frac{5}{6}(-1)^n + \frac{5}{6}2^{n-1} - \frac{1}{2}.$$

\square

3.6. Určete posloupnost reálných čísel, která vyhovuje následující nehomogenní diferencní rovnici s počátečními podmínkami:

$$2x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n + 2, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Řešení. Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b(1/2)^n$. Partikulárním řešením je konstanta 1. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1.$$

Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = 1$, $b = 4$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$(-1)^n + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1.$$

\square

Odtud okamžitě vidíme, že jestliže jsou oba duální problémy řešitelné, pak musí být i ohraničené. Ještě zajímavější je následující postřeh přímo vycházející z nerovnosti v předchozí větě.

Důsledek. Jestliže existují přípustné vektory x a y duálních lineárních problémů takové, že pro účelové funkce platí $c \cdot x = y^T \cdot b$, pak jde o optimální řešení obou problémů.

3.7. Věta (O dualitě). Je-li standardní problém lineárního programování řešitelný a ohraničený, pak je takový i jeho duální problém, optimální hodnoty jejich účelových funkcí splývají a optimální řešení vždy existuje.

DŮKAZ. Jeden směr tvrzení jsme již dokázali v předchozím důsledku. Zbývá důkaz existence optimálního řešení. Ten se nejnadhěji dokáže konstrukcí funkčního algoritmu, tomu se však teď nebudeme v podrobnostech věnovat. K chybějící části důkazu se vrátíme na straně 208 v afinní geometrii. \square

Povšimněme si ještě pěkného přímého důsledku právě zformulované věty o dualitě:

Důsledek (Věta o ekvilibriu). Uvažme přípustné vektory x a y pro standardní maximalizační problém a jeho duální problém z definice 3.6. Pak jsou oba tyto vektory optimální, právě tehdy když $y_i = 0$ pro všechny souřadnice s indexem i , pro které $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i$ a zároveň $x_j = 0$ pro všechny souřadnice s indexem j , pro které $\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} > c_j$.

DŮKAZ. Předpokládejme, že platí oba vztahy z předpokladu impliace ve větě. Pak tedy můžeme v následujícím výpočtu počítat s rovností, protože sčítance s ostrou nerovností mají stejně u sebe nulové koeficienty:



$$\sum_{i=1}^m y_i b_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i a_{ij} x_j$$

a z stejného důvodu také

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Tím máme dokázáno jednu implikaci z tvrzení díky větě o dualitě.

Předpokládejme nyní, že x a y jsou skutečně optimální vektory. Víme tedy, že platí

$$\sum_{i=1}^m y_i b_i \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i a_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

ale zároveň jsou si levé a pravé strany rovny. Nastává tedy všude rovnost. Přepíšeme-li prvou rovnost jako

$$\sum_{i=1}^m y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = 0$$

vidíme, že může být naplněna jen za podmínek ve větě, protože jde o nulový součet samých nezáporných čísel. Z druhé rovnosti stejně plyne i druhé zbylé tvrzení a důkaz je ukončen. \square

Věty o dualitě a ekvilibriu jsou užitečné při řešení problémů lineárního programování, protože nám ukazují souvislosti mezi nulovostí jednotlivých dodatečných proměnných a naplňování omezujících podmínek.

3.2e

3.8. Poznámky o lineárních modelech v ekonomii. Náš velice schematický problém černobílého natěrače z odstavce 3.4 můžeme použít jako ilustraci jednoho z typických ekonomických modelů, tzv. *model plánování výroby*. Jde přitom o zachycení problému jako celku, tj. se zahrnutím vnitřních i vnějších vztahů. Levé strany rovnic (3.1), (3.2), (3.3) i účelové funkce $h(x_1, x_2)$ jsou vyjádřením různých výrobních vztahů. Podle povahy problému pak jsou požadovány na pravé straně buď přesné hodnoty (pak řešíme systém rovnic) nebo požadujeme kapacitní omezení a optimalizaci účelu (a pak dostáváme právě problémy lineárního programování).

Můžeme tak tedy obecně řešit problém alokace zdrojů při dodavatelských omezeních a přitom buď minimalizovat náklady nebo maximalizovat zisk. Z tohoto pohledu lze také nahlížet dualizaci problémů. Jestliže by náš natěrač chtěl hypoteticky nastavit svoje náklady spojené se svojí prací y_L , bílou barvou y_W a černou barvou y_B , pak bude chtít minimalizovat účelovou funkci

$$L \cdot y_L + W y_W + B y_B$$

při omezujících podmínkách

$$\begin{aligned} y_L + w_1 y_W + b_1 y_B &\geq c_1 \\ y_L + w_2 y_W + b_2 y_B &\geq c_2. \end{aligned}$$

To je právě duální problém k původnímu a hlavní věta 3.7 říká, že optimální stav je takový, kdy účelové funkce mají stejnou hodnotu.

V ekonomických modelech najdeme mnoho modifikací. Jednou z nich jsou *úlohy finančního plánování*, související s optimalizací portfolia. Určujeme přitom objemy investic do jednotlivých investičních variant s cílem držet se daných omezení na rizika a optimalizovat přitom zisk, resp. při očekávaném objemu minimalizovat rizika.

Dalším obvyklým modelem jsou *marketingové aplikace*, např. alokace nákladů na reklamy v různých médiích nebo umístování reklam do časových termínů. Omezujícími podmínkami bude disponibilní rozpočet, rozložení cílových skupin apod.

Velmi obvyklé jsou modely *výživových problémů*, tj. návrh návek různých komponent výživy s daným složením a omezujícími požadavky na celkové objemy výživových látek.

3.7. Řešte následující diferenční rovnici:

$$x_{n+4} = x_{n+3} - x_{n+2} + x_{n+1} - x_n.$$

Řešení. Z teorie víme, že prostor řešení této diferenční rovnice bude čtyřdimenzionální vektorový prostor, jehož generátory zjistíme z kořenů charakteristického polynomu dané rovnice. Charakteristická rovnice je

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Jedná se o reciprokou rovnici (to znamená, že koeficienty u $(n-k)$ -té a k -té mocniny x , $k = 1, \dots, n$, jsou shodné). Zavedeme tedy substituci $u = x + \frac{1}{x}$. Po vydělení rovnice x^2 (nula nemůže být kořenem) a substituci (všimněte si, že $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$) dostáváme

$$x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = u^2 - u - 1 = 0.$$

Dostáváme tedy neznámé $u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Odtud pak z rovnice $x^2 - ux + 1 = 0$ určíme čtyři kořeny

$$x_{1,2,3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Nyní si všimněme, že kořeny charakteristické rovnice jsme mohli „uhodnout“ rovnou. Je totiž

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1),$$

a tedy jsou kořeny polynomu $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ i kořeny polynomu $x^5 + 1$, což jsou páté odmocniny z -1 . Takto dostáváme, že řešením charakteristického polynomu jsou čísla $x_{1,2} = \cos(\frac{\pi}{5}) \pm i \sin(\frac{\pi}{5})$ a $x_{3,4} = \cos(\frac{3\pi}{5}) \pm i \sin(\frac{3\pi}{5})$. Tedy reálnou bází prostoru řešení dané diferenční rovnice je například báze posloupností $\cos(\frac{n\pi}{5})$, $\sin(\frac{n\pi}{5})$, $\cos(\frac{3n\pi}{5})$ a $\sin(\frac{3n\pi}{5})$, což jsou siny a kosiny argumentů příslušných mocnin kořenů charakteristického polynomu.

Všimněme si, že jsme mimochodem odvodili algebraické výrazy pro $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos(\frac{3\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ a $\sin(\frac{3\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ (vzhledem k tomu, že všechny kořeny rovnice mají absolutní hodnotu 1, tak jsou to reálné, resp. imaginární, části příslušných kořenů). \square

3.8. Určete explicitní vyjádření posloupnosti vyhovující diferenční rovnici $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n$ se členy $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

Řešení. Kořeny charakteristického polynomu $x^2 - 2x + 2$ jsou $1 + i$ a $1 - i$. Báze (komplexního) vektorového prostoru řešení je tedy tvořena posloupnostmi $y_n = (1 + i)^n$ a $z_n = (1 - i)^n$. Hledanou posloupnost můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci těchto posloupností (s komplexními koeficienty). Je tedy $x_n = a \cdot y_n + b \cdot z_n$, kde $a = a_1 + ia_2$,

$b = b_1 + ib_2$. Z rekurentního vztahu dopočteme $x_0 = \frac{1}{2}(2x_1 - x_2) = 0$ a dosazením $n = 0$ a $n = 1$ do uvažovaného vyjádření x_n dostáváme

$$\begin{aligned} 1 = x_0 &= a_1 + ia_2 + b_1 + ib_2 \\ 2 = x_1 &= (a_1 + ia_2)(1 + i) + (b_1 + ib_2)(1 - i), \end{aligned}$$

a porovnáním reálné a komplexní složky obou rovnic dostáváme lineární soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 1 \\ a_2 + b_2 &= 0 \\ a_1 - a_2 + b_1 + b_2 &= 2 \\ a_1 + a_2 - b_1 + b_2 &= 0 \end{aligned}$$

3.10

s řešením $a_1 = b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ a $a_2 = -1/2$. Celkem můžeme hledanou posloupnost vyjádřit jako

$$x_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(1 + i)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i)^n.$$

Posloupnost můžeme však vyjádřit i pomocí reálné báze (komplexního) vektorového prostoru řešení, totiž posloupností $u_n = \frac{1}{2}(y_n + z_n) = (\sqrt{2})^n \cos(\frac{n\pi}{4})$ a $v_n = \frac{1}{2}i(z_n - y_n) = (\sqrt{2})^n \sin(\frac{n\pi}{4})$. Matice přechodu od komplexní báze k reálné je

$$T := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix},$$

inverzní matice je $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, pro vyjádření posloupnosti x_n pomocí reálné báze, tj. souřadnice (c, d) posloupnosti x_n v bázi $\{u_n, v_n\}$, pak máme

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

máme tedy alternativní vyjádření posloupnosti x_n , ve kterém se nevykytují komplexní čísla (ale zase jsou v něm odmocniny):

$$x_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

které jsme samozřejmě mohli získat též řešením dvou lineárních rovnic o dvou neznámých c, d , totiž $1 = x_0 = c \cdot u_0 + d \cdot v_0 = c$ a $2 = x_1 = c \cdot u_1 + d \cdot v_1 = c + d$. \square

3.9. Určete explicitní vyjádření posloupnosti vyhovující diferenční rovnici $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 3x_n$ se členy $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.

3.10. Určete explicitní vzorec pro n -tý člen jediné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovující následujícím podmínkám:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Problémy lineárního programování se objevují při personálních úlohách, kdy jsou pracovníci s různými kvalifikacemi a dalšími předpoklady rozdělováni do směn. Obvyklé jsou také problémy *směšování*, problémy *dělení* a problémy *distribuce zboží*.

2. Diferenční rovnice



Diferenčními rovnicemi jsme se stručně zabývali již v první kapitole, byť pouze těmi prvního řádu. Nyní si ukážeme obecnou teorii pro lineární rovnice s konstantními koeficienty, která poskytuje nejen velmi praktické nástroje, ale je také pěknou ilustrací pro koncepty vektorových podprostorů a lineárních zobrazení.

HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENČNÍ ROVNICE ŘÁDU k

3.9. Definice. Homogenní lineární diferenční rovnice řádu k je dána výrazem

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0,$$

kde koeficienty a_i jsou skaláry, které mohou případně i záviset na n .

Říkáme také, že taková rovnost zadává *homogenní lineární rekurenci* řádu k a často zapisujeme hledanou posloupnost jako funkci

$$x_n = f(n) = -\frac{a_1}{a_0} f(n-1) - \dots - \frac{a_k}{a_0} f(n-k).$$

Řešením této rovnice nazýváme posloupnost skalárů x_i , pro všechna $i \in \mathbb{N}$, případně $i \in \mathbb{Z}$, které vyhovují rovnici s libovolným pevným n .



Libovolným zadáním k po sobě jdoucích hodnot x_i jsou určeny i všechny ostatní hodnoty jednoznačně. Skutečně, pracujeme nad polem skalárů, takže hodnoty a_0 i a_k jsou invertibilní a proto z definičního vztahu lze vždy spočítat hodnotu x_n ze známých ostatních hodnot a stejně tak pro x_{n-k} . Indukcí tedy okamžitě dokážeme, že lze jednoznačně dopočítat všechny hodnoty jak pro kladná tak pro záporná celá n .

Prostor všech nekonečných posloupností x_i je vektorový prostor, kde sčítání i násobení skaláry je dáno po složkách. Přímo z definice je zjevné, že součet dvou řešení homogenní lineární rovnice nebo skalární násobek řešení je opět řešení. Stejně jako u homogenních systémů lineárních tedy vidíme, že množina všech řešení je vektorový podprostor.

Počáteční podmínka na hodnoty řešení je dána jako k -rozměrný vektor v \mathbb{K}^k . Součtu počátečních podmínek odpovídá součet příslušných řešení a obdobně se skalárními násobky. Dále si všimněme, že dosazením nul a jedniček do zadávaných počátečních k hodnot snadno získáme k lineárně nezávislých řešení naší rovnice. Jakkoliv jsou tedy zkoumané vektory nekonečné posloupnosti skalárů, samotný prostor všech řešení je konečněrozměrný, předem víme, že jeho

dimenze bude rovna řádu rovnice k , a umíme snadno určit bázi všech těchto řešení. Opět hovoříme o *fundamentálním systému řešení* a všechna ostatní řešení jsou právě jejich lineární kombinace.

Jak jsme si již ověřili, vybereme-li k po sobě jdoucích indexů $i, i + 1, \dots, i + k - 1$, zadává homogenní lineární diferenční rovnice lineární zobrazení $\mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^\infty$ k -rozměrných vektorů počátečních hodnot do nekonečně rozměrných posloupností týchž skalárů. Nezávislost různých takových řešení je ekvivalentní nezávislosti počátečních hodnot, ale tu umíme snadno rozpoznat pomocí determinantu. Máme-li k -tici řešení $(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]})$, pak jde o nezávislá řešení právě, když následující determinant, tzv. *Casoratián* je nenulový pro jedno (a pak už všechna) n

$$C(x_n^{[1]}, \dots, x_n^{[k]}) = \begin{vmatrix} x_n^{[1]} & \cdots & x_n^{[k]} \\ x_{n+1}^{[1]} & \cdots & x_{n+1}^{[k]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1}^{[1]} & \cdots & x_{n+k-1}^{[k]} \end{vmatrix} \neq 0$$

3.11

3.10. Řešení homogenních rekurencí s konstantními koeficienty. Těžko bychom hledali univerzální postup, jak hledat řešení obecných homogenních lineárních diferenčních rovnic, tj. přímo spočítatelný výraz pro obecné řešení x_n .

V praktických modelech ale velice často vystupují rovnice, kde jsou koeficienty konstantní. V tomto případě se daří uhadnout vhodnou formu řešení a skutečně se nám podaří najít k lineárně nezávislých možností. Tím budeme mít problém vyřešený, protože všechny ostatní budou jejich lineární kombinací.



Pro jednoduchost začneme rovnicemi druhého řádu. Takové potkáváme obzvlášť často v praktických problémech, kde se vyskytují vztahy závislé na dvou předchozích hodnotách. Lineární diferenční rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty (resp. lineární rekurencí druhého řádu s konstantními koeficienty) tedy rozumíme předpis

e1.8

$$(3.4) \quad f(n+2) = a \cdot f(n+1) + b \cdot f(n) + c,$$

kde a, b, c jsou známé skalární koeficienty.

Např. v populačních modelech můžeme zohlednit, že jedinci v populaci dospívají a pořádně se rozmnožují až o dvě období později (tj. přispívají k hodnotě $f(n+2)$ násobkem $b \cdot f(n)$ s kladným $b > 1$), zatímco nedospělí jedinci vysílí a zničí část dospělé populace (tj. koeficient a pak bude záporný). Navíc si je třeba někdo pěstuje a průběžně si ujídá konstantní počet $c < 0$ v každém jednotlivém období.

Speciálním takovým příkladem s $c = 0$ je např. Fibonacciho posloupnost čísel y_0, y_1, \dots , kde $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$.

Jestliže při řešení matematického problému nemáme žádný nový nápad, vždy můžeme zkusit, do jaké míry funguje známé řešení podobných úloh. Zkusme proto dosadit do rovnice (3.4) s koeficientem $c = 0$ podobné řešení jako u

3.11. Určete explicitní vzorec pro n -tý člen jediné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vyhovující následujícím podmínkám:

$$-x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

3.12. Určete explicitní vzorec pro n -tý člen jediné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vyhovující následujícím podmínkám:

$$-x_{n+3} = 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

B. Populační modely

Populační modely, kterými se budeme zabývat, budou rekurentní vztahy ve vektorových prostorech. Neznámou veličinou tedy nebude posloupnost čísel nýbrž posloupnost vektorů. Roli koeficientů pak budou hrát matice. Začneme s jednoduchým (dvourozměrným) příkladem.

3.13. Spoření. S kamarádem spoříme na společnou dovolenou následujícím způsobem. Na začátku dám 10 EUR a on 20 EUR. Každý další měsíc pak dá každý z nás tolik, co minulý měsíc plus polovinu toho, co dal ten druhý z nás předchozí měsíc. Kolik budeme mít za rok dohromady naspořeno? Kolik peněz budu platit dvanáctý měsíc?

Řešení. Obnos peněz, který budu platit n -tý měsíc já označím x_n a to, co bude platit kamarád označím y_n . První měsíc tedy dáme $x_1 = 10, y_1 = 20$. Pro další platby můžeme psát rekurentní rovnice:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}x_n \end{aligned}$$

Pokud označíme společný vklad $z_n = x_n + y_n$, pak sečtením uvedených rovnic dostaneme vztah $z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2}z_n = \frac{3}{2}z_n$. To je geometrická řada a dostáváme tedy $z_n = 3 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$. Za rok budeme mít celkem naspořeno $z_1 + z_2 + \dots + z_{12}$. Tento částečný součet umíme lehce spočítat

$$3(1 + \frac{3}{2} + \dots + (\frac{3}{2})^{11}) = 3 \frac{(\frac{3}{2})^{12} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \doteq 772,5.$$

Za rok tedy dohromady naspoříme přes 772 euro.

Rekurentní soustavu rovnic popisující systém spoření můžeme napsat pomocí matice následovně

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Jde tedy opět o geometrickou řadu. Jejími prvky jsou teď ovšem vektory a kvocient není skalár, ale matice. Řešení lze nicméně najít obdobně

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Mocninu matice působící na vektor (x_1, y_1) můžeme nalézt, když vyjádříme tento vektor v bázi vlastních vektorů. Charakteristický polynom matice je $(1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4} - 0$ a vlastní čísla jsou tedy $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Příslušné vlastní vektory jsou po řadě $(1, 1)$ a $(1, -1)$. Pro počáteční vektor $(x_1, y_1) = (1, 2)$ spočítáme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a proto

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že já zaplatím 12. měsíc

$$x_{12} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} - \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \doteq 130$$

eur a můj kamarád v podstatě stejně. \square

Poznámka. Předchozí příklad lze řešit i bez matice následujícím přepsáním rekurentní rovnice: $x_n = x_n + \frac{1}{2}y_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}z_n$.

Předcházející příklad byl vlastně modelem růstu (v daném případě růstu množství naspořených peněz). Nyní přejdeme k modelům růstu popisujícím primárně růst nějaké populace. Leslieho model růstu, který jsme detailně rozebrali v teorii, velmi dobře popisuje nejen populace ovcí (podle kterých byl sestaven), ale uplatňuje se například i při modelování následujících populací:

3.14. Zajáci podruhé. Ukažme si, jak můžeme Leslieho modelem popsat populaci zajíců na louce, kterou jsme se zaobírali v příkladu (3.1). Uvažujme, že zajáci umírají po dovršení devátého měsíce věku (v původním modelu byl věk zajíců neomezen). Označme počty zajíců (resp. zaječíc) podle stáří v měsících v čase t (měsíců) jako $x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t)$, tak počty zajíců v jednotlivých věkových skupinách budou po jednom měsíci $x_1(t+1) = x_2(t) + x_3(t) + \dots + x_9(t)$, $x_i(t+1) = x_{i-1}(t)$, pro $i = 2, 3, \dots, 10$, neboli

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \\ x_6(t+1) \\ x_7(t+1) \\ x_8(t+1) \\ x_9(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \\ x_8(t) \\ x_9(t) \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom uvedené matice je $\lambda^9 - \lambda^7 - \lambda^6 - \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$. Kořeny této rovnice nejsme schopni explicitně vyjádřit, jeden z nich však velmi dobře odhadnout, $\lambda_1 \doteq 1, 608$ (proč musí být menší než $(\sqrt{5} + 1)/2$?). Populace bude tedy podle tohoto modelu růst přibližně s geometrickou řadou $1, 608^t$.

rovnice lineárních, tj. $f(n) = \lambda^n$ pro nějaké skalární λ . Dosažením dostáváme

$$\lambda^{n+2} - a\lambda^{n+1} - b\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - a\lambda - b) = 0.$$

Tento vztah bude platit buď pro $\lambda = 0$ nebo při volbě hodnot

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b}).$$

Zjistili jsme tedy, že skutečně opět taková řešení fungují, jen musíme vhodně zvolit skalár λ . To nám ale nestačí, protože my chceme najít řešení pro jakékoliv počáteční hodnoty $f(0)$ a $f(1)$, a zatím jsme našli jen dvě konkrétní posloupnosti splňující danou rovnici (a nebo dokonce jen jednu, pokud je $\lambda_2 = \lambda_1$).

Jak jsem již dovedli i u zcela obecných lineárních rekurencí, součet dvou řešení $f_1(n)$ a $f_2(n)$ naší rovnice $f(n+2) - a \cdot f(n+1) - b \cdot f(n) = 0$ je zjevně opět řešením téže rovnice a totéž platí pro konstantní násobky řešení. Naše dvě konkrétní řešení proto poskytují daleko obecnější řešení

$$f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

pro libovolné skaláry C_1 a C_2 a pro jednoznačné vyřešení konkrétní úlohy se zadanými počátečními hodnotami $f(0)$ a $f(1)$ nám zbývá jen najít příslušné konstanty C_1 a C_2 . (A také si musíme ujasnit, zda to pro všechny počáteční hodnoty půjde).

3.11. Volba skalárů. Ukažme si, jak to může fungovat alespoň na jednom příkladě. Soustředíme se přitom na problém, že kořeny charakteristického polynomu nevychází obecně ve stejném oboru skalárů, jako jsou koeficienty v rovnici. Řešme tedy problém:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} y_{n+2} &= y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n \\ y_0 &= 2, y_1 = 0. \end{aligned}$$

V našem případě je tedy $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$ a zjevně

$$y_0 = C_1 + C_2 = 2$$

$$y_1 = \frac{1}{2}C_1(1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2}C_2(1 - \sqrt{3})$$

je splněno pro právě jednu volbu těchto konstant. Přímým výpočtem $C_1 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $C_2 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a naše úloha má jediné řešení

$$f(n) = \left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \frac{1}{2^n} (1 + \sqrt{3})^n + \left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \frac{1}{2^n} (1 - \sqrt{3})^n.$$

Všimněme si, že i když nalezená řešení pro rovnice s celočíselnými koeficienty vypadají složitě a jsou vyjádřena pomocí iracionálních (případně komplexních) čísel, o samotném řešení dopředu víme, že je celočíselné též. Bez tohoto „úroku“ do většího oboru skalárů bychom ovšem obecné řešení napsat neuměli.

S podobnými jevy se budeme potkávat velice často. Obecné řešení nám také umožňuje bez přímého vyčíslování konstant diskutovat kvalitativní chování posloupnosti čísel

$f(n)$, tj. zda se budou s rostoucím n blížit k nějaké pevné hodnotě nebo budou oscilovat v nějakém rozsahu nebo utečou do neomezených kladných nebo záporných hodnot.

3.11a



3.12. Obecný případ homogenních rekurencí. Zkusme nyní stejně jako v případě druhého řádu dosadit volbu $x_n = \lambda^n$ pro nějaký (zatím neznámý) skalár λ do obecné homogenní rovnice z definice 3.9. Dostáváme pro každé n podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} \dots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je λ kořenem tzv. *charakteristického polynomu* v závorce. Charakteristický polynom ale už není závislý na n .

Předpokládejme, že má charakteristický polynom k různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Můžeme za tímto účelem i rozšířit uvažované pole skalárů, např. \mathbb{Q} na \mathbb{R} nebo \mathbb{R} na \mathbb{C} , protože výsledkem výpočtu pak stejně budou řešení, která opět zůstanou v původním poli díky samotné rovnici. Každý z kořenů nám dává jedno možné řešení

$$x_n = (\lambda_i)^n.$$

Abychom byli uspokojeni, potřebujeme k lineárně nezávislých řešení.

K tomu nám postačí ověřit nezávislost dosazením k hodnot pro $n = 0, \dots, k-1$ pro k možností λ_i do Casoratiánu viz 3.9. Dostaneme tak tzv. Vandermondovu matici a je pěkným (ale ne úplně snadným) cvičením spočítat, že pro všechna k a jakékoliv k -tice různých λ_i je determinant takovéto matice nenulový, viz příklad 2.22 na straně 84. To ale znamená, že zvolená řešení jsou lineárně nezávislá.

Nalezli jsme tedy fundamentální systém řešení homogenní diferenční rovnice v případě, že všechny kořeny jejího charakteristického polynomu jsou po dvou různé.

Uvažme nyní násobný kořen λ a dosadíme do definiční rovnice předpokládané řešení $x_n = n\lambda^n$. Dostáváme podmínku

$$a_0n\lambda^n + \dots + a_k(n-k)\lambda^{n-k} = 0.$$

Tuto podmínku je možné přepsat pomocí tzv. derivace polynomu (viz ?? na straně ??), kterou značíme apostrofem:

$$\lambda(a_0\lambda^n + \dots + a_k\lambda^{n-k})' = 0$$

a hned na začátku kapitoly páté uvidíme, že kořen polynomu f je vícenásobný právě, když je kořenem i jeho derivace f' . Naše podmínka je tedy splněna.



Při vyšší násobnosti ℓ kořenu charakteristického polynomu můžeme postupovat obdobně a využijeme skutečnosti, že ℓ -násobný kořen je kořenem všech derivací polynomu až do $\ell - 1$ včetně. Derivace přitom postupně vypadají takto:

3.15. Jezírko. Mějme jednoduchý model jezírka, ve kterém žije populace bílé ryby (plotice, ouklej, podoustev, ostroretka atd.). Předpokládáme, že druhého roku se dožije 20 % rybího plůdku a od tohoto stáří už jsou ryby schopny se reprodukovat. Z mladých ryb přežije z druhého do třetího roku přibližně 60 % a v dalších letech je už úmrtnost zanedbatelná. Dále předpokládáme, že roční přírůstek nových plůdků je třikrát větší než počet ryb (schopných reprodukce).

Tato populace by evidentně jezírko brzy přeplnila. Rovnováhu chceme dosáhnout nasazením dravé ryby, např. štiky. Předpokládejme, že jedna štika sní ročně asi 500 dospělých bílých ryb. Kolik štik pak musíme do jezírka nasadit, aby populace stagnovala?

Řešení. Pokud označíme p počet plůdku, m počet mladých ryb a r počet dospělých ryb, pak je stav populace v dalším roce popsán následovně:

$$\begin{pmatrix} p \\ m \\ r \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3m + 3r \\ 0, 2p \\ 0, 6m + \tau r \end{pmatrix},$$

kde $1 - \tau$ je relativní úmrtnost dospělé ryby způsobená štikou. Příslušná matice popisující tento model je tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0, 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0, 6 & \tau \end{pmatrix}$$

Pokud má populace stagnovat, pak musí mít tato matice vlastní hodnotu 1. Jinými slovy, jednička musí být kořenem charakteristického polynomu této matice. Ten je tvaru $\lambda^2(\tau - \lambda) + 0, 36 - 0, 6(\tau - \lambda) = 0$.

To znamená, že τ musí splňovat

$$\begin{aligned} \tau - 1 + 0, 36 - 0, 6(\tau - 1) &= 0 \\ 0, 4\tau - 0, 04 &= 0 \end{aligned}$$

Do dalšího roku tedy může přežít jen 10 % z dospělých ryb a zbytek by měla sníst štika. Označíme-li hledaný počet štik x , pak dohromady sní $500x$ ryb, což by mělo odpovídat podle předchozího výpočtu $0, 9r$. Poměr počtu bílé ryby ku počtu štik by tedy měl být $\frac{r}{x} = \frac{500}{0,9}$. To je přibližně jedna štika na 556 kusů bílé ryby. \square

Obecněji můžeme zpracovat předcházející model takto:

3.16. Nechť je v populačním modelu dravec-kořist určen vztah mezi počtem dravců D_k a kořisti K_k v daném a následujícím měsíci ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) lineárním systémem

(a)

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= 0, 6 D_k + 0, 5 K_k, \\ K_{k+1} &= -0, 16 D_k + 1, 2 K_k; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= 0, 6 D_k + 0, 5 K_k, \\ K_{k+1} &= -0, 175 D_k + 1, 2 K_k; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= 0,6 D_k + 0,5 K_k, \\ K_{k+1} &= -0,135 D_k + 1,2 K_k. \end{aligned}$$

Analyzujte chování tohoto modelu po velmi dlouhé době.

Řešení. Všimněme si, že jednotlivé varianty se od sebe navzájem liší pouze v hodnotě koeficientu u D_k ve druhé rovnici. Můžeme proto všechny tři případy vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} D_k \\ K_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -a & 1,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_{k-1} \\ K_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

kde budeme postupně klást $a = 0,16$, $a = 0,175$, $a = 0,135$. Hodnota koeficientu a zde reprezentuje průměrný počet kusů kořisti zahušených jedním (očividně „nenáročným“) dravcem za měsíc. Při označení

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -a & 1,2 \end{pmatrix}$$

bezprostředně dostáváme

$$\begin{pmatrix} D_k \\ K_k \end{pmatrix} = T^k \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pomocí mocnin matice T tak můžeme určit vývoj populací dravce a kořisti po velmi dlouhé době.

Snadno stanovíme vlastní čísla

- (a) $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,8$;
- (b) $\lambda_1 = 0,95, \quad \lambda_2 = 0,85$;
- (c) $\lambda_1 = 1,05, \quad \lambda_2 = 0,75$

matice T a jim (při zachování pořadí) příslušné vlastní vektory

- (a) $(5, 4)^T, \quad (5, 2)^T$;
- (b) $(10, 7)^T, \quad (2, 1)^T$;
- (c) $(10, 9)^T, \quad (10, 3)^T$.

Pro $k \in \mathbb{N}$ tudíž platí

(a)

$$T^k = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1};$$

(b)

$$T^k = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1};$$

(c)

$$T^k = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,05 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Odtud dále pro velká $k \in \mathbb{N}$ plyne

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + \dots + a_k \lambda^{n-k}$$

$$f'(\lambda) = a_0 n \lambda^{n-1} + \dots + a_k (n-k) \lambda^{n-k-1}$$

$$f''(\lambda) = a_0 n(n-1) \lambda^{n-2} + \dots + a_k (n-k)(n-k-1) \lambda^{n-k-2}$$

⋮

$$\begin{aligned} f^{(\ell+1)} &= a_0 n \dots (n-\ell) \lambda^{n-\ell-1} + \dots \\ &\quad + a_k (n-k) \dots (n-k-\ell) \lambda^{n-k-\ell-1} \end{aligned}$$

Podívejme se na případ trojnásobného kořenu λ a hledáme řešení ve tvaru $n^2 \lambda^n$. Dosazením do definiční podmínky dostaneme rovnost

$$a_0 n^2 \lambda^n + \dots + a_k (n-k)^2 \lambda^{n-k} = 0.$$

Zjevně je levá strana rovna výrazu $\lambda^2 f''(\lambda) + \lambda f'(\lambda)$ a protože je λ kořenem obou derivací, je podmínka splněna.

Indukcí snadno dokážeme, že i obecnou podmínku pro hledané řešení ve tvaru $x_n = n^\ell \lambda^n$,

$$a_0 n^\ell \lambda^n + \dots + a_k (n-k)^\ell \lambda^{n-k} = 0,$$

dostaneme jako vhodnou lineární kombinaci derivací charakteristického polynomu začínající výrazem

$$\lambda^{\ell+1} f^{(\ell+1)} + \frac{1}{2} \lambda^\ell \ell(\ell+1) f^{(\ell)} + \dots$$

a dostali jsme se tedy blízko k úplnému důkazu následující:

Věta. Každá homogenní lineární diferenční rovnice řádu k nad libovolným číselným oborem \mathbb{K} obsaženým v komplexních číslech \mathbb{K} má za množinu všech řešení k -rozměrný vektorový prostor generovaný posloupnostmi $x_n = n^\ell \lambda^n$, kde λ jsou (komplexní) kořeny charakteristického polynomu a mocniny ℓ probíhají všechna přirozená čísla od nuly až do násobnosti příslušného kořenu λ .

DŮKAZ. Výše použité vztahy násobnosti kořenů a derivací uvidíme později, a nebudeme tu dokazovat tvrzení, že každý komplexní polynom má právě tolik kořenů, včetně násobnosti, jaký má stupeň. Zbývá tedy ještě dokázat, že nalezená k -tice řešení je lineárně nezávislá. I v tomto případě lze induktivně dokázat nenulovost příslušného Casoratiánu, jako jsme odkazovali u případu Vandermonдова determinantu výše.

Pro ilustraci postupu ukážeme, jak výpočet vypadá pro případ jednonásobného kořenu λ_1 a dvojnásobného kořenu

λ_2 charakteristického polynomu:

$$\begin{aligned} C(\lambda_1^n, \lambda_2^n, n\lambda_2^n) &= \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & n\lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & (n+1)\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^{n+2} & \lambda_2^{n+2} & (n+2)\lambda_2^{n+2} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1^n \lambda_2^{2n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & (n+1)\lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & (n+2)\lambda_2^2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1^n \lambda_2^{2n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & n \\ \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) & 0 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda_1^n \lambda_2^{2n} \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_1^n \lambda_2^{2n+1} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

V obecném případě vedeme podobně důkaz nenulovosti příslušného Casoratiánu indukci. \square

3.12

3.13. Reálné báze řešení. Pro rovnice s reálnými koeficienty povedou reálné počáteční podmínky vždy na reálná řešení. Přesto ale budou příslušná fundamentální řešení z právě odvozené věty často existovat pouze v oboru komplexním.

Zkusme proto najít jiné generátory, se kterými se nám bude pracovat lépe. Potože jsou koeficienty charakteristického polynomu reálné, každý jeho kořen bude buď také reálný nebo musí kořeny vystupovat po dvou komplexně združených.

Jestliže si řešení popíšeme v goniometrickém tvaru jako

$$\begin{aligned} \lambda^n &= |\lambda|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) \\ \bar{\lambda}^n &= |\lambda|^n (\cos n\phi - i \sin n\phi), \end{aligned}$$

okamžitě je vidět, že jejich součtem a rozdílem dostáváme jiná dvě lineárně nezávislá řešení

$$x_n = |\lambda|^n \cos n\phi, \quad y_n = |\lambda|^n \sin n\phi.$$

Difereční rovnice se velmi často vyskytují jako model dynamiky nějakého systému. Pěkným tématem na přemýšlení je proto souvislost absolutních hodnot jednotlivých kořenů a stabilizace řešení, buď všech nebo v závislosti na počátečních podmínkách. Nepůjdeme zde do podrobností, protože teprve v páté kapitole budeme probírat pojem konvergence hodnot k nějaké hodnotě limitní apod., jistě je tu ale prostor pro zajímavé numerické experimenty např. s oscilacemi vhodných populačních nebo ekonomických modelů.

3.13

3.14. Nehomogenní lineární diferenzní rovnice. Stejně jako u systémů lineárních rovnic můžeme dostat všechna řešení *nehomogenních lineárních diferenzních rovnic*

$$a_0(n)x_n + a_1(n)x_{n-1} + \dots + a_k(n)x_{n-k} = b(n),$$

kde koeficienty a_i a b jsou skaláry, které mohou záviset na n , a $a_0(n) \neq 0$, $a_k(n) \neq 0$.

(a)

$$\begin{aligned} T^k &\approx \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -10 & 25 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} T^k &\approx \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} T^k &\approx \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,05^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1,05^k}{60} \begin{pmatrix} -30 & 100 \\ -27 & 90 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

neboť právě pro velká $k \in \mathbb{N}$ můžeme položit

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}^k \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}^k \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1,05 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{pmatrix}^k \approx \begin{pmatrix} 1,05^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podotkněme, že ve variantě (b), tj. pro $a = 0, 175$, nebylo nutné vlastní vektory počítat.

Obdrželi jsme tak

(a)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_k \\ K_k \end{pmatrix} &\approx \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -10 & 25 \\ -8 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5(-2D_0 + 5K_0) \\ 4(-2D_0 + 5K_0) \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} D_k \\ K_k \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(c)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_k \\ K_k \end{pmatrix} &\approx \frac{1,05^k}{60} \begin{pmatrix} -30 & 100 \\ -27 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1,05^k}{60} \begin{pmatrix} 10(-3D_0 + 10K_0) \\ 9(-3D_0 + 10K_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tyto výsledky lze interpretovat následovně:

(a) Pokud $2D_0 < 5K_0$, velikosti obou populací se ustálí na nenulových hodnotách (říkáme, že jsou stabilní); jestliže $2D_0 \geq 5K_0$, obě populace vymřou.

- (b) Obě populace vymřou.
 (c) Pro $3D_0 < 10K_0$ nastává populační exploze obou druhů; pro $3D_0 \geq 10K_0$ obě populace vymřou.

To, že extrémně malá změna velikosti a může vést ke zcela odlišnému výsledku, je zapříčiněno neměnností hodnoty a v závislosti na velikosti obou populací. Poznamenejme, že toto omezení, kdy a v našich modelech považujeme za konstantní, nemá oporu ve skutečnosti. Přesto získáváme odhad velikosti a pro stabilní populace. \square

3.17. Poznámka. Jiný model soužití populací dravce a kořisti poskytuje model pánů Lotky a Volterra, který popisuje vztah mezi populacemi soustavou dvou obyčejných diferenciálních rovnic. Podle tohoto modelu obě populace oscilují, což je i v souladu s pozorováními.

Nyní uvedme poněkud obsáhlejší model.

3.18. Model šíření jednoletých bylin. Budeme uvažovat rostliny, které na začátku léta vykvetou, na jeho vrcholu vyprodukují semena a samy uhynou. Některá ze semen vyklíčí ještě na konci podzimu (ozimé rostliny), jiná přečkají zimu v zemi a vyklíčí na začátku jara (jarní rostliny). Ozimé rostlinky (sazenice), které přes zimu nezmrznou, jsou na jaře větší než jarní a většinou z nich vyrostou větší rostliny než z jarních sazenic. Větší rostlina vyprodukuje více semen. Pak se celý vegetační cyklus opakuje.

Rok je tedy rozdělen na čtyři vegetační období a v každém z těchto období můžeme rozlišit několik „forem“ rostliny:

Období	stadia rostliny
začátek jara	malé a velké sazenice
začátek léta	malé, střední a velké kvetoucí rostliny
vrcholné léto	semena
podzim	sazenice a přezimující semena

Označme $x_1(t)$, resp. $x_2(t)$, počet malých, resp. velkých, sazenic na začátku jara roku t a $y_1(t)$, resp. $y_2(t)$, resp. $y_3(t)$, počet malých, resp. středních, resp. velkých rostlin v létě téhož roku. Z malých sazenic mohou vyrůst malé nebo střední rostliny, z velkých sazenic mohou vyrůst střední nebo velké rostliny. Kterákoliv ze sazenic samozřejmě může uhynout (uschnout, být spasena krávou a podobně) a nevyroste z ní nic. Označme b_{ij} pravděpodobnost, že ze sazenice j -té velikosti, $j = 1, 2$, vyroste rostlina i -té velikosti, $i = 1, 2, 3$. Pak je

$$0 < b_{11} < 1, \quad b_{12} = 0, \quad 0 < b_{21} < 1, \quad 0 < b_{22} < 0, \quad b_{31} = 0, \\ 0 < b_{32} < 1, \quad b_{11} + b_{21} < 1, \quad b_{22} + b_{32} < 1$$

(promyslete si, co každá z těchto nerovností vyjadřuje). Pokud pravděpodobnost považujeme za klasickou, můžeme b_{11} vypočítat jako podíl

Postupujeme tak, že najdeme jedno řešení a přičteme celý vektorový prostor dimenze k řešení odpovídajících systémů homogenních. Skutečně takto dostáváme řešení a protože je rozdíl dvou řešení nehomogenní rovnice zjevně řešením homogenní, dostáváme takto řešení všechna.

U systému lineárních rovnic se mohlo stát, že nemusel vůbec mít řešení. To u našich diferenčních rovnic možné není. Zato ale bývá nesnadné nalézt to jedno potřebné partikulární řešení nehomogenního systému, pokud je chování skalárních koeficientů v rovnici složité. U lineárních rekurencí je to podobné.

Omezíme se tu na jediný případ, kdy příslušný homogenní systém má koeficienty konstantní a $b(n)$ je polynom stupně s . Řešení pak lze hledat ve tvaru polynomu

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_s n^s$$

s neznámými koeficienty α_i , $i = 1, \dots, s$. Dosazením do diferenční rovnice a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin n dostaneme systém $s + 1$ rovnic pro $s + 1$ proměnných α_i . Pokud má tento systém řešení, našli jsme řešení našeho původního problému. Pokud řešení nemá, může stačit zvětšit stupeň s hledaného polynomu.

Např. rovnice $x_n - x_{n-2} = 2$ nemůže mít konstantní řešení, ale dosazením $x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n$ dostáváme řešení $\alpha_1 = 1$ (a koeficient α_0 může být libovolný) a proto je obecné řešení naší rovnice

$$x_n = C_1 + C_2(-1)^n + n.$$

Všimněme si, že skutečně matice příslušného systému rovnic pro polynom nižšího stupně nula je nulová a rovnice $0 \cdot \alpha_0 = 2$ nemá řešení.

3.15. Lineární filtry. Uvažujme nyní nekonečné posloupnosti

$$x = (\dots, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$$

a budeme, podobně jako u systémů lineárních rovnic, pracovat s operací T , která zobrazí celou posloupnost x na posloupnost $z = Tx$ se členy

$$z_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k}.$$

S posloupnostmi x můžeme opět pracovat jako s vektory vzhledem ke sčítání i násobení skaláry po složkách. Pouze bude tento velký vektorový prostor nekonečně rozměrný. Naše zobrazení T je zjevně lineárním zobrazením na takovém vektorovém prostoru.

Posloupnosti si představme jako diskrétní hodnoty nějakého signálu, odečítané zpravidla ve velmi krátkých časových jednotkách, operace T pak může být filtrem, který signál zpracovává. Bude nás zajímat, jak odhadnout vlastnosti, které takový „filtr“ bude mít.

Signály jsou velice často ze své podstaty dány součtem několika částí, které jsou samy o sobě víceméně periodické. Z naší definice je ale zřejmé, že periodické posloupnosti x_n ,

doplnit odkaz na příklady ve vedlejším sloupci, snad tam je i diskuse řešitelnosti pomocí variace konstant ...



tj. posloupnosti splňující pro nějaké pevné přirozené číslo p

$$x_{n+p} = x_n$$

budou mít i periodické obrazy $z = Tx$

$$\begin{aligned} z_{n+p} &= a_0x_{n+p} + a_1x_{n-1+p} + \dots + a_kx_{n-k+p} \\ &= a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k} = z_n \end{aligned}$$

se stejnou periodou p .

Pro pevně zvolenou operaci T nás bude zajímat, které vstupní periodické posloupnosti zůstanou přibližně stejné (případně až na násobek) a které budou utlumeny na nulové hodnoty.

Ve druhém případě tedy hledáme jádro našeho lineárního zobrazení T . To je ale dáno právě homogenní diferenční rovnicí

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0,$$

kterou jsme se už naučili řešit.

3.15

3.16. Špatný equalizer. Jako příklad uvažujme velmi jednoduchý lineární filtr zadaný rovnicí

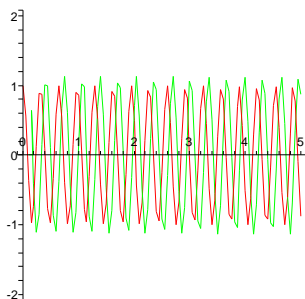
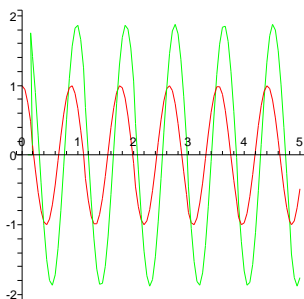
$$z_n = (Tx)_n = x_{n+2} + x_n.$$

Výsledky takového zpracování signálu jsou naznačeny na následujících čtyřech obrázcích pro postupně se zvyšující frekvenci periodického signálu $x_n = \cos(\varphi n)$. Červený je původní signál, zelený je výsledek po zpracování filtrem. Nerovnoměrnosti křivek jsou důsledkem nepřesného kreslení, oba signály jsou samozřejmě rovnoměrnými sinusovkami.



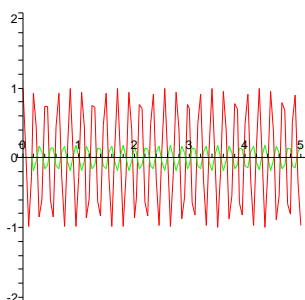
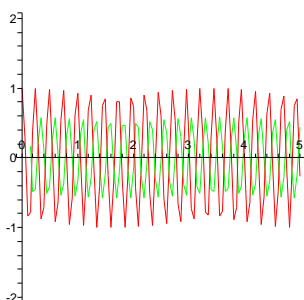
A = 7.1250

A = 19.375



A = 25.500

A = 29.583



raději spravit
obrazky – černobíle
a pořádně :-)

Všimněme si, že v oblastech, kde je výsledný signál přibližně stejně silný jako původní, dochází k dramatickému

příznivých výsledků (z malé vyrostla malá rostlina) a všech možných výsledků (počet malých sazenic), tj. $b_{11} = y_1(t)/x_1(t)$. Odtud

$$y_1(t) = b_{11}x_1(t).$$

Analogicky dostaneme rovnost

$$y_3(t) = b_{32}x_2(t).$$

Označíme-li na chvíli $y_{2,1}(t)$, resp. $y_{2,2}(t)$ počet středních rostlin vyrostlých z malých, resp. velkých sazenic, je $y_2(t) = y_{2,1}(t) + y_{2,2}(t)$ a $b_{21} = y_{2,1}(t)/x_1(t)$, $b_{22} = y_{2,2}(t)/x_2(t)$ a tedy

$$y_2(t) = b_{21}x_1(t) + b_{22}x_2(t).$$

Označíme

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{32} \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

a předchozí rovnosti zapíšeme v maticovém tvaru

$$y(t) = Bx(t).$$

Označíme-li po řadě c_{11} , c_{12} a c_{13} počty semen, které vyprodukuje jedna malá, střední a velká rostlina, a $z(t)$ celkový počet vyprodukovaných semen v létě roku t , platí

$$z(t) = c_{11}y_1(t) + c_{12}y_2(t) + c_{13}y_3(t),$$

nebo v maticovém tvaru

$$z(t) = Cy(t)$$

při označení

$$C = (c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}).$$

Aby matice C popisovala modelovanou realitu, budeme předpokládat, že platí nerovnosti

$$0 < c_{11} < c_{12} < c_{13}.$$

Označme nakonec $w_1(t)$ a $w_2(t)$ počet semen, které vyklíčí ještě na podzim a počet semen, která přezimují, v tomto pořadí, a d_{11} , resp. d_{21} pravděpodobnost, že semeno vyklíčí na podzim, resp. nevyklíčí (přezimuje), a f_{11} , resp. f_{22} pravděpodobnost, že ozimá sazenice, resp. že přezimující semeno během zimy nezmrzne. Pravděpodobnosti vyklíčení d_{11} , d_{21} zřejmě musí splňovat nerovnosti

$$0 < d_{11}, \quad 0 < d_{21}, \quad d_{11} + d_{21} = 1,$$

a poněvadž rostlinka snáze zmrzne, než semeno ukryté v zemi, budeme o pravděpodobnostech f_{11} , f_{22} přežití zimy předpokládat

$$0 < f_{11} < f_{22} < 1.$$

Při označení

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix}, \quad w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

dostaneme podobnými úvahami jako výše rovnosti

$$w(t) = Dz(t), \quad x(t+1) = Fw(t).$$

Poněvadž násobení matic je asociativní, můžeme pro počty jednodušších stadií rostlin v následujícím roce z předchozích rovností sestavit rekurentní formule:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fw(t) = F(Dz(t)) = (FD)z(t) = (FD)(Cy(t)) = \\ &= (FDC)y(t) = (FDC)(Bx(t)) = (FDCB)x(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t+1) &= Bx(t+1) = B(Fw(t)) = (BF)w(t) = (BF)(Dz(t)) = \\ &= (BFD)z(t) = (BFD)(Cy(t)) = (BFDC)y(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t+1) &= Cy(t+1) = C(Bx(t+1)) = (CB)x(t+1) = (CB)(Fw(t)) = \\ &= (CBF)w(t) = (CBF)(Dz(t)) = (CBFD)z(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(t+1) &= Dz(t+1) = D(Cy(t+1)) = (DC)y(t+1) = \\ &= (DC)(Bx(t+1)) = (DCB)x(t+1) = (DCB)(Fw(t)) = \\ &= (DCBF)w(t). \end{aligned}$$

Při označení

$$A_x = FDCB, \quad A_y = BFDC, \quad A_z = Cbfd, \quad A_w = DCBF,$$

je zjednodušíme na formule

$$x(t+1) = A_x x(t), \quad y(t+1) = A_y y(t), \quad z(t+1) = A_z z(t), \quad w(t+1) = A_w w(t).$$

Z těchto formulí již můžeme vypočítat složení populace rostlin v libovolném období libovolného roku, pokud známe složení populace v nějakém období počátečního (nultého) roku.

Nechť je například známo složení populace v létě, tj. počet $z(0)$ vysetých semen. Pak složení populace na začátku jara t -tého roku je

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x x(t-1) = A_x^2 x(t-2) = \dots = A_x^{t-1} x(1) = A_x^{t-1} Fw(0) = \\ &= A_x^{t-1} FDCz(0). \end{aligned}$$

Povšimněme si, že matice $A_z = Cbfd$ je typu 1×1 ; není to tedy matice, ale skalár. Můžeme tedy označit $\lambda = A_z$, vypočítat

(3.5)

$$\begin{aligned} \lambda &= Cbfd = (c_{11} \ c_{12} \ c_{13}) \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \\ &= (c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} \quad c_{12}b_{22} + c_{13}b_{32}) \begin{pmatrix} f_{11}d_{11} \\ f_{22}d_{21} \end{pmatrix} = \\ &= b_{11}c_{11}d_{11}f_{11} + b_{21}c_{12}d_{11}f_{11} + b_{22}c_{12}d_{21}f_{22} + b_{32}c_{13}d_{21}f_{22} \end{aligned}$$

doplnit podrobný výpočet pomocí uvedených nástrojů, asi ve druhém sloupci – pak bychom zde dali odkaz!

posuvu fáze signálu. Levné equalizery skutečně podobně špatně fungují.

3. Iterované lineární procesy

3.17. Iterované procesy. V praktických modelech se často setkáváme se situací, kdy je vývoj systému v jednom časovém období dán lineárním procesem, zajímáme se ale o chování systému po mnoha iteracích. Často přitom samotný lineární proces zůstává pořád stejný, z pohledu našeho matematického modelu tedy nejde o nic jiného než opakované násobení stavového vektoru stále stejnou maticí.



Zatímco pro řešení systémů lineárních rovnic jsme potřebovali jen minimum znalostí o vlastnostech lineárních zobrazení, k pochopení chování iterovaného systému budeme účelně používat znalosti vlastních čísel, vlastností vlastních vektorů a další strukturní výsledky.

V jistém smyslu se pohybujeme v podobném prostředí jako u lineárních rekurencí a skutečně můžeme náš popis filtrů v minulých odstavcích takto také popsat. Představme si, že pracujeme se zvukem a uchováváme si stavový vektor

$$Y_n = (x_n, \dots, x_{n-k+1})$$

všech hodnot od aktuální až po poslední, kterou ještě v našem lineárním filtru zpracováváme. V jednom časovém intervalu (ve vzorkovací frekvenci audio signálu mimořádně krátkém) pak přejdeme ke stavovému vektoru

$$Y_{n+1} = (x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-k+2}),$$

kde první hodnota $x_{n+1} = a_1 x_n + \dots + a_k x_{n-k+1}$ je spočtena jako u homogenních diferenčních rovnic, ostatní si jen posunujeme o jednu pozici a poslední zapomeneme. Příslušná čtvercová matice řádu k , splňující $Y_{n+1} = A \cdot Y_n$, bude vypadat takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

Pro takovou jednoduchou matici jsme si odvodili explicitní postup pro úplné řešení otázky, jak vypadá formule pro řešení. Obecně to tak snadno nepůjde ani pro velice podobné systémy. Jedním z typických případů je studium dynamiky populací v různých biologických systémech.

Všimněme si také, že vcelku pochopitelně má matice A za charakteristický polynom právě

$$p(\lambda) = \lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - \dots - a_k,$$

jak snadno dovodíme pomocí rozvoje podle posledního sloupce a rekurencí. To je vysvětlitelné i přímo, protože řešení $x_n = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$, vlastně znamená, že matice A vynásobením převede vlastní vektor $(\lambda^k, \dots, \lambda)^T$ na jeho

λ -násobek. Musí být tedy takové λ vlastním číslem matice A .

3.17

3.18. Leslieho model růstu populací. Představme si, že zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod.) rozdělený do m skupin, třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod. Stav X_n je tedy dán vektorem

$$X_n = (u_1, \dots, u_m)^T$$

závislejícím na okamžiku t_n , ve kterém systém pozorujeme. Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n , která zadává změnu vektoru X_n na

$$X_{n+1} = A \cdot X_n$$

při přírůstku času z t_n na t_{n+1} .

Uvažujme jako příklad tzv. *Leslieho model růstu*, ve kterém vystupuje matice

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ \tau_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{m-1} & 0 \end{pmatrix},$$

jejíž parametry jsou svázány s vývojem populace rozdělené do m věkových skupin tak, že f_i označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém skoku vznikne z N jedinců v i -té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první), zatímco τ_i je relativní úmrtnost i -té skupiny během jednoho období. Pochopitelně lze použít takový model s libovolným počtem věkových skupin.

Všechny koeficienty jsou tedy nezáporná reálná čísla a čísla τ_i jsou mezi nulou a jedničkou. Všimněme si, že pokud jsou všechna τ rovna jedné, jde vlastně o lineární rekurenci s konstantními koeficienty a tedy buď exponenciálním růstem/poklesem (pro reálné kořeny λ charakteristického polynomu) nebo oscilováním spojeným s případným růstem či poklesem (pro komplexní kořeny).

Než se pustíme do obecnější teorie, trochu si pohrajeme s tímto konkrétním modelem.

Přímým výpočtem pomocí Laplaceova rozvoje podle posledního sloupce spočteme charakteristický polynom $p_m(\lambda)$ matice A pro model s m skupinami:

$$p_m(\lambda) = |A - \lambda E| = -\lambda p_{m-1}(\lambda) + (-1)^{m-1} f_m \tau_1 \dots \tau_{m-1}.$$

Vcelku snadno dovodíme indukci, že tento charakteristický polynom má tvar

$$p_m(\lambda) = (-1)^m (\lambda^m - a_1 \lambda^{m-1} - \dots - a_{m-1} \lambda - a_m)$$

s vesměs nezápornými koeficienty a_1, \dots, a_m , pokud jsou všechny parametry τ_i a f_i kladné. Např. je vždy

$$a_m = f_m \tau_1 \dots \tau_{m-1}.$$

a předchozí výpočet uspořádat do výhodného tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= (FDCB)^{t-1} FDz(0) = FD(CBFD)^{t-2} CBFDz(0) = \\ &= FD(CBFD)^{t-1} z(0) = FDA_z^{t-1} z(0) = \lambda^{t-1} FDz(0); \end{aligned}$$

tímto způsobem zůstanou pouze dvě násobení matic.

Uvedeme konkrétní hodnoty matic B, C, D, F ; jedná se o parametry hypotetické rostliny, které ale byly inspirovanou skutečnou trávou *Vulpia ciliata*:

$$B = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,6 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 10 \quad 100), \quad D = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme vypočítat jednotlivé matice, které zobrazují vektor popisující složení populace v nějakém vegetačním období na vektor složení populace v témže období následujícího roku:

$$\begin{aligned} A_x &= \begin{pmatrix} 0,0325 & 0,6500 \\ 0,0650 & 1,3000 \end{pmatrix} & A_y &= \begin{pmatrix} 0,0075 & 0,0750 & 0,7500 \\ 0,0325 & 0,3250 & 3,2500 \\ 0,0100 & 0,1000 & 1,0000 \end{pmatrix}, \\ A_z &= 1,3325, & A_w &= \begin{pmatrix} 0,0325 & 1,3000 \\ 0,0325 & 1,3000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hodnota $\lambda = A_z = 1,3325$ vyjadřuje meziroční relativní přírůstek populace. Přesvědčete se, že každá z matic A_x, A_y, A_w má jedinou nenulovou vlastní hodnotu $\lambda = 1,3325$; ostatní vlastní hodnoty jsou rovny 0.

Ukážeme ještě jedno využití uvedeného modelu. Může nás zajímat, jak „pružně“ reaguje meziroční relativní přírůstek λ na změnu jednotlivých „demografických parametrů“, jak např. změna pravděpodobnosti přežití semene přes zimu ovlivní meziroční přírůstek. Tuto otázku poněkud upřesníme. Za *pružnost reakce charakteristiky λ na parametr s* , označenou $e(\lambda, s)$ prohlásíme relativní změnu hodnoty λ vztaženou k relativní změně parametru s . Ještě přesněji: označíme $\lambda(s)$ meziroční přírůstek závislý na parametru s . Potom $\Delta\lambda(s) = \lambda(s + \Delta s) - \lambda(s)$ vyjadřuje absolutní změnu relativního přírůstku λ při absolutní změně parametru s o Δs . Relativní změna λ tedy je $\Delta\lambda(s)/\lambda(s)$. Relativní změna přírůstku parametru s je $\Delta s/s$. Hledaná pružnost je tedy podíl těchto relativních změn, tj.

$$e(\lambda, s) = \frac{\Delta\lambda(s)/\lambda(s)}{\Delta s/s} = \frac{s}{\lambda(s)} \frac{\lambda(s + \Delta s) - \lambda(s)}{\Delta s}.$$

Konkrétně, meziroční relativní přírůstek populace závislý na přežití semen přes zimu je podle (3.5)

$$\lambda(f_{22}) = d_{21}(b_{22}c_{12} + b_{32}c_{13})f_{22} + d_{11}(b_{11}c_{11}f_{11} + b_{21}c_{12}f_{11})$$

a pro konkrétní zvolené hodnoty ostatních parametrů

$$\lambda(f_{22}) = 13 f_{22} + 0,0325.$$

Poněvadž $f_{22} = 0, 1$, můžeme počítat

$$\lambda(0, 1) = 1, 3325, \quad \lambda(0, 1 + \Delta s) = 1, 3325 + 13\Delta s, \quad \Delta\lambda(0, 1) = 13\Delta s,$$

takže

$$e(\lambda, 0, 1) = \frac{0, 1}{1, 3325} \frac{13\Delta s}{\Delta s} \doteq 0, 976.$$

Analogicky můžeme spočítat pružnost reakce relativního přírůstku λ populace na ostatních „demografických parametrech“. Výsledky jsou shrnuty v tabulce

parametr	pružnost reakce	parametr	pružnost reakce
b_{11}	0,006	c_{11}	0,006
b_{21}	0,019	c_{12}	0,244
b_{22}	0,225	c_{13}	0,751
b_{23}	0,750	f_{11}	0,024
d_{11}	0,024	f_{22}	0,976
d_{21}	0,976		

Z ní můžeme vidět, že přírůstek λ je nejvíce ovlivňován množstvím přezimujících semen (parametr d_{21}) a jejich přežíváním (parametr f_{22}). Toto zjištění není nijak překvapivé, zemědělcům je tento fakt dobře známý již od neolitu. Výsledek však ukazuje, že matematický model skutečně nějak adekvátně realitu popisuje.

Další zajímavé a detailně popsané modely růstu nalezne čtenář v souboru příkladů za touto kapitolou.

3.19. Uvažujte následující Leslieho model: farmář chová ovce. Po-rodnost ovcí je dána pouze věkem a je průměrně 2 ovce na jednu ovci mezi jedním a dvěma lety věku, pět ovcí na ovci mezi dvěma a třemi lety věku a dvě ovce na ovci mezi třemi a čtyřmi roky věku. Ovce do jednoho roku nerodí. Z roku na rok umře vždy polovina ovcí a to rovnoměrně ve všech věkových skupinách. Po čtyřech letech posílá farmář ovce na jatka. Farmář by rád ještě prodával (živá) jehňátka do jednoho roku na kožešinu. Jakou část jehňátek může každý rok prodat, aby mu velikost stáda zůstávala z roku na rok stejná? V jakém poměru budou potom rozděleny počty ovcí v jednotlivých věkových skupinách?

Řešení. Matice daného modelu (bez zásahu farmáře) je

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Farmář může ovlivnit kolik ovcí do jednoho roku mu ve stádu zůstane do dalšího roku, může tedy ovlivnit prvek l_{12} matice L . Zkoumáme tedy model

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

Zkusme kvalitativně odhadnout rozložení kořenů polynomu p_m . Bohužel, detaily budeme umět přesně vysvětlit a ověřit až po absolvování příslušných partií tzv. matematické analýzy v kapitole páté a později, přesto by ale postup měl být intuitivně jasný. Vyjádříme si charakteristický polynom ve tvaru

$$p_m(\lambda) = \pm\lambda^m(1 - q(\lambda))$$

kde $q(\lambda) = a_1\lambda^{-1} + \dots + a_m\lambda^{-m}$ je ostře klesající a nezáporná funkce pro $\lambda > 0$. Evidentně bude proto existovat právě jedno kladné λ , pro které bude $q(\lambda) = 1$ a tedy také $p_m(\lambda) = 0$. Jinými slovy, pro každou Leslieho matici existuje právě jedno kladné reálné vlastní číslo.

Pro skutečné Leslieho modely populací bývají všechny koeficienty τ_i i f_j mezi nulou a jedničkou a typicky nastává situace, kdy jediné reálné vlastní číslo λ_1 je větší nebo rovno jedné, zatímco absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel jsou ostře menší než jedna.

Jestliže začneme s libovolným stavovým vektorem X , který bude dán jako součet vlastních vektorů

$$X = X_1 + \dots + X_m$$

s vlastními hodnotami λ_i , pak při iteracích dostáváme

$$A^k \cdot X = \lambda_1^k X_1 + \dots + \lambda_m^k X_m,$$

takže za předpokladu, že $|\lambda_i| < 1$ pro všechna $i \geq 2$, budou všechny komponenty ve vlastních podprostorech velmi rychle mizet, kromě komponenty $\lambda_1 X_1^k$.

Rozložení populace do věkových skupin se tak budou rychle blížit poměrům komponent vlastního vektoru k dominantnímu vlastnímu číslu λ_1 .

Například pro matici (uvědomme si význam jednotlivých koeficientů, jsou převzaty z modelu pro chov ovcí, tj. hodnoty τ zahrnují jak přirozený úhyn tak případné aktivity chovatelů na jatkách)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

vyjdou vlastní hodnoty přibližně

$$1.03, 0, -0.5, -0.27 + 0.74i, -0.27 - 0.74i$$

s velikostmi 1.03, 0, 0.5, 0.78, 0.78 a vlastní vektor příslušný dominantnímu vlastnímu číslu je přibližně

$$X^T = (30 \ 27 \ 21 \ 14 \ 8).$$

Zvolili jsme rovnou jediný vlastní vektor se součtem souřadnic rovným stu, zadává nám proto přímo výsledné procentní rozložení populace.

Pokud bychom chtěli místo tříprocentního celkového růstu populace setrvalý stav a předsevzali si ujídat více ovce třeba z druhé věkové skupiny, řešili bychom úlohu, o kolik

máme zmenšit τ_2 , aby bylo dominantní vlastní číslo rovno jedné.

3.18

3.19. Matice s nezápornými prvky. Reálné matice, které nemají žádné záporné prvky mají velmi speciální vlastnosti. Zároveň jsou skutečně časté v praktických modelech. Naznačíme proto teď proto tzv. *Perronovu-Frobeniovu teorii*, která se právě takovým maticím věnuje.



tady by se hodilo trochu historie, vlastně jen naznačíme část výsledků Perrona, k Frobeniově obecnější situaci se vůbec nedopracujeme.

Začneme definicí několika pojmů, abychom mohli naše úvahy vůbec formulovat.

KLADNÉ A PRIMITIVNÍ MATICE

Definice. Za *kladnou matici* budeme považovat takovou čtvercovou matici A , jejíž všechny prvky a_{ij} jsou reálné a ostře kladné. *Primitivní matice* je pak taková čtvercová matice A , jejíž nějaká mocnina A^k je kladná.

Připomeňme, že *spektrálním poloměrem matice* A nazýváme maximum absolutních hodnot všech jejích (komplexních) vlastních čísel. Spektrálním poloměrem lineárního zobrazení na (konečněrozměrném) vektorovém prostoru rozumíme spektrální poloměr jeho matice v některé bázi. *Normou matice* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nebo vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ rozumíme součet absolutních hodnot všech jejích prvků. U vektorů x píšeme pro jejich normu $|x|$.

Následující výsledek je mimořádně užitečný a snad i dobře srozumitelný. Jeho důkaz se svou náročností dosti vymyká této učebnici, uvádíme ale alespoň jeho stručný nástin. Pokud by čtenář měl problém s plynulým čtením následujícího důkazu, doporučujeme jej přeskočit.

Věta (Perronova). *Jestliže je A primitivní matice se spektrálním poloměrem $\lambda \in \mathbb{R}$, pak je λ jednoduchým kořenem charakteristického polynomu matice A , který je ostře větší než absolutní hodnota kteréhokoliv jiného vlastního čísla matice A . K vlastnímu číslu λ navíc existuje vlastní vektor x s výhradně kladnými prvky x_i .*

NÁZNAK DŮKAZU. V důkazu se budeme opírat o intuici elementární geometrie. Částečně budeme použité koncepty upřesňovat už v analytické geometrii ve čtvrté kapitole, některé analytické aspekty budeme studovat podrobněji v kapitolách páté a později, přesné důkazy některých analytických kroků v této učebnici nepodáme vůbec. Snad budou následující úvahy nejen osvětlovat dokazovaný teorém, ale budou také samy o sobě motivací pro naše další studium geometrie i matematické analýzy. Začneme docela srozumitelně znějícím pomocným lemmatem:

Lemma. *Uvažme libovolný mnohostěn P obsahující počátek $0 \in \mathbb{R}^n$. Jestliže nějaká iterace lineárního zobrazení $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazuje P do jeho vnitřku, pak je spektrální poloměr zobrazení ψ ostře menší než jedna.*



inspirováno materiálem na webu, viz <http://www-users.math.umd.edu/~mmb/475/spec.pdf>

a hledáme a tak, aby daná matice měla vlastní hodnotu 1 (víme, že má pouze jednu reálnou kladnou). Charakteristický polynom této matice je

$$\lambda^4 - 2a\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda - \frac{1}{2},$$

požadujeme-li, aby měl kořen 1, musí být $a = \frac{1}{5}$ (dosadíme za λ číslo 1 a položíme rovno nule). Farmář tedy může prodat $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ ovcí, které se mu v daný rok narodí. Odpovídající vlastní vektor k vlastnímu číslu 1 dané matice je $(20, 4, 2, 1)$ a v těchto poměrech se taky ustálí populace ovcí. \square

3.20. Uvažujme Leslieho model růstu pro populaci krys, které máme rozděleny do tří věkových skupin: do jednoho roku, od jednoho do dvou let a od dvou let do tří. Předpokládáme, že se žádná krysa nedožívá více než tří let. Průměrná porodnost v jednotlivých věkových skupinách připadajících na jednu krysu je následující: v 1. skupině je to nula a ve druhé i třetí 2 krysy. Krysy, které se dožijí jednoho roku umírají až po druhém roce života (úmrtnost ve druhé skupině je nulová). Určete úmrtnost v první skupině víte-li, že daná populace krys stagnuje (počet jedinců v ní se nemění).

C. Markovovy procesy

3.21. Mlsný hazardér. Hazardní hráč sází na to, která strana mince padne. Na začátku hry má tři kremrole. Na každý hod vsadí jednu kremroli a když jeho tip vyjde, tak k ní získá jednu navíc, pokud ne, tak kremroli prohrává. Hra končí, pokud všechny kremrole prohraje, nebo jich získá pět. Jaká je pravděpodobnost, že hra neskončí po čtyřech sázkách?

Řešení. Před j -tým kolem (sázkou) můžeme popsat stav, ve kterém se hráč nachází náhodným vektorem $X_j = (p_0(j), p_1(j), p_2(j), p_3(j), p_4(j), p_5(j))$, kde p_i je pravděpodobnost, že hráč má i kremrolí. Pokud má hráč před j -tou sázkou i kremrolí ($i=2,3,4$), tak po sázce má s poloviční pravděpodobností $(i - 1)$ kremrolí a s poloviční pravděpodobností $(i + 1)$ kremrolí. Pokud dosáhne pěti kremrolí nebo všechny prohraje už se počet kremrolí nemění. Vektor X_{j+1} tak získáme podle podmínek v příklání z X_j vynásobením maticí

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na začátku máme

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

po čtyřech sázkách bude situaci popisovat náhodný vektor

$$X_5 = A^4 X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{16} \\ 0 \\ \frac{5}{16} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

tedy pravděpodobnost, že hra skončí do čtvrté sázky (včetně) je polovina.

Všimněme si ještě, že matice A popisující vývoj pravděpodobnostního vektoru X je pravděpodobnostní, tedy má součet prvků v každém sloupci 1. Nemá ale vlastnost vyžadovanou v Perronově–Frobeniově větě a snadným výpočtem zjistíte (nebo přímo uvidíte bez počítání), že existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu 1 – případ, kdy hráči nezůstane žádná krémrole, tj. $x = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, nebo případ kdy získá 5 krémrolí a hra tím pádem končí a všechny mu už zůstávají, tj. $x = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$. Všechna ostatní vlastní čísla (přibližně 0, 8, 0, 3, -0, 8, -0, 3) jsou v absolutní hodnotě ostře menší než jedna. Proto komponenty v příslušných vlastních podprostorech při iteraci procesu s libovolnou počáteční hodnotou vymizí a proces se blíží k limitní hodnotě pravděpodobnostního vektoru tvaru $(a, 0, 0, 0, 0, 1-a)$, kde hodnota a závisí na počtu krémrolí, se kterými hráč začíná. V našem případě je to $a = 0, 4$, kdyby začal se 4 krémrolemi, bylo by to $a = 0, 2$ atd. \square

3.22. Půjčovna aut. Firma půjčující každý týden auta má dvě pobočky - jednu v Brně a jednu v Praze. Auto zapůjčené v Brně lze vrátit i v Praze a naopak. Po čase se zjistilo, že na konci týdne je vždy v Praze vráceno zhruba 80 % z aut vypůjčených v Praze a 90 % z aut vypůjčených v Brně.

Jak je potřeba rozdělit auta mezi pobočky, aby na obou byl na začátku týdne vždy stejný počet aut jako předchozí týden?

Jak bude vypadat situace po jisté dlouhé době, pokud jsou auta mezi pobočky na začátku náhodně rozdělena?

Řešení. Hledaný počáteční počet aut v Brně označme x_B a v Praze x_P . Stav rozmístění aut mezi pobočkami je tedy popsán vektorem $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_P \end{pmatrix}$. Uvážíme-li takový násobek vektoru x , že součet jeho složek je 1, pak dávají jeho složky procentuální rozmístění aut.

Uvažme matici A zobrazení ψ ve standardní bázi. Protože vlastní čísla A^k jsou k -té mocniny vlastních čísel matice A , můžeme rovnou bez újmy na obecnosti předpokládat, že samotné zobrazení ψ již zobrazuje P do vnitřku P . Zjevně tedy nemůže mít ψ žádnou vlastní hodnotu s absolutní hodnotou větší než jedna.

Důkaz dále povedeme sporem. Předpokládejme, že existuje vlastní hodnota λ s $|\lambda| = 1$. Máme tedy dvě možnosti. Buď je $\lambda^k = 1$ pro vhodné k nebo takové k neexistuje.

Obrazem P je uzavřená množina (to znamená, že pokud se body v obrazu budou hromadit k nějakému bodu y v \mathbb{R}^n , bude y opět v obrazu) a hranici P tento obraz vůbec neprotíná. Nemůže tedy mít ψ pevný bod na hranici P ani nemůže existovat žádný bod na hranici, ke kterému by se mohly libovolně blížit body v obrazu. První argument vylučuje, že by nějaká mocnina λ byla jedničkou, protože to by takový pevný bod na hranici P jistě existoval. Ve zbývajícím případě jistě existuje dvourozměrný podprostor $W \subset \mathbb{R}^n$, na němž se ψ zužuje coby rotace o iracionální argument a jistě existuje bod y v průniku W s hranicí P . Pak by ale byl bod y libovolně přesně přiblížen body z množiny $\psi^n(y)$ při průchodu přes všechny iterace a tedy by musel sám být také v obrazu. Došli jsme tedy ke sporu a lemma je ověřeno.

Nyní se dáme do důkazu Perronovy věty. Naším prvním krokem bude ověření existence vlastního vektoru, který má všechny prvky kladné. Uvažme za tím účelem tzv. standardní simplex

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T, |x| = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Protože všechny prvky v matici A jsou nezáporné, obraz $A \cdot x$ bude mít samé nezáporné souřadnice stejně jako x a alespoň jedna z nich bude vždy nenulová. Zobrazení $x \mapsto |A \cdot x|^{-1}(A \cdot x)$ proto zobrazuje S do sebe, Toto zobrazení $S \rightarrow S$ splňuje všechny předpoklady tzv. Browerovy věty o pevném bodě a proto existuje vektor $y \in S$ takový, že je tímto zobrazením zobrazen sám na sebe. To ale znamená, že

$$A \cdot y = \lambda y, \quad \lambda = |A \cdot y|$$

a našli jsme vlastní vektor, který leží v S . Protože ale má nějaká mocnina A^k podle našeho předpokladu samé kladné prvky a samozřejmě je také $A^k \cdot y = \lambda^k y$, všechny souřadnice vektoru y jsou ostře kladné (tj. leží ve vnitřku S) a $\lambda > 0$.

Abychom dokázali zbytek věty, budeme uvažovat zobrazení zadané maticí A ve výhodnější bázi a navíc ho vynásobíme konstantou λ^{-1} :

$$B = \lambda^{-1}(Y^{-1} \cdot A \cdot Y),$$

kde Y je diagonální matice se souřadnicemi y_i právě nalezeného vlastního vektoru y na diagonále. Evidentně je B také primitivní matice a navíc je vektor $z = (1, \dots, 1)^T$ jejím vlastním vektorem, protože zjevně $Y \cdot z = y$.

Jestliže nyní dokážeme, že $\mu = 1$ je jednoduchým kořenem charakteristického polynomu matice B a všechny ostatní

Určitě budeme chtít mít později v analýze něco víc o větech o pevném bodě. Tady dplníme odkaz!!

kořeny mají absolutní hodnotu ostře menší než jedna, bude Perronova věta dokázána.

K tomu se nám teď bude hodit dříve dokázané pomocné lemma. Uvažujme matici B jako matici lineárního zobrazení, které zobrazuje řádkové vektory

$$u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto u \cdot B = v,$$

tj. pomocí násobení zprava. Díky tomu, že je $z = (1, \dots, 1)^T$ vlastním vektorem matice B , je součet souřadnic řádkového vektoru v

$$\sum_{i,j=1}^n u_i b_{ij} = \sum_{i=1}^n u_i = 1,$$

kdykoliv je $u \in S$. Proto toto zobrazení zobrazuje simplex S na sebe a má také jistě v S vlastní (řádkový) vektor w s vlastní hodnotou jedna (pevný bod, opět dle Browerovy věty). Protože nějaká mocnina B^k obsahuje samé ostře pozitivní prvky, je nutně obraz simplexu S v k -té iteraci zobrazení daného B uvnitř S . To už jsme blízko použití našeho lematu, které jsme si pro důkaz připravili.

Budeme i nadále pracovat s řádkovými vektory a označme si P posunutí simplexu S do počátku pomocí vlastního vektoru w , který jsme právě našli, tj. $P = -w + S$. Evidentně je P mnohostěn obsahující počátek a vektorový podprostor $V \subset \mathbb{R}^n$ generovaný P je invariantní vůči působení matice B pomocí násobení řádkových vektorů zprava. Zúžení našeho zobrazení na P tedy splňuje předpoklady pomocného lematu a proto nutně musí být všechny jeho vlastní hodnoty v absolutní hodnotě menší než jedna.

Ještě se musíme vypořádat se skutečností, že právě uvažované zobrazení je dáno násobením řádkových vektorů zprava maticí B (zatímco nás původně zajímalo chování zobrazení, zadaného maticí B pomocí násobení sloupcových vektorů zleva). To je ale ekvivalentní násobení transponovaných sloupcových vektorů transponovanou maticí B obvyklým způsobem zleva. Dokázali jsem tedy vlastně potřebné tvrzení o vlastních číslech pro matici transponovanou k naší matici B . Transponování ale vlastní čísla nemění.

Dimenze prostoru V je přitom $n - 1$, takže důkaz věty je ukončen. \square

3.19

3.20. Jednoduché důsledky. Následující velice užitečné tvrzení má při znalosti Perronovy věty až překvapivě jednoduchý důkaz a ukazuje, jak silná je vlastnost primitivnosti matice zobrazení.

Důsledek. Jestliže $A = (a_{ij})$ je primitivní matice a $x \in \mathbb{R}^n$ její vlastní vektor se všemi souřadnicemi nezápornými a vlastní hodnotou λ , pak $\lambda > 0$ je spektrální poloměr A . Navíc platí

$$\min_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \lambda \leq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

Na konci týdne bude podle zadání stav popsán vektorem $\begin{pmatrix} 0, 1 & 0, 2 \\ 0, 9 & 0, 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_P \end{pmatrix}$. Matice $A = \begin{pmatrix} 0, 1 & 0, 2 \\ 0, 9 & 0, 8 \end{pmatrix}$ tedy popisuje náš (lineární) systém půjčování aut. Pokud má být na konci týdne v pobočkách stejně aut jako na začátku, pak hledáme takový vektor x , pro který platí $Ax = x$. To znamená, že hledáme vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu 1.

Charakteristický polynom matice A je $(0, 1 - \lambda)(0, 8 - \lambda) - 0, 9 \cdot 0, 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 0, 1)$ a 1 je tedy opravdu vlastní hodnota matice A . Příslušný vlastní vektor $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_P \end{pmatrix}$ splňuje rovnici $\begin{pmatrix} -0, 9 & 0, 2 \\ 0, 9 & -0, 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_P \end{pmatrix} = 0$.

Je to tedy násobek vektoru $\begin{pmatrix} 0, 2 \\ 0, 9 \end{pmatrix}$. Pro zjištění procentuálního rozložení hledáme takový násobek, aby $x_B + x_P = 1$. To splňuje vektor $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 0, 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 18 \\ 0, 82 \end{pmatrix}$. Správné rozložení aut mezi Brnem a Prahou je takové, že 18% aut bude v Brně a 82% aut v Praze.

Pokud zvolíme libovolný počáteční stav $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_P \end{pmatrix}$, pak bude stav za n týdnů popsán vektorem $x_n = A^n x$. Nyní je výhodné vyjádřit počáteční vektor x v bázi vlastních vektorů matice A . Vlastní vektor k vlastnímu číslu 1 už jsme našli a podobně se nalezne vlastní vektor k vlastnímu číslu $-0, 1$. Tím je například vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Počáteční vektor tedy můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci $x = a \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 0, 9 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Stav po n týdnech je pak

$$x_n = A^n \left(a \begin{pmatrix} 0, 18 \\ 0, 82 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = a \begin{pmatrix} 0, 18 \\ 0, 82 \end{pmatrix} + b(-0, 1)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Druhý sčítanec se pro $n \rightarrow \infty$ blíží nule a proto se stav ustálí na $a \begin{pmatrix} 0, 18 \\ 0, 82 \end{pmatrix}$, tedy složce počátečního vektoru ve směru prvního vlastního vektoru. Koeficient a lze jednoduše vyjádřit pomocí počátečních počtů aut: $a = \frac{x_B + x_P}{1, 1}$. \square

3.23. Sledovanost televizí. V jisté zemi vysílají jisté dvě televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom roce přejde 1/6 diváků první stanice ke druhé stanici, 1/5 diváků druhé stanice přejde k první stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces, napište jeho matici, naleznete její vlastní čísla a vlastní vektory.

3.24. Studenti na přednášce. Studenty můžeme rozdělit řekněme do tří skupin - na ty, co jsou přítomni na přednášce a vnímají, na ty, co jsou rovněž přítomni, ale nevnímají a na ty, co sedí místo přednášky v hospodě. Nyní budeme hodinu po hodině sledovat, jak se mění počty studentů v těchto skupinách. Základem je vypořádat, jaké jsou jednotlivé pravděpodobnosti změny stavu studenta. Dejme tomu, že by to mohlo být následovně:

Student, který vnímá: s pravděpodobností 50% zůstane vnímat, 40% přestane vnímat a 10% odejde do hospody. Student, který je na přednášce a nevnímá: začne vnímat s pravděpodobností 10%, zůstane ve stejném stavu 50%, odejde do hospody 40%. Student, který sedí v hospodě má nulovou pravděpodobnost, že se vrátí na přednášku.

Jak se bude tento model vyvíjet v čase? Jak se situace změní, pokud budeme předpokládat aspoň desetiprocentní pravděpodobnost toho, že se student vrátí z hospody na přednášku (tu ovšem samozřejmě nevnímá)?

Řešení. Ze zadání se jedná o Markovův proces s maticí $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$. Její charakteristický polynom je $(0,5 - \lambda)^2(1 - \lambda) - 0,4(1 - \lambda) = 0$. Evidentně je tedy 1 vlastní číslo této matice (další kořeny jsou pak 0,3 a 0,7). Postupem času se tedy studenti rozdělí do skupin tak, že stav bude popsán příslušným vlastním vektorem. Ten je řešením rovnice $\begin{pmatrix} -0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & -0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, což jsou právě násobky vektoru (0.0.1). Jinými slovy, všichni studenti po čase skončí v hospodě.

Tento výsledek je zřejmý i bez počítání - tím, že je nulová pravděpodobnost odchodu studenta do školy, se budou studenti postupně hromadit v hospodě. Přidáním desetiprocentní možnosti odchodu studenta do školy se toto změní. Příslušná matice bude $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$. Opět platí, že se stav usálí na vlastním vektoru příslušnému vlastnímu číslu 1. Ten je v tomto případě řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & -0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \quad 3.20$$

Řešením je například vektor (1, 5, 21). Poměrné rozložení studentů v jednotlivých skupinách pak dá násobek tohoto vektoru, který má součet složek roven 1, tj. vektor $(\frac{1}{27}, \frac{5}{27}, \frac{21}{27})$. Opět tedy většina studentů skončí v hospodě, někteří ale ve škole budou. □

Ruleta

3.25. Ruleta. Hráč rulety má následující strategii: přišel hrát se 100 Kč. Vždy všechno, co aktuálně má. Sází vždy na černou (v ruletě je 37 čísel, z toho je 18 černých, 18 červených a nula). Hráč skončí, pokud nic nemá, nebo pokud získá 800 Uvažte tuto úlohu jako Markovův proces a napište jeho matici.

Řešení. V průběhu a na konci hry může mít hráč pouze následující peněžní obnosy (v Kč): 0, 100, 200, 400, 800. Budeme-li na danou situaci nahlížet jako na Markovův proces, toto budou jeho stavy a snadno také

DŮKAZ. Uvažme vlastní vektor x z dokazovaného tvrzení. Protože je A primitivní, můžeme zvolit pevně k tak, aby A^k už měla samé pozitivní prvky, a pak je samozřejmě i $A^k \cdot x = \lambda^k x$ vektor se samými ostře kladnými souřadnicemi. Nutně proto je $\lambda > 0$.

Z Perronovy věty víme, že spektrální poloměr μ je vlastním číslem a zvolme takový vlastní vektor y k μ , že rozdíl $x - y$ má samé kladné souřadnice. Potom nutně pro všechny mocniny n

$$0 < A^n \cdot (x - y) = \lambda^n x - \mu^n y,$$

ale zároveň platí $\lambda \leq \mu$. Odtud již vyplývá $\lambda = \mu$.

Zbývá odhad spektrálního poloměru pomocí minima a maxima součtů jednotlivých sloupců matice. Označme je b_{\min} a b_{\max} , zvolme za x vektor se součtem souřadnic jedna a počítejme:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j &= \sum_{i=1}^n \lambda x_i = \lambda \\ \lambda &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) x_j \leq \sum_{j=1}^n b_{\max} x_j = b_{\max} \\ \lambda &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{j=1}^n b_{\min} x_j = b_{\min}. \end{aligned}$$

□

Všimněme si, že např. všechny Leslieho matice z 3.18, kde jsou všechny uvažované koeficienty f_i a τ_j ostře kladné, jsou primitivní a tedy na ně můžeme plně použít právě odvozené výsledky.

Perronova-Frobeniova věta je zobecněním Perronovy věty na obecnější matice, které tu nebudeme uvádět. Další informace lze najít např. v ??.

odkaz do literatury
a další využití ...

3.21. Markovovy řetězce. Velice častý a zajímavý případ lineárních procesů se samými nezápornými prvky v matici je matematický model systému, který se může nacházet v m různých stavech s různou pravděpodobností. V jistém okamžiku je systém ve stavu i s pravděpodobností x_i a k přechodu z možného stavu i do stavu j dojde s pravděpodobností t_{ij} .

Můžeme tedy proces zapsat takto: V čase n je systém popsán pravděpodobnostním vektorem

$$x_n = (u_1(n), \dots, u_m(n))^T.$$

To znamená, že všechny komponenty vektoru x jsou reálná nezáporná čísla a jejich součet je roven jedné. Komponenty udávají rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých možností stavů systému. Rozdělení pravděpodobností pro čas $n + 1$ bude dáno vynásobením pravděpodobnostní maticí přechodu $T = (t_{ij})$, tj.

$$x_{n+1} = T \cdot x_n.$$

Protože předpokládáme, že vektor x zachycuje všechny možné stavy a proto s celkovou pravděpodobností jedna

přejde opět do některého z nich, budou všechny sloupce matice T tvořeny také pravděpodobnostními vektory. Takovému procesu říkáme (diskrétní) *Markovův proces* a výsledné posloupnosti vektorů x_0, x_1, \dots říkáme *Markovův řetězec* x_n .

Všimněme si, že každý pravděpodobnostní vektor x je skutečně Markovovým procesem zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_{i,j} t_{ij}x_j = \sum_j \left(\sum_i t_{ij} \right) x_j = \sum_j x_j = 1.$$

Nyní můžeme v plné síle použít Perronovu–Frobeniovu teorii. Protože je součet řádků matice T vždy roven vektoru $(1, \dots, 1)$, je zcela elementárně vidět, že matice $T - E$ je singularní a jednička proto bude zaručeně vlastním číslem matice T .

Pokud je navíc T primitivní matice (tj. např. když jsou všechny prvky nenulové), z Důsledku 3.20 víme, že je jednička jednoduchým kořenem charakteristického polynomu a všechny ostatní mají absolutní hodnotu ostře menší než jedna.

Věta. *Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost, splňují:*

- existuje jediný vlastní vektor x_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní,
- iterace $T^k x_0$ se blíží k vektoru x_∞ pro jakýkoliv počáteční pravděpodobnostní vektor x_0 .

DŮKAZ. První tvrzení vyplývá přímo z kladnosti souřadnic vlastního vektoru dovozené v Perronově větě.



Předpokládejme nejprve, že jsou algebraické a geometrické násobnosti vlastních čísel matice T stejné. Pak každý pravděpodobnostní vektor x_0 můžeme (v komplexním rozšíření \mathbb{C}^n) napsat jako lineární kombinaci

$$x_0 = c_1 x_\infty + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n,$$

kde u_2, \dots, u_n doplňují x_∞ na bázi z vlastních vektorů. Pak ovšem k -násobná iterace dává opět pravděpodobnostní vektor

$$x_k = T^k \cdot x_0 = c_1 x_\infty + \lambda_2^k c_2 u_2 + \dots + \lambda_n^k c_n u_n.$$

Protože jsou všechna vlastní čísla $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ v absolutní hodnotě ostře menší než jedna, všechny komponenty vektoru x_k , kromě té první, se velmi rychle blíží v normě k nule. Přitom ale je stále x_k pravděpodobnostní, takže musí být $c_1 = 1$ a druhé tvrzení máme ověřeno.

Ve skutečnosti ale i při různé algebraické a geometrické násobnosti vlastních čísel dojdeme ke stejnému závěru pomocí podrobnějšího studia tzv. kořenových podprostorů pro matici T , ke kterým se dostaneme v souvislosti s tzv. Jordánovým rozkladem matic ještě v této kapitole, viz poznámka 3.33.

sestavíme jeho matici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a = \frac{19}{37}$ a $b = \frac{18}{37}$. Všimněme si, že matice je pravděpodobnostní a singularní. Vlastní hodnota 1 je dvojnásobná. Hra nebude konvergovat k jedinému vektoru x_∞ , nýbrž skončí na jednom z vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě 1, totiž $(1, 0, 0, 0, 0)$ (hráč prohraje vše), nebo $(0, 0, 0, 0, 1)$ (hráč vyhraje 800 Kč). Navíc snadno nahlédneme, že hra skončí po třech sázkách, tedy posloupnost $\{A^n\}_{n=1}^\infty$ je konstantní pro $n \geq 3$:

$$A^\infty := A^3 = A^n = \begin{pmatrix} 1 & a + ab + ab^2 & a + ab & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & b^2 & b & 1 \end{pmatrix}$$

a snadno zjistíme, že hra skončí s pravděpodobností $a + ab + ab^2 \doteq 0,885$ prohrou a s pravděpodobností cca 0,115 výhrou 800 Kč. (Maticí A^∞ vynásobíme počáteční vektor $(0, 1, 0, 0, 0)$ a dostáváme vektor $(a + ab + ab^2, 0, 0, 0, b^3)$.) \square

3.26. Uvažujme situaci z předchozího případu a předpokládejme, že pravděpodobnost výhry i prohry je 1/2. Označme matici procesu A . Bez použití výpočetního software určete A^{100} .

3.27. Roztržitý profesor. Uvažujme následující situaci: Roztržitý profesor s sebou nosí deštník, ale s pravděpodobností 1/2 jej zapomene tam, odkud odchází. Ráno odchází do práce. V práci chodí na oběd do restaurace a zpět. Po skončení práce odchází domů. Uvažujme pro jednoduchost, že nikam jinam po dostatečně dlouhou dobu profesor nechodí a že v restauraci zůstává deštník na profesorově oblíbeném místě, odkud si ho může následující den vzít (pokud nezapomene). Uvažte tuto situaci jako Markovův proces a napište jeho matici. Jaká je pravděpodobnost, že se po mnoha dnech po ránu deštník bude nalézat v restauraci? (Je vhodné za časovou jednotku vzít jeden den – od rána do rána.)

Řešení.

$$A = \begin{pmatrix} 11/16 & 3/8 & 1/4 \\ 3/16 & 3/8 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Spočítejte třeba prvek a_1^1 , tedy pravděpodobnost, že deštník začne den doma a skončí doma (bude tam i druhý den ráno): deštník může putovat třemi disjunktními cestami:

D Profesor ho hned ráno zapomene doma: $p_1 = \frac{1}{2}$.

DPD Profesor si ho vezme do práce, pak ho zapomene vzít na oběd a poté ho večer odnese domů: $p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

DPRPD Profesor bere deštník všude a nikde ho nezapomene: $p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Celkem $a_1^1 = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{11}{16}$.

3.21

Vlastní vektor této matice příslušný dominantní vlastní hodnotě 1 je $(2, 1, 1)$, je tedy hledaná pravděpodobnost $1/(2 + 1 + 1) = 1/4$. □

3.28. Algoritmus na určování důležitosti stránek. Internetové vyhledávací umí na internetu vyhledat (skoro) všechny stránky obsahující dané slovo či frázi. Jak ale setřídit vyhledané stránky tak, aby uživatel dostal pokud možno seznam seřazený podle relevance daných stránek? Jednou z možností je následující algoritmus: soubor všech nalezených stránek považujeme za systém a každou z nalezených stránek za jeden z jeho možných stavů. Popíšeme náhodné procházení těchto stránek jako Markovův proces. Pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stránkami jsou dány odkazy: každý odkaz, řekněme ze stránky A na stránku B určuje pravděpodobnost $(1/(\text{celkový počet odkazů ze stránky A}))$, se kterou se dostaneme ze stránky A na stránku B. Pokud z některé stránky nevedou žádné odkazy, tak ji uvažujeme jako stránku, ze které vedou odkazy na všechny ostatní. Tímto dostaneme pravděpodobnostní matici M (prvek m_{ij} odpovídá pravděpodobnosti, se kterou se dostaneme z i -té stránky na j -tou). Bude-li tedy člověk náhodně klikat na odkazy v nalezených stránkách (pokud se dostane na stránku, ze které nevede odkaz, vybere si náhodně další), tak pravděpodobnost toho, že se v daný okamžik (dostatečně vzdálený od počátku klikání) bude nalézat na i -té stránce odpovídá i -té složce jednotkového vlastního vektoru matice M , odpovídajícího vlastnímu číslu 1. Podle velikosti těchto pravděpodobností pak určíme důležitost jednotlivých stránek.

Tento algoritmus lze modifikovat tím, že budeme předpokládat, že uživatel po nějaké době přestane klikat z odkazu na odkaz a opět začne náhodně na nějaké nové stránce. Řekněme, že s pravděpodobností d vybere náhodně novou stránku a s pravděpodobností $(1-d)$. V takovéto situaci je nyní pravděpodobnost přechodu mezi libovolnými dvěma stránkami S_i a S_j nenulová, je to totiž $d/n + (1-d)/(\text{celkový počet odkazů ze stránky } S_i)$, pokud ze stránky S_i vede odkaz na S_j , pokud ne, tak je tato pravděpodobnost d/n ($1/n$, pokud z S_i nevedou žádné odkazy). podle Frobeniovy-Perronovy věty je vlastní hodnota 1 jednonásobná a dominantní, takže jí odpovídající vlastní vektor je jediný (pokud bychom volili pravděpodobnosti přechodu pouze způsobem z předchozího odstavce, tak by tomu tak nemuselo být).

I v obecném případě totiž dostaneme k vlastnímu podprostoru $\langle x_\infty \rangle$ jednoznačně určený invariantní $(n-1)$ -rozměrný komplement, na kterém už všechna vlastní čísla jsou v absolutní hodnotě menší než jedna a proto se příslušná komponenta v x_k také bude neomezeně blížit k nule jako výše. □

3.22. Iterace stochastických matic. Matice Markovových procesů, tj. matice jejichž všechny sloupce mají součet svých komponent roven jedné se nazývají *stochastické matice*. Standardní úlohy spojené s Markovovými procesy zahrnují odpovědi na otázky po očekávané střední době přechodu mezi předem určenými stavy systému apod. Momentálně nejsme na řešení těchto úloh připraveni, vrátíme se ale k této tématice později.



vymazat příslib, pokud to nenastane, a nahradit odkazem do literatury

Přeformulujeme předchozí větu do jednoduchého, ale asi docela překvapivého důsledku. Konvergenčí k limitní matici v následujícím tvrzení myslíme skutečnost, že když si předem určíme možnou chybu $\epsilon > 0$, tak najdeme hranici na počet iterací k po níž už všechny komponenty uvedené matice se od té limitní budou lišit o méně než ϵ .

Důsledek. *Nechť T je primitivní stochastická matice z Markovova procesu a x_∞ je stochastický vlastní vektor k dominantnímu číslu 1 jako ve větě výše. Pak iterace T^k konvergují k limitní matici T_∞ , jejíž všechny sloupce jsou rovny x_∞ .*

DŮKAZ. Sloupce v matici T^k jsou obrazy vektorů standardní báze v příslušném iterovaném lineárním zobrazení. To ale jsou obrazy pravděpodobnostních vektorů a proto všechny konvergují k x_∞ . □

Nyní se ještě na rozlučku s Markovovými procesy zamyslíme nad problémem, zda existují pro daný systém stavy, do kterých se má systém tendenci dostat a setrvat v nich.

O stavu systému řekněme, že je *přechodový*, jestliže v něm systém setrvává s pravděpodobností ostře menší než jedna. Za *absorpční* označíme stav, ve kterém systém setrvává s pravděpodobností 1, a do kterého se lze dostat s nenulovou pravděpodobností z kteréhokoliv z přechodových stavů. Konečně, Markovův řetězec x_n je *absorpční*, jestliže jsou jeho všechny jeho stavy buď absorpční nebo přechodové.

Je-li v absorpčním Markovově řetězci prvních r stavů systému absorpčních, pro stochastickou matici T systému to znamená, že se rozpadá na „blokově“ horní trojúhelníkový tvar

$$T = \begin{pmatrix} E & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

kde E je jednotková matice, jejíž rozměr je dán počtem absorpčních stavů, zatímco R je kladná matice a Q nezáporná. V každém případě iteracemi této matice budeme pořád dostávat stejný blok nulových hodnot v levém dolním bloku a tedy zcela jistě nebude primitivní, např.

$$T^2 = \begin{pmatrix} E & R + R \cdot Q \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix}.$$

I o takových maticích lze získat hodně informací pomocí plně Perronovy–Frobeniovy teorie a se znalostí pravděpodobnosti a statistiky také odhadovat střední doby, po kterých se systém dostane do jednoho z absorpčních stavů apod.

4. Více maticového počtu

Na vcelku praktických příkladech jsme viděli, že porozumění vnitřní struktuře matic a jejím vlastnostem je silným nástrojem pro konkrétní výpočty nebo analýzy. Ještě více to platí pro efektivitu numerického počítání s maticemi. Proto se budeme zase chvíli věnovat abstraktní teorii.

Budeme přitom zkoumat další speciální typy lineárních zobrazení na vektorových prostorech ale také obecný případ, kdy je struktura zobrazení popsána tzv. Jordanovou větou.

3.30

3.23. Unitární prostory a zobrazení. Už jsme si zvykli, že je užitečné pracovat rovnou v číselném oboru komplexních čísel a to i v případě, kdy nás zajímají jen reálné objekty. Navíc v mnohých oblastech jsou komplexní vektorové prostory nutnou součástí úvah. Jasným příkladem je například tzv. kvantové počítání, které se stalo velmi akční oblastí teoretické informatiky, přestože kvantové počítače zatím zkonstruovány ve funkční podobě nebyly.

Proto navážeme na ortogonální zobrazení a matice z konce druhé kapitoly následující definicí:

UNITÁRNÍ PROSTORY

Definice. *Unitární prostor* je komplexní vektorový prostor V spolu se zobrazením $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$, které splňuje pro všechny vektory $u, v, w \in V$ a skaláry $a \in \mathbb{C}$

- (1) $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$ (zde pruh značí komplexní konjugaci),
- (2) $(au) \cdot v = a(u \cdot v)$,
- (3) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$,
- (4) je-li $u \neq 0$, pak $u \cdot u > 0$ (zejména je výraz reálný).

Toto zobrazení nazýváme *skalární součin* na V .

Reálné číslo $\sqrt{v \cdot v}$ nazýváme *velikostí vektoru* v a vektor je *normovaný*, jestliže má velikost jedna. Vektory u a v nazýváme *ortogonální*, jestliže je jejich skalární součin nulový, bázi sestavenou z po dvou ortogonálních a normovaných vektorů nazýváme *ortonormální báze* V .

Na první pohled jde o rozšíření definice euklidovských vektorových prostorů do komplexního oboru. Nadále budeme také používat alternativní značení $\langle u, v \rangle$ pro skalární součin vektorů u a v . Zcela stejně jako v reálném oboru také okamžitě z definice vyplývají následující jednoduché vlastnosti skalárního součinu pro všechny vektory ve V a skaláry

Pro názornost uvažme stránky A, B, C a D. Odkazy vedou z A na B a na C, z B na C a z C na A, z D pak nikam. Uvažujme, že pravděpodobnost toho, že uživatel náhodně zvolí novou stránku je $1/5$. Potom by matice M vypadala následovně:

$$M = \begin{pmatrix} 1/20 & 1/20 & 17/20 & 1/4 \\ 9/20 & 1/20 & 1/20 & 1/4 \\ 9/20 & 17/20 & 1/20 & 1/4 \\ 1/20 & 1/20 & 1/20 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě 1 je $(305/53, 175/53, 315/53, 1)$, důležitost stránek tedy bude stanovena v pořadí podle velikosti jeho odpovídajících složek, tedy $C > A > B > D$.

3.29. Na základě teploty ve 14.00 se rozdělují dny na teplé, průměrné a chladné. Dle celoročních statistik následuje po teplém dni teplý v polovině případů a průměrný ve 30 % případů, po průměrném dnu průměrný ve 40 % případů a chladný ve 30 % případů, po chladném dnu chladný v polovině případů a ve 30 % případů průměrný. Bez dalších informací zjistěte, kolik lze během roku očekávat teplých, průměrných a chladných dnů.

Řešení. Pro každý den musí nastat právě jeden ze stavů „teplý den“, „průměrný den“, „chladný den“. Pokud vektor x_n má za složky pravděpodobnosti toho, že jistý (označený jako n -tý) den bude teplý, průměrný, chladný (při zachování pořadí), potom složky vektoru

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot x_n$$

udávají postupně pravděpodobnosti, že následující den bude teplý, průměrný, chladný. Pro ověření stačí dosadit

$$x_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

přičemž např. pro třetí volbu musíme dostat pravděpodobnosti, že po chladném dnu bude následovat teplý, průměrný, chladný (v tomto pořadí). Vidíme tak, že úloha je Markovovým řetězcem s pravděpodobnostní maticí přechodu

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Neboť jsou všechny prvky této matice kladné, existuje pravděpodobnostní vektor

$$x_\infty = (x_\infty^1, x_\infty^2, x_\infty^3)^T,$$

k němuž se blíží vektor x_n pro zvětšující se n nezávisle na tom, jaký byl vektor x_n pro mnohem menší n . Navíc podle důsledku Perronovy–Frobeniovy věty je x_∞ vlastním vektorem matice T pro vlastní číslo 1.

Má tedy platit

$$\begin{aligned}x_{\infty}^1 &= 0,5x_{\infty}^1 + 0,3x_{\infty}^2 + 0,2x_{\infty}^3, \\x_{\infty}^2 &= 0,3x_{\infty}^1 + 0,4x_{\infty}^2 + 0,3x_{\infty}^3, \\x_{\infty}^3 &= 0,2x_{\infty}^1 + 0,3x_{\infty}^2 + 0,5x_{\infty}^3, \\1 &= x_{\infty}^1 + x_{\infty}^2 + x_{\infty}^3,\end{aligned}$$

kde poslední podmínka znamená, že vektor x_{∞} je pravděpodobnostní. Snadno se vypočítá, že tato soustava má jediné řešení

$$x_{\infty}^1 = x_{\infty}^2 = x_{\infty}^3 = \frac{1}{3}.$$

Lze tedy očekávat přibližně stejný počet teplých, průměrných a chladných dnů.

Zdůrazněme, že součet všech čísel z libovolného sloupce matice T musel být roven 1 (jinak by se nejednalo o Markovův proces). Protože $T^T = T$ (matice je symetrická), je součet všech čísel z libovolného řádku matice také roven 1. O matici s nezápornými prvky a s vlastností, že součet čísel v každém řádku a rovněž součet čísel v každém sloupci je 1, mluvíme jako o dvojnásobně (dvojitě, dvojně) stochastické. Důležitou vlastností každé dvojnásobně stochastické regulární matice (pro jakýkoli rozměr – počet stavů) je, že jí příslušný vektor x_{∞} má všechny složky stejné, tj. po dostatečně dlouhé době vyhodnocování se všechny stavy v odpovídajícím Markovově procesu jeví jako stejně časté. \square

3.30. Jirka má ve zvyku si každý večer zaběhat. Má tři trasy – krátkou, střední a dlouhou. Pokud si někdy zvolí krátkou trasu, následující den si to vyčítá a rozhodne se libovolně (tj. se stejnou pravděpodobností) pro dlouhou, nebo střední. Jestliže si v některý den zvolí dlouhou trasu, v následujícím dnu volí zcela libovolně jednu z tras. Pokud běžel středně dlouhou trasu, cítí se dobře a druhý den si se stejnou pravděpodobností vybere buď střední, nebo dlouhou. Předpokládejte, že takto běhá každý večer už velmi dlouhou dobu. Jak často volí krátkou a jak často dlouhou trasu? Jaká je pravděpodobnost, že si zvolí dlouhou trasu, když si ji zvolil přesně před týdnem?

Řešení. Zřejmě se jedná o Markovův proces se třemi možnými stavy, a to volbami krátké, střední a dlouhé trasy. Toto pořadí stavů dává pravděpodobnostní matici přechodu

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Stačí si uvědomit, že např. druhý sloupec odpovídá volbě střední trasy v minulém dnu, která znamená, že s pravděpodobností $1/2$ bude opět

v \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}u \cdot u &\in \mathbb{R} \\u \cdot u &= 0 \text{ právě tehdy, když } u = 0 \\u \cdot (av) &= \bar{a}(u \cdot v) \\u \cdot (v + w) &= u \cdot v + u \cdot w \\u \cdot 0 &= 0 \cdot u = 0 \\(\sum_i a_i u_i) \cdot (\sum_j b_j v_j) &= \sum_{i,j} a_i \bar{b}_j (u_i \cdot v_j),\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí pro všechny konečné lineární kombinace. Podrobné ověření je skutečně jednoduchým cvičením, např. první vztah plyne okamžitě z definiční vlastnosti (1).

Standardním příkladem skalárního součinu na komplexním vektorovém prostoru \mathbb{C}^n je

$$(x_1, \dots, x_n)^T \cdot (y_1, \dots, y_n)^T = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Díky konjugování souřadnic druhého argumentu toto zobrazení splňuje všechny požadované vlastnosti. Prostor \mathbb{C}^n s tímto skalárním součinem budeme nazývat *standardní unitární prostor* v dimenzi n . Maticově můžeme tento skalární součin psát jako $x \cdot y = \bar{y}^T \cdot x$.

Zcela obdobně jako u euklidovských prostorů a ortogonálních zobrazení budou důležitá lineární zobrazení, která respektují skalární součiny.

UNITÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow W$ mezi unitárními prostory se nazývá *unitární zobrazení*, jestliže pro všechny vektory $u, v \in V$ platí

$$u \cdot v = \varphi(u) \cdot \varphi(v).$$

Unitární isomorfismus je bijektivní unitární zobrazení.

3.24. Vlastnosti prostorů se skalárním součinem. Ve stručné diskusi euklidovských prostorů v předchozí kapitole jsme už některé jednoduché vlastnosti prostorů se skalárním součinem odvodili, důkazy v komplexním oboru jsou velmi podobné.

V dalším budeme pracovat s reálnými i komplexními prostory zároveň a budeme psát \mathbb{K} pro \mathbb{R} nebo \mathbb{C} , v reálném případě je konjugace prostě identické zobrazení (tak jak skutečně zúžení konjugace na reálnou přímku v komplexní rovině je). Stejně jako u reálných prostorů definujeme obecně pro libovolný vektorový podprostor $U \subset V$ v prostoru se skalárním součinem jeho *ortogonální doplněk*

$$U^{\perp} = \{v \in V; u \cdot v = 0 \text{ pro všechny } u \in U\},$$

což je zjevně také vektorový podprostor ve V .

Budeme v dalších odstavcích pracovat výhradně s konečněrozměrnými unitárními nebo euklidovskými prostory. Řada našich výsledků ale má přirozené rozšíření pro tzv. Hilbertovy prostory, což jsou jisté nekonečněrozměrné prostory

se skalárním součinem, ke kterým se aspoň stručně vrátíme později.

Tvrzení. Pro každý konečněrozměrný prostor V dimenze n se skalárním součinem platí:

- (1) Ve V existuje ortonormální báze.
- (2) Každý systém nenulových ortogonálních vektorů ve V je lineárně nezávislý a lze jej doplnit do ortogonální báze.
- (3) Pro každý systém lineárně nezávislých vektorů (u_1, \dots, u_k) existuje ortonormální báze (v_1, \dots, v_n) taková, že její vektory postupně generují stejné podprostory jako vektory u_j , tzn. $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $1 \leq i \leq k$.
- (4) Je-li (u_1, \dots, u_n) ortonormální báze V , pak souřadnice každého vektoru $u \in V$ jsou vyjádřeny vztahem

$$u = (u \cdot u_1)u_1 + \dots + (u \cdot u_n)u_n.$$

- (5) V libovolné ortonormální bázi má skalární součin souřadný tvar

$$u \cdot v = x \cdot y = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

kde x a y jsou sloupce souřadnic vektorů u a v ve zvolené bázi. Zejména je tedy každý n -rozměrný prostor se skalárním součinem izomorfní standardnímu euklidovskému \mathbb{R}^n nebo unitárnímu \mathbb{C}^n .

- (6) Ortogonální součet unitárních podprostorů $V_1 + \dots + V_k$ ve V je vždy přímý součet.
- (7) Je-li $A \subset V$ libovolná podmnožina, pak $A^\perp \subset V$ je vektorový (tedy i unitární) podprostor a $(A^\perp)^\perp \subset V$ je právě podprostor generovaný A . Navíc platí $V = \langle A \rangle \oplus A^\perp$.
- (8) V je ortogonálním součtem n jednorozměrných unitárních podprostorů.



DŮKAZ. (1), (2), (3): Daný systém vektorů nejprve doplníme do libovolné báze (u_1, \dots, u_n) prostoru V a spustíme na ni Grammovu–Schmidtovu ortogonalizaci z 2.42. Tak získáme ortogonální bázi s vlastnostmi požadovanými v (3). Přitom ale z algoritmu Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace vyplývá, že pokud již původních k vektorů tvořilo ortogonální systém vektorů, pak v průběhu ortogonalizace zůstanou nezměněny. Dokázali jsme tedy zároveň i (2) a (1).

- (4): Je-li $u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$, pak

$$u \cdot u_i = a_1 (u_1 \cdot u_i) + \dots + a_n (u_n \cdot u_i) = a_i \|u_i\|^2 = a_i$$

- (5): Podobně spočteme pro libovolné vektory $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, $v = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) \cdot (y_1 u_1 + \dots + y_n u_n) \\ &= x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n. \end{aligned}$$

- (6): Potřebujeme ukázat, že pro libovolnou dvojici V_i, V_j ze zadaných podprostorů je jejich průnik triviální. Je-li však $u \in V_i$ a zároveň $u \in V_j$, pak je $u \perp u$, tj. $u \cdot u = 0$. To je ale možné pouze pro nulový vektor $u \in V$.

zvolena střední trasa (druhý řádek) a s pravděpodobností $1/2$ bude zvolena dlouhá trasa (třetí řádek). Neboť je

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/9 \\ 5/12 & 5/12 & 4/9 \\ 5/12 & 5/12 & 4/9 \end{pmatrix},$$

můžeme využít důsledků Perronovy-Frobeniovy věty pro Markovovy procesy. Není obtížné vypočítat, že vlastním vektorem, který přísluší vlastnímu číslu 1 a který je pravděpodobnostní, je právě

$$\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7} \right)^T.$$

Hodnoty $1/7, 3/7, 3/7$ pak udávají po řadě pravděpodobnosti, že v náhodně určeném dnu volí trasu krátkou, střední, dlouhou.

Nechť si Jirka v jistý den (v čase $n \in \mathbb{N}$) vybere dlouhou trasu. Tomuto rozhodnutí odpovídá pravděpodobnostní vektor

$$x_n = (0, 0, 1)^T.$$

Pro následující den tedy platí

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

až po sedmi dnech je

$$x_{n+7} = T^7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T^6 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Vyčíslením dostáváme jako složky x_{n+7} hodnoty

$$0, 142\,861\,225 \dots; \quad 0, 428\,569\,387 \dots; \quad 0, 428\,569\,387 \dots$$

Tedy pravděpodobnost, že zvolí dlouhou trasu za podmínky, že si ji zvolil před sedmi dny, činí přibližně $0, 428\,569 \approx 3/7 \doteq 0, 428\,571$.

□

3.31. Výrobní linka nefunguje spolehlivě: jednotlivé výrobky se od sebe co do kvality nezanedbatelně liší. Navíc jistý pracovník ve snaze zvýšit kvalitu neustále zasahuje do výrobního procesu. Při rozdělení výrobků do tříd I, II, III podle kvality se zjistilo, že po výrobku třídy I následuje výrobek stejné kvality v 80 % případů a třídy II v 10 % případů, po výrobku třídy II se nezmění kvalita v 60 % případů a změní se na třídu I ve 20 % případů a že po výrobku třídy III následuje výrobek stejné kvality v polovině případů a se stejnou četností pak výrobky tříd I, II. Spočítejte pravděpodobnost, že 18. výrobek je třídy I, pokud 16. výrobek v pořadí náležel do třídy III.

Řešení. Nejprve úlohu vyřešme bez uvážení Markovova řetězce. Sledovanému jevu vyhovují případy (16. výrobek je třídy III)

- 17. výrobek byl zařazen do třídy I a 18. do třídy I;
- 17. výrobek byl zařazen do třídy II a 18. do třídy I;

- 17. výrobek byl zařazen do třídy III a 18. do třídy I

po řadě s pravděpodobnostmi

- $0,25 \cdot 0,8 = 0,2$;
- $0,25 \cdot 0,2 = 0,05$;
- $0,5 \cdot 0,25 = 0,125$.

Lehce tak získáváme výsledek

$$0,375 = 0,2 + 0,05 + 0,125.$$

Nyní na úlohu nahlížejme jako na Markovův proces. Ze zadání plyne, že pořadí možných stavů „výrobek je třídy I“, „výrobek je třídy II“, „výrobek je třídy III“ odpovídá pravděpodobnostní matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,25 \\ 0,1 & 0,6 & 0,25 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}. \quad \boxed{3.32}$$

Situaci, kdy výrobek patří do třídy III, zadává pravděpodobnostní vektor $(0, 0, 1)^T$. Pro následující výrobek dostáváme pravděpodobnostní vektor

$$\begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,25 \\ 0,1 & 0,6 & 0,25 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a pro další výrobek v pořadí potom vektor

$$\begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,3 \\ 0,325 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,25 \\ 0,1 & 0,6 & 0,25 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

jehož první složka je hledanou pravděpodobností.

Doplňme, že první metoda řešení (bez zavedení Markovova procesu) vedla k výsledku zřejmě rychleji. Uvědomme si, jak výrazně by se však první metoda znepřehlednila, kdybychom např. místo 18. výrobku uvažovali 20., 22. nebo až 30. výrobek v pořadí. Ve druhé metodě se lze omezit na do jisté míry „bezmyšlenkovité“ násobení (umocňování) matic. Při zavedení Markovova procesu jsme také současně vyšetřovali situace, kdy 18. výrobek náleží do tříd II a III. \square

3.32. Opakovaně házíme hrací kostkou. Napište pravděpodobnostní matici přechodu T pro Markovův řetězec „maximální počet ok dosažených do n -tého hodu včetně“ pro pořadí stavů $1, \dots, 6$. Poté určete T^n pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Ihned můžeme uvést

$$T = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 5/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1 \end{pmatrix},$$

(7): Nechť $u, v \in A^\perp$. Pak $(au + bv) \cdot w = 0$ pro všechny $w \in A$, $a, b \in \mathbb{K}$ (z distributivity skalárního součinu). Tím jsme ověřili, že A^\perp je unitární podprostor ve V . Nechť (v_1, \dots, v_k) je nějaká báze $\langle A \rangle$, vybraná z prvků A , (u_1, \dots, u_k) ortonormální báze vzniklá z Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace vektorů (v_1, \dots, v_k) . Doplňme ji na ortonormální bázi celého V (obojí existuje podle již dokázaných částí věty). Protože se jedná o ortogonální bázi, je nutně $\langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp = A^\perp$ a $A \subset \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle^\perp$ (jak plyne z vyjádření souřadnic v ortonormální bázi). Je-li $u \perp \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$, pak u je nutně lineární kombinací vektorů u_1, \dots, u_k , to je ale právě tehdy, když je lineární kombinací vektorů v_1, \dots, v_k , což je ekvivalentní příslušnosti u do $\langle A \rangle$.

(8): Je pouze ekvivalentní formulaci existence ortonormální báze. \square

3.25. Důležité vlastnosti velikosti. Nyní máme vše připraveno pro základní vlastnosti spojené s naší definicí velikostí vektorů. Hovoříme také o *normě* definované skalárním součinem. Všimněme si také, že všechna tvrzení se týkají vždy konečných množin vektorů a jejich platnost proto nezávisí na dimenzi prostoru V , ve kterém se vše odehrává.



Věta. Pro libovolné vektory u, v v prostoru V se skalárním součinem platí

(1) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, přitom rovnost nastane, právě když jsou u a v lineárně závislé.

(trojúhelníková nerovnost)

(2) $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$, přitom rovnost nastane, právě když jsou u a v lineárně závislé.

(Cauchyova nerovnost)

(3) Pro každý ortonormální systém vektorů (e_1, \dots, e_k) platí

$$\|u\|^2 \geq |u \cdot e_1|^2 + \dots + |u \cdot e_k|^2$$

(Besselova nerovnost).

(4) Pro ortonormální systém vektorů (e_1, \dots, e_k) patří vektor u do podprostoru $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ právě když

$$\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \dots + |u \cdot e_k|^2.$$

(Parsevalova rovnost)

(5) Pro ortonormální systém vektorů (e_1, \dots, e_k) a vektor $u \in V$ je vektor

$$w = (u \cdot e_1)e_1 + \dots + (u \cdot e_k)e_k$$

jediným vektorem, který minimalizuje velikost $\|u - v\|$ pro všechny $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

DŮKAZ. Všechny důkazy spočívají v přímých výpočtech:

(2): Definujme vektor $w := u - \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$, tzn. $w \perp v$ a počítejme

$$0 \leq \|w\|^2 = \|u\|^2 - \frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^2} - \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} (v \cdot u) + \frac{(u \cdot v)(\overline{u \cdot v})}{\|v\|^4} \|v\|^2$$

$$0 \leq \|w\|^2 \|v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - 2(u \cdot v)(\overline{u \cdot v}) + (u \cdot v)(\overline{u \cdot v})$$

Odtud již přímo plyne, že $\|u\|^2\|v\|^2 \geq |u \cdot v|^2$ a rovnost nastane právě tehdy, když $w = 0$, tj. když jsou u a v lineárně závislé.

(1): Opět stačí počítat

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + u \cdot v + v \cdot u \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(u \cdot v) \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|u \cdot v| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Protože se přitom jedná o kladná reálná čísla, je opravdu $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Navíc, při rovnosti musí nastat rovnost ve všech předchozích nerovnostech, to však je ekvivalentní podmínce, že u a v jsou lineárně závislé (podle předchozí části důkazu).

(3), (4): Nechť (e_1, \dots, e_k) je ortonormální systém vektorů. Doplníme jej do ortonormální báze (e_1, \dots, e_n) (to vždy jde podle předchozí věty). Pak, opět podle předchozí věty, je pro každý vektor $u \in V$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n (u \cdot e_i)(\overline{u \cdot e_i}) = \sum_{i=1}^n |u \cdot e_i|^2 \geq \sum_{i=1}^k |u \cdot e_i|^2$$

To je ale právě dokazovaná Besselova nerovnost. Přitom rovnost může nastat právě tehdy, když $u \cdot e_i = 0$ pro všechny $i > k$, a to dokazuje Parsevalovu rovnost.

(5): Zvolme libovolný $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ a doplníme daný ortonormální systém na ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) . Nechť (u_1, \dots, u_n) a $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ jsou souřadnice u a v v této bázi. Pak

$$\|u - v\|^2 = |u_1 - x_1|^2 + \dots + |u_k - x_k|^2 + |u_{k+1}|^2 + \dots + |u_n|^2$$

a tento výraz je zjevně minimalizován při volbě jednotlivých vektorů $x_1 = u_1, \dots, x_k = u_k$. \square

3.33

3.26. Vlastnosti unitárních zobrazení. Vlastnosti ortogonálních zobrazení mají přímočarou obdobu v komplexním oboru. Můžeme je snadno zformulovat a dokázat společně:



Tvrzení. Uvažme lineární zobrazení (endomorfismus) $\varphi : V \rightarrow V$ na prostoru se skalárním součinem. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) φ je unitární nebo ortogonální transformace
- (2) φ je lineární isomorfismus a pro každé $u, v \in V$ platí $\varphi(u) \cdot v = u \cdot \varphi^{-1}(v)$
- (3) matice A zobrazení φ v libovolné ortonormální bázi splňuje $A^{-1} = \bar{A}^T$ (pro euklidovské prostory to znamená $A^{-1} = A^T$)
- (4) matice A zobrazení φ v některé ortonormální bázi splňuje $A^{-1} = \bar{A}^T$
- (5) řádky matice A zobrazení φ v ortonormální bázi tvoří ortonormální bázi prostoru \mathbb{K}^n se standardním skalárním součinem

kde první sloupec je určen stavem 1 a pravděpodobností $1/6$ pro jeho zachování (v dalším hoďu padne 1) a pravděpodobností $1/6$ jeho přechodu do libovolného ze stavů $2, \dots, 6$ (po řadě padne $2, \dots, 6$), druhý sloupec je zadán stavem 2 a pravděpodobností $2/6$ pro jeho zachování (v dalším hoďu padne 1 nebo 2) a pravděpodobností $1/6$ pro přechod do jakéhokoli ze stavů $3, \dots, 6$ (padne $3, \dots, 6$), až poslední sloupce získáme ze skutečnosti, že stav 6 je trvalý (pokud již padla šestka, nemůže padnout vyšší počet ok).

Rovněž pro $n \in \mathbb{N}$ lze přímo určit

$$T^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n & \left(\frac{2}{6}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n & \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n & \left(\frac{3}{6}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n & \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n & \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n & \left(\frac{4}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n & \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n & \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n & \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n & \left(\frac{5}{6}\right)^n & 0 \\ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n & 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n & 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n & 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n & 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnoty v prvním sloupci totiž odpovídají postupně pravděpodobnostem, že n -krát po sobě padne 1, n -krát po sobě padne 1 nebo 2 a alespoň jednou 2 (odečítáme proto pravděpodobnost uvedenou v prvním řádku), n -krát po sobě padne 1, 2 nebo 3 a alespoň jednou padne 3, až v posledním řádku je pravděpodobnost, že aspoň jednou během n hodů padne 6 (tu lze snadno určit z pravděpodobnosti opačného jevu). Podobně např. ve čtvrtém sloupci jsou postupně nenulové pravděpodobnosti jevů „ n -krát po sobě padne 1, 2, 3 nebo 4“, „ n -krát po sobě padne 1, 2, 3, 4 nebo 5 a alespoň jednou 5“ a „alespoň jednou během n hodů padne 6“. Interpretace matice T jako matice přechodu jistého Markovova procesu tak umožňuje rychlé vyjádření mocnin T^n , $n \in \mathbb{N}$. \square

3.33. Sledujte určitou vlastnost daného živočišného druhu, která je podmíněna nezávisle na pohlaví jistým genem – dvojicí alel. Každý jedinec získává po jedné alele od obou rodičů zcela náhodně a nezávisle na sobě. Existují formy genu dané různými alelami a, A . Ty určují tři možné stavy $aa, aA = Aa, AA$ vyšetřované vlastnosti.

- (a) Předpokládejte, že každý jedinec jisté populace se bude rozmnožovat výhradně s jedincem jiné populace, ve které se vyskytuje pouze vlastnost podmíněná dvojicí aA . Právě jeden jejich (náhodně zvolený) potomek bude ponechán na stanovišti a také on se bude rozmnožovat výhradně s jedincem té jiné populace atd. Stanovte výskyt kombinací aa, aA, AA v uvažované populaci po dostatečně dlouhé době.
- (b) Řešte úlohu uvedenou ve variantě (a), pokud je jiná populace tvořena pouze jedinci s dvojicí alel AA .

- (c) Náhodně zvolené dva jedince opačného pohlaví zkřížíte. Z jejich potomstva opět náhodně vyberete dva jedince opačného pohlaví, které zkřížíte. Pokud takto budete pokračovat velmi dlouho dobu, vypočtete pravděpodobnost, že oba křížení jedinci budou mít dvojici alel AA , příp. aa (proces křížení skončí).
- (d) Řešte úlohu uvedenou ve variantě (c) bez kladení podmínky, že křížení jedinci mají stejné rodiče. Pouze tedy křížíte jedince jisté velké populace mezi sebou, potom křížíte potomky mezi sebou atd.

Řešení. Případ (a). Jedná se o Markovův proces zadaný maticí

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

přičemž pořadí stavů odpovídá pořadí dvojic alel aa , aA , AA . Hodnoty v prvním sloupci plynou z toho, že potomek jedince s dvojicí alel aa a jedince s dvojicí alel aA má s pravděpodobností $1/2$ dvojici aa a s pravděpodobností $1/2$ dvojici aA . Analogicky postupujeme pro třetí sloupec. Hodnoty ve druhém sloupci potom vyplývají z toho, že každý ze čtyř případů dvojic alel aa , aA , Aa , AA je stejně pravděpodobný u jedince, jehož oba rodiče mají dvojici alel aA . Uvědomme si, že na rozdíl od počítání pravděpodobností, kdy musíme rozlišovat dvojici aA od Aa (která z alel pochází od kterého z rodičů), vlastnosti podmíněné dvojicemi aA a Aa jsou samozřejmě stejné. Pro určení výsledného stavu stačí nalézt pravděpodobnostní vektor, který přísluší vlastnímu číslu 1 matice T , protože matice

$$T^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

splňuje podmínku Perronovy-Frobeniovy věty (všechny její prvky jsou kladné). Hledaný pravděpodobnostní vektor je

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^T,$$

což již dává pravděpodobnosti $1/4$, $1/2$, $1/4$ výskytu po řadě kombinací aa , aA , AA po velmi dlouhé (teoreticky nekonečné) době.

Případ (b). Pro pořadí dvojic alel AA , aA , aa nyní dostáváme pravděpodobnostní matici přechodu

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihned vidíme všechna vlastní čísla 1, $1/2$ a 0 (odečteme-li je od diagonály, hodnota obdržené matice nebude 3, tj. touto maticí zadaná homogenní soustava bude mít netriviální řešení). Těmto vlastním číslům

- (6) sloupce matice A zobrazení φ v ortonormální bázi tvoří ortonormální bázi prostoru \mathbb{K}^n se standardním skalárním součinem

DŮKAZ. (1) \Rightarrow (2): Zobrazení φ je prosté, proto musí být i na. Platí přitom $\varphi(u) \cdot v = \varphi(u) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(v)) = u \cdot \varphi^{-1}(v)$.

(2) \Rightarrow (3): Standardní skalární součin je v \mathbb{K}^n vždy dán pro sloupce x , y skalárů výrazem $x \cdot y = x^T E \bar{y}$, kde E je jednotková matice. Vlastnost (2) tedy znamená, že matice A zobrazení φ je invertibilní a platí $(Ax)^T \bar{y} = x^T \overline{A^{-1}y}$. To znamená $\bar{x}^T (\bar{A}^T y - A^{-1}y) = 0$ pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Zejména dosazením výrazu v závorce za x zjistíme, že to je možné pouze při $\bar{A}^T = A^{-1}$.

(3) \Leftrightarrow (4): Je-li $\bar{A}^T = A^{-1}$ v některé ortonormální bázi, pak to zaručuje platnost podmínky (2) $(\varphi(u) \cdot v = (Ax)^T E \bar{y} = x^T E A^{-1}y = u \cdot \varphi^{-1}(v))$ a tedy i (3).

(4) \Rightarrow (5) Dokazované tvrzení je vyjádřeno prostřednictvím matice A zobrazení φ vztahem $A \bar{A}^T = E$, to je ale zaručeno podmínkou (4).

(5) \Rightarrow (6): Protože pro determinant platí $|\bar{A}^T A| = |E| = |A \bar{A}^T| = |A| |\bar{A}| = 1$, existuje inverzní matice A^{-1} . Přitom je $A \bar{A}^T A = A$, proto i $\bar{A}^T A = E$ což vyjadřuje právě (6).

(6) \Rightarrow (1): Ve vybrané ortonormální bázi je

$$\varphi(u) \cdot \varphi(v) = (Ax)^T (\overline{Ay}) = x^T \bar{A} \bar{y} = x^T E \bar{y} = x^T \bar{y}$$

kde x a y jsou sloupce souřadnic vektorů u a v . Tím je zaručeno zachování skalárního součinu. \square

Charakterizace z předchozí věty si zaslouží několik poznámek. Matice $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ s vlastností $A^{-1} = \bar{A}^T$ se nazývají *unitární matice* pro komplexní skaláry (a v případě \mathbb{R} jsme jim již říkali *ortogonální matice*). Z definiční vlastnosti plyne, že součin unitárních (resp. ortogonálních) matic je unitární (resp. ortogonální), stejně pro inverze. Unitární matice tedy tvoří podgrupu $U(n) \subset \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ v grupě všech invertibilních komplexních matic s operací součinu. Ortogonální matice tvoří podgrupu $O(n) \subset \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ v grupě reálných invertibilních matic. Hovoříme o *unitární grupě* a o *ortogonální grupě*.

Jednoduchý výpočet

$$1 = \det E = \det(A \bar{A}^T) = \det A \overline{\det A} = |\det A|^2$$

ukazuje, že determinant unitární matice má vždy velikost rovnou jedné, v případě reálných skalárů pak determinant musí být ± 1 . Dále, je-li $Ax = \lambda x$ pro unitární či ortogonální matici, pak $(Ax) \cdot (Ax) = x \cdot x = |\lambda|^2(x \cdot x)$. Proto jsou reálné vlastní hodnoty ortogonálních matic v reálném oboru rovny ± 1 , vlastní hodnoty unitárních matic jsou vždy komplexní jednotky v komplexní rovině.

Stejně jako u ortogonálních zobrazení také docela snadno ověříme, že ortogonální doplňky k invariantním podprostorům vzhledem k unitárnímu $\varphi: V \rightarrow V$ jsou vždy také invariantní. Skutečně, je-li $\varphi(U) \subset U$, $u \in U$ a $v \in U^\perp$ libovolné, pak

$$\varphi(v) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(u)) = v \cdot \varphi^{-1}(u).$$

Protože je zúžení $\varphi|_U$ také unitární, musí to tedy být bijekce, zejména je $\varphi^{-1}(u) \in U$. Pak ovšem $\varphi(v) \cdot u = 0$, protože $v \in U^\perp$. To znamená, že i $\varphi(v) \in U^\perp$.

Odtud ovšem v komplexním oboru okamžitě dotáváme užitečný

Důsledek. *Nechť $\varphi : V \rightarrow V$ je unitární zobrazení komplexních vektorových prostorů. Pak je V ortogonálním součtem jednorozměrných vlastních podprostorů.*

DŮKAZ. Jistě existuje alespoň jeden vlastní vektor $v \in V$. Pak je zúžení φ na invariantní podprostor $\langle v \rangle^\perp$ opět unitární a jistě má opět nějaký vlastní vektor. Po n takovýchto krocích obdržíme hledanou ortogonální bázi z vlastních vektorů. Po vynormování vektorů získáme ortonormální bázi. \square

Nyní už je možné snadno pochopit detaily důkazu spektrálního rozkladu ortogonálního zobrazení z 2.50 na konci druhé kapitoly — reálnou matici ortogonálního zobrazení interpretujeme jako matici unitárního zobrazení na komplexním rozšíření euklidovského prostoru a pečlivě sledujeme důsledky struktury kořenů reálného charakteristického polynomu nad komplexním oborem. Automaticky přitom dostáváme invariantní dvourozměrné podprostory zadané dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel a tedy příslušné rotace pro zúžené původní reálné zobrazení.

3.34

3.27. Duální a adjungovaná zobrazení. Při diskusi vektorových prostorů a lineárních zobrazení jsme již ve druhé kapitole letmo zmínili duální vektorový prostor V^* všech lineárních forem na vektorovém prostoru V , viz 2.39.

Pro každé lineární zobrazení mezi vektorovými prostory $\psi : V \rightarrow W$ můžeme přirozeně definovat jeho *duální zobrazení* $\psi^* : W^* \rightarrow V^*$ vztahem

$$(3.6) \quad \langle v, \psi^*(\alpha) \rangle = \langle \psi(v), \alpha \rangle,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí vyčíslení formy (druhý argument) na vektoru (první argument), $v \in V$ a $\alpha \in W^*$ jsou libovolné.

Zvolme si báze \underline{v} na V , \underline{w} na W a pišme A pro matici zobrazení ψ v těchto bazích. Pak snadno spočteme v duálních bazích matici zobrazení ψ^* v příslušných duálních bazích na duálních prostorech. Skutečně, definiční vztah říká, že pokud bychom reprezentovali vektory z W^* v souřadnicích jako řádky skalárů, pak je zobrazení ψ^* je dáno toutéž maticí jako ψ , pokud jí násobíme řádkové vektory zprava:

$$\langle \psi(v), \alpha \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \langle v, \psi^*(\alpha) \rangle.$$

To znamená, že maticí duálního zobrazení ψ^* je transponovaná matice A^T , protože $\alpha \cdot A = (A^T \cdot \alpha^T)^T$.

Předpokládejme nadále, že se pohybujeme ve vektorovém prostoru se skalárním součinem. Jestliže tedy zvolíme

přísluší po řadě vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proto je

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odsud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$\begin{aligned} T^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zřejmě pro velká $n \in \mathbb{N}$ můžeme nahradit 2^{-n} za 0, což implikuje

$$T^n \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud tedy plodí potomky jedinci původní populace výhradně s členy populace, ve které se vyskytuje pouze dvojice alel AA , nutně po dostatečně velkém počtu křížení dojde k tomu, že dvojice aA a aa zcela vymizí (bez ohledu na jejich původní četnost).

Případ (c). Tentokrát budeme mít 6 možných stavů (v tomto pořadí)

$$AA, AA; \quad aA, AA; \quad aa, AA;$$

$$aA, aA; \quad aa, aA; \quad aa, aa,$$

přičemž tyto stavy jsou dány různými případy genotypů rodičů. Matice odpovídajícího Markovova řetězce je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/16 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud budeme např. uvažovat situaci (druhý sloupec), kdy jeden z rodičů má dvojici alel AA a druhý aA , pak zjevně může nastat každý ze čtyř případů (jde-li o dvojice alel jejich dvou náhodně zvolených potomků)

$$AA, AA; \quad AA, aA; \quad aA, AA; \quad aA, aA$$

se stejnou pravděpodobností. Pravděpodobnost setrvání ve druhém stavu je proto $1/2$ a pravděpodobnost přechodu ze druhého stavu do prvního je $1/4$ a do čtvrtého také $1/4$.

Nyní bychom měli opět určit mocniny T^n pro velká $n \in \mathbb{N}$. Uvážení podobu prvního a posledního sloupce ihned zjistíme, že 1 je vlastním číslem matice T . Velmi lehce lze najít vlastní vektory

$$(1, 0, 0, 0, 0)^T, \quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$$

příslušné vlastnímu číslu 1 . Přechodem ke čtyřrozměrné podmatici matice T (vynecháním právě prvního a šestého řádku a sloupce) nalezneme poté zbylá vlastní čísla

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Vzpomeneme-li si na řešení příkladu nazvaného Mlsný hazardér, nemusíme T^n počítat. V tomto příkladu jsme dostali stejné vlastní vektory příslušné číslu 1 a ostatní vlastní čísla měla rovněž absolutní hodnotu ostře menší 1 (jejich přesné hodnoty jsme nevyužívali). Dostáváme tak totožný závěr, že proces se blíží k pravděpodobnostnímu vektoru

$$(a, 0, 0, 0, 0, 1 - a)^T,$$

kde $a \in [0, 1]$ je dáno výchozím stavem. Protože pouze na první a šesté pozici výsledného vektoru mohou být nenulová čísla, stavy

$$aA, AA; \quad aa, AA; \quad aA, aA; \quad aa, aA$$

po mnohonásobném křížení vymizí. Uvědomme si dále (plyne z předešlého a z příkladu Mlsný hazardér), že pravděpodobnost toho, aby proces končil AA, AA , se rovná relativní četnosti výskytu A v počátečním stavu.

Případ (d). Nechť hodnoty $a, b, c \in [0, 1]$ udávají (při zachování pořadí) relativní četnosti výskytu dvojic alel AA, aA, aa v dané populaci. Chceme získat vyjádření relativních četností dvojic AA, aA, aa v potomstvu populace. Probíhá-li výběr dvojic pro páření náhodně, lze při velkém počtu jedinců očekávat, že relativní četnost páření jedinců s dvojicemi alel AA (u obou) je a^2 , relativní četnost páření jedinců, z nichž jeden má dvojici alel AA a druhý aA , je $2ab$, relativní četnost páření jedinců s dvojicemi alel aA (u obou) je b^2 atd. Potomek rodičů s dvojicemi AA, AA musí dvojici alel AA zdědit. Pravděpodobnost, že potomek rodičů s dvojicemi AA, aA bude mít AA , je zřejmě $1/2$ a pravděpodobnost, že potomek rodičů s dvojicemi aA, aA bude mít AA , je pak $1/4$. Jiné případy pro potomka s dvojicí alel AA uvažovat nemusíme (pokud má jeden rodič dvojici alel aa , potomek nemůže mít dvojici AA). Relativní četnost výskytu dvojice alel AA v potomstvu

pevně jeden vektor $v \in V$, dosazování vektorů za druhý argument ve skalárním součinu nám dává zobrazení $V \rightarrow V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$

$$V \ni v \mapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{K}).$$

Podmínka nedegenerovanosti skalárního součinu nám zaručuje, že toto zobrazení je bijekcí. Zároveň víme, že jde skutečně o lineární zobrazení nad komplexními nebo reálnými skaláry, protože jsme pevně zvolili druhý argument. Na první pohled je vidět, že vektory ortonormální báze jsou takto zobrazeny na formy tvořící bázi duální, a každý vektor můžeme prostřednictvím skalárního součinu chápat také jako lineární formu.

V případě vektorových prostorů se skalárním součinem proto převádí naše ztotožnění vektorového prostoru se svým duálem také duální zobrazení ψ^* na zobrazení $\psi^* : W \rightarrow V$ zadané formulí

$$(3.7) \quad \langle \psi(u), v \rangle = \langle u, \psi^*(v) \rangle,$$

kde stejným značením závorek jako v definičním vztahu (3.6) nyní myslíme skalární součin. Tomuto zobrazení se říká *adjungované zobrazení* k ψ .

Ekvivalentně lze brát vztah (3.27) za definici adjungovaného zobrazení ψ^* , např. dosazením všech dvojic vektorů ortonormální báze za vektory u a v dostáváme přímo všechny hodnoty matice zobrazení ψ^* .

Předchozí výpočet pro duální zobrazení v souřadnicích nyní můžeme zopakovat, pouze musíme mít na paměti, že v ortonormálních bazích na unitárních prostorech vystupují souřadnice druhého argumentu konjugované:



$$\begin{aligned} \langle \psi(v), w \rangle &= \overline{(w_1, \dots, w_n)} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\overline{A}^T \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \langle v, \psi^*(w) \rangle \end{aligned}$$

Vidíme proto, že je-li A matice zobrazení ψ v ortonormální bázi, pak matice adjungovaného zobrazení ψ^* je matice transponovaná a konjugovaná, kterou značíme $A^* = \overline{A}^T$.

Matice A^* se říká *adjungovaná matice* k matici A . Všimněme si, že adjungované matice jsou dobře definované pro jakékoliv obdélníkové matice a nepleťme si je s maticemi algebraicky adjungovanými, které jsme u čtvercových matic používali při úvahách o determinantech.

Můžeme si tedy shrnout, že má-li jakékoliv lineární zobrazení $\psi : V \rightarrow W$ mezi unitárními prostory v ortonormálních bazích matice A , bude mít jeho duální zobrazení v bazích duálních matic A^T . Pokud přitom zotožníme pomocí skalárního součinu vektorové prostory s jejich duálními prostory,

pak nám duální zobrazení představuje adjungované zobrazení $\psi^* : W \rightarrow V$ (které je zvykem značit stejně jako to zobrazení duální), které ale má matici A^* . Rozdíl mezi maticemi duálního a adjungovaného zobrazení je tedy v dodatečné konjugaci, ta ale samozřejmě je důsledkem toho, že zotožnění unitárního prostoru s jeho duálním prostorem není komplexně lineární zobrazení (neboť z druhé pozice ve skalárním součinu se skaláry vytýkají konjugované).

3.34a

3.28. Samoadjungovaná zobrazení. Zvláštním případem lineárních zobrazení jsou tedy ta, která splývají se svým adjungovaným zobrazením: $\psi^* = \psi$. Takovým zobrazením říkáme *samoadjungovaná*. Ekvivalentně můžeme říci, že jsou to ta zobrazení, jejichž matice A v jedné a tedy ve všech ortonormálních bázích splňují $A = A^*$.

V případě euklidovských prostorů jsou samoadjungovaná zobrazení tedy ta, která mají v některé ortonormální bázi (a pak už všech) symetrickou matici. Často se jim proto říká *symetrické matice* a *symetrická zobrazení*.

V komplexním oboru se maticím splňujícím $A = A^*$ říká *hermiteovské matice*. Občas se také hermiteovským maticím říká *samoadjungované matice*. Všimněme si, že hermiteovské matice tvoří reálný vektorový podprostor v prostoru všech komplexních matic, není však podprostorem v komplexním oboru.

Poznámka. Obzvlášť zajímavý je v této souvislosti následující postřeh. Jestliže hermiteovskou matici A vynásobíme imaginární jednotkou, dostáváme matici $B = iA$, která má vlastnost $B^* = \bar{i}A^T = -B$. Takovým maticím říkáme *antihermiteovské*. Tak jako je tedy každá reálná matice součtem své symetrické a antisymetrické části

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T),$$

je v komplexním oboru obdobně

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$$

a můžeme proto vyjádřit každou komplexní matici právě jedním způsobem jako součet

$$A = B + iC$$

s hermiteovskými maticemi B a C . Jde o obdobu rozkladu komplexního čísla na reálnou a ryze imaginární komponentu a skutečně se často v literatuře setkáme i se značením

$$B = \operatorname{re} A = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \operatorname{im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

V řeči lineárních zobrazení to tedy znamená, že každý komplexní lineární automorfismus můžeme takto jednoznačně vyjádřit pomocí dvou samoadjungovaných zobrazení.

je tedy

$$a^2 \cdot 1 + 2ab \cdot \frac{1}{2} + b^2 \cdot \frac{1}{4} = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}.$$

Analogicky stanovíme postupně relativní četnosti dvojic aA a aa v poměru ve tvarech

$$ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}$$

a

$$c^2 + bc + \frac{b^2}{4}.$$

Na tento proces můžeme nahlížet jako na zobrazení T , které transformuje vektor $(a, b, c)^T$. Platí

$$T : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 + ab + b^2/4 \\ ab + bc + 2ac + b^2/2 \\ c^2 + bc + b^2/4 \end{pmatrix}.$$

Podotkněme, že za definiční obor (a pochopitelně i obor hodnot) T vlastně bereme pouze vektory

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \text{kde } a, b, c \in [0, 1], \quad a + b + c = 1.$$

Chtěli bychom zadat operaci T pomocí násobení vektoru $(a, b, c)^T$ jistou konstantní maticí. To však očividně není možné (zobrazení T není lineární). Nejedná se tedy o Markovův proces a nelze zjednodušit určování, co se stane po velmi dlouhé době, jako v předešlých případech. Můžeme ale vypočítat, co se stane, když aplikujeme zobrazení T dvakrát po sobě. Ve druhém kroku dostáváme

$$T : \begin{pmatrix} a^2 + ab + b^2/4 \\ ab + bc + 2ac + b^2/2 \\ c^2 + bc + b^2/4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_2^2 \\ t_3^2 \end{pmatrix}, \quad \text{kde}$$

$$t_1^2 = \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right)^2 + \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right) + \frac{1}{4} \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right)^2,$$

$$t_2^2 = \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right) + \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right) \left(c^2 + bc + \frac{b^2}{4}\right) + 2 \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) \left(c^2 + bc + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right)^2,$$

$$t_3^2 = \left(c^2 + bc + \frac{b^2}{4}\right)^2 + \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right) \left(c^2 + bc + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}\right)^2.$$

Lze ukázat (využitím $a + b + c = 1$), že

3.35

$$t_2^1 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}, \quad t_2^2 = ab + bc + 2ac + \frac{b^2}{2}, \quad t_2^3 = c^2 + bc + \frac{b^2}{4},$$

tj.

$$T : \begin{pmatrix} a^2 + ab + b^2/4 \\ ab + bc + 2ac + b^2/2 \\ c^2 + bc + b^2/4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 + ab + b^2/4 \\ ab + bc + 2ac + b^2/2 \\ c^2 + bc + b^2/4 \end{pmatrix}.$$

Získali jsme tak překvapivý výsledek, že dalším aplikováním transformace T se vektor obdrženy v prvním kroku nezmění. To znamená, že výskyt uvažovaných dvojic alel je po libovolně dlouhé době totožný jako v první generaci potomstva. Pro velkou populaci jsme tak dokázali, že evoluční vývoj by se realizoval během jediné generace, kdyby nedocházelo k mutacím nebo k selekci. \square

3.34. Nechť jsou dány dvě urny, které obsahují dohromady n bílých a n černých koulí. V pravidelných časových intervalech je z obou uren vylosována jedna koule a přemístěna do druhé urny, přičemž počet koulí v obou urnách je na začátku (a tedy po celou dobu) právě n . Zadejte tento Markovův proces pravděpodobnostní maticí přechodu T .

Řešení. Tento příklad se používá ve fyzice jako model prolínání dvou nestlačitelných kapalin (již v roce 1769 ho zavedl D. Bernoulli) nebo analogicky jako model difúze plynů. Stavů $0, 1, \dots, n$ budou odpovídat kupř. počtu bílých koulí v jedné pevně zvolené urně. Tento údaj totiž současně zadává, kolik černých koulí je ve zvolené urně (všechny ostatní koule jsou pak ve druhé z uren). Pokud v jistém kroku dojde ke změně stavu $j \in \{1, \dots, n\}$ na $j - 1$, znamená to, že ze zvolené urny byla vytažena bílá koule a z druhé černá. To se stane s pravděpodobností

$$\frac{j}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{j^2}{n^2}.$$

Přechodu ze stavu $j \in \{0, \dots, n-1\}$ do $j+1$ odpovídá vytažení černé koule ze zvolené urny a bílé z té druhé s pravděpodobností

$$\frac{n-j}{n} \cdot \frac{n-j}{n} = \frac{(n-j)^2}{n^2}.$$

Soustava zůstane ve stavu $j \in \{1, \dots, n-1\}$, jestliže z obou uren byly vytaženy koule stejné barvy, což má pravděpodobnost

$$\frac{j}{n} \cdot \frac{n-j}{n} + \frac{n-j}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{2j(n-j)}{n^2}.$$

Dodejme, že ze stavu 0 se nutně (s pravděpodobností 1) přechází do stavu 1 a že ze stavu n se s jistotou přechází do stavu $n-1$. Uvážením

3.29. Spektrální rozklad. Uvažujme samoadjungované zobrazení $\psi : V \rightarrow V$ s maticí A v nějaké ortonormální bázi a zkusme postupovat obdobně jako v 2.50. Opět se nejprve obecně podíváme na invariantní podprostory samoadjungovaných zobrazení a jejich ortogonální doplňky. Jestliže pro libovolný podprostor $W \subset V$ a samoadjungované zobrazení $\psi : V \rightarrow V$ platí $\psi(W) \subset W$, pak také platí pro všechny $v \in W^\perp, w \in W$

$$\langle \psi(v), w \rangle = \langle v, \psi(w) \rangle = 0.$$

To ale znamená, že také $\psi(W^\perp) \subset W^\perp$.

Uvažme nyní maticí A samoadjungovaného zobrazení v nějaké ortonormální bázi a $A \cdot x = \lambda x$ pro nějaký vlastní vektor $x \in \mathbb{C}^n$. Dostáváme

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Kladným reálným číslem $\langle x, x \rangle$ můžeme krátit a proto musí být $\bar{\lambda} = \lambda$, tj. vlastní čísla jsou vždy reálná.

Komplexních kořenů má charakteristický polynom $\det(A - \lambda E)$ tolik, kolik je dimenze čtvercové matice A , a všechny jsou ve skutečnosti reálné. Dokázali jsme tak důležitý obecný výsledek:

Tvrzení. *Ortogonalní doplněk k invariantnímu podprostoru pro samoadjungované zobrazení je také invariantní. Navíc jsou všechna vlastní čísla hermiteovské matice A vždy reálná.*

Ze samotné definice je zřejmé, že zúžení samoadjungovaného zobrazení na invariantní podprostor je opět samoadjungované. Předchozí tvrzení nám tedy zaručuje, že bude vždy existovat báze V z vlastních vektorů. Skutečně, zúžení ψ na ortogonalní doplněk invariantního podprostoru je opět samoadjungované zobrazení, takže můžeme do báze přibírat jeden vlastní vektor za druhým, až dostaneme celý rozklad V . Vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou navíc kolmé, protože z rovností $\psi(u) = \lambda u, \psi(v) = \mu v$ vyplývá

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle \psi(u), v \rangle = \langle u, \psi(v) \rangle = \bar{\mu} \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle.$$

Obvykle bývá náš výsledek formulován pomocí projekcí na vlastní podprostory. O projektoru $P : V \rightarrow V$ říkáme, že je *kolmý*, je-li $\text{Im } P \perp \text{Ker } P$. Dva kolmé projektory P, Q jsou *vzájemně kolmé*, je-li $\text{Im } P \perp \text{Im } Q$.

Věta (O spektrálním rozkladu). *Pro každé samoadjungované zobrazení $\psi : V \rightarrow V$ na vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze z vlastních vektorů. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ všechna různá vlastní čísla ψ a P_1, \dots, P_k příslušné kolmé a navzájem kolmé projektory na vlastní podprostory k odpovídajícím vlastním číslům, pak*

$$\psi = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k.$$

Dimenze obrazů těchto projektorů je přitom vždy rovna algebraické násobnosti vlastních čísel λ_i .

3.30. Ortogonální diagonalizace. Zobrazení, pro která lze najít ortonormální bázi jako v předchozí větě o spektrálním rozkladu se nazývají *ortogonálně diagonalizovatelná*. Jsou to samozřejmě právě ta zobrazení, pro která umíme najít ortonormální bázi tak, aby v ní jejich matice zobrazení byla diagonální. Zamysleme se, jak mohou vypadat.

Pro euklidovský případ je to snadné: diagonální matice jsou zejména symetrické, jedná se tedy právě o samoadjungovaná zobrazení. Jako důsledek získáváme tvrzení, že ortogonálně diagonalizovatelné, právě když je zároveň samoadjungované (jsou to právě ta samoadjungovaná zobrazení s vlastními hodnotami ± 1).

U komplexních unitárních prostorů je situace složitější. Uvažme libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ unitárního prostoru a nechť $\varphi = \psi + i\eta$ je (jednoznačně daný) rozklad φ na hermiteovskou a antihermiteovskou část. Má-li φ ve vhodné ortonormální bázi diagonální matici D , pak $D = \text{re}D + i\text{im}D$, kde reálná a imaginární část jsou právě matice ψ a η (plyne z jednoznačnosti rozkladu). Zejména tedy platí $\psi \circ \eta = \eta \circ \psi$ a $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$. Zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ s poslední uvedenou vlastností se nazývají *normální*.

Vzájemné souvislosti ukazuje následující věta (pokračujeme ve značení tohoto odstavce):

Tvrzení. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (1) φ je ortogonálně diagonalizovatelné,
- (2) $\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$ (tj. φ je normální zobrazení),
- (3) $\psi \circ \eta = \eta \circ \psi$,
- (4) Pro matici $A = (a_{ij})$ zobrazení φ v nějaké ortonormální bázi a jejich $m = \dim V$ vlastních čísel λ_i platí $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2$.

STRUČNÝ DŮKAZ. Implikaci (1) \Rightarrow (2) jsme již diskutovali.

(2) \Leftrightarrow (3): Stačí provést přímý výpočet

$$\varphi\varphi^* = (\psi + i\eta)(\psi - i\eta) = \psi^2 + \eta^2 + i(\eta\psi - \psi\eta)$$

$$\varphi^*\varphi = (\psi - i\eta)(\psi + i\eta) = \psi^2 + \eta^2 + i(\psi\eta - \eta\psi)$$

Odečtením dostaneme $2i(\eta\psi - \psi\eta)$.

(2) \Rightarrow (1): Nechť $u \in V$ je vlastní vektor normálního zobrazení φ . Pak

$$\varphi(u) \cdot \varphi(u) = \langle \varphi^*\varphi(u), u \rangle = \langle \varphi\varphi^*(u), u \rangle = \varphi^*(u) \cdot \varphi^*(u)$$

zejména tedy $|\varphi(u)| = |\varphi^*(u)|$. Je-li φ normální, je $(\varphi - \lambda \text{id } V)^* = (\varphi^* - \bar{\lambda} \text{id } V)$ a je proto i $(\varphi - \lambda \text{id } V)$ normální zobrazení. Z předešlé rovnosti tedy plyne, že je-li $\varphi(u) = \lambda u$, pak $\varphi^*(u) = \bar{\lambda}u$. Tzn., že φ a φ^* mají stejné vlastní vektory a konjugované vlastní hodnoty.

Stejně jako u samoadjungovaných teď snadno dokážeme ortogonálně diagonalizovatelnost. K tomu je nutné a stačí, aby ortogonální doplněk každého vlastního podprostoru pro

výše uvedeného dostáváme hledanou matici

$$T = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n^2 & 2 \cdot 1(n-1) & 2^2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (n-1)^2 & 2 \cdot 2(n-2) & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 \cdot (n-2)2 & (n-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2^2 & 2 \cdot (n-1)1 & n^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pro pořadí stavů $0, 1, \dots, n$.

Při užití tohoto modelu ve fyzice nás samozřejmě zajímá složení urny po uplynutí určité doby (po daném počtu výměn v závislosti na předešlém složení urny). Bude-li počáteční stav např. 0, můžeme pomocí mocnin matice T sledovat, s jakou pravděpodobností přibývají ve zvolené urně bílé koule. Také lze potvrdit očekávaný výsledek, že počáteční rozdělení koulí bude ovlivňovat jejich rozdělení po delší době zanedbatelným způsobem.

Kdybychom jednotlivé koule očíslovali, místo výběru po jedné kouli z urny vylosovali nějaké z čísel $1, 2, \dots, 2n$ a kouli, jejíž číslo bylo vytaženo, přemístili do druhé urny, obdrželi bychom Markovův proces se stavy $0, 1, \dots, 2n$ (počet koulí ve zvolené urně), kdy se tak už nerozlišuje barva koulí. Tento Markovův řetězec je rovněž ve fyzice důležitý. (P. a T. Ehrenfestovi jej zavedli v roce 1907.) Používá se jako model výměny tepla mezi dvěma izolovanými tělesy (teplota je reprezentována počtem koulí, tělesa urnami). \square

3.35. Dva hráči A, B hrají o peníze opakovaně jistou hru, která může skončit pouze vítězstvím jednoho z hráčů. Pravděpodobnost výhry hráče A je v každé jednotlivé hře $p \in [0, 1/2)$ a oba sází vždy (v libovolné hře) jen 1 Kč, tj. po každé hře s pravděpodobností p dá 1 Kč hráč B hráči A a s pravděpodobností $1-p$ naopak 1 Kč dá hráč A hráči B . Hrají ovšem tak dlouho, dokud jeden z nich nepřijde o všechny peníze. Jestliže má hráč A na začátku x Kč a hráč B má y Kč, určete pravděpodobnost, že hráč A vše prohraje.

Řešení. Tato úloha se nazývá Ruinování hráče. Jedná se o speciální Markovův řetězec (viz také příklad Mlsný hazardér) s mnoha důležitými aplikacemi. Hledaná pravděpodobnost činí

$$(3.6) \quad \frac{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^y}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x+y}}.$$

Povšimněme si, jaká je tato hodnota pro konkrétní volby p, x, y . Kdyby hráč B chtěl mít téměř jistotu a požadoval, aby pravděpodobnost, že hráč A s ním prohraje 1 000 000 Kč, byla alespoň 0,999, potom stačí,

aby měl 346 Kč, je-li $p = 0,495$ (či 1 727 Kč, je-li $p = 0,499$). Proto je ve velkých kasinech možné, aby „vášniví“ hráči mohli hrát téměř spravedlivé hry. \square

3.36. V rámci jisté společnosti fungují dvě navzájem si konkurující oddělení. Vedení společnosti se rozhodlo, že každý týden bude poměřovat relativní (vzhledem k počtu zaměstnanců) zisky dosažené těmito dvěma odděleními. Do oddělení, které bude úspěšnější, pak budou přeřazeni dva pracovníci z druhého oddělení. Tento proces má probíhat tak dlouho, až jedno z oddělení zanikne. Získali jste zaměstnání v této společnosti a můžete si vybrat jedno z těchto dvou oddělení, kde budete pracovat. Chcete si zvolit to, které nebude v důsledku vnitropodnikové konkurence zrušeno. Jaká bude Vaše volba, když jedno oddělení má nyní 40 zaměstnanců, druhé 10 a když odhadujete, že to v současnosti menší z nich bude mít větší relativní zisky v 54 % případů?

Další využití Markovových řetězců viz příloha za kapitolou.

D. Unitární prostory

Již v minulé kapitole jsme definovali skalární součin v reálných vektorových prostorech (2.40), v této kapitole rozšiřujeme jeho definici i na komplexní vektorové prostory (3.23).

3.37. **Grupy $O(n)$ a $U(n)$.** Uvážíme-li všechna lineární zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^3 , která zachovávají daný skalární součin, tedy vzhledem k definicím délky vektorů a odchylky dvou vektorů lineární zobrazení zachovávající délky a úhly, tak tato tvoří zřejmě vzhledem ke skládání zobrazení grupu (viz 1.1; složení dvou takových zobrazení je z definice zobrazení zachovávající délky a úhly, jednotkovým prvkem je identické zobrazení, inverzním prvkem k danému zobrazení je zobrazení k němu inverzní – díky podmínce na zachování velikostí existuje). Matice těchto zobrazení tedy tvoří vzhledem k násobení matic grupu (viz zobrazení), říkáme jí *ortogonální grupa*, značíme $O(n)$. Je to podgrupa všech invertibilních zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n .

Požadujeme-li navíc po maticích zobrazení, aby měly determinant roven jedné, hovoříme o speciální ortogonální grupě $SO(n)$ (obecně může být determinantem matice z $O(n)$ číslo 1 či -1).

Obdobně definujeme *unitární grupu* $U(n)$ jakožto grupu všech (komplexních) matic, které odpovídají komplexně lineárním zobrazením z \mathbb{C}^n do \mathbb{C}^n , která zachovávají daný skalární součin v unitárním prostoru. Stejně pak $SU(n)$ značí podgrupu matic v $U(n)$ s jednotkovým determinantem (obecně může být determinantem libovolná komplexní jednotka).

normální φ byl invariantní (je totiž zúžení normálního zobrazení na invariantní podprostor opět normální). Uvažme vlastní vektor $u \in V$ s vlastní hodnotou λ , $v \in \langle u \rangle^\perp$. Platí

$$\varphi(v) \cdot u = v \cdot \varphi^*(u) = \langle v, \bar{\lambda}u \rangle = \lambda u \cdot v = 0$$

a tedy opět $\varphi(v) \in \langle u \rangle^\perp$.

(1) \Leftrightarrow (4): Výraz $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ je právě stopa matice AA^* , to je matice zobrazení $\varphi \circ \varphi^*$. Proto nezávisí na volbě ortonormální báze. Je-li tedy φ diagonalizovatelné, je tento výraz roven právě $\sum_i |\lambda_i|^2$.

Opačná implikace je přímým důsledkem Schurovy věty o unitární triangulovatelnosti libovolného lineárního zobrazení $V \rightarrow V$, kterou dokážeme později v 3.37. Podle ní totiž existuje pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ ortonormální báze, ve které má φ horní trojúhelníkovou matici. Na její diagonále pak musí být právě všechny vlastní hodnoty φ . Jak jsme již ukázali, výraz $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ nezávisí na volbě ortonormální báze, proto z předpokládané rovnosti vyplývá, že všechny prvky mimo diagonálu musí být v této matici nulové. \square

V termínech matic zobrazení dostáváme: zobrazení je normální právě, když jeho matice v některé ortonormální bázi (a ekvivalentně v každé) splňuje $AA^* = A^*A$. Takové matice nazýváme *normální matice*.

Poznámka. Všimněme si, že pro počet s lineárními zobrazeními na komplexním unitárním prostoru lze poslední větu chápat také jako zobecnění běžných počtů s komplexními čísly v goniometrickém tvaru (roli reálných čísel zde hrají samoadjungovaná zobrazení). Roli komplexních jednotek pak hrají unitární zobrazení. Zejména si všimněme analogie k vyjádření komplexních jednotek ve tvaru $\cos t + i \sin t$ s vlastností $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$:

Důsledek. *Unitární zobrazení na unitárním prostoru V jsou právě ta normální zobrazení, pro která výše užívaný jednoznačný rozklad $\varphi = \psi + i\eta$ splňuje $\psi^2 + \eta^2 = \text{id } V$.*

DŮKAZ. Pro unitární zobrazení φ je $\varphi\varphi^* = \text{id } V = \varphi^*\varphi$ a tedy $\varphi\varphi^* = (\psi + i\eta)(\psi - i\eta) = \psi^2 + 0 + \eta^2 = \text{id } V$. Naopak, pro normální zobrazení již poslední výpočet ukazuje, že opačná implikace platí také. \square

3.31. **Nezáporná zobrazení a odmocniny.** Nezáporná reálná čísla jsou právě ta, která umíme psát jako druhé mocniny. Zobecnění takového chování pro matice a zobrazení lze vidět u součinů matic $B = A^* \cdot A$ (tj. složení zobrazení $\psi^* \circ \psi$):



$$\langle B \cdot x, x \rangle = \langle A^* \cdot A \cdot x, x \rangle = \langle A \cdot x, A \cdot x \rangle \geq 0$$

pro všechny vektory x . Navíc zjevně

$$B^* = (A^* \cdot A)^* = A^* \cdot A = B.$$

Hermiteovských maticím B s takovou vlastností říkáme *pozitivně semidefinitní* a pokud nastane nulová hodnota pouze

pro $x = 0$, pak jim říkáme *pozitivně definitní*. Obdobně hovoříme o *pozitivně definitních* a *pozitivně semidefinitních* zobrazeních $\psi : V \rightarrow V$.

Pro každé pozitivně semidefinitní zobrazení $\psi : V \rightarrow V$ umíme najít jeho odmocninu, tj. zobrazení η takové, že $\eta \circ \eta = \psi$. Nejjednodušeji to uvidíme v ortonormální bázi, ve které bude mít ψ diagonální matici. Taková podle našich předchozích úvah vždy existuje a matice A zobrazení ψ v ní bude mít na diagonále nezáporná reálná vlastní čísla zobrazení ψ . Kdyby totiž bylo některé z nich záporné, nebyla by splněna podmínka nezápornosti již pro některý z bázevých vektorů. Pak ovšem stačí definovat zobrazení η pomocí matice B s odmocninami příslušných vlastních čísel na diagonále.

2.32

3.32. Spektra a nilpotentní zobrazení. Na závěr této části se vrátíme k otázce, jak se mohou chovat lineární zobrazení v úplné obecnosti. Budeme i nadále pracovat s reálnými nebo komplexními vektorovými prostory.

Připomeňme, že *spektrum lineárního zobrazení* $f : V \rightarrow V$ je posloupnost kořenů charakteristického polynomu zobrazení f , včetně násobností. *Algebraickou násobností* vlastní hodnoty rozumíme její násobnost jako kořenu charakteristického polynomu, *geometrická násobnost* vlastní hodnoty je dimenze příslušného podprostoru vlastních vektorů.

Lineární zobrazení $f : V \rightarrow V$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že iterované zobrazení f^k je identicky nulové. Nejmenší číslo k s touto vlastností se nazývá *stupněm nilpotentnosti* zobrazení f . Zobrazení $f : V \rightarrow V$ se nazývá *cyklické*, jestliže existuje báze (u_1, \dots, u_n) prostoru V taková, že $f(u_1) = 0$ a $f(u_i) = u_{i-1}$ pro všechna $i = 2, \dots, n$. Jinými slovy, matice f v této bázi je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Je-li $f(v) = a \cdot v$, pak pro každé přirozené k je $f^k(v) = a^k \cdot v$. Zejména tedy může spektrum nilpotentního zobrazení obsahovat pouze nulový skalár (a ten tam vždy je).

Přímo z definice plyne, že každé cyklické zobrazení je nilpotentní, navíc je jeho stupeň nilpotentnosti roven dimenzi prostoru V . Operátor derivování na polynomech, $D(x^k) = kx^{k-1}$, je příkladem cyklického zobrazení na prostorech $\mathbb{K}_n[x]$ všech polynomů stupně nejvýše n nad skaláry \mathbb{K} .

Kupodivu to platí i naopak a každé nilpotentní zobrazení je přímým součtem cyklických. Důkaz tohoto tvrzení nám dá hodně práce, proto napřed zformulujeme výsledky, ke kterým směřujeme, a pak se teprve dáme do technické práce. Ve výsledné větě o *Jordanově rozkladu* vystupují vektorové (pod)prostory a lineární zobrazení na nich s jediným vlastním

3.38. Uvažujme vektorový prostor V funkcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Určete, zda je zobrazení φ z unitárního prostoru V lineární.

- i) $\varphi(u) = \lambda u$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$
- ii) $\varphi(u) = u^*$
- iii) $\varphi(u) = u^2 (= u \cdot u)$
- iv) $\varphi(u) = \frac{du}{dx}$

V je pro vhodné funkce unitární prostor nekonečné dimenze. Skalárním součinem se definuje vztahem $f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx$.

Řešení. je, není, není, je □

3.39. Ukažte, že pokud je H hermiteovská matice, pak je $U = \exp(iH) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} (iH)^n$ unitární matice a spočítejte její determinant.

Řešení. Z definice \exp lze ukázat, že platí $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ tak, jak jsme zvyklí u exponenciálního zobrazení v oboru čísel. Vzhledem k tomu, že obecně platí $(u + v)^* = u^* + v^*$ a $(cv)^* = \bar{c}v^*$, tak dostáváme

$$U^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} (iH)^n \right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} (-iH^*)^n$$

a protože $H^* = H$, tak

$$U^* = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} (-iH)^n = \exp(-iH)$$

a proto

$$U^*U = \exp(iH) \exp(-iH) = \exp(0) = 1$$

□

3.40. Hermiteovské matice A, B, C splňují $[A, C] = [B, C] = 0$ a $[A, B] \neq 0$, kde $[,]$ je komutátor matic definovaný vztahem $[A, B] = AB - BA$. Ukažte, že aspoň jeden podprostor matice C musí mít $\dim > 1$.

Řešení. Budeme dokazovat sporem. Předpokládáme tedy, že všechny vlastní podprostory operátoru C mají $\dim = 1$. Pak můžeme pro libovolný vektor u psát $u = \sum_k c_k u_k$, kde u_k jsou lineárně nezávislé vlastní vektory operátoru C vlastním číslem λ_k (a $c_k = u \cdot u_k$). Pro tyto vlastní vektory pak zjevně platí

$$0 = [A, C]u_k = ACu_k - CAu_k = \lambda_k Au_k - C(Au_k)$$

Odtud vidíme, že Au_k je vlastním vektorem matice C s vlastním hodnotou λ_k . To ovšem znamená, že $Au_k = \lambda_k^A u_k$ pro nějaké číslo λ_k^A . Stejně tak odvodíme $Bu_k = \lambda_k^B u_k$ pro nějaké číslo λ_k^B . Pro komutátor matic A a B pak dostáváme

$$[A, B]u_k = ABu_k - BAu_k = \lambda_k^A \lambda_k^B u_k - \lambda_k^B \lambda_k^A u_k = 0$$

To ovšem znamená

$$[A, B]u = [A, B] \sum_k c_k u_k - \sum_k c_k [A, B]u_k = 0$$

a protože u bylo libovolné, znamená to, že $[A, B] = 0$, což je spor. \square

3.41. Použití v kvantové fyzice. V kvantové fyzice se fyzikální veličině nepřirazuje číselná hodnota, tak jak tomu je v klasické fyzice, nýbrž hermiteovský operátor. To není nic jiného, než hermiteovské zobrazování, které ovšem může vést, a často taky vede, mezi unitárními prostory nekonečné dimenze (Můžeme si to představit třeba jako matici nekonečného rozměru). Vektory v tomto unitárním prostoru potom reprezentují stavy daného fyzikálního systému. Při měření dané fyzikální veličiny můžeme dostat jen hodnoty, které jsou vlastními hodnotami příslušného operátoru.

Například místo souřadnice x máme operátor souřadnice \hat{x} . Jeli stav systému popsán vektorem v , pak platí $\hat{x}(v) = xv$, tzn. je to násobení vektoru reálným číslem x . Na první pohled je tento hermiteovský operátor jiný než naše příklady z konečné dimenze. Evidentně je totiž každé reálné číslo vlastním číslem (\hat{x} má tzv. spojité spektrum). Podobně, místo rychlosti (přesněji hybnosti) máme operátor $\hat{p} = -i \frac{d}{dx}$. Vlastní vektory jsou řešením diferenciální rovnice $-i \frac{dv}{dx} = \lambda v$. I v tomto případě je spektrum spojité. To je vyjádřením faktu, že příslušná fyzikální veličina je spojitá (může nabývat libovolné reálné hodnoty). Naproti tomu máme fyzikální veličiny, např. energie, které mohou nabývat jen diskrétní hodnoty (energie je kvantována). Příslušné operátory jsou pak opravdu podobné hermiteovským maticím, jen mají nekonečný počet vlastních čísel.

3.42. Ukažte, že \hat{x} a \hat{p} jsou hermiteovské a že

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i$$

Řešení. Pro libovolný vektor v platí

$$[\hat{x}, \hat{p}]v = \hat{x}\hat{p}v - \hat{p}\hat{x}v = x(-i \frac{dv}{dx}) + i \frac{d(xv)}{dx} = iv$$

a odtud už přímo vyplývá naše tvrzení. \square

3.43. Ukažte

$$[\hat{x} - \hat{p}, \hat{x} + \hat{p}] = 2i$$

Řešení. Evidentně platí $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$ a $[\hat{p}, \hat{p}] = 0$ a zbytek vyplývá z linearity komutátoru a z minulého příkladu. \square

číslem λ a maticí

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Takovýmto maticím (a odpovídajícím invariantním podprostorům) se říká *Jordanův blok*.

Věta (Jordanova věta o kanonickém tvaru). *Nechť V je vektorový prostor dimenze n a $f : V \rightarrow V$ je lineární zobrazení s n vlastními čísly včetně algebraických násobností. Pak existuje jednoznačný rozklad prostoru V na přímý součet podprostorů*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

takových, že $f(V_i) \subset V_i$, zúžení f na každé V_i má jediné vlastní číslo λ_i a zúžení $f - \lambda_i \cdot \text{id}$ na V_i je buď cyklické nebo nulové zobrazení.

Věta tedy říká, že ve vhodné bázi má každé lineární zobrazení blokově diagonální tvar s Jordanovými bloky podél diagonály. Celkový počet jedniček nad diagonálou v takovém tvaru je roven rozdílu mezi celkovou algebraickou a geometrickou násobností vlastních čísel.

3.33. Poznámky. Všimněme si, že jsme Jordanovu větu již dříve plně dokázali v případech, kdy jsou všechna vlastní čísla různá nebo když jsou geometrické a algebraické násobnosti vlastních čísel stejné. Zejména jsme ji plně dokázali pro unitární, normální a samoadjungovaná zobrazení.

Další užitečné pozorování je, že pro každé lineární zobrazení přísluší ke každému vlastnímu číslu jednoznačně určený invariantní podprostor, který odpovídá Jordanovým blokům s příslušnou vlastní hodnotou.

Také si všimněme jednoho velice užitečného důsledku Jordanovy věty (který jsme už použili u diskuse chování Markovových řetězců). Předpokládejme, že jsou vlastní hodnoty našeho zobrazení f všechny v absolutní hodnotě menší než jedna. Potom opakované působení lineárního zobrazení na jakémkoliv vektoru $v \in V$ vede k rychlému zmenšování všech souřadnic $f^k(v)$ nad všechny meze. Skutečně, předpokládejme pro jednoduchost, že na celém V má zobrazení f jediné vlastní číslo λ a $f - \lambda \text{id}_V$ je cyklické (tj. omezujeme se na jediný Jordanův blok), a nechť v_1, \dots, v_ℓ je příslušná báze. Pak podmínka z věty říká, že $f(v_2) = \lambda v_2 + v_1$, $f^2(v_2) = \lambda^2 v_2 + \lambda v_1 + \lambda v_1$, a podobně pro ostatní v_i a vyšší mocniny. V každém případě při iterování dostáváme stále vyšší a vyšší mocniny λ u všech nenulových komponent, přičemž nejnižší z nich může být nejvýše o stupeň nilpotentnosti nižší než násobnost iterace.

Tím je tvrzení dokázáno (a stejný argument s absolutní hodnotou vlastních čísel ostře větší než jedna vede k neomezenému růstu všech souřadnic iterací $f^k(v)$).



Zbytek této části třetí kapitoly je věnován důkazu Jordanovy věty a několika k tomu potřebným pojímům. Je výrazně obtížnější než dosavadní text a čtenář jej může případně přeskóčit až do začátku 5. části této kapitoly.

3.37

3.34. Kořenové prostory. Na příkladech jsme viděli, že vlastní podprostory popisují dostatečně geometrické vlastnosti jen některých lineárních zobrazení. Zavedeme nyní jemnější nástroj, tzv. kořenové podprostory.

Definice. Nenulový vektor $u \in V$ se nazývá *kořenovým vektorem* lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$, jestliže existuje $a \in \mathbb{K}$ a celé číslo $k > 0$ takové, že $(\varphi - a \cdot \text{id}_V)^k(u) = 0$, tj. k -tá iterace uvedeného zobrazení zobrazuje u na nulu. Množinu všech kořenových vektorů příslušných k pevnému skaláru λ doplněnou o nulový vektor nazýváme *kořenovým prostorem* příslušným ke skaláru $\lambda \in \mathbb{K}$, značíme \mathcal{R}_λ .

Je-li u kořenový vektor a k z definice je vybráno nejmenší možné, pak $(\varphi - a \cdot \text{id}_V)^{k-1}(u)$ je vlastní vektor s vlastní hodnotou a . Je tedy $\mathcal{R}_\lambda = \{0\}$ pro všechny skaláry λ , které neleží ve spektru zobrazení φ .

Tvrzení. Pro lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ platí

- (1) Pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $\mathcal{R}_\lambda \subset V$ vektorový podprostor.
- (2) Pro každé $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ je \mathcal{R}_λ invariantní vzhledem k lineárnímu zobrazení $(\varphi - \mu \cdot \text{id}_V)$, zejména tedy je \mathcal{R}_λ invariantní vzhledem k φ .
- (3) Je-li $\mu \neq \lambda$, pak $(\varphi - \mu \cdot \text{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ je invertibilní.
- (4) Zobrazení $(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ je nilpotentní. Ray-tracing

DŮKAZ. (1) Ověření vlastností vektorového podprostoru je jednoduché a ponecháváme jej čtenáři.

(2) Předpokládejme, že $(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^k(u) = 0$ a uvažme $v = (\varphi - \mu \cdot \text{id}_V)(u)$. Pak

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^k(v) &= \\ &= (\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^k((\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) + (\lambda - \mu) \cdot \text{id}_V)(u) \\ &= (\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^{k+1}(u) + (\lambda - \mu) \cdot (\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^k(u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3) Je-li $u \in \text{Ker}(\varphi - \mu \cdot \text{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$, pak

$$(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)(u) = (\varphi - \mu \cdot \text{id}_V)(u) + (\mu - \lambda) \cdot u = (\mu - \lambda) \cdot u$$

Odtud $0 = (\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^k(u) = (\mu - \lambda)^k \cdot u$ a je tedy nutně $u = 0$ pro $\lambda \neq \mu$.

(4) Zvolme bázi e_1, \dots, e_p podprostoru \mathcal{R}_λ . Protože podle definice existují čísla k_i taková, že $(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^{k_i}(e_i) = 0$, je nutně celé zobrazení $(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ nilpotentní. \square

3.37a

3.35. Faktorové prostory. Naším dalším cílem je ukázat, že dimenze kořenových prostorů je vždy rovna algebraické násobnosti příslušných vlastních čísel. Nejprve však zavedeme šikovné technické nástroje.



E. Rozklady matic

3.44. Vyvráťte nebo dokažte:

- Nechť A je čtvercová matice $n \times n$. Pak je matice $A^T A$ je symetrická.
- Nechť čtvercová matice A má pouze kladné reálné vlastní hodnoty. Pak je A symetrická.

3.45. Nalezněte LU-rozklad následující matice:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejprve vynásobíme matice odpovídající Gaussově eliminaci, dostáváme tak pro původní matici A , $XA = U$, kde X je dolní trojúhelníková daná zmíněným součinem, U horní trojúhelníková. Z této rovnosti máme $A = X^{-1}U$, což je hledaný rozklad (musíme tedy spočítat inverzi k X). \square

3.46. Nalezněte LU-rozklad matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ - & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.47. Ray-tracing. V počítačové 3D-grafice se obraz zobrazuje pomocí algoritmu Ray-tracing. Základem tohoto algoritmu je aproximace světelných vln paprskem (přímka) a aproximace zobrazovaných objektů mnohostěny. Ty jsou tedy ohraničeny rovinami a je potřeba spočítat, kam se na těchto rovinách odráží světelné paprsky. Z fyziky přitom víme, jak se paprsky odráží - úhel odrazu je roven úhlu dopadu. Z touto problematikou v rovině jsme se již potkali v příkladu 1.71.

Paprsek světla ve směru $v = (1, 2, 3)$ dopadá na rovinu určenou rovnicí $x + y + z = 1$. V jakém směru se paprsek odrazí?

Řešení. Jednotkový normálový vektor k rovině je $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Vektor určující směr odraženého paprsku v_R bude ležet v rovině určené vektory v, n . Můžeme jej tedy vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů. Zároveň nám pravidlo úhel odrazu je roven úhlu dopadu jinými slovy říká, že $\langle v, n \rangle = -\langle v_R, n \rangle$. Odtud dostaneme kvadratickou rovnici pro koeficienty lineární kombinace.

Příklad můžeme vyřešit i jednodušším, geometrickým způsobem. Z obrázku můžeme přímo odvodit, že

$$v_R = v - 2\langle v, n \rangle n$$

a v našem případě dostáváme $v_R = (-3, -2, -1)$. \square

3.48. Najděte Jordanův tvar matice A a napište příslušný rozklad. Jaká je geometrická interpretace rozkladu této matice?

$$\begin{aligned} \text{i) } A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{ii) } A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Řešení. i) Nejprve spočítáme charakteristický polynom matice A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Vlastní čísla matice A jsou kořeny tohoto polynomu, to znamená $\lambda_{1,2} = 1, 2$. Prtotože matice je řádu dva a máme dvě různé vlastní hodnoty, je Jordanův tvar diagonální matice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vlastní vektor (x, y) příslušný vlastní hodnotě 1 splňuje $0 = (A - E)x = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tj. $-2x + y = 0$. To jsou právě násobky vektoru $(1, 2)$. Podobně zjistíme, že vlastním vektorem k vlastní hodnotě 2 je $(1, 3)$. Matici P pak dostaneme napsáním těchto vlastních vektorů do sloupců, tj. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Pro matici A pak máme $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$. Inverzní matice k P má tvar $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ a dohromady pak dostáváme

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tento rozklad nám říká, že matice A určuje takové lineární zobrazení, které má v bázi vlastních vektorů $(1, 2)$, $(1, 3)$ výše uvedený diagonální tvar. To znamená, že ve směru $(1, 2)$ se nic neděje a ve směru $(1, 3)$ se každý vektor protáhne na svůj dvojnásobek.

ii) Charakteristický polynom matice A je v tomto případě

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \boxed{3.37b}$$

Dostáváme tedy dvojnásobný kořen $\lambda = 1$ a příslušný vlastní vektor (x, y) splňuje

$$0 = (A - E)x = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

To jsou, opět jako v minulém příkladu, násobky vektoru $(1, 2)$. To, že řešením této rovnice nejsou dva lineárně nezávislé vektory, říká, že Jordanův tvar v tomto případě nebude diagonální, ale bude to matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bázi, ve které má matice A tento tvar, tvoří vlastní vektor $(1, 2)$ a vektor, který se na tento vektor zobrazí zobrazením $A - E$. Je tedy řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Definice. Nechť $U \subset V$ je vektorový podprostor. Na množině všech vektorů ve V definujeme ekvivalenci takto: $v_1 \sim v_2$ právě tehdy, když $v_1 - v_2 \in U$. Axiomy ekvivalence jdou ověřit snadno. Množina V/U tříd této ekvivalence, spolu s operacemi definovanými pomocí reprezentantů, tj. $[v] + [w] = [v + w]$, $a \cdot [u] = [a \cdot u]$, tvoří vektorový prostor, který nazýváme *faktorový vektorový prostor* prostoru V podle podprostoru U .

Ověřte si korektnost definice operací a platnost všech axiomů vektorového prostoru!

Třídy (vektory) ve faktorovém prostoru V/U budeme často označovat jako formální součet jednoho reprezentanta se všemi vektory podprostoru U , např. $u + U \in V/U$, $u \in V$. Nulový vektor ve V/U je právě třída $0 + U$, tj. vektor $u \in V$ reprezentuje nulový vektor ve V/U , právě když je $u \in U$.

Jako jednoduché příklady si rozmyslete $V/\{0\} \cong V$, $V/V \cong \{0\}$ a faktorový prostor roviny \mathbb{R}^2 podle libovolného jednorozměrného podprostoru (zde je každý jednorozměrný podprostor $U \subset \mathbb{R}^2$ přímkou procházející počátkem), kde třídy ekvivalence jsou rovnoběžky s touto přímkou.

Tvrzení. Nechť $U \subset V$ je vektorový podprostor a (u_1, \dots, u_n) je taková báze V , že (u_1, \dots, u_k) je báze U . Pak $\dim V/U = n - k$ a vektory

$$u_{k+1} + U, \dots, u_n + U$$

tvoří bázi V/U .

DŮKAZ. Protože $V = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, je i $V/U = \langle u_1 + U, \dots, u_n + U \rangle$. Přitom ale je prvních k generátorů nulových, takže je $V/U = \langle u_{k+1} + U, \dots, u_n + U \rangle$. Předpokládejme, že $a_{k+1} \cdot (u_{k+1} + U) + \dots + a_n \cdot (u_n + U) = (a_{k+1} \cdot u_{k+1} + \dots + a_n \cdot u_n) + U = 0 \in V/U$. To je ale ekvivalentní příslušnosti lineární kombinace vektorů u_{k+1}, \dots, u_n do podprostoru U . Protože U je generováno zbylými vektory, je nutně tato kombinace nulová, tj. všechny koeficienty a_i jsou nulové. \square

3.36. Indukovaná zobrazení na faktorových prostorech.

Předpokládejme, že $U \subset V$ je invariantní podprostor vzhledem k lineárnímu zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ a zvolme takovou bázi u_1, \dots, u_n prostoru V , že prvních k vektorů této báze je báze U . V této bázi má φ blokovou matici $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Pak budeme umět dokázat následující tvrzení:

Lemma. (1) Zobrazení φ indukuje lineární zobrazení $\varphi_{V/U} : V/U \rightarrow V/U$, $\varphi_{V/U}(v + U) = \varphi(v) + U$ s maticí D v indukované bázi $u_{k+1} + U, \dots, u_n + U$ na V/U .

(2) Charakteristický polynom $\varphi_{V/U}$ dělí charakteristický polynom φ .

DŮKAZ. Pro $v, w \in V$, $u \in U$, $a \in \mathbb{K}$ máme $\varphi(v + u) \in \varphi(v) + U$ (protože U je invariantní), $(\varphi(v) + U) + (\varphi(w) +$

$U) = \varphi(v + w) + U$ a $a \cdot (\varphi(v) + U) = a \cdot \varphi(v) + U = \varphi(a \cdot v) + U$ (protože φ je lineární), je tedy zobrazení $\varphi_{V/U}$ dobře definované a lineární. Navíc je přímo z definice matice zobrazení patrné, že matice $\varphi_{V/U}$ v indukované bázi na V/U je právě matice D (při počítání obrazů bázeových prvků nám koeficienty z matice C přispívají pouze do třídy U). Charakteristický polynom indukovaného zobrazení $\varphi_{V/U}$ je tedy $|D - \lambda \cdot E|$, zatímco charakteristický polynom původního zobrazení φ je $|A - \lambda \cdot E| = |B - \lambda \cdot E||D - \lambda \cdot E|$. \square

Důsledek. *Nechť V je vektorový prostor nad \mathbb{K} dimenze n a nechť $\varphi : V \rightarrow V$ je lineární zobrazení, jehož spektrum obsahuje n prvků (tj. všechny kořeny charakteristického polynomu leží v \mathbb{K} a počítáme je včetně násobnosti). Pak existuje posloupnost invariantních podprostorů $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ s dimenzemi $\dim V_i = i$. V bázi u_1, \dots, u_n prostoru V takové, že $V_i = \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, má φ horní trojúhelníkovou matici:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ je posloupnost prvků spektra.

DŮKAZ. Konstrukci podprostorů V_i provedeme induktivně. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou prvky ve spektru zobrazení φ , tzn. charakteristický polynom zobrazení φ je tvaru $(\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Zvolme $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \langle u_1 \rangle$, kde u_1 je libovolný vlastní vektor s vlastní hodnotou λ_1 . Podle předšlé věty je charakteristický polynom zobrazení φ_{V/V_1} tvaru $(\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Předpokládejme, že jsme již sestrojili lineárně nezávislé vektory u_1, \dots, u_k a invariantní podprostory $V_i = \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, k < n$, takové, že charakteristický polynom φ_{V/V_k} je tvaru $(\lambda - \lambda_{k+1}) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$ a $\varphi(u_i) \in (\lambda_i \cdot u_i + V_{i-1})$ pro všechna $i = 1, \dots, k$.

Zejména tedy existuje vlastní vektor $u_{k+1} + V_k \in V/V_k$ zobrazení φ_{V/V_k} s vlastní hodnotou λ_{k+1} . Uvažme nyní prostor $V_{k+1} = \langle u_1, \dots, u_{k+1} \rangle$. Kdyby byl vektor u_{k+1} lineární kombinací vektorů u_1, \dots, u_k , znamenalo by to, že $u_{k+1} + V_k$ je nulová třída v V/V_k , to ale není možné. Je proto $\dim V_{k+1} = k + 1$. Zbývá studovat indukované zobrazení $\varphi_{V/V_{k+1}}$. Charakteristický polynom tohoto zobrazení je stupně $n - k - 1$ a dělí charakteristický polynom zobrazení φ . Přítom doplněním vektorů u_1, \dots, u_{k+1} do báze V dostaneme blokovou matici zobrazení φ s horní trojúhelníkovou submaticí B v horním levém rohu a nulou v levém dolním rohu, jejíž diagonální prvky jsou právě skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$. Proto mají kořeny charakteristického polynomu indukovaného zobrazení požadované vlastnosti. \square

To jsou násobky vektoru $(1, 3)$. Dostáváme tedy stejnou bázi jako v minulém příkladu a můžeme psát

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení teď působí na vektor tak, že složka ve směru $(1, 3)$ zůstává stejná a ke složka ve směru $(1, 2)$ se bude násobit součtem koeficientů, které určují složky ve směrech $(1, 3)$ a $(1, 2)$. \square

3.49. Najděte Jordanův tvar matice A a napište příslušný rozklad. Jaká je geometrická interpretace rozkladu této matice? $A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ a $A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ a nakreslete (narýsujte), jak se vektory $v = (3, 0)$, $A_1 v$ a $A_2 v$ rozkládají vzhledem k bázi vlastních vektorů matice $A_{1,2}$.

Řešení. Matice mají stejné Jordanovy tvary jako matice v minulém příkladu a obě je mají v bázi tvořenou vektory $(1, 2)$ a $(1, -1)$, tj.

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

a

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Pro vektor $v = (3, 0)$ dostáváme $v = (1, 2) + 2(1, -1)$ a pro jeho obrazy $A_1 v = (5, -2) = (1, 2) + 2 \cdot 2 \cdot (1, -1)$ a $A_2 v = (5, 4) = (2 + 1) \cdot (1, 2) + 2 \cdot (1, -1)$. \square

3.50. Singulární rozklad, polární rozklad, pseudoinverze. Spočítejte singulární rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Následně spočítejte její polární rozklad a najděte její pseudoinverzi.

Řešení. Nejprve spočítáme $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

a dostáváme diagonální matici. Potřebujeme ale najít takovou ortonormální bázi, ve které je matice diagonální a nulový řádek je až poslední. Toho zjevně docílíme otočením o pravý úhel kolem osy x (souřadnice y přejde na z a z přejde na $-y$). Toto otočení je ortogonální transformace

daná maticí $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tím jsme bez počítání našli rozklad

$A^T A = V B V^T$, kde B je diagonální s vlastními čísly $(1, \frac{1}{4}, 0)$ na diagonále. Protože teď máme $B = (AV)^T (AV)$, tvoří sloupce matice

$$AV = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ortogonální systém vektorů, který znormalizujeme a doplníme do báze. Ta má pak tvar $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$. Matice přechodu od této báze ke standardní je pak $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dohromady tak dostá-

váme rozklad $A = U\sqrt{B}V^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Geometricky lze rozklad zobrazení interpretovat tak, že nejprve se vše otočí o pravý úhel kolem osy x , pak následuje projekce do roviny xy taková, že jednotková koule se zobrazí do elipsy s hlavními poloosami 1 a $\frac{1}{2}$ a výsledek se otočí o pravý úhel kolem osy z .

Polární rozklad $A = P \cdot W$ dostaneme ze singulárního jednoduše:

$P := U\sqrt{B}U^T$ a $W := UV^T$, tj.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a z toho plyne

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pseudoinverzní matice je dána výrazem $A^{(-1)} := VSU^T$, kde $S =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Máme tedy}$$

$$A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

3.51. QR rozklad. QR rozklad matice A se dobře hodí v případě, když je dán systém lineárních rovnic $Ax = b$, který sice nemá řešení, ale my potřebujeme najít jeho co nejlepší přiblížení. Chceme tedy minimalizovat $\|Ax - b\|$. Podle Pythagorovy věty máme $\|Ax - b\|^2 = \|Ax - b_{\parallel}\|^2 + \|b_{\perp}\|^2$, kde b jsme rozložili na b_{\parallel} , které patří do obrazu matice A a na b_{\perp} , které je k tomuto obrazu kolmé. Projekci na obraz matice A můžeme psát ve tvaru QQ^T pro vhodnou ortogonální matici Q . Konkrétně tuto matici získáme Gram-Schmidtovou ortonormalizací sloupců matice A . Potom máme $b_{\parallel} = QQ^T b$ a proto $Ax - b_{\parallel} = Q(Q^T Ax - Q^T b)$. Soustava v závorce už má řešení, pro které potom dostáváme $\|Ax - b\| = \|b_{\perp}\|$, což je minimální hodnota.

3.37. Poznámky. Pokud existuje rozklad celého prostoru V na přímý součet vlastních podprostorů, existuje báze z vlastních podprostorů a předchozí věta vlastně neříká vůbec nic zajímavého. Její síla ovšem spočívá v tom, že jediným jejím předpokladem je existence $\dim V$ kořenů charakteristického polynomu (včetně násobností). To je ovšem zaručeno, je-li pole \mathbb{K} algebraicky uzavřené, např. pro komplexní čísla \mathbb{C} . Přímým důsledkem pak jsou zajímavá tvrzení o determinantu a stopě zobrazení: jsou vždy součinem, resp. součtem prvků ve spektru. Tuto skutečnost můžeme použít i pro všechny reálné matice. Můžeme je totiž vždy považovat za komplexní, spočítat potřebné, a protože determinant i stopa jsou algebraické výrazy v prvcích matice, výsledkem budou právě hledané reálné hodnoty.



Když je na vektorovém prostoru V zadán skalární součin, můžeme v každém induktivním kroku důkazu předchozího tvrzení využít skutečnosti, že vždy $V/V_k \simeq V_k^{\perp}$ a $V_k^{\perp} \ni u \mapsto (u + V_k) \in V/V_k$. To znamená, že v každé třídě rozkladu V/V_k existuje právě jeden vektor z V_k^{\perp} . Skutečně, tuto vlastnost má faktorový prostor podle libovolného podprostoru v unitárním prostoru – pokud $u, v \in V_k^{\perp}$ jsou v jedné třídě, pak jejich rozdíl patří do $V_k \cap V_k^{\perp}$, tedy jsou stejné. Můžeme tedy jako reprezentanta u_{k+1} nalezené třídy, tedy vlastního vektoru φ_{V/V_k} , zvolit právě vektor z V_k^{\perp} . Touto modifikací dojdeme k ortogonální bázi s vlastnostmi požadovanými v tvrzení o triangulovatelnosti. Proto existuje i taková ortonormální báze:

Důsledek (Schurova věta o ortogonální triangulovatelnosti). *Nechť $\varphi : V \rightarrow V$ je libovolné lineární zobrazení (reálného nebo komplexního) unitárního prostoru s $m = \dim V$ vlastními hodnotami (včetně násobností). Pak existuje ortonormální báze prostoru V taková, že φ v ní má horní trojúhelníkovou matici s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ na diagonále.*

3.38. Věta. *Nechť $\varphi : V \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Součet kořenových prostorů*

$$\mathcal{R}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_k}$$

příslušných různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ je přímý. Navíc je pro každou vlastní hodnotu λ dimenze podprostoru \mathcal{R}_{λ} rovna její algebraické násobnosti.



DŮKAZ. Důkaz provedeme indukcí přes počet k kořenových prostorů. Předpokládejme, že tvrzení vždy platí pro méně než k prostorů a že pro vektory $u_1 \in \mathcal{R}_{\lambda_1}, \dots, u_k \in \mathcal{R}_{\lambda_k}$ platí $u_1 + \dots + u_k = 0$. Pro vhodné j pak $(\varphi - \lambda_k \cdot \text{id}_V)^j(u_k) = 0$ a zároveň jsou $y_i = (\varphi - \lambda_k \cdot \text{id}_V)^j(u_i)$ nenulové vektory v \mathcal{R}_{λ_i} , $i = 1, \dots, k-1$, pokud u_i jsou nenulové, viz. předchozí věta.

Přitom ale

$$y_1 + \dots + y_{k-1} = \sum_{i=1}^k (\varphi - \lambda_k \cdot \text{id}_V)^j(u_i) = 0$$

a tedy podle indukčního předpokladu jsou všechny y_i nulové. Pak ovšem i $u_k = 0$ a lineární nezávislost je dokázána.

Zbývá ukázat, že dimenze každého kořenového prostoru \mathcal{R}_λ je rovna algebraické násobnosti kořenu λ charakteristického polynomu. Nechť tedy je λ vlastní hodnota φ , označme $\bar{\varphi}$ zúžení $\varphi|_{\mathcal{R}_\lambda}$ a $\psi : V/\mathcal{R}_\lambda \rightarrow V/\mathcal{R}_\lambda$ nechť je zobrazení indukované φ na faktorovém prostoru. Předpokládejme, že dimenze \mathcal{R}_λ je menší než násobnost kořenu λ charakteristického polynomu. Podle lemma 3.36 to znamená, že λ je i vlastní hodnotou zobrazení ψ . Nechť $(v + \mathcal{R}_\lambda) \in V/\mathcal{R}_\lambda$ je příslušný vlastní vektor, tj. $\psi(v + \mathcal{R}_\lambda) = \lambda \cdot (v + \mathcal{R}_\lambda)$ což podle definice značí $v \notin \mathcal{R}_\lambda$ a $\varphi(v) = \lambda \cdot v + w$ pro vhodné $w \in \mathcal{R}_\lambda$. Máme tedy $w = (\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)(v)$ a $(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^j(w) = 0$ pro vhodné j . Celkem jsme dovedli $(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)^{j+1}(v) = 0$ což je ve sporu s volbou $v \notin \mathcal{R}_\lambda$.

Tím jsme dokázali, že dimenze \mathcal{R}_λ je rovna násobnosti kořene λ charakteristického polynomu φ . \square

Důsledek. Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$, jehož celé spektrum je v \mathbb{K} , je $V = \mathcal{R}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_n}$ přímým součtem kořenových podprostorů. Zvolíme-li vhodně báze těchto podprostorů, pak φ má v této bázi blokově diagonální tvar s horními trojúhelníkovými maticemi v blocích a vlastními hodnotami λ_i na diagonále.

3.38

3.39. Nilpotentní a cyklická zobrazení. Nyní již máme skoro vše připraveno pro diskusi kanonických tvarů matic. Zbývá jen vyjasnit vztah mezi cyklickými a nilpotentními zobrazeními a poskládat dohromady již připravené výsledky.



Věta. Nechť $\varphi : V \rightarrow V$ je nilpotentní lineární zobrazení. Pak existuje rozklad V na přímý součet podprostorů $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ takových, že zúžení φ na kterýkoliv z nich je cyklické.

DŮKAZ. Ověření je docela přímočaré a spočívá v konstrukci takové báze prostoru V , že akce zobrazení φ na báze vektorech přímo ukazuje rozklad na cyklická zobrazení. Postup bude ale poněkud zdoluhavý.



Nechť k je stupeň nilpotentnosti zobrazení φ a označme $P_i = \text{im}(\varphi^i)$, $i = 0, \dots, k$, tzn.

$$\{0\} = P_k \subset P_{k-1} \subset \dots \subset P_1 \subset P_0 = V.$$

Vyberme libovolnou bázi $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$ prostoru P_{k-1} , kde $p_{k-1} > 0$ je dimenze P_{k-1} . Z definice plyne, že $P_{k-1} \subset \text{Ker } \varphi$, tj. vždy $\varphi(e_j^{k-1}) = 0$.

Předpokládejme, že $P_{k-1} \neq V$. Protože $P_{k-1} = \varphi(P_{k-2})$, nutně existují v P_{k-2} vektory e_j^{k-2} , $j = 1, \dots, p_{k-1}$, takové, že $\varphi(e_j^{k-2}) = e_j^{k-1}$. Předpokládejme

$$a_1 e_1^{k-1} + \dots + a_{p_{k-1}} e_{p_{k-1}}^{k-1} + b_1 e_1^{k-2} + \dots + b_{p_{k-1}} e_{p_{k-1}}^{k-2} = 0.$$

Aplikací zobrazení φ na tuto lineární kombinaci získáme $b_1 e_1^{k-1} + \dots + b_{p_{k-1}} e_{p_{k-1}}^{k-1} = 0$, proto jsou všechny $b_j = 0$. Pak ale i $a_j = 0$, protože se jedná o kombinaci báze vektorů

Navíc matice $R := Q^T A$ je horní trojúhelníková a proto požadované přibližné řešení najdeme velmi lehce.

Najděte přibližné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

Řešení. Máme tedy soustavu $Ax = b$ s $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (která evidentně nemá řešení). Uděláme tedy ortonormalizaci sloupců matice A . Vezmeme první z nich a vydělíme ho jeho velikostí. Tím dostaneme první vektor ortonormální báze $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Druhý dostaneme tak, že od druhého sloupce odečteme jeho komponentu ve směru už nalezeného prvního vektoru ortonormální báze. Druhý vektor je ovšem dvojnásobek prvního a proto v ortonormalizaci nulový. Máme proto $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Projektor na obraz matice A je pak $QQ^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, dále spočítáme

$$Q^T b = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

a

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 20 \end{pmatrix}$$

Přibližné řešení pak splňuje $Rx = Q^T b$ a to v našem případě znamená $5x + 9y = 9$ (přibližné řešení tedy není jednoznačné). QR rozklad matice A je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 9 \end{pmatrix}$$

 \square

3.52. Minimalizujte $\|Ax - b\|$ pro $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a $b =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 a napište QR rozklad matice A .

Řešení. Normalizovaný první sloupec matice A je $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Z druhého sloupce odečteme jeho složku ve směru e_1 . Máme

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

a proto dostaneme

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tím jsme vyrobili ortogonální vektor, který normujeme a dostaneme $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Třetí sloupec matice A je už lineárně závislý (můžeme ověřit spočítáním determinantu). Hledaná sloupcově-ortogonální matice je tedy

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dále spočítáme

$$\begin{aligned} R = Q^T A &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 3\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a

$$Q^T b = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešením rovnice $Rx = Q^T b$ je $x = y = z$. Násobky vektoru $(1, 1, 1)$ tedy minimalizují $\|Ax - b\|$.

Zobrazení určené maticí A je projekce na rovinu s normálovým vektorem $(1, 1, 1)$.

□

3.53. Lineární regrese. Znalosti, které jsme se v této kapitole naučili lze s výhodou použít v praxi při řešení problémů pomocí lineární regrese. Jde o to nalézt nejlepší přiblížení nějaké funkční závislosti pomocí lineární funkce.

Máme tedy zadání funkční závislosti v několika bodech (například zkoumáme hodnotu majetku lidí v závislosti na jejich inteligenci, na majetku rodičů, počtu společných známých s panem Kalouskem,...), tj. $f(a_1^1, \dots, a_n^1) = y_1, \dots, f(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k) = y_k, k > n$ (máme tedy více rovnic než neznámých) a chceme tuto závislost „co nejlépe“ odhadnout pomocí lineární funkce, tj. vyjádřit hodnotu majetku jakožto lineární funkci $f(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n + c$. Pokud navíc definujeme „co nejlépe“ tím, že chceme minimalizovat

$$\sum_{i=1}^k \left(y_i - \sum_{j=1}^n (b_j x_j + c) \right)^2$$

v závislosti na reálných konstantách b_1, \dots, b_n, c . Naším cílem je najít takovou lineární kombinaci sloupců matice $A = (a_j^i)$ (s koeficienty b_1, \dots, b_n), která bude mít co nejmenší vzdálenost od vektoru (y_1, \dots, y_k) v \mathbb{R}^k , tedy vlastně najít kolmou projekci vektoru

vektorů. Celkem jsme tedy ověřili lineární nezávislost všech $2p_{k-1}$ zvolených vektorů. Doplňme je do báze

$$\begin{aligned} e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1} \\ e_1^{k-2}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-2}, e_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-2} \end{aligned}$$

prostoru P_{k-2} . Navíc jsou obrazy přidávaných bázevých prvků v P_{k-1} , nutně tedy musejí být lineárními kombinacemi bázevých prvků $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$. Můžeme proto zaměnit zvolené vektory $e_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-2}$ vektory $e_j^{k-2} - \varphi(e_j^{k-2})$. Tím docílíme, že doplněné vektory do báze P_{k-2} patří do jádra zobrazení φ . Předpokládejme to přímo o zvolené bázi (1).

Předpokládejme dále, že již máme sestrojenu bázi podprostoru $P_{k-\ell}$ takovou, že ji můžeme poskládat do schématu

$$\begin{aligned} e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1} \\ e_1^{k-2}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-2}, e_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-2} \\ e_1^{k-3}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-3}, e_{p_{k-1}+1}^{k-3}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-3}, e_{p_{k-2}+1}^{k-3}, \dots, e_{p_{k-3}}^{k-3} \end{aligned}$$

⋮

$$e_1^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-\ell}, e_{p_{k-1}+1}^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-\ell}, e_{p_{k-2}+1}^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-3}}^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-\ell}}^{k-\ell}$$

kde hodnota zobrazení φ na libovolném bázevém vektoru se nachází nad ním, nebo je nulová, pokud nad zvoleným vektorem báze již nic není. Pokud je $P_{k-\ell} \neq V$, opět musí existovat vektory $e_1^{k-\ell-1}, \dots, e_{p_{k-\ell}}^{k-\ell-1}$, které se zobrazují na $e_1^{k-\ell}, \dots, e_{p_{k-\ell}}^{k-\ell}$ a můžeme je doplnit do báze $P_{k-\ell-1}$, řekněme vektory

$$e_{p_{k-\ell}+1}^{k-\ell-1}, \dots, e_{p_{k-\ell-1}}^{k-\ell-1}.$$

Přitom postupným odečítáním hodnot iterací zobrazení φ na těchto vektorech dosáhneme opět toho, že doplněné vektory do báze $P_{k-\ell-1}$ budou ležet v jádru φ a analogicky jako výše ověříme, že skutečně dostaneme bázi $P_{k-\ell-1}$.

Po k krocích získáme bázi celého V , která má vlastnosti uvedené pro bázi prostoru $P_{k-\ell}$. Jednotlivé sloupce výsledného schématu pak generují hledané podprostory V_i a navíc jsme přímo našli báze těchto podprostorů ukazující, že příslušná zúžení φ jsou cyklická zobrazení. □

3.40. Důkaz Jordanovy věty. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechny různé vlastní hodnoty zobrazení φ . Z předpokladů Jordanovy věty plyne, že $V = \mathcal{R}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_k}$. Zobrazení $\varphi_i = (\varphi|_{\mathcal{R}_{\lambda_i}} - \lambda_i \cdot \text{id}_{\mathcal{R}_{\lambda_i}})$ jsou nilpotentní a proto je každý z kořenových prostorů přímým součtem

$$\mathcal{R}_{\lambda_i} = P_{1,\lambda_i} \oplus \dots \oplus P_{j_i,\lambda_i}$$

prostorů na nichž je zúžení zobrazení $\varphi - \lambda_i \cdot \text{id}_V$ cyklické. Matice těchto zúžených zobrazení na $P_{r,s}$ jsou Jordanovy bloky příslušné k nulové vlastní hodnotě, zúžené zobrazení $\varphi|_{P_{r,s}}$ má proto za matici Jordanův blok s vlastní hodnotou λ_i .

Pro důkaz Jordanovy věty zbývá dokázat tvrzení o jednoznačnosti. Protože diagonální hodnoty λ_i jsou dány jako

kořeny charakteristického polynomu, je jejich jednoznačnost zřejmá. Vyjádříme rozměry jednotlivých Jordanových bloků prostřednictvím hodnot $r_k(\lambda_i)$ zobrazení $(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id}_V)^k$. Tím bude jasné, že až na pořadí jsou bloky jednoznačně určeny. Naopak, přehození bloků odpovídá přečíslování vektorů báze, lze je tedy získat v libovolném pořadí.

Je-li ψ cyklický operátor na n -rozměrném prostoru, pak defekt iterovaného zobrazení ψ^k je k pro $0 \leq k \leq n$ a je n pro všechna $k \geq n$. Odtud plyne, že pokud matice J zobrazení φ obsahuje $d_k(\lambda)$ Jordanových bloků řádu k s vlastní hodnotou λ , pak defekt matice $(J - \lambda \cdot E)^\ell$ je

$$d_1(\lambda) + 2d_2(\lambda) + \dots + \ell d_\ell(\lambda) + \ell d_{\ell+1}(\lambda) + \dots$$

Odtud spočítáme

$$n - r_\ell(\lambda) = d_1(\lambda) + 2d_2(\lambda) + \dots + \ell d_\ell(\lambda) + \ell d_{\ell+1}(\lambda) + \dots$$

$$d_k(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda)$$

(kde poslední řádek vznikne kombinací předchozího pro hodnoty $\ell = k - 1, k, k + 1$).

3.41. Poznámka. Důkaz věty o existenci Jordanova kanonického tvaru byl sice konstruktivní, nedává nám ale dokonale efektivní algoritmický postup pro jejich hledání. Nyní shrneme již odvozený postup explicitního výpočtu báze, v níž má dané zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ matici v kanonickém Jordanově tvaru.



- (1) Najdeme kořeny charakteristického polynomu.
- (2) Jestliže jich je méně než $n = \dim V$, včetně násobností, kanonický tvar neexistuje.
- (3) Je-li n lineárně nezávislých vlastních vektorů, získáme bázi V z vlastních vektorů a v ní má φ diagonální matici.
- (4) Nechť λ je vlastní hodnota s geometrickou násobností menší než algebraickou a v_1, \dots, v_k nechť jsou příslušné vlastní vektory. To by měly být vektory na horním okraji schématu z důkazu věty 3.39, je ovšem nutné najít vhodnou bázi aplikacemi iterací $\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$. Zároveň přitom zjistíme, ve kterém řádku se vektory nacházejí, a najdeme lineárně nezávislá řešení w_i rovnic $(\varphi - \lambda \text{id})(x) = v_i$ z řádků pod nimi. Postup opakujeme iterativně (tj. pro w_i atd.). Najdeme tak „řetízky“ bazových vektorů zadávajících podprostory, kde $\varphi - \lambda \text{id}$ je cyklické.

Postup je praktický pro matice, kde násobnosti vlastních hodnot jsou malé, nebo aspoň diskutované stupně nilpotentnosti jsou malé. Např. pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dostaneme dvourozměrný podprostor vlastních vektorů

$$\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

Potřebujeme proto najít řešení rovnic $(A - 2E)x = (a, b, 0)^T$ pro vhodné konstanty a, b . Tento systém je ovšem řešitelný pouze pro $a = b$ a jedno z možných řešení je $v = (0, 0, 1)$,

(y_1, \dots, y_k) na podprostor generovaný sloupci matice A . Podle věty 3.49 je touto projekcí vektor $(b_1, \dots, b_n)^T = A^{(-1)}(y_1, \dots, y_n)$.

3.54. Metodou nejmenších čverců řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 0 \\ 2y - z &= -1 \end{aligned}$$

Řešení.

□

$a = b = 1$. Celá hledaná báze pak je $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$. Všimněme si, že jsme měli spoustu voleb a bazí s požadovanými vlastnostmi je tedy mnoho.

5. Rozklady matic a pseudo inverze

V minulé části jsme s soustředili na geometrický popis struktury zobrazení. Teď naše výsledky přeložíme do jazyku tzv. rozkladů matic, což je obzvlášť důležité téma pro numerické postupy a maticový počet obecně.

I při počítání s reálnými čísly užíváme pro zjednodušení rozklady na součiny. Nejjednodušším je vyjádření každého reálného čísla jednoznačně ve tvaru

$$a = \operatorname{sgn}(a) \cdot |a|,$$

tj. jako součin znaménka a absolutní hodnoty. V dalším textu si uvedeme stručně přehled několika takových rozkladů pro různé typy matic, které bývají nesmírně užitečné při numerických výpočtech s maticemi. Například jsme vhodný rozklad pro pozitivně semidefinitní symetrické matice využili v odstavci 3.31 pro konstrukci odmocniny z matice.

3.40

3.42. LU-rozklad. Začneme přeformulováním několika výsledků, které jsme už dávno odvodili. V odstavcích 2.7 a 2.8 jsme upravovali matice nad skaláry z libovolného pole na řádkový schodovitý tvar. K tomu jsme používali elementární úpravy, které spočívaly v postupném násobení naší matice invertibilními dolními trojúhelníkovými maticemi P_i , které postihovaly přiřítání násobků řádků pod právě zpracovávaným.



Předpokládejme pro jednoduchost, že naše matice A je čtvercová a že při Gausově eliminaci nejsme nuceni přehazovat řádky, a proto všechny naše matice P_i mohou být dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonálách. Konečně, stačí si povšimnout, že inverzní matice k takovýmto P_i jsou opět dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonálách a dostáváme

$$U = P \cdot A = P_k \cdots P_1 \cdot A$$

kde U je horní trojúhelníková matice a tedy

$$A = L \cdot U$$

kde L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a U je horní trojúhelníková. Tomuto rozkladu se říká *LU-rozklad* matice A .

V případě obecné matice můžeme při Gausově eliminaci na řádkově schodovitý tvar potřebovat navíc permutace řádků, někdy i sloupců matice. Pak dostáváme obecněji

$$A = P \cdot L \cdot U \cdot Q,$$

kde P a Q jsou nějaké permutační matice.

3.41

3.43. Poznámky. Příмым důsledkem Gausovy eliminace bylo také zjištění, že až na volbu vhodných bází na definičním oboru a oboru hodnot je každé zobrazení $f : V \rightarrow W$ zadáno maticí v blokově diagonálním tvaru s jednotkovou maticí, s rozměrem daným dimenzí obrazu f , a s nulovými bloky všude kolem. To lze přeformulovat takto: Každou matici A typu m/n nad polem skalárů \mathbb{K} lze rozložit na součin

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q,$$

kde P a Q jsou vhodné invertibilní matice.

Pro čtvercové matice jsme v 3.32 ukázali při diskusi vlastností lineárních zobrazení $f : V \rightarrow V$ na komplexních vektorových prostorech, že každou čtvercovou matici A dimenze m umíme rozložit na součin

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1},$$

kde B je blokově diagonální s Jordanovými bloky příslušnými k vlastním číslům na diagonále. Skutečně jde o pouhé přepsání Jordanovy věty, protože násobení maticí P a její inverzí z opačných stran odpovídá v tomto případě právě změně báze na vektorovém prostoru V a citovaná věta říká, že ve vhodné bázi má každé zobrazení Jordanův kanonický tvar.

Obdobně jsme také při diskusi samoadjungovaných zobrazení dokázali, že pro reálné symetrické nebo komplexní Hermiteovské matice existuje vždy rozklad na součin

$$A = P \cdot B \cdot P^*,$$

kde B je diagonální matice se všemi (vždy reálnými) vlastními čísly na diagonále, včetně násobností. Skutečně, jde opět o součin s maticemi vystihující změnu báze, nicméně připouštíme nyní pouze změny mezi mezi ortonormálními bazemi a proto i matice přechodu P musí být ortogonální. Odtud $P^{-1} = P^*$.

Pro reálná ortogonální zobrazení jsme odvodili obdobné vyjádření jako u symetrických, pouze naše B bude blokově diagonální s bloky rozměru dva nebo jedna vyjadřujícími buď rotaci nebo zrcadlení nebo identitu vzhledem k příslušným podprostorům.

3.42

3.44. Věta o singulárním rozkladu. Nyní se vrátíme k obecným lineárním zobrazením mezi (obecně různými) vektorovými prostory. Jestliže na nich je definován skalární součin a omezíme se přitom na ortonormální báze, musíme postupovat o hodně rafinovaněji, než v případě bází libovolných:



Věta. *Nechť A je libovolná matice typu m/n nad reálnými nebo komplexními skaláry. Pak existují čtvercové unitární matice U a V dimenzí m a n , a reálná diagonální matice s nezápornými prvky D dimenze r , $r \leq \min\{m, n\}$, takové, že*

$$A = USV^*, \quad S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a je hodnota matice AA^* . Přitom je S určena jednoznačně až na pořadí prvků a prvky diagonální matice D jsou druhé odmocniny vlastních čísel d_i matice AA^* . Pokud je A reálná matice, pak i matice U a V jsou ortogonální.

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve $m \leq n$ a označme $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ zobrazení mezi reálnými nebo komplexními prostory se standardními skalárními součiny, zadané maticí A ve standardních bazích.

Tvrzení věty můžeme přeformulovat tak, že existují ortonormální báze na \mathbb{K}^n a \mathbb{K}^m ve kterých bude mít φ matici S z tvrzení věty.

Jak jsme viděli dříve, matice A^*A je pozitivně semidefinitní. Proto má samá reálná nezáporná vlastní čísla a existuje ortonormální báze \underline{w} v \mathbb{K}^n , ve které má příslušné zobrazení $\varphi^* \circ \varphi$ diagonální matici s vlastními čísly na diagonále. Jinými slovy, existuje unitární matice V taková, že $A^*A = VB^*V$ pro reálnou diagonální matici s nezápornými vlastními čísly $(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ na diagonále, $d_i \neq 0$ pro všechny $i = 1, \dots, r$. Odtud

$$B = V^*A^*AV = (AV)^*(AV).$$

To je ale ekvivalentní tvrzení, že prvních r sloupců matice AV je ortogonálních a zbývající jsou nulové, protože mají nulovou velikost.

Označme nyní prvních r sloupců $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$. Platí tedy $\langle v_i, v_i \rangle = d_i$, $i = 1, \dots, r$, a normované vektory $u_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}}v_i$ tvoří ortonormální systém nenulových vektorů. Doplňme je na ortonormální bázi $\underline{u} = u_1, \dots, u_n$ celého \mathbb{K}^m . Vyjádříme-li naše původní zobrazení φ v bazích \underline{u} na \mathbb{K}^m a \underline{w} na \mathbb{K}^n , dostáváme matici \sqrt{B} . Přejít od standardních bází k nově vybraným odpovídá násobení zleva ortogonálními maticemi U a zprava $V^{-1} = V^*$.

Pokud je $m > n$, můžeme aplikovat předchozí část důkazu na matici A^* . Odtud pak přímo plyne požadované tvrzení.

Pokud pracujeme nad reálnými skaláry, jsou všechny naše kroky v důkazu výše také realizovány v reálném oboru. \square

Tento důkaz věty o singulárním rozkladu je konstruktivní a můžeme jej opravdu použít pro výpočet unitárních, resp. ortogonálních, matic U , V a diagonálních nenulových prvků matice S .

3.43

3.45. Geometrická interpretace. Diagonálním hodnotám matice D z předchozí věty se říká *singulární hodnoty matice A* . Přeformulujme si tuto větu v reálném případě geometričtěji.



Pro příslušné lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mají singulární hodnoty skutečně jednoduchý geometrický význam: Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je jednotková sféra pro standardní skalární součin. Obrazem $\varphi(K)$ pak vždy bude (případně degenerovaný) m -rozměrný elipsoid. Singulární čísla matice A jsou přitom velikosti hlavních poloos a věta navíc říká, že původní sféra vždy připouští ortogonální sdružené průměry, jejichž obrazem budou právě všechny poloosy tohoto elipsoidu.

Pro čtvercové matice je vidět, že A je invertibilní právě, když všechna singulární čísla jsou nenulová. Poměr největšího a nejmenšího singulárního čísla je důležitým parametrem pro robustnost řady numerických výpočtů s maticemi, např. pro výpočet inverzní matice. Poznamejme také, že existují rychlé metody výpočtů, resp. odhadů, vlastních čísel, proto lze se singulárním rozkladem velmi efektivně pracovat.

3.44

3.46. Věta o polárním rozkladu. Věta o singulárním rozkladu je východiskem pro mnoho mimořádně



užitečných nástrojů. Uvažujme nyní nad několika přímými důsledky (které samy o sobě jsou dosti netriviální). Tvrzení věty říká pro libovolnou matici A , ať už reálnou nebo komplexní, $A = USW^*$ s diagonální S s nezápornými reálnými čísly na diagonále a unitárními U, W . Pak ovšem také $A = USU^*UW^*$ a pojmenujme si matice $P = USU^*, V = UW^*$. První z nich, P je hermiteovská (v reálném případě symetrická) a pozitivně semidefinitní, protože jde jen o zápis zobrazení s reálnou diagonální maticí S v jiné ortonormální bázi, zatímco V je coby součin dvou unitárních opět unitární (v reálném případě ortogonální). Navíc $A^* = W^*S^*U^*$ a tedy $AA^* = USSU^* = P^2$ a naše matice P je vlastně odmocninou ze snadno spočítatelné hermiteovské matice AA^* .

Předpokládejme, že $A = PV = QU$ jsou dva takové rozklady matice A na součin pozitivně semidefinitní hermiteovské a unitární matice a předpokládejme, že A je invertibilní. Pak ovšem je

$$AA^* = P^2 = QUU^*Q = Q^2$$

pozitivně definitní a proto jsou matice $Q = P = \sqrt{AA^*}$ jednoznačně určené a invertibilní. Pak ovšem také $U = V = P^{-1}A$.

Beze zbytku jsme tedy odvodili velice užitečnou analogii rozkladu reálného čísla na znaménko (ortogonální matice v případě dimenze jedna jsou právě ± 1) a absolutní hodnotu (matice P , ke které umíme odmocninu).

Věta (Věta o polárním rozkladu). Každou čtvercovou komplexní matici A dimenze n lze vždy vyjádřit ve tvaru $A = P \cdot V$, kde P je hermiteovská a pozitivně definitní čtvercová matice téže dimenze a V je unitární. Přitom $P = \sqrt{AA^*}$. Je-li A invertibilní, je rozklad jednoznačný a $V = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$.

Pokud pracujeme nad reálnými skaláry, je P symetrická a V ortogonální.

Když budeme tutéž větu aplikovat na A^* místo A , dostaneme tentýž výsledek, ovšem s obráceným pořadím hermiteovských a unitárních matic. Matice v příslušných pravých a levých rozkladech budou samozřejmě obecně různé.

V komplexním případě je analogie s rozkladem čísel ještě zábavnější — pozitivně semidefinitní P hraje opět roli absolutní hodnoty komplexního čísla, unitární matice V pak má jednoznačné vyjádření jako součet $V = \operatorname{re} V + i \operatorname{im} V$ s hermiteovskými reálnými a imaginárními částmi a s vlastností $(\operatorname{re} V)^2 + (\operatorname{im} V)^2 = E$, tj. dostáváme plnou analogii goniometrického tvaru komplexních čísel (viz závěrečná poznámka v 3.30). Všimněme si ale, že ve vícerozměrném případě je podstané, v jakém pořadí tento „goniometrický tvar“ matice píšeme. Jde to oběma způsoby, výsledky jsou ale obecně různé.



Pro řadu praktických aplikací bývá rychlejší použití tzv. *QR rozkladu* matic, který je obdobou Schurovy věty o ortogonální triangulaci:

3.45

3.47. Věta. Pro každou komplexní matici A typu m/n existuje unitární matice Q a horní trojúhelníková matice R takové, že $A = Q^T R$.

Pokud pracujeme nad reálnými skaláry, jsou Q i R reálné.

DŮKAZ. V geometrické formulaci potřebujeme dokázat, že pro každé zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ s maticí A ve standardních bazích můžeme zvolit novou ortonormální bázi na \mathbb{K}^m tak, aby potom φ mělo horní trojúhelníkovou matici.



Uvažme obrazy $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in \mathbb{K}^m$ vektorů standardní ortonormální báze, vyberme z nich maximální lineárně nezávislý systém v_1, \dots, v_k takovým způsobem, že vypouštěné závislé vektory jsou vždy lineární kombinací předchozích vektorů, a doplňme je do báze v_1, \dots, v_m . Nechť u_1, \dots, u_m je ortonormální báze \mathbb{K}^m vzniklá Gram-Schmidtovou ortogonalizací tohoto systému vektorů.

Nyní pro každé e_i je $\varphi(e_i)$ buď jedno z v_j , $j \leq i$, nebo je lineární kombinací v_1, \dots, v_{i-1} , proto ve vyjádření $\varphi(e_i)$ v bázi \underline{u} vystupují pouze vektory u_1, \dots, u_i . Zobrazení φ má proto ve standardní bázi na \mathbb{K}^n a ortonormální bázi \underline{u} na \mathbb{K}^m horní trojúhelníkovou matici R . Přejít k bázi \underline{u} na \mathbb{R}^m odpovídá násobení unitární maticí Q zleva, tj. $R = QA$, ekvivalentně $A = Q^T R$.

Poslední tvrzení je z naší konstrukce zřejmé. \square

Závěrem této části textu si všimněme mimořádně užitečné a důležité aplikace našich výsledků pro přibližné numerické výpočty. Půjde přitom o docela přímočarou aplikaci singulárních rozkladů matic, jak je vidět už z následující:



3.46

3.48. Definice. Nechť A je reálná matice typu m/n a nechť

$$A = USV^*, \quad S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je její singulární rozklad (zejména D je invertibilní). Matici

$$A^\dagger := VSU^*, \quad S = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nazýváme *pseudoinverzní matice* k matici A .

Jak ukazuje následující věta, je pseudoinverze důležité zobecnění pojmu inverzní matice, včetně přímočarých aplikací.

3.47 **3.49. Věta.** *Nechť A je reálná nebo komplexní matice typu m/n . Pak pro její pseudoinverzní matici platí:*

(1) *Je-li A invertibilní (zejména tedy čtvercová), pak*

$$A^\dagger = A^{-1}.$$

(2) *Pro pseudoinverzi A^\dagger platí, že $A^\dagger A$ i AA^\dagger jsou hermiteovské (v reálném případě symetrické) a*

$$AA^\dagger A = A, \quad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger.$$

(3) *Pseudoinverzní matice A^\dagger je čtyřmi vlastnostmi z předchozího bodu určena jednoznačně. Pokud tedy nějaká matice B typu $n \times m$ splňuje, že BA i AB jsou hermiteovské, $ABA = A$ a $BAB = B$, pak $B = A^\dagger$.*

(4) *Je-li A matice systému lineárních rovnic $Ax = b$, s pravou stranou $b \in \mathbb{K}^m$, pak vektor $y = A^\dagger b \in \mathbb{K}^n$ minimalizuje velikost $\|Ax - b\|$ pro všechny vektory $x \in \mathbb{K}^n$.*

(5) *Systém lineárních rovnic $Ax = b$ s $b \in \mathbb{K}^m$ je řešitelný, právě když platí $AA^\dagger b = b$. V tomto případě jsou všechna řešení dána výrazem*

$$x = A^\dagger b + (E - A^\dagger A)u,$$

kde $u \in \mathbb{K}^n$ je libovolné.

DŮKAZ. (1): Je-li A invertibilní, pak je matice $S = U^*AV$ také invertibilní a přímo z definice je $S^{-1} = S^{-1}$. Odtud vyplývá $A^{(-1)}A = AA^{(-1)} = E$.



(2): Přímým výpočtem dostáváme $SS^*S = S$ a $S^*SS^* = S^*$, proto

$$AA^{(-1)}A = USV^*VSU^*USV^* = USS^*SV^* = USV^* = A$$

a analogicky pro druhou rovnost. Dále

$$\begin{aligned} (AA^{(-1)})^* &= (USS^*U^*)^* = U(S^*)^*S^*U^* \\ &= U(SS^*)^*U^* = USS^*U^* = AA^{(-1)} \end{aligned}$$

a podobně se ukáže $(A^{(-1)}A)^* = A^{(-1)}A$.

(3) Tvrzení dokážeme přímým výpočtem. Uvažme na chvíli zobrazení φ dané ve standardních bazích maticí A vyjádřeme φ v bázi z věty o singulárním rozkladu, tj. v této bázi bude mít φ matici S z definice pseudoinverze A^\dagger . Bez újmy na obecnosti nyní budeme pracovat v této bázi, tj. můžeme předpokládat, že v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

s diagonální maticí D všech nenulových singulárních čísel, a B je matice splňující předpoklady. Zjevně

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a tedy dostáváme

$$A^\dagger = A^\dagger A B A A^\dagger = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že

$$B = \begin{pmatrix} D^{-1} & P \\ Q & R \end{pmatrix}$$

pro vhodné matice P , Q a R . Nyní však

$$BA = \begin{pmatrix} D^{-1} & P \\ Q & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ QD & 0 \end{pmatrix}$$

má být hermiteovská, proto je $QD = 0$ a tedy i $Q = 0$ (matice D je diagonální a invertibilní). Obdobně požadavek na hermitovskost AB vede na nulovost P . Zároveň ještě platí

$$B = BAB = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Na pravé straně ale je v pravém dolním rohu nula, proto také $R = 0$ a tvrzení je dokázáno.

(4): Uvažme zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$, a přímé součty $\mathbb{K}^n = (\text{Ker } \varphi)^\perp \oplus \text{Ker } \varphi$, $\mathbb{K}^m = \text{Im } \varphi \oplus (\text{Im } \varphi)^\perp$. Zúžené zobrazení $\tilde{\varphi} := \varphi|_{(\text{Ker } \varphi)^\perp} : (\text{Ker } \varphi)^\perp \rightarrow \text{Im } \varphi$ je lineární isomorfismus. Zvolíme-li vhodně ortonormální báze na $(\text{Ker } \varphi)^\perp$ a $\text{Im } \varphi$ a doplníme je na ortonormální báze na celých prostorech, bude mít φ matici S a $\tilde{\varphi}$ matici D z věty o singulárním rozkladu. Pro dané $b \in \mathbb{K}^m$ je bod $z \in \text{Im } \varphi$ minimalizující vzdálenost $\|b - z\|$ (tj. realizující vzdálenost od afinního podprostoru $\rho(b, \text{Im } \varphi)$, viz další kapitola) právě komponenta $z = b_1$ rozkladu $b = b_1 + b_2$, $b_1 \in \text{Im } \varphi$, $b_2 \in (\text{Im } \varphi)^\perp$. Přitom ale ve zvolené bázi je zobrazení $\varphi^{(-1)}$, původně zadané ve standardních bazích pseudoinvertí $A^{(-1)}$, dáno maticí S' z věty o singulárním rozkladu, zejména je $\varphi^{(-1)}(\text{Im } \varphi) = (\text{Ker } \varphi)^\perp$ a D^{-1} maticí zúžení $\varphi|_{\text{Im } \varphi}^{(-1)}$ a $\varphi|_{(\text{Im } \varphi)^\perp}^{(-1)}$ je nulové. Je tedy skutečně

$$\varphi \circ \varphi^{(-1)}(b) = \varphi(\varphi^{(-1)}(z)) = z$$

a důkaz je ukončen.

(5) Evidentně, z rovnosti $Ax = b$ pro pevně zvolené $x \in \mathbb{K}^n$ plyne

$$b = AA^\dagger Ax = AA^\dagger b.$$

Jde proto o podmínku nutnou. Na druhou stranu, jestliže tato podmínka platí, pak můžeme pro uvedený výraz x spočít

$$Ax = A(A^\dagger b + (E - A^\dagger A)u) = b + (A - AA^\dagger A)u = b.$$

Hodnost matice $A - A^\dagger A$ přitom dává správně velký obraz příslušného zobrazení podle Frobeniovy věty o řešení systému lineárních rovnic, proto takto dostáváme řešení všechna. \square

Lze také ukázat, že matice $A^{(-1)}$ minimalizuje výraz

$$\|AA^{(-1)} - E\|^2$$

tj. součet kvadrátů všech prvků uvedené matice.

3.48



3.50. Lineární regrese. Aproximační vlastnost (3) předchozí věty je velice užitečná v případech, kdy máme najít co nejlepší přiblížení (neexistujícího) řešení přeuročného systému $Ax = b$, kde A je reálná matice typu m/n a $m > n$.

Např. máme experimentem dáno mnoho naměřených reálných hodnot b_j a chceme najít lineární kombinaci několika funkcí f_i , která bude co nejlépe aproximovat hodnoty b_j . Skutečné hodnoty zvolených funkcí v bodech $y_j \in \mathbb{R}$ zadají matici $a_{ij} = f_j(y_i)$, jejíž sloupce jsou dány hodnotami jednotlivých funkcí f_j v uvažovaných bodech, a naším úkolem je tedy určit koeficienty $x_j \in \mathbb{R}$ tak, aby součet kvadrátů odchylek od skutečných hodnot

$$\sum_{i=1}^m (b_i - (\sum_{j=1}^n x_j f_j(y_i)))^2 = \sum_{i=1}^m (b_i - (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j))^2$$

byl minimální. Jinými slovy, hledáme lineární kombinaci funkcí f_i takovou, abychom „dobře“ proložili zadané hodnoty b_i . Díky předchozí větě jsou hledané optimální koeficienty $A^{(-1)}b$.

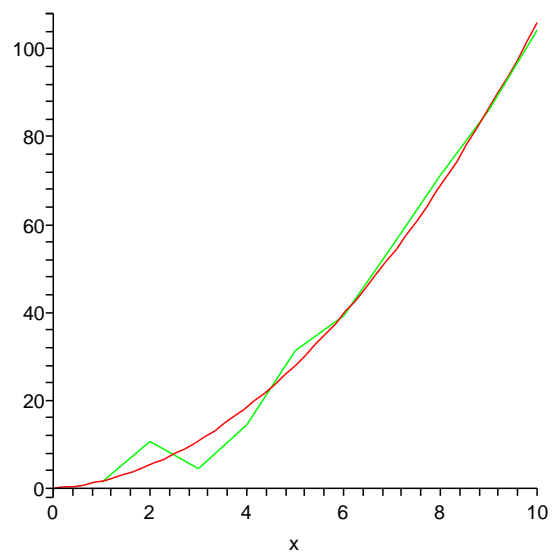
Abychom měli konkrétnější představu, uvažujme pouze dvě funkce $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ a předpokládejme, že „naměřené hodnoty“ jejich neznámé kombinace $g(x) = y_1x + y_2x^2$ v celočíselných hodnotách pro x mezi 1 a 10 jsou $b^T = (1.44 \ 10.64 \ 4.48 \ 14.56 \ 31.12 \ 39.20 \ 54.88 \ 71.28 \ 85.92 \ 104.16)$. Tento vektor vzniknul výpočtem hodnot $x + x^2$ v daných bodech posunutých o náhodné hodnoty v rozmezí ± 8 . Matice $A = (b_{ij})$ je tedy v našem případě rovna

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \end{pmatrix}$$

a hledané koeficienty v kombinaci jsou

$$y = A^{(-1)} \cdot b = \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.99 \end{pmatrix}.$$

Výsledné proložení je možné dobře vidět na obrázku, kde zeleně jsou proloženy zadané hodnoty b lomnou čarou, zatímco červený je graf příslušné kombinace g . Výpočty byly provedeny v systému Maple pomocí příkazu `leastsqrs(B,b)`. Pokud jste s Maplem (nebo jiným podobným softwarem) spřáteleni, zkuste si zaexperimentovat s podobnými úlohami.



F. Doplnující příklady k celé kapitole

3.55. Model vývoje populace velryb. Pro vývoj populace jsou podstatné samice a u nich není důležitý věk, ale plodnost. Z tohoto hlediska můžeme samice rozdělit na novorozené neboli juvenilní, tj. dosud neplodné samice, mladé plodné samice, dospělé samice s největší plodností a samice postmenopauzní, které již plodné nejsou, ale mají velký význam při ochraně mláďat nebo vyhledávání zdrojů potravy.

Budeme modelovat vývoj takové populace v čase. Za časovou jednotku zvolíme dobu dosažení dospělosti. Novorozená samice, která tuto dobu přežije, dospěje k plodnosti. Vývoj mladé samice do plné plodnosti a vývoj dospělé samice k menopauze závisí na podmínkách prostředí. Přejít do další plodnostní kategorie je tedy náhodný jev. Stejně je náhodným jevem i úmrtí samice. Mladá plodná samice má za jednotku času průměrně méně mláďat, než samice plodná. Tyto poznatky vyjádříme formalizovaně.

Označme $x_1(t)$, resp. $x_2(t)$, resp. $x_3(t)$, resp. $x_4(t)$, množství juvenilních, resp. mladých, resp. plně plodných, resp. postmenopauzních, samic v čase t . Množství může vyjadřovat počet jedinců, ale také počet jedinců vztahených na jednotkový areál (tzv. populační hustotu), případně také celkovou biomasu a podobně. Dále označme p_1 pravděpodobnost, že juvenilní samice přežije jednotkový časový interval a tedy během něho dospěje, a p_2 , resp. p_3 , pravděpodobnost, že během jednotkové doby mladá, resp. plně plodná, samice, která neuhyne, dospěje do následující kategorie, tj. mladá do plné plodnosti a plně plodná k menopauze. Dalším náhodným jevem je umírání (pozitivně řečeno: přežívání) samic, které nedospějí do další kategorie; označme pravděpodobnosti přežití po řadě q_2 , q_3 a q_4 pro mladá, plně plodná a postmenopauzní samice. Každé z čísel p_1 , p_2 , p_3 , q_2 , q_3 , q_4 jakožto pravděpodobnost je z intervalu $[0, 1]$. Mladá samice může přežít, dospět do plné plodnosti nebo uhybnout; tyto jevy jsou neslučitelné, společně tvoří jev jistý a možnost úmrtí nelze vyloučit. Platí tedy $p_2 + q_2 < 1$. Z podobných důvodů platí $p_3 + q_3 < 1$. Nakonec ještě označíme f_2 , resp. f_3 průměrný počet dcer mladé, resp. plně plodné, samice. Tyto parametry splňují nerovnost $0 < f_2 < f_3$.

Očekávaný počet novorozených samic v následujícím časovém období je součtem dcer mladých a plně plodných samic, tj.

$$x_1(t+1) = f_2 x_2(t) + f_3 x_3(t).$$

Označme na okamžik $x_{2,1}(t+1)$ množství mladých samic v čase $t+1$, které byly v předchozím období, tj. v čase t juvenilními, a $x_{2,2}(t+1)$ množství mladých samic, které již v čase t byly plodné, jednotkový časový interval přežily, ale nedosáhly plné plodnosti. Pravděpodobnost p_1 , že juvenilní samice přežije jednotkový časový interval, můžeme vyjádřit jako klasickou, tj. jako poměr $x_{2,1}(t+1)/x_1(t)$, a podobně můžeme vyjádřit pravděpodobnost q_2 jako poměr $x_{2,2}(t+1)/x_2(t)$. Poněvadž mladá samice v čase $t+1$ jsou právě ty, které dospěly z juvenilního stádia, a ty, které již plodné byly, přežily a nedospěly k plné plodnosti, platí

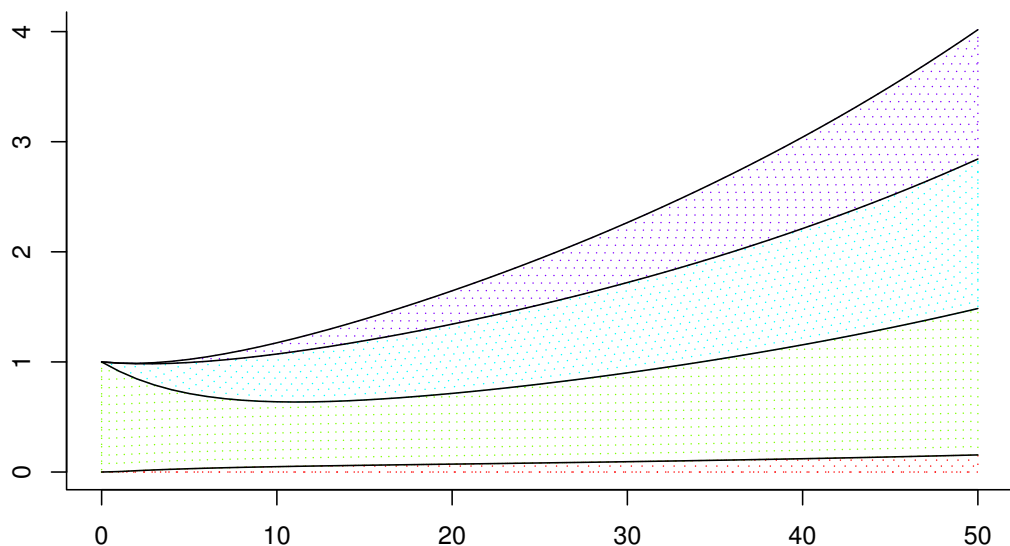
$$x_2(t+1) = x_{2,1}(t+1) + x_{2,2}(t+1) = p_1 x_1(t) + q_2 x_2(t).$$

Analogicky odvodíme očekávaný počet plně plodných samic jako

$$x_3(t+1) = p_2 x_2(t) + q_3 x_3(t)$$

a očekávaný počet postmenopauzních samic

$$x_4(t+1) = p_3 x_3(t) + q_4 x_4(t).$$



OBRÁZEK 1. Vývoj populace kosatky dravé. Na vodorovné ose je čas v letech, na svislé velikost populace. Jednotlivé plochy zobrazují množství juvenilních, mladých, plně plodných a postmenopauzálních samic v tomto pořadí zdola.

ObrKosatky

Nyní můžeme označit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_2 & f_3 & 0 \\ p_1 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_4 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

a předchozí rekurentní formule přepsat v maticovém tvaru

$$x(t+1) = Ax(t).$$

Pomocí této maticové diferenční rovnice snadno spočítáme očekávané množství velrybích samic v jednotlivých plodnostních kategoriích, pokud známe složení populace v nějakém počátečním čase.

Konkrétně, pro populaci kosatek dravých byly odpozorovány populační parametry

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,9775, & q_2 &= 0,9111, & f_2 &= 0,0043, \\ p_2 &= 0,0736, & q_3 &= 0,9534, & f_3 &= 0,1132, \\ p_3 &= 0,0452, & q_4 &= 0,9804; \end{aligned}$$

časovou jednotkou je v tomto případě jeden rok.

Začneme-li v čase $t = 0$ s jednotkovým množstvím mladých samic v nějakém neobsazeném areálu, tj. s vektorem $x(0) = (0, 1, 0, 0)^T$, můžeme spočítat

$$x(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0,0043 & 0,1132 & 0 \\ 0,9775 & 0,9111 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0736 & 0,9534 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0452 & 0,9804 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0043 \\ 0,9111 \\ 0,0736 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0,0043 & 0,1132 & 0 \\ 0,9775 & 0,9111 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0736 & 0,9534 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0452 & 0,9804 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0043 \\ 0,9111 \\ 0,0736 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01224925 \\ 0,83430646 \\ 0,13722720 \\ 0,00332672 \end{pmatrix}$$

a tak můžeme pokračovat dále. Výsledky výpočtu můžeme také znázornit graficky; to je provedeno na obrázku 1. Vyzkoušejte si výpočet a grafické znázornění jeho výsledků i pro jiné počáteční složení

populace. Výsledkem by mělo být pozorování, že celková velikost populace roste jako exponenciální funkce, poměry velikostí jednotlivých plodnostních tříd se postupně ustálí na konstantních hodnotách.

Matice A má vlastní hodnoty

$$\lambda_1 = 1,025441326, \lambda_2 = 0,980400000, \lambda_3 = 0,834222976, \lambda_4 = 0,004835698,$$

vlastní vektor příslušný k největší vlastní hodnotě λ_1 je

$$w = (0,03697187, 0,31607121, 0,32290968, 0,32404724);$$

tento vektor je normován tak, aby součet jednotlivých složek byl roven 1.

Porovnejte vývoj velikosti populace s exponenciální funkcí $F(t) = \lambda_1^t x_0$, kde x_0 je celková velikost počáteční populace. Vypočítejte také relativní zastoupení jednotlivých plodnostních kategorií v populaci po jisté době vývoje a porovnejte ho se složkami vlastního vektoru w . Shoda je způsobena pouze tím, že matice A má jednu vlastní hodnotu, která má absolutní hodnotu největší z absolutních hodnot všech vlastních hodnot matice A , a tím, že vektorový podprostor generovaný vlastními vektory příslušnými k vlastním hodnotám $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ má s nezáporným orthantem jednoprvkový průnik (pouze nulový vektor). Struktura matice A však sama nezaručuje takto jednoduše předvídatelný vývoj, je totiž tzv. reducibilní (viz ??).

3.56. Model růstu populace bodláků *Dipsacus sylvestris*. Tuto rostlinu můžeme vidět ve čtyřech podobách. Buď jako kvetoucí rostlinu nebo jako růžici listů, přičemž u růžic můžeme rozlišit trojí velikost – malé, střední a velké. Životní cyklus této jednodomé víceleté byliny můžeme popsat následovně.

Kvetoucí rostlina vyprodukuje v pozdním létě větší množství semen a uhne. Ze semen některá vyklíčí ještě v témže roce a vyroste z nich růžice listů, nejčastěji střední velikosti. Jiná semena zůstanou v zemi a přezimují. Některá z přezimujících semen na jaře vyklíčí a vyroste z nich růžice listů; poněvadž jsou ale přezimováním oslabena, bude tato růžice s nejvyšší pravděpodobností malá. Většina z přezimujících semen zůstane v zemi, a ta z nich, která přežijí, na jaře vyklíčí a vyrostou z nich malé růžice. Po třech nebo více zimách „spící“ (odborně řečeno dormantní) semena hynou, ztrácí schopnost vyklíčit. Podle podmínek prostředí, kde rostlina roste, může malá nebo střední růžice listů do dalšího roku vyrůst, kterákoliv z růžic může zůstat ve své velikostní kategorii nebo uhynout – uschnout, být sežrána nějakým hmyzem a podobně. Střední nebo velká růžice může v následujícím roce vykvést. Kvetoucí rostlina produkuje semena a celý cyklus se opakuje.

Abychom mohli předpovídat, jak rychle se bude populace uvažovaných bodláků v krajině šířit, potřebujeme popsané procesy nějak kvantifikovat. Botanici zjistili, že kvetoucí rostlina vyprodukuje průměrně 431 semen. Pravděpodobnosti klíčení různých semen, růstu růžic listů a vykvetení jsou shrnuty v tabulce:

jev	pravděpodobnost
semeno vyprodukované rostlinou uhynie	0,172
ze semene vyroste malá růžice v témže roce	0,008
ze semene vyroste střední růžice v témže roce	0,070
ze semene vyroste velká růžice v témže roce	0,002
ze semene přezimujícího rok vyroste malá růžice	0,013
ze semene přezimujícího rok vyroste střední růžice	0,007
ze semene přezimujícího rok vyroste velká růžice	0,001
ze semene přezimujícího dva roky vyroste malá růžice	0,001
semeno po prvním přezimování uhynie	0,013
malá růžice přežije a nevyroste	0,125
střední růžice přežije a nevyroste	0,238
velká růžice přežije a nevyroste	0,167
z malé růžice vyroste střední	0,125
z malé růžice vyroste velká	0,036
ze střední růžice vyroste velká	0,245
střední růžice vykvete	0,023
velká růžice vykvete	0,750

Povšimněme si, že všechny relevantní jevy v životním cyklu rostliny mají pravděpodobnost přiřazenu a že se jedná o jevy neslučitelné.

Budeme si představovat, že populaci pozorujeme vždycky na začátku vegetačního roku, řekněme v březnu, a že ke všem uvažovaným jevům dochází ve zbytku času, dejme tomu od dubna do února. V populaci se vyskytují kvetoucí rostliny, růžice tří velikostí, vyprodukovaná semena a semena dormantní jeden nebo dva roky. Toto pozorování by mohlo svádět k tomu, že populaci rozdělíme do sedmi tříd – semena čerstvá, dormantní první rok a dormantní druhý rok, růžice malé střední a velké, kvetoucí rostliny. Avšak z vyprodukovaných semen se v témže roce vyvinou buď růžice nebo semena přezimují. Čerstvá semena tedy netvoří samostatnou třídu, jejíž velikost bychom na začátku roku mohli určit. Označme tedy:

$x_1(t)$ — počet semen dormantních první rok na jaře roku t

$x_2(t)$ — počet semen dormantních druhý rok na jaře roku t

$x_3(t)$ — počet malých růžic na jaře roku t

$x_4(t)$ — počet středních růžic na jaře roku t

$x_5(t)$ — počet velkých růžic na jaře roku t

$x_6(t)$ — počet kvetoucích rostlin na jaře roku t

Počet vyprodukovaných semen v roce t je $431x_6(t)$. Pravděpodobnost, že semeno zůstane jako dormantní první rok, je rovna pravděpodobnosti, že ze semena nevyroste žádná růžice a že neuhynie, tedy $1 - (0,008 + 0,070 + 0,002 + 0,172) = 0,748$. Očekávaný počet semen dormantních jednu zimu v následujícím roce tedy je

$$x_1(t+1) = 0,748 \cdot 431x_6(t) = 322,388x_6(t).$$

Pravděpodobnost, že semeno, které již jeden rok bylo dormantní, zůstane dormantním i druhý rok je rovna pravděpodobnosti, že ze semena dormantního jeden rok nevyroste žádná růžice a že neuhynie, tedy $1 - 0,013 - 0,007 - 0,001 - 0,013 = 0,966$. Očekávaný počet semen dormantních dvě zimy v následujícím roce tedy bude

$$x_2(t+1) = 0,966x_1(t).$$

Malá růžice může vyrůst ze semena bezprostředně, ze semena dormantního jeden rok nebo dormantního dva roky. Očekávaný počet malých růžic vyrostlých bezprostředně v roce t je roven

$0,008 \cdot 431x_6(t) = 3,448x_6(t)$. Očekávaný počet malých růžic vyrostlých ze semen dormantních jeden a dva roky je $0,013x_1(t)$ a $0,010x_2(t)$. S těmito nově vyrostlými malými růžicemi jsou v populaci rostlin také malé růžice starší, které nevyrostly; těch je $0,125x_3(t)$. Celkový očekávaný počet malých růžic tedy je

$$x_3(t+1) = 0,013x_1(t) + 0,010x_2(t) + 0,125x_3(t) + 3,448x_6(t).$$

Analogicky určíme očekávaný počet středních a velkých růžic

$$\begin{aligned} x_4(t+1) &= 0,007x_1(t) + 0,125x_3(t) + 0,238x_4(t) + 0,070 \cdot 431x_6(t) = \\ &= 0,007x_1(t) + 0,125x_3(t) + 0,238x_4(t) + 30,170x_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5(t+1) &= 0,245x_4(t) + 0,167x_5(t) + 0,002 \cdot 431x_6(t) = \\ &= 0,245x_4(t) + 0,167x_5(t) + 0,862x_6(t). \end{aligned}$$

Kvetoucí rostlina může vyrůst ze střední nebo velké růžice. Očekávaný počet kvetoucích rostlin tedy bude

$$x_6(t+1) = 0,023x_4(t) + 0,750x_5(t).$$

Dospěli jsme tedy k šesti rekurentním formulím pro jednotlivé složky populace studované rostliny. Označíme nyní

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 322,388 \\ 0,966 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,013 & 0,010 & 0,125 & 0 & 0 & 3,448 \\ 0,007 & 0 & 0,125 & 0,238 & 0 & 30,170 \\ 0,008 & 0 & 0,038 & 0,245 & 0,167 & 0,862 \\ 0 & 0 & 0 & 0,023 & 0,750 & 0 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}$$

a předchozí rovnosti zapíšeme v maticovém tvaru vhodném pro výpočet

$$x(t+1) = Ax(t).$$

Pokud známe počty jednotlivých složek populace v nějakém počátečním roce $t = 0$, můžeme vypočítat očekávané počty rostlin a semen v letech následujících. Můžeme také počítat celkový počet jedinců $n(t)$ v čase t , $n(t) = \sum_{i=1}^6 x_i(t)$, relativní zastoupení jednotlivých složek $x_i(t)/n(t)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ a meziroční relativní změnu populace $n(t+1)/n(t)$. Výsledky takového výpočtu pro patnáct let a případ, že na nějakou lokalitu jsme přesadili jednu kvetoucí rostlinu, jsou uvedeny v tabulce 1. Na rozdíl od populace velryb by nyní obrázek nebyl příliš přehledný, počty rostlin jsou oproti počtům semen zanedbatelné, v obrázku by splynuly.

Matice A má vlastní hodnoty

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2,3339 & \lambda_4 &= 0,1187 + 0,1953i \\ \lambda_2 &= -0,9569 + 1,4942i & \lambda_5 &= 0,1187 - 0,1953i \\ \lambda_3 &= -0,9569 - 1,4942i & \lambda_6 &= -0,1274 \end{aligned}$$

Vlastní vektor příslušný k vlastní hodnotě λ_1 je

$$w = (0,6377, 0,2640, 0,0122, 0,0693, 0,0122, 0,0046);$$

tento vektor je normován tak, aby součet jeho složek byl roven jedné. Vidíme, že s rostoucím časem t se relativní změna velikosti populace přibližuje vlastní hodnotě λ_1 , relativní zastoupení jednotlivých složek populace se přibližují složkám normovaného vlastního vektoru příslušného k vlastní hodnotě

t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$n(t)$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00
1	322,39	0,00	3,45	30,17	0,86	0,00	356,87
2	0,00	311,43	4,62	9,87	10,25	1,34	337,50
3	432,13	0,00	8,31	43,37	5,46	7,91	497,18
4	2 550,50	417,44	33,93	253,07	22,13	5,09	3 282,16
5	1 641,69	2 463,78	59,13	235,96	91,78	22,42	4 514,76
6	7 227,10	1 585,88	130,67	751,37	107,84	74,26	9 877,12
7	23 941,29	6 981,37	382,20	2 486,25	328,89	98,16	34 218,17
8	31 646,56	23 127,29	767,29	3 768,67	954,73	303,85	60 568,39
9	97 958,56	30 570,58	1 786,27	10 381,63	1 627,01	802,72	143 126,78
10	258 788,42	94 627,97	4 570,24	27 597,99	4 358,70	1 459,04	391 402,36
11	470 376,19	249 989,61	9 912,57	52 970,28	10 991,08	3 903,78	798 143,52
12	1 258 532,41	454 383,40	23 314,10	134 915,73	22 317,98	9 461,62	1 902 925,24
13	3 050 314,29	1 215 742,31	56 442,70	329 291,15	55 891,57	19 841,54	4 727 523,56
14	6 396 675,73	2 946 603,60	127 280,49	705 398,22	133 660,97	49 492,37	10 359 111,38
15	15 955 747,76	6 179 188,75	299 182,59	1 721 756,52	293 816,44	116 469,89	24 566 161,94

t	$\frac{x_1(t)}{n(t)}$	$\frac{x_2(t)}{n(t)}$	$\frac{x_3(t)}{n(t)}$	$\frac{x_4(t)}{n(t)}$	$\frac{x_5(t)}{n(t)}$	$\frac{x_6(t)}{n(t)}$	$\frac{n(t+1)}{n(t)}$
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	356,868
1	0,903	0,000	0,010	0,085	0,002	0,000	0,946
2	0,000	0,923	0,014	0,029	0,030	0,004	1,473
3	0,869	0,000	0,017	0,087	0,011	0,016	6,602
4	0,777	0,127	0,010	0,077	0,007	0,002	1,376
5	0,364	0,546	0,013	0,052	0,020	0,005	2,188
6	0,732	0,161	0,013	0,076	0,011	0,008	3,464
7	0,700	0,204	0,011	0,073	0,010	0,003	1,770
8	0,522	0,382	0,013	0,062	0,016	0,005	2,363
9	0,684	0,214	0,012	0,073	0,011	0,006	2,735
10	0,661	0,242	0,012	0,071	0,011	0,004	2,039
11	0,589	0,313	0,012	0,066	0,014	0,005	2,384
12	0,661	0,239	0,012	0,071	0,012	0,005	2,484
13	0,645	0,257	0,012	0,070	0,012	0,004	2,191
14	0,617	0,284	0,012	0,068	0,013	0,005	2,371
15	0,650	0,252	0,012	0,070	0,012	0,005	

TABULKA 1. Modelovaný vývoj populace bodláku *Dipsacus sylvestris*. Velikosti jednotlivých složek populace, celková velikost populace, relativní zastoupení jednotlivých složek a relativní přírůstky velikosti.

TabBodlak

λ_1 . Každá nezáporná matice, která má nenulové prvky na stejných pozicích jako matice A je primitivní. Vývoj populace tedy zákonitě spěje ke stabilizované struktuře.

3.57. Nelineární model populace. Prozkoumejte podrobně vývoj populace pro nelineární model z učebnice (1.12) a hodnoty $K = 1$ a

- i) míru růstu $r = 1$ a počáteční stav $p(1) = 0, 2$
- ii) míru růstu $r = 1$ a počáteční stav $p(1) = 2$
- iii) míru růstu $r = 1$ a počáteční stav $p(1) = 3$
- iv) míru růstu $r = 2, 2$ a počáteční stav $p(1) = 0, 2$
- v) míru růstu $r = 3$ a počáteční stav $p(1) = 0, 2$

Spočítejte několik prvních členů a odhadněte, jak bude populace dále růst.

Řešení.

- i) Prvních deset členů posloupnosti $p(n)$ je v následující tabulce. Odtud je vidět, že velikost populace konverguje k hodnotě 1.

n	p(n)
1	0,2
2	0,36
3	0,5904
4	0,83222784
5	0,971852502
6	0,999207718
7	0,999999372

Graf vývoje populace pro $r = 1$ a $p(1) = 0, 2$:

- ii) Pro počáteční hodnotu $p(1) = 2$ dostaneme $p(2) = 0$ a dál už se populace měnit nebude.
 iii) Pro $p(1) = 3$ dostáváme

n	p(n)
1	3
2	-15
3	-255
4	-65535

a odtud je vidět, že populace bude klesat pod všechny meze.

- iv) Pro míru růstu $r = 2, 2$ a počáteční stav $p(1) = 0, 2$ dostáváme

n	p(n)
1	0,2
2	0,552
3	1,0960512
4	0,864441727
5	1,122242628
6	0,820433675
7	1,144542647
8	0,780585155
9	1,157383491
10	0,756646772
11	1,161738128
12	0,748363958
!3	1,162657716
14	0,74660417

Vidíme, že místo konvergence dostáváme v tomto případě oscilaci—po nějaké době bude populace přeskakovat mezi hodnotami 1,16 a 0,74. Graf vývoje populace pro $r = 2, 2$ a $p(1) = 0, 2$ pak vypadá následovně:

- v) Pro míru růstu $r = 3$ a počáteční stav $p(1) = 0, 2$ dostáváme

n	p(n)
1	0,2
2	0,68
3	1,3328
4	0,00213248
5	0,008516278
6	0,033847529
7	0,131953152
8	0,475577705
9	1,223788359
10	0,402179593
11	1,123473097
12	0,707316989
13	1,328375987
14	0,019755658
15	0,077851775
16	0,293224403
17	0,91495596
18	1,148390614
19	0,63715945
20	1,330721306
21	0,010427642
22	0,041384361
23	0,160399447

V tomto případě je už situace složitější—populace začne oscilovat mezi více hodnotami. Abychom lépe viděli mezi kterými, bylo by potřeba spočítat ještě víc členů. Pro členy z tabulky máme následující graf

□

3.58. V laboratoři je prováděn pokus se stejnou pravděpodobností úspěchu i neúspěchu. Pokud se pokus podaří, bude pravděpodobnost úspěchu druhého pokusu 0, 7. Jestliže skončí první pokus neúspěchem, bude pravděpodobnost úspěchu druhého pokusu pouze 0, 6. Dále se bude pokračovat v provádění pokusů, kdy úspěšnost předešlého znamená, že pravděpodobnost úspěchu následujícího bude 0, 7, a jeho neúspěšnost způsobí, že pravděpodobnost úspěchu následujícího bude 0, 6. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ stanovte pravděpodobnost, že n -tý pokus se podaří.

Řešení. Zavedme pravděpodobnostní vektor

$$x_n = (x_n^1, x_n^2)^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde x_n^1 je pravděpodobnost úspěchu n -tého pokusu a $x_n^2 = 1 - x_n^1$ je pravděpodobnost jeho neúspěchu.

Podle zadání je

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

a zřejmě také

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/20 \\ 7/20 \end{pmatrix}.$$

Při označení

$$T = \begin{pmatrix} 7/10 & 3/5 \\ 3/10 & 2/5 \end{pmatrix}$$

platí

$$\boxed{\text{ves013666}} \quad (3.7) \quad x_{n+1} = T \cdot x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

neboť pravděpodobnostní vektor x_{n+1} závisí pouze na x_n a tato závislost je totožná jako pro x_2 a x_1 . Ze vztahu (3.7) bezprostředně plyne

$$\boxed{\text{ves013665}} \quad (3.8) \quad x_{n+1} = T \cdot T \cdot x_{n-1} = \dots = T^n \cdot x_1, \quad n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Proto vyjádříme T^n , $n \in \mathbb{N}$. Jedná se o Markovův proces, a tudíž je 1 vlastní číslo matice T . Druhé vlastní číslo 0, 1 vyplývá kupř. z toho, že stopa (součet prvků na diagonále) je rovna součtu všech vlastních čísel (každé vlastní číslo bereme tolikrát, jaká je jeho algebraická násobnost). Těmto vlastním číslům pak přísluší vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tak

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1},$$

tj. pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} T^n &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 10^{-n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Dosazení

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a roznásobením dává

$$T^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + 10^{-n} & 2 - 2 \cdot 10^{-n} \\ 1 - 10^{-n} & 1 + 2 \cdot 10^{-n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odtud, z (3.7) a (3.8) plyne

$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6 \cdot 10^n}, \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \cdot 10^n} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zvláště vidíme, že pro velká n je pravděpodobnost úspěchu n -tého pokusu blízká $2/3$. □

3.59. Student na koleji je značně společensky unaven (v důsledku toho není schopen plně vnímat smyslové podněty a koordinovat své pohyby). V tomto stavu se přesto rozhodne, že na právě probíhající večírek pozve známou, která má pokoj na jednom konci chodby. Na opačném konci chodby však bydlí někdo, koho pozvat rozhodně nehodlá. Je ovšem natolik „unaven“, že rozhodnutí udělat krok zvoleným směrem se mu podaří realizovat pouze v 53 ze 100 pokusů (ve zbylých 47 jde přesně na opačnou stranu). Za předpokladů, že vyjde v polovině chodby a že vzdálenost k oběma dveřím na koncích chodby odpovídá jeho 20 krokům, stanovte pravděpodobnost, že nejdříve dorazí ke správným dveřím.

3.60. Nechť $n \in \mathbb{N}$ osob hraje tzv. tichou poštu. Pro jednoduchost předpokládejte, že první osoba zašeptá druhé právě jedno (libovolně zvolené) ze slov „ano“, „ne“. Druhá osoba pak potichu řekne třetí osobě to ze slov „ano“, „ne“, o kterém si myslí, že ho řekla první osoba. Takto to pokračuje až k n -té osobě. Jestliže pravděpodobnost toho, že při libovolném předání se zamění (nechtě, úmyslně) šířené slovo na to druhé, je $p \in (0, 1)$, stanovte pro velká $n \in \mathbb{N}$ pravděpodobnost, že n -tá osoba určí správně slovo zvolené první osobou.

Řešení. Na tuto úlohu lze nahlížet jako na Markovův řetězec se dvěma stavy nazvanými Ano a Ne, kdy řekneme, že proces je ve stavu Ano v čase $m \in \mathbb{N}$, pokud si m -tá osoba bude myslet, že předávané slovo je „ano“. Pro pořadí stavů Ano, Ne je pravděpodobnostní matice přechodu

$$T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Součin matice T^{m-1} a pravděpodobnostního vektoru počáteční volby první osoby potom udává pravděpodobnosti toho, co si bude myslet m -tá osoba. Mocniny této matice ovšem počítat nemusíme, neboť všechny prvky matice T jsou kladná čísla. Navíc tato matice je dvojnásobně stochastická. Víme tudíž, že pro velká $n \in \mathbb{N}$ bude pravděpodobnostní vektor blízký vektoru $(1/2, 1/2)^T$. Pravděpodobnost, že n -tá osoba řekne „ano“, je proto přibližně stejná jako pravděpodobnost, že řekne „ne“, a to nezávisle na tom, pro které slovo se rozhodla první osoba. Pro velký počet zúčastněných tak platí, že zhruba polovina z nich uslyší „ano“ (zopakujme, že nezávisle na tom, které slovo bylo na začátku vybráno).

Pro úplnost zjistíme, jak by úloha dopadla, kdybychom předpokládali, že pravděpodobnost záměny „ano“ na „ne“ je u libovolné osoby $p \in (0, 1)$ a pravděpodobnost záměny „ne“ na „ano“ je obecně odlišné $q \in (0, 1)$. V tomto případě pro stejné pořadí stavů dostáváme pravděpodobnostní matici přechodu

$$T = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix},$$

která vede (pro velká $n \in \mathbb{N}$) k pravděpodobnostnímu vektoru blízkému vektoru

$$\left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right)^T,$$

což kupř. plyne z vyjádření matice

$$T^n = \frac{1}{p+q} \left[\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} + (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix} \right].$$

Rovněž tentokrát při dostatečném počtu lidí nezáleželo na volbě slova, kterou učinila první osoba. Stručně řečeno, v tomto modelu platí, že nezáleží na původním rozhodnutí, protože o tom, jakou informaci si lidé předávají, rozhodují oni sami; přesněji řečeno, lidé sami rozhodují o četnosti výskytu „ano“ a „ne“, pokud je jich dostatečný počet (a chybí-li jakékoli ověřování).

Doplňme ještě, že výše uvedený závěr byl experimentálně ověřen. V psychologických pokusech byl mj. jedinec opakovaně vystaven vjemu, který šlo vnímat dvěma různými způsoby, a to v časových intervalech zaručujících, aby si subjekt pamatoval předešlý vjem. Viz např. „T. Havránek a kol.: *Matematika pro biologické a lékařské vědy*, Praha, Academia 1981“, kde je uveden experiment, v němž je zábleskem osvětlován v pevných časových odstupech nejednoznačný obraz (třeba náčrt krychle vnímatelný jako nadhled i podhled). Takový proces je totiž Markovovým řetězcem s maticí přechodu

$$\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix},$$

kde $p, q \in (0, 1)$. □

3.61. V jisté hře si můžete vybrat jednoho ze dvou soupeřů. Pravděpodobnost, že porazíte lepšího, je $1/4$, zatímco horšího ze soupeřů porazíte s pravděpodobností $1/2$. Soupeři ale nejsou rozlišeni, a tak nevíte, který z nich je ten lepší. Čeká Vás velké množství her (pro každou můžete zvolit jiného soupeře) a samozřejmě chcete dosáhnout celkově co největšího podílu vítězných her. Uvažte tyto dvě strategie:

1. Pro první hru si vyberete soupeře náhodně. Pokud nějakou hru vyhrajete, pokračujete se stejným soupeřem; jestliže ji prohrajete, změníte pro další hru soupeře.
2. Pro první dvě hry si vyberete (jednoho) soupeře náhodně. Dále se řídíte výsledkem předchozích dvou her, kdy na další dvě hry změníte soupeře, právě když obě předchozí prohrajete.

Kterou ze strategií (moudře) zvolíte?

Řešení. Obě strategie jsou vlastně Markovovým řetězcem. Pro jednoduchost horšího ze soupeřů označme jako osobu A a lepšího ze soupeřů jako osobu B . V prvním případě pro stavy „hra s osobou A “, „hra s osobou B “ (a toto jejich pořadí) dostáváme pravděpodobnostní matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Tato matice má všechny prvky kladné, a proto stačí najít pravděpodobnostní vektor x_∞ , který přísluší vlastnímu číslu 1. Platí

$$x_\infty = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right)^T.$$

Jeho složky odpovídají pravděpodobnostem, že po dlouhé řadě her bude soupeřem osoba A , resp. B . Lze tedy očekávat, že 60 % her bude hráno proti horšímu ze soupeřů. Neboť

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4},$$

vítězných her bude kolem 40 %.

Pro druhou strategii zavedme stavy „dvě hry po sobě s osobou A “ a „dvě hry po sobě s osobou B “, které vedou na pravděpodobnostní matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 9/16 \\ 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}.$$

Snadno určíme, že nyní je

$$x_\infty = \left(\frac{9}{13}, \frac{4}{13} \right)^T.$$

Proti horšímu ze soupeřů by se tak hrálo $(9/4)$ krát častěji než proti lepšímu z nich. Připomeňme, že pro první strategii to bylo $(3/2)$ krát častěji. Druhá strategie je proto výhodnější. Ještě poznamenejme, že při druhé strategii bude přibližně 42,3 % her vítězných. Stačí totiž vyčíslit

$$0,423 \doteq \frac{11}{26} = \frac{9}{13} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{13} \cdot \frac{1}{4}.$$

□

3.62. Petr se pravidelně setkává se svým kamarádem. Je ovšem „proslulý“ svou nedochvilností. Snaží se ale změnit, a proto platí, že v polovině případů přijde včas a v jedné desetině případů dokonce ještě dříve, pokud na minulé setkání přišel pozdě. Jestliže minule přišel včas nebo dříve, než měl přijít, vrátí se ke své „bezstarostnosti“ a s pravděpodobností 0,8 dorazí pozdě a pouze s pravděpodobností 0,2 včas. Jaké je pravděpodobnost, že na dvacáté setkání přijde pozdě, když na jedenácté přišel včas?

Řešení. Zřejmě se jedná o Markovův proces se stavy „Petr přijde pozdě“, „Petr přijde včas“, „Petr přijde dříve“ a s pravděpodobnostní maticí přechodu (pro uvedené pořadí stavů)

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 & 0,8 \\ 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jedenácté setkání je určeno pravděpodobnostním vektorem $(0, 1, 0)^T$ (s jistotou víme, že Petr přišel včas). Dvacátému setkání pak odpovídá pravděpodobnostní vektor

$$T^9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,571578368 \\ 0,371316224 \\ 0,057105408 \end{pmatrix}.$$

Hledaná pravděpodobnost je tudíž 0,571578368 (přesně). Dodejme, že je

$$T^9 = \begin{pmatrix} 0,571316224 & 0,571578368 & 0,571578368 \\ 0,371512832 & 0,371316224 & 0,371316224 \\ 0,057170944 & 0,057105408 & 0,057105408 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, jak málo záleží na tom, zda přišel na jedenácté setkání pozdě (první sloupec), včas nebo dříve (druhý a současně třetí sloupec). \square

3.63. Dva studenti A a B tráví každé pondělní odpoledne hraním jisté počítačové hry o to, kdo z nich večer zaplatí společnou útratu v restauraci. Hra může rovněž skončit remízou, kdy večer oba platí právě polovinu útraty. Výsledek předešlé hry částečně ovlivňuje hru následující. Pokud tedy před týdnem vyhrál student A , potom s pravděpodobností $3/4$ vyhraje opět a s pravděpodobností $1/4$ skončí hra remízou. Remíza se opakuje s pravděpodobností $2/3$ a s pravděpodobností $1/3$ vyhraje ve hře následující po remíze student B . Pokud před týdnem vyhrál student B , pak s pravděpodobností $1/2$ své vítězství zopakuje a s pravděpodobností $1/4$ vyhraje student A . Nalezněte pravděpodobnost, že dnes bude každý platit polovinu útraty, jestliže první hru před velmi dlouhou dobou vyhrál student A .

Řešení. Vlastně je zadán Markovův proces se stavy „vyhraje student A “, „hra skončí remízou“, „vyhraje student B “ (v tomto pořadí) pravděpodobnostní maticí přechodu

$$T = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 2/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Chceme najít pravděpodobnost přechodu z prvního stavu do druhého po velkém počtu $n \in \mathbb{N}$ kroků (týdnů). Matice T je regulární, protože

$$T^2 = \begin{pmatrix} 9/16 & 1/12 & 5/16 \\ 17/48 & 19/36 & 17/48 \\ 1/12 & 7/18 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Stačí tak najít vlastní pravděpodobnostní vektor x_∞ matice T příslušný vlastnímu číslu 1. Snadno lze spočítat, že

$$x_\infty = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7} \right)^T.$$

Víme, že vektor x_∞ se jen velmi málo liší od pravděpodobnostního vektoru pro velká n a téměř nezávisí na počátečním stavu, tj. pro velká $n \in \mathbb{N}$ můžeme klást

$$T^n \approx \begin{pmatrix} 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 3/7 & 3/7 & 3/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

Hledaná pravděpodobnost je prvkem této matice na druhé pozici v prvním sloupci (je druhou složkou vektoru x_∞). Poměrně rychle jsme našli výsledek $3/7$. □

Řešení cvičení

3.9.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{21}} \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{21}} \left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2} \right)^n.$$

3.10. $x_n = 2\sqrt{3} \sin(n \cdot (\pi/6)) - 4 \cos(n \cdot (\pi/6)).$

3.11. $x_n = -3(-1)^n - 2 \cos(n \cdot (2\pi/3)) - 2\sqrt{3} \sin(n \cdot ((2\pi/3))).$

3.12. $x_n = (-1)^n(-2n^2 + 8n - 7).$

3.20. Leslieho matice daného modelu je (úmrtnost v první skupině označíme a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podmínka stagnace populace odpovídá tomu, že matice má vlastní hodnotu 1, neboli polynom $\lambda^3 - 2a\lambda - 2a$ má mít kořen 1, t.j. $a = 1/4$.

3.23.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Matice má dominantní vlastní hodnotu 1, příslušný vlastní vektor je $(\frac{6}{5}, 1)$. Protože je vlastní hodnota dominantní, tak se poměr diváků se ustálí na poměru 6 : 5.

3.26. Stejně jako v (3.25) skončí hra po třech sázkách. Jsou tedy opět všechny mocniny A , počínaje A^3 shodné.

$$A^{100} = A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7/8 & 3/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.36. Můžeme využít výsledku úlohy označované jako Ruinování hráče. Pravděpodobnost, že zanikne to oddělení, které má nyní 40 zaměstnanců, je podle tohoto příkladu rovna

$$\frac{1 - \left(\frac{0,46}{1-0,46} \right)^5}{1 - \left(\frac{0,46}{1-0,46} \right)^{25}} \doteq 0,56.$$

Stačilo dosadit $p = 1 - 0,54$, $y = 10/2$ a $x = 40/2$ do (3.6). Prozíravější je tedy zvolit v tuto chvíli menší oddělení.

3.44.

- Tvrzení je pravdivé. ($B := A^T A$, $b_{ij} = (i\text{-tý řádek } A^T) \cdot (j\text{-tý sloupec } A) = b_{ji} = (j\text{-tý řádek } A^T) \cdot (i\text{-tý sloupec } A) = (j\text{-tý sloupec } A) \cdot (i\text{-tý řádek } A^T)$)
- Tvrzení zřejmě neplatí. Uvažte např. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.46.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.59. Znovu se jedná o speciální případ Ruinování hráče. Stačí zadání vhodně přeformulovat. Pro $p = 0,47$, $y = 20$ a $x = 20$ z (3.6) plyne výsledek

$$0,917 \doteq \frac{1 - \left(\frac{0,47}{1-0,47} \right)^{20}}{1 - \left(\frac{0,47}{1-0,47} \right)^{40}}.$$

Analytická geometrie

*poloha, incidence, projekce?
– a zase skončíme u matic...*

Vrátíme se teď k našemu pohledu na geometrii, když jsme zkoumali polohy bodů v rovině v 5. části první kapitoly, viz 1.23. Budeme se nejprve zajímat o vlastnosti prostorových objektů vymezených pomocí bodů, přímk, rovin apod. Podstatné přitom bude vyjasnění, jak jejich vlastnosti souvisí s pojmem vektorů a zda závisí na pojmu velikosti vektorů.

V další části pak použijeme lineární algebru pro studium objektů, které už lineárně definované nejsou. Opět přitom budeme potřebovat trochu více maticového počtu. Výsledky budou důležité později při diskusi technik pro optimalizace, tj. hledání extrémů funkčních hodnot.

Projektivní rozšíření afinních prostorů nám v závěru kapitoly ukáže, jak lze překvapivě snadno dosáhnout zjednodušení i stability algoritmických postupů typických pro práci s počítačovou grafikou.

1. Afinní a euklideovská geometrie

Když jsme si ujasňovali strukturu řešení systémů lineárních rovnic v první části předchozí kapitoly, zjistili jsme v odstavci 3.1, že všechna řešení nehomogenních systémů rovnic sice netvoří vektorové podprostory, vždy ale vznikají tak, že k jednomu jedinému řešení přičteme celý vektorový prostor řešení příslušné homogenní soustavy. Naopak, rozdíl dvou řešení nehomogenní soustavy je vždy řešením soustavy homogenní. Obdobně se chovají lineární diferenciální rovnice, jak jsme již viděli v odstavci 3.14.



4.1

4.1. Afinní prostory. Návod na teoretické uchopení takové situace dává již diskuse geometrie roviny, viz odstavec 1.25 a dále. Tam jsme totiž popisovali přímky a body jako množiny řešení systémů lineárních rovnic. Přímka pro nás pak byla „jednorozměrným“ prostorem, přestože její body byly popisovány dvěma souřadnicemi. Parametricky jsme ji zadávali tak, že k jednomu bodu (tj. dvojici souřadnic) jsme přičítali násobky pevně zvoleného směrového vektoru. Stejně budeme postupovat i teď v libovolné dimenzi.

STANDARDNÍ AFINNÍ PROSTOR

Standardní afinní prostor \mathcal{A}_n je množina všech bodů v $\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_n$ spolu s operací, kterou k bodu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n = V$

A. Afinní geometrie

4.1. Napište parametrické vyjádření přímky určené rovnicemi

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 2, \\ 2x + y - z &= 5 \end{aligned}$$

v \mathbb{R}^3 .

Řešení. Zřejmě postačuje vyřešit uvedenou soustavu rovnic. Můžeme ale postupovat také odlišně. Potřebujeme totiž najít nenulový (směrový) vektor, který bude kolmý na (normálové) vektory $(1, -2, 1)$, $(2, 1, -1)$. Vektorový součin

$$(1, -2, 1) \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

ovšem takový vektor dává. Všimneme-li si, že např. uspořádaná trojice

$$(x, y, z) = (2, -1, -2)$$

vyhovuje dané soustavě, dostaneme výsledek

$$[2, -1, -2] + t(1, 3, 5), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

4.2. Rovinu

$$\varrho : [0, 3, 2, 5] + t(1, 0, 1, 0) + s(2, -1, -2, 2), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

ve čtyřrozměrném eukleidovském prostoru zadejte implicitně.

4.3. Parametricky vyjádřete průnik následujících rovin v \mathbb{R}^3 :

$$\sigma : 2x + 3y - z + 1 = 0 \quad \text{a} \quad \rho : x - 2y + 5 = 0.$$

Řešení. Úkolem je najít soustavu lineárních rovnic čtyř proměnných x, y, z, u (čtyři proměnné jsou dány dimenzí prostoru), jíž budou vyhovovat právě souřadnice bodů uvedené roviny. Poznamenejme, že hledaná soustava bude obsahovat $2 = 4 - 2$ lineárně nezávislé rovnice. Příklad vyřešíme tzv. eliminací parametrů. Body $[x, y, z, u] \in \rho$ splňují

$$\begin{aligned} x &= t + 2s, \\ y &= 3 - s, \\ z &= 2 + t - 2s, \\ u &= 5 + 2s, \end{aligned}$$

přičemž $t, s \in \mathbb{R}$. Odtud můžeme ihned přejít k maticovému zápisu

$$\left(\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right),$$

kde první dva sloupce jsou směrové vektory roviny, za svislou čarou následuje záporně vzatá jednotková matice a za druhou svislou čarou jsou souřadnice bodu $[0, 3, 2, 5]$. Tento přepis vzniká tak, že na výše uvedenou soustavu rovnic nahlížíme jako na soustavu rovnic pro neznámé t, s, x, y, z, u a všechny členy přitom převádíme na jednu stranu rovnic. Získanou matici převedeme pomocí elementárních řádkových transformací do tvaru, kdy před první svislou čarou bude maximální možný počet nulových řádků. Přičtením (-1) násobku prvního a současně (-4) násobku druhého řádku ke třetímu řádku a dvojnásobku druhého ke čtvrtému řádku dostáváme

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \quad \boxed{4.1a} \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 11 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Odkud plyne výsledek

$$\begin{aligned} x + 4y - z - 10 &= 0, \\ -2y - u + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Koeficienty za první svislou čarou v řádcích, které jsou před touto svislou čarou nulové, určují totiž koeficienty obecných rovnic roviny.

přičemž bod

$$A + v = (a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n) \in \mathbb{R}^n = \mathcal{A}_n.$$

Tyto operace splňují následující tři vlastnosti:

- (1) $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in \mathcal{A}_n$ a nulový vektor $0 \in V$,
- (2) $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$ a body $A \in \mathcal{A}_n$,
- (3) pro každé dva body $A, B \in \mathcal{A}_n$ existuje právě jeden vektor $v \in V$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $v = B - A$, někdy také \vec{AB} .

Vektorový prostor \mathbb{R}^n nazýváme *zaměřením* standardního afinního prostoru \mathcal{A}_n .

Všimněme si několika formálních nebezpečí. Používáme stejný symbol „+“ pro dvě různé operace: přičtení vektoru ze zaměření k bodu v afinním prostoru, ale také sčítání vektorů v zaměření $V = \mathbb{R}^n$. Také nezavádíme zvláštní písmena pro samotnou množinu bodů afinního prostoru, tj. \mathcal{A}_n pro nás představuje jak samotnou množinu bodů, tak i celou strukturu definující afinní prostor.

Proč vlastně chceme rozlišovat množinu bodů prostoru \mathcal{A}_n od jeho zaměření V , když se jedná jakoby o stejné \mathbb{R}^n ? Jde o velice podstatný formální krok k pochopení geometrie v \mathbb{R}^n : Geometrické objekty jako přímky, body, roviny apod. nejsou totiž přímo závislé na vektorové struktuře na množině \mathbb{R}^n a už vůbec ne na tom, že pracujeme s n -ticemi skalárů. Potřebujeme jen umět říci, co to znamená pohybovat se „rovně v daném směru“. K tomu právě potřebujeme na jedné straně vnímat třeba rovinu jako neohrazenou desku bez zvolených souřadnic, ale s možností posunout se o zadaný vektor. Když přejdeme navíc k takovému abstraktnímu pohledu, budeme umět diskutovat „rovinou geometrii“ pro dvourozměrné podprostory, tj. roviny ve vícerozměrných prostorech, „prostorovou“ pro třírozměrné atd., aniž bychom museli přímo manipulovat k -ticemi souřadnic.

Tento pohled je zachycen v následující definici:

4.2. Definice. Afinním prostorem \mathcal{A} se zaměřením V rozumíme množinu bodů \mathcal{P} , spolu se zobrazením

$$\mathcal{P} \times V \rightarrow \mathcal{P}, \quad (A, v) \mapsto A + v,$$

kde V je vektorový prostor a naše zobrazení splňuje vlastnosti (1)–(3) z definice standardního afinního prostoru.

Pro libovolný pevně zvolený vektor $v \in V$ je tak definováno *posunutí* $\tau_v : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ jako zúžené zobrazení

$$\tau_v : \mathcal{P} \simeq \mathcal{P} \times \{v\} \rightarrow \mathcal{P}, \quad A \mapsto A + v.$$

Dimenzí afinního prostoru \mathcal{A} rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Nadále nebudeme rozlišovat ve značení důsledně množinu bodů \mathcal{A} a množinu vektorů \mathcal{P} , budeme místo toho hovořit o bodech a vektorech afinního prostoru \mathcal{A} .

Z axiomů okamžitě plyne pro libovolné body A, B, C v afinním prostoru \mathcal{A}

e4.1 (4.1) $A - A = 0 \in V$

e4.2 (4.2) $B - A = -(A - B)$

e4.3 (4.3) $(C - B) + (B - A) = C - A.$

Skutečně, (4.1) vyplývá z toho, že $A + 0 = 0$ a takový vektor musí být jednoznačný (první a třetí definiční vlastnost). Postupným přičtením $B - A$ a $A - B$ k A (v uvedeném pořadí), zjevně dostaneme podle druhé definiční vlastnosti opět A , tedy jsme přičetli nulový vektor a to dokazuje (4.2). Obdobně z definiční vlastnosti 4.1 (2) a jednoznačnosti vyplývá (4.3).

Všimněme si, že volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a \mathcal{A} . Při volbě pevné báze \underline{u} ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Hovoříme o *afinní soustavě souřadnic* $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané počátkem *afinní souřadné soustavy* A_0 a bazí zaměření \underline{u} nebo také o *afinním repéru* (A_0, \underline{u}) .

Slovy můžeme shrnout situaci takto: Afinní souřadnice bodu A v soustavě (A_0, \underline{u}) jsou souřadnicemi vektoru $A - A_0$ v bázi \underline{u} zaměření V .

Volba afinního souřadného systému ztotožňuje jakýkoliv n -rozměrný afinní prostor \mathcal{A} se standardním afinním prostorem \mathcal{A}_n .

2.59

4.3. Afinní podprostory. Jestliže si vybereme v \mathcal{A} jen body, které budou mít některé předem vybrané souřadnice nulové (třeba poslední jednu). Dostaneme opět množinu, která se bude chovat jako afinní prostor. Takto budeme skutečně parametricky popisovat tzv. afinní podprostory ve smyslu následující definice.



PODPROSTORY AFINNÍHO PROSTORU

Definice. Neprázdňá podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ afinního prostoru \mathcal{A} se zaměřením V se nazývá *afinní podprostor* v \mathcal{A} , je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Je podstatné mít obě podmínky zahrnuté v definici, protože je snadné najít příklady podmnožin, které budou splňovat první, ale nikoliv druhou podmínku. Přemýšlejte např. o přímce v rovině s vyjmutým jedním bodem.

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \{\{B - A; B, A \in M\}\} \subset V$$

všech vektorů generovaných rozdíly bodů z M .

Zejména je $V = Z(\mathcal{A})$ a každý afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ splňuje sám axiomy afinního prostoru se zaměřením $Z(\mathcal{Q})$.

Upozorníme, že kdybychom např. přepsali soustavu rovnic do matice

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right),$$

která odpovídá situaci, kdy proměnné x, y, z, u zůstávají na levé straně rovnic, totožná úprava

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

dává výsledek ve tvaru

$$\begin{aligned} -x - 4y + z &= -10, \\ 2y + u &= 11. \end{aligned}$$

Jinak řečeno, při prepisování soustavy do matice je nutné zohledňovat, zda svislá čára odděluje levou stranu rovnic od pravé (či nikoliv). Nabízí se, že metoda eliminace parametrů může být zdlouhavá a že se při jejím použití lze snadno dopustit chyb(y). V tomto příkladu jsme přitom hledali pouze dva lineárně nezávislé normálové vektory, tj. vektory kolmé na vektory $(1, 0, 1, 0)$, $(2, -1, -2, 2)$. Pokud bychom si uvědomili, že takovými vektory jsou např. $(0, 2, 0, 1)$, $(-1, 0, 1, 2)$, dosazením $x = 0$, $y = 3$, $z = 2$, $u = 5$ do rovnic

$$\begin{aligned} 2y + u &= a, \\ -x + z + 2u &= b \end{aligned}$$

bychom obdrželi $a = 11$, $b = 12$, následně hledané implicitní vyjádření

$$\begin{aligned} 2y + u &= 11, \\ -x + z + 2u &= 12. \end{aligned}$$

□

4.4. Nalezňte parametrické vyjádření roviny procházející body

$$A = [2, 1, 1], \quad B = [3, 4, 5], \quad C = [4, -2, 3].$$

Poté parametricky vyjádřete otevřenou polorovinu obsahující bod C a vymezenou přímkou zadanou body A, B .

Řešení. K parametrickému vyjádření roviny potřebujeme jeden bod ležící v této rovině a dva směrové (lineárně nezávislé) vektory. Stačí zvolit bod A a vektory $B - A = (1, 3, 4)$ a $C - A = (2, -3, 2)$, které jsou očividně lineárně nezávislé. Bod $[x, y, z]$ náleží do dané roviny právě tehdy, když existují čísla $t, s \in \mathbb{R}$, pro která je

$$x = 2 + 1 \cdot t + 2 \cdot s, \quad y = 1 + 3 \cdot t - 3 \cdot s, \quad z = 1 + 4 \cdot t + 2 \cdot s;$$

tj. hledané parametrické vyjádření roviny je

$$[2, 1, 1] + t(1, 3, 4) + s(2, -3, 2), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Volba $s = 0$ zjevně dává přímkou, která prochází body A, B . Pro $t = 0, s \geq 0$ dostáváme polopřímku začínající v bodě A a procházející bodem C . Libovolně pevně zvolené $t \in \mathbb{R}$ a měnné $s \geq 0$ pak zadávají polopřímku s počátkem na hraniční přímce a s body v polorovině, ve které se nachází bod C . To znamená, že hledanou otevřenou polorovinu můžeme vyjádřit parametricky takto

$$[2, 1, 1] + t(1, 3, 4) + s(2, -3, 2), \quad t \in \mathbb{R}, s > 0.$$

□

4.5. Určete vzájemnou polohu přímek

$$p : [1, 0, 3] + t(2, -1, -3), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$q : [1, 1, 3] + s(1, -1, -2), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Hledejme společné body zadaných přímek (průnik podprostorů). Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1 + 2t &= 1 + s, \\ 0 - t &= 1 - s, \\ 3 - 3t &= 3 - 2s. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyplývá, že $t = 1, s = 2$. To ovšem nevyhovuje třetí rovnici. Soustava tak nemá řešení. Neboť směrový vektor $(2, -1, -3)$ přímky p není násobkem směrového vektoru $(1, -1, -2)$ přímky q , přímky nejsou rovnoběžné. Jedná se proto o mimoběžky. □

4.6. Pro jaká čísla $a \in \mathbb{R}$ jsou přímky

$$p : [4, -4, 8] + t(2, 1, -4), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$q : [a, 6, -5] + s(1, -3, 3), \quad s \in \mathbb{R}$$

různoběžné?

Řešení. Přímky jsou různoběžné tehdy a jenom tehdy, když má soustava

$$\begin{aligned} 4 + 2t &= a + s, \\ -4 + t &= 6 - 3s, \\ 8 - 4t &= -5 + 3s \end{aligned}$$

právě 1 řešení. V maticovém zápisu řešíme (první sloupec odpovídá ^{2, 61} proměnné t , druhý pak s)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a-4 \\ 1 & 3 & 10 \\ -4 & -3 & -13 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & a-4 \\ -4 & -3 & -13 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 0 & -7 & a-24 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Vidíme, že soustava má právě 1 řešení tehdy a jenom tehdy, když je druhý řádek násobkem třetího. To je splněno pouze pro $a = 3$. Dodejme, že průsečíkem je v tomto případě bod $[6, -3, 4]$. □

Přímo z definic je také zřejmé, že průnik libovolné množiny afinních podprostorů je buď opět afinní podprostor nebo prázdná množina.

Afinní podprostor $\langle M \rangle$ v \mathcal{A} generovaný neprázdnou podmnožinou $M \subset \mathcal{A}$ je průnikem všech afinních podprostorů, které obsahují všechny body podmnožiny M .

AFINNÍ OBAL A PARAMETRICKÝ POPIS PODPROSTORU

Afinní podprostory si můžeme pěkně popsat pomocí jejich zaměření, jakmile si zvolíme jeden jejich bod $A_0 \in M$ v generující množině bodů M . Skutečně, dostáváme $\langle M \rangle = \{A_0 + v; v \in Z(M) \subset Z(\mathcal{A})\}$, tj. pro generování afinního podprostoru vezmeme vektorový podprostor $Z(M)$ v zaměření generovaný všemi rozdíly bodů z M a ten pak přičteme k libovolnému z nich. Hovoříme také o *afinním obalu* množiny bodů M v \mathcal{A} .

Naopak, kdykoliv zvolíme podprostor U v zaměření $Z(\mathcal{A})$ a jeden pevný bod $A \in \mathcal{A}$, pak podmnožina $A + U$ vzniklá všemi možnými součty jediného bodu A se všemi vektory v U je afinní podprostor. Takový postup vede k pojmu parametrizace podprostorů:

Nechť $\mathcal{Q} = A + Z(\mathcal{Q})$ je afinní podprostor v \mathcal{A}_n a (u_1, \dots, u_k) je báze $Z(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{Q} = \{A + t_1 u_1 + \dots + t_k u_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme *parametrický popis* podprostoru \mathcal{Q} .

Již jsme viděli jinou možnost zadávání afinních podprostorů: Jestliže máme zvoleny afinní souřadnice, pak lze zaměření podprostoru popsat pomocí homogenního systému lineárních rovnic v těchto souřadnicích. Dosazením souřadnic jednoho bodu našeho podprostoru \mathcal{Q} do získaného systému rovnic dostaneme pravou stranu nehomogenního systému se stejnou maticí a celý podprostor \mathcal{Q} je pak právě množinou řešení tohoto systému. Zadání podprostoru \mathcal{Q} systémem rovnic v daných souřadnicích nazýváme *implicitní popis* podprostoru \mathcal{Q} .

Následující obecná věta říká, že takto umíme ve skutečnosti zadat všechny afinní podprostory a tím také ukazuje geometrickou podstatu vlastností množiny všech řešení systémů lineárních rovnic.

4.4. Věta. *Nechť $(A_0; \underline{u})$ je afinní souřadný systém v n -rozměrném afinním prostoru \mathcal{A} . Afinní podprostory dimenze k v \mathcal{A} , vyjádřené v daných souřadnicích, jsou právě množiny řešení řešitelných systémů $n - k$ lineárně nezávislých lineárních rovnic v n proměnných.*

DŮKAZ. Uvažujme libovolný řešitelný systém $n - k$ lineárně nezávislých rovnic $\alpha_i(x) = b_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n - k$. Je-li $A = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ libovolně pevně zvolené řešení tohoto (nehomogenního) systému rovnic a je-li $U \subset \mathbb{R}^n$ vektorový podprostor všech řešení zhomogenizovaného systému $\alpha_i(x) = 0$, pak dimenze U je k a podmnožina všech řešení daného systému je tvaru $\{B; B = A + (y_1, \dots, y_n)^T, y =$

$(y_1, \dots, y_n)^T \in U\} \subset \mathbb{R}^n$, viz. 3.1. Příslušný afinní podprostor je tím popsán parametricky ve výchozích souřadnicích $(A_0; \underline{u})$.

Naopak, uvažme libovolný afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}_n$ a zvolme nějaký jeho bod B za počátek afinního souřadného systému (B, \underline{v}) pro afinní prostor \mathcal{A} . Protože $\mathcal{Q} = B + Z(\mathcal{Q})$, potřebujeme popsat zaměření podprostoru \mathcal{Q} jako podprostor řešení homogenního systému rovnic. Zvolme tedy bázi \underline{v} na $Z(\mathcal{A})$ tak, aby prvních k vektorů tvořilo bázi $Z(\mathcal{Q})$. Pak v těchto souřadnicích jsou vektory $v \in Z(\mathcal{Q})$ dány rovnostmi

$$\alpha_j(v) = 0, \quad j = k + 1, \dots, n,$$

kde α_i jsou lineární formy z tzv. duální báze k \underline{v} , tj. funkce přiřazení jednotlivých souřadnic v naší bázi \underline{v} .

Náš vektorový podprostor $Z(\mathcal{Q})$ dimenze k v n -rozměrném prostoru \mathbb{R}^n je tedy skutečně dán jako řešení homogenního systému $n - k$ nezávislých rovnic. Popis zvoleného afinního podprostoru v námi nově vybraném souřadném systému $(B; \underline{v})$ je proto dán systémem homogenních lineárních rovnic.

Zbývá nám se vypořádat důsledky přechodu z původního zadaného souřadného systému $(A; \underline{u})$ do našeho přizpůsobeného $(B; \underline{v})$. Z obecné úvahy o transformacích souřadnic v následujícím odstavci vyplyne, že výsledný popis podprostoru bude opět pomocí systému rovnic, tentokrát ale už obecně nehomogenních. \square

4.5

4.5. Transformace souřadnic. Dvě libovolně zvolené afinní soustavy souřadnic (A_0, \underline{u}) , (B_0, \underline{v}) se obecně liší posunutím počátku o vektor $(B_0 - A_0)$ a jinou bazí zaměření. Transformační rovnice mezi příslušnými souřadnicemi tedy vyčteme ze vztahu pro obecný bod $X \in \mathcal{A}$



$$\begin{aligned} X &= B_0 + x'_1 v_1 + \dots + x'_n v_n \\ &= B_0 + (A_0 - B_0) + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n. \end{aligned}$$

Označme $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ sloupec souřadnic vektoru $(A_0 - B_0)$ v bázi \underline{v} a $M = (a_{ij})$ buď matice vyjadřující bázi \underline{u} prostřednictvím báze \underline{v} . Potom

$$\begin{aligned} x'_1 &= y_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= y_n + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

tj. maticově

$$x' = y + M \cdot x.$$

Jako příklad si můžeme vujádit dopad takové změny báze na souřadné vyjádření podmnožin pomocí systémů lineárních rovnic. Nechť má v souřadnicích $(A_0; \underline{u})$ náš systém rovnic tvar



$$S \cdot x = b$$

4.7. V \mathbb{R}^3 stanovte vzájemnou polohu přímky p zadané implicitně rovnicemi

$$\begin{aligned} x + y - z &= 4, \\ x - 2y + z &= -3 \end{aligned}$$

a roviny $\varrho : y = 2x - 1$.

Řešení. Normálový vektor ϱ je $(2, -1, 0)$ (uvažte zápis $\varrho : 2x - y + 0z = 1$). Lze postřehnout, že platí

$$(1, 1, -1) + (1, -2, 1) = (2, -1, 0),$$

tj. že normálový vektor roviny ϱ je lineární kombinací normálových vektorů p . Zaměření přímky (zadané nenulovým směrovým vektorem kolmým na uvedené dva normálové vektory) je proto podprostorem zaměření roviny ϱ (směrový vektor přímky je nutně kolmý na vektor $(2, -1, 0)$). Lehce jsme zjistili, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ . Zajímá nás, zda se protínají (zda p leží v ϱ). Soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y - z &= 4, \\ x - 2y + z &= -3, \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

má nekonečně mnoho řešení, neboť sečtením prvních dvou rovnic dostaneme právě třetí z rovnic. Přímka p tak musí ležet v rovině ϱ . \square

4.8. Nalezněte průnik podprostorů Q_1 a Q_2 , je-li

$$\begin{aligned} Q_1 &: [4, -5, 1, -2] + t_1(3, 5, 4, 2) + t_2(2, 4, 5, 1) + t_3(0, 3, 1, 2), \\ Q_2 &: [4, 4, 4, 4] + s_1(0, -6, -2, -4) + s_2(-1, -5, -3, -3), \end{aligned}$$

kde $t_1, t_2, t_3, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Řešení. Bod $X = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4$ náleží do $Q_1 \cap Q_2$ právě tehdy, když je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

pro nějaká čísla $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ a současně když je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + s_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

pro nějaká $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Porovnáním získáváme

$$t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 4 \\ 4 + 5 \\ 4 - 1 \\ 4 + 2 \end{bmatrix} + s_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Při maticovém zápisu (pro pořadí proměnných t_1, t_2, t_3, s_1, s_2 a po převodu vektorů u s_1 a s_2 na levou stranu) řešíme pomocí řádkových operací

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 18 & 10 & 27 \\ 0 & 7 & 3 & 6 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 6 & 12 & 7 & 18 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad \boxed{4.3}$$

Odtud vidíme, že $t_1 = t_2 = s_2 = 0$ a pro $s_1 = t \in \mathbb{R}$ je $t_3 = 3 - 2t$. Podotkneme, že k určení $Q_1 \cap Q_2$ stačilo znát buď t_1, t_2, t_3 nebo s_1, s_2 . Vraťme se nyní k vyjádření

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Průnikem zadaných podprostorů je tedy přímka ($s = -2t$)

$$[4, 4, 4, 4] + s(0, 3, 1, 2), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pro kontrolu rovněž dosadíme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (3 - 2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

4.9. Zjistěte, zda leží body $[0, 2, 1]$, $[-1, 2, 0]$, $[-2, 5, 2]$ a $[0, 5, 4]$ z \mathbb{R}^3 v jedné rovině.

Řešení. Libovolná dvojice zadaných bodů z afinního prostoru \mathbb{R}^3 určuje vektor (viz definice afinního prostoru; jeho souřadnice jsou dány po složkách rozdíly souřadnic daných dvou bodů). To, že dané čtyři body leží v rovině je ekvivalentní tomu, že jsou tři vektory dané jedním vybraným bodem a vždy jedním ze tří zbylých lineárně závislé. Vybereme např. bod $[0, 2, 1]$ (na výběru nezáleží), pak uvažujeme vektory $[0, 2, 1] - [-1, 2, 0] = (1, 0, 1)$, $[0, 2, 1] - [-2, 5, 2] = (2, -3, -1)$ a $[0, 2, 1] - [0, 5, 4] = (0, -3, -3)$. Vidíme, že součet dvojnásobku prvního vektoru a třetího vektoru je roven druhému vektoru, vektory jsou tedy lineárně závislé (jinak má taky matice, jejíž

s maticí systému S . Potom

$$S \cdot x = S \cdot M^{-1} \cdot (y + M \cdot x) - S \cdot M^{-1} \cdot y = b.$$

Proto v nových výše uvažovaných souřadnicích ($B_0; \underline{v}$) bude mít náš systém rovnic tvar

$$(S \cdot M^{-1}) \cdot x' = b' = b + (S \cdot M^{-1}) \cdot y.$$

Pokud tedy máme nějakou podmnožinu popsánu systémem lineárních rovnic v jednom afinním repéru, pak tomu tak bude i ve všech ostatních afinních souřadných systémech. To plně dokončuje důkaz předchozí věty.

4.6. Příklady afinních podprostorů. (1) Jednorozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech



bodů reálné přímky \mathcal{A}_1 . Její zaměření je jednorozměrný vektorový prostor \mathbb{R} (a nosná množina také \mathbb{R}). Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a měřítka (tj. báze ve vektorovém prostoru \mathbb{R}). Všechny vlastní afinní podprostory jsou 0-rozměrné, jsou to právě všechny body reálné přímky \mathbb{R} .

(2) Dvourozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru \mathcal{A}_2 se zaměřením \mathbb{R}^2 . (Nosnou množinou je \mathbb{R}^2 .) Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a dvou nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body a přímky v rovině (0-rozměrné a 1-rozměrné). Přímky přitom jednoznačně zadáme jejich jedním bodem a jedním generátorem zaměření (tzv. parametrický popis přímky).

(3) Trojrozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru \mathcal{A}_3 se zaměřením \mathbb{R}^3 . Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a tří nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body, přímky a roviny (0-rozměrné, 1-rozměrné a 2-rozměrné).

(4) Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $[x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů (a_1, \dots, a_n) a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$ (říkáme také, že je jeho kodimenze 1), tj. tzv. *nadrovina* v \mathcal{A}_n .

4.7. Afinní kombinace bodů. Zavedeme nyní obdobu lineárních kombinací vektorů. Nechť A_0, \dots, A_k jsou body v afinním prostoru \mathcal{A} . Jejich afinní obal $\langle \{A_0, \dots, A_k\} \rangle$ můžeme zapsat jako



$$\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \dots + t_k(A_k - A_0); t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

a v libovolných afinních souřadnicích (tj. každý bod A_i je vyjádřen sloupцем skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako

$$\langle A_0, \dots, A_k \rangle = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k; t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^k t_i = 1\}.$$

AFINNÍ KOMBINACE BODŮ

Obecně výrazy $t_0A_0 + t_1A_1 + \dots + t_kA_k$ s koeficienty splňujícími $\sum_{i=0}^k t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^k t_i(A_i - A_0)$ a nazýváme je *afinní kombinace bodů*.

Body A_0, \dots, A_k jsou v *obecné poloze*, jestliže generují k -rozměrný afinní podprostor. Z našich definic je vidět, že to nastane, právě když pro kterýkoliv bod A_i z nich platí, že vektory vzniklé pomocí rozdílů tohoto bodu A_i a ostatních bodů A_j jsou lineárně nezávislé vektory. Všimněme si také, že zadání posloupnosti $(\dim \mathcal{A}) + 1$ bodů v obecné poloze je ekvivalentní zadání afinního repéru se středem v prvním z nich.

4.6a

4.8. Simplexy. Afinní kombinace je obdobná konstrukce pro body afinního prostoru jako byla lineární kombinace pro vektorové prostory. Skutečně, afinní podprostor generovaný body A_0, \dots, A_k je roven množině všech afinních kombinací svých generátorů. Můžeme však nyní dobře zobecnit i pojem „mezi dvěma body na přímce“. V dvojrozměrném případě tomu odpovídá vnitřek trojúhelníku. Obecně budeme postupovat takto:

k-ROZMĚRNÉ SIMPLEXY

Nechť A_0, \dots, A_k je $k + 1$ bodů afinního prostoru \mathcal{A} v obecné poloze. Množina $\Delta = \Delta(A_0, \dots, A_k)$ definovaná jako množina všech afinních kombinací bodů A_i s pouze nezápornými koeficienty, tj.

$$\Delta = \{t_0A_0 + t_1A_1 + \dots + t_kA_k; t_i \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \sum_{i=0}^k t_i = 1\},$$

se nazývá k -rozměrný *simplex* generovaný body A_i .

Jednorozměrný simplex je *úsečka*, dvourozměrný *trojúhelník*, nula-rozměrný simplex je bod.

Všimněme si, že každý k -rozměrný simplex má právě $k + 1$ *stěn*, které jsou postupně zadány rovnicemi $t_i = 0, i = 0, \dots, k$. Přímo z definice je vidět, že jde opět o simplexy, a to s dimenzí $k - 1$. Hovoříme o *hranici simplexu*. Např. trojúhelník má za svou hranici tři hrany, každá z nich pak dva body.

Zadání podprostoru jako množiny afinních kombinací bodů v obecné poloze je ekvivalentní parametrickému popisu. Obdobně pracujeme s parametrickými popisy simplexů.

4.7

4.9. Konvexní množiny. Podmnožina M afinního prostoru se nazývá *konvexní*, jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje i celou úsečku $\Delta(A, B)$. Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými $k + 1$ body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex (formální ověření je také obsaženo v důkazu následující věty).

Konvexními množinami jsou např.

- (1) prázdná podmnožina,
- (2) afinní podprostory,

řádky jsou tvořeny souřadnicemi daných vektorů, hodnost nižší než tři; v tomto případě se tedy jedná o matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

kteřá má hodnost dva). Dané body tedy leží v rovině. \square

4.10. Na kolik částí mohou dělit prostor (\mathbb{R}^3) tři roviny? Pro každou možnost popište odpovídající případ.

4.11. Rozhodněte, zda leží bod $[2, 1, 0]$ uvnitř konvexního obalu bodů $[0, 2, 1], [1, 0, 1], [3, -2, -1], [-1, 0, 1]$.

Řešení. Sestavíme nehomogenní lineární soustavu, pro koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4 , afinní kombinace daných bodů, která dává první bod (jsou určeny jednoznačně, pokud dané body neleží v rovině).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poslední rovnice udává, že jde o afinní kombinaci. Jejím řešením dostáváme $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (1, 0, 1/2, -1/2)$, nejedná se tedy o konvexní kombinaci. (nelze odvodit pomocí projekcí na jednotlivé osy). \square

4.12. Nalezněte předpis afinního zobrazení f daného ve standardní bázi v \mathbb{R}^2 jako

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v souřadné soustavě dané bází $\underline{u} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ a počátkem $[2, 0]$.

Řešení. Matice přechodu od dané báze \underline{u} ke standardní bázi k je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení v bázi $([2, 0], \underline{u})$ získáme tak, že nejprve transformujeme souřadnice v bázi $([2, 0], \underline{u})$ na souřadnice ve standardní bázi, tedy v bázi $([0, 0], (1, 0), (0, 1))$, poté aplikujeme matici zobrazení f ve standardní bázi a na závěr výsledek transformujeme zpět do souřadnic v bázi $([2, 0], \underline{u})$. Transformační rovnice přechodu od souřadnic y_1, y_2 v bázi $([2, 0], \underline{u})$ k souřadnicím x_1, x_2 v standardní bázi jsou

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud máme, že

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro předpis zobrazení pak dostáváme

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

4.13. Mějme dánu standardní souřadnou soustavu v prostoru \mathbb{R}^3 . Agent K sídlí v bodě S o souřadnicích $[0, 1, 2]$ a ústředí mu přidělilo pro používání souřadnou soustavu s počátkem S a bází $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$. Agent Sokol bydlí domě D na kótě $[1, 1, 1]$ a používá souřadnou soustavu s bází $\{(0, 0, 1), (-1, 1, 2), (1, 0, 1)\}$. Agent K žádá Sokola o schůzku v cihelně, která leží podle jeho souřadné soustavy v bodě $[1, 1, 0]$. Kam má přijít Sokol (podle jeho souřadnic)?

Řešení. Matice přechodu od báze agenta K k Sokolově bázi (při stejných počátcích) je

$$T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektor $(0, 1, 2)$ má tedy souřadnice $T \cdot (0, 1, 2)^T = (0, 2, 1)^T$, posunutím počátku (přičteme vektor $(-1, 0, 1)$) dostáváme výsledek $(-1, 2, 2)$. □

4.14. Najděte příčku přímek (úsečku, jejíž jeden koncový bod leží na jedné z přímek, druhý pak na druhé z nich)

$$p : [1, 1, 1] + t(2, 1, 0), \quad q : [2, 2, 0] + t(1, 1, 1),$$

takovou, že příčka jí určená prochází bodem $[1, 0, 0]$.

Řešení.

Nalezneme průsečík hledané příčky s přímkou q (nazveme jej Q). Hledaná příčka obsahuje nějaký bod na přímce p a bod $[1, 0, 0]$, nutně tedy leží v rovině ρ určené tímto bodem a přímkou p , tedy v rovině

$$[1, 1, 1] + t(2, 1, 0) + s(0, 1, 1).$$

Bod Q je pak průnikem této roviny s přímkou q . Ten nalezneme vyřešením soustavy

$$\begin{aligned} 1 + 2t &= 2 + u \\ 1 + t + s &= 2 + u \\ 1 + s &= u \end{aligned}$$

Levé strany rovnic reprezentují postupně všechny tři souřadnice libovolného bodu roviny ρ , pravé pak souřadnice libovolného bodu na q

(3) úsečky, *polopřímky* $p = \{P + t \cdot v; t \geq 0\}$,

(4) obecněji k -rozměrné *poloprostory*

$\alpha = \{P + t_1 \cdot v_1 + \dots + t_k \cdot v_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}, t_k \geq 0\}$,

(5) *úhly* v dvojrozměrných podprostorech

$$\beta = \{P + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2; t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}.$$

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme *konvexní obal* $\mathcal{K}(M)$ množiny M .

Věta. *Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je*

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \dots + t_s A_s; \sum_{i=1}^s t_i = 1, t_i \geq 0, A_i \in M\}$$



DŮKAZ. Označme S množinu všech afinních kombinací na pravé straně dokazované rovnosti. Nejprve ověříme, že je S konvexní. Zvolme tedy dvě sady parametrů $t_i, i = 1, \dots, s_1, t'_j, j = 1, \dots, s_2$ s požadovanými vlastnostmi.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $s_1 = s_2$ a že v obou kombinacích vystupují stejné body z M (jinak prostě přidáme sčítance s nulovými koeficienty). Uvažme libovolný bod úsečky zadané takto získanými body:

$$\epsilon(t_1 A_1 + \dots + t_s A_s) + (1 - \epsilon)(t'_1 A_1 + \dots + t'_s A_s), \quad 0 \leq \epsilon \leq 1.$$

Zřejmě jsou opět všechny v S .

Zbývá ukázat, že konvexní obal bodů A_1, \dots, A_s nemůže být menší než S . Samotné body A_i odpovídají volbě parametrů $t_j = 0$ pro všechny $j \neq i$ a $t_i = 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny množiny s nejvýše $s - 1$ body. To znamená, že konvexní obal bodů A_1, \dots, A_{s-1} je (podle předpokladu) tvořen právě těmi kombinacemi z pravé strany dokazované rovnosti, kde $t_s = 0$. Uvažme nyní libovolný bod $A = t_1 A_1 + \dots + t_s A_s \in S, t_s < 1$, a afinní kombinace

$$\epsilon(t_1 A_1 + \dots + t_{s-1} A_{s-1}) + (1 - \epsilon(1 - t_s)) A_s, \quad 0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{1 - t_s}.$$

Jde o úsečku s krajními body určenými parametry $\epsilon = 0$ (bod A_s) a $\epsilon = 1/(1 - t_s)$ (bod v konvexním obalu bodů A_1, \dots, A_{s-1}). Bod A je vnitřním bodem této úsečky s parametrem $\epsilon = 1$. □

Konvexní obaly konečných množin bodů se nazývají *konvexní mnohostěny*. Jsou-li definující body A_0, \dots, A_k konvexního mnohostěnu v obecné poloze, dostáváme právě k -rozměrný *simplex*. V případě simplexu je vyjádření jeho bodů ve tvaru afinní kombinace definujících vrcholů jednoznačné.

Zvláštním příkladem jsou konvexní mnohostěny generované jedním bodem a konečně mnoha vektory: Nechť u_1, \dots, u_k , jsou libovolné vektory v zaměření \mathbb{R}^n , $A \in \mathcal{A}_n$

je libovolný bod. *Rovnoběžnostěň* $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1u_1 + \dots + c_ku_k; 0 \leq c_i \leq 1\}.$$

Jsou-li vektory u_1, \dots, u_k nezávislé, hovoříme o k -rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$. Z definice je zřejmé, že rovnoběžnostěny jsou konvexní. Ve skutečnosti jde o konvexní obaly jejich vrcholů.

4.8

4.10. Příklady standardních afinních úloh. (1) *K podprostoru zadanému implicitně nalézt parametrický popis a naopak:*



Nalezením partikulárního řešení nehomogenního systému a fundamentálního řešení zhomogenizovaného systému rovnic získáme (v souřadnicích, ve kterých byly rovnice zadány) právě hledaný parametrický popis. Naopak, zapíšeme-li parametrický popis v souřadnicích, můžeme volné parametry t_1, \dots, t_k vyeliminovat a získáme právě rovnice zadávající daný podprostor implicitně.

(2) *Nalézt podprostor generovaný několika podprostory $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$ (obecně různých dimenzí, např. v \mathbb{R}_3 nalézt rovinu danou bodem a přímkou, třemi body apod.) a zadat jej implicitně či parametricky:*

Výsledný podprostor \mathcal{Q} je vždy určen jedním pevně zvoleným bodem A_i v každém z nich a součtem všech zaměření. Např.

$$\mathcal{Q} = A_1 + (Z(\{A_1, \dots, A_k\}) + Z(\mathcal{Q}_1) + \dots + Z(\mathcal{Q}_s)).$$

Pokud jsou podprostory zadány implicitně, je možné je nejdříve převést na parametrický tvar. V konkrétních situacích bývají funkční i jiné postupy. Všimněme si, že obecně je skutečně nutné využít jednoho bodu z každého podprostoru. Např. dvě paralelní přímky v rovině vygenerují celou rovinu, ale sdílí totéž jednorozměrné zaměření.

(3) *Nalézt průnik podprostorů $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$:*

Pokud jsou zadány v implicitním tvaru, stačí sjednotit všechny rovnice do jednoho systému (a případně vynechat lineárně závislé). Pokud je vzniklý systém neřešitelný, je průnik prázdný. V opačném případě získáme implicitní popis afinního podprostoru, který je hledaným průnikem.

Pokud máme dány parametrické tvary, můžeme také hledat přímo společné body jako řešení vhodných rovnic, podobně jako při hledání průniků vektorových podprostorů. Získáme tak přímo opět parametrický popis. Pokud je podprostorů více než dva, musíme průnik hledat postupně.

Máme-li jeden prostor zadaný parametricky a ostatní implicitně, stačí dosadit parametrizované souřadnice a řešit výsledný systém rovnic.

(4) *Nalezení přímky mimoběžek p, q v \mathcal{A}_3 procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření):*



(volný parametr ve vyjádření přímky jsme nazvali u , abychom zamezili duplicitě proměnných). Vyřešením této soustavy získáme $s = 2$, $t = 2$, $u = 3$ a dosazením například $u = 3$ do rovnice přímky q dostaneme $Q = [5, 5, 3]$ (stejný bod dostaneme i pokud dosadíme $s = 2$, $t = 2$, do parametrického vyjádření roviny ρ). Hledaná přímka je tedy dána bodem Q a bodem $[1, 0, 0]$. Snadno již dopočteme její průnik s přímkou p , bod $P = [7/3, 5/3, 1]$. \square

4.15. Určete osu mimoběžek

$$p : [3, 0, 3] + (0, 1, 2)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$q : [0, -1, -2] + (1, 2, 3)s \quad s \in \mathbb{R}$$

Řešení. Jde o problém najít přímku se směrem kolmým jak na směrový vektor přímky p , tak na směrový vektor přímky q . Tento směr můžeme najít například vektorovým součinem těchto dvou vektorů, je to směr $(1, -2, 1)$. Nyní sestavíme soustavu lineárních rovnic reflektující požadavek, aby vektor určený nějakými dvěma body, jeden na přímce p , druhý na q , byl rovnoběžný se směrem $(1, -2, 1)$. Symbolicky tedy dostáváme soustavu $P - Q = k(1, -2, 1)$, neboli $\underbrace{[3, 0, 3] + (0, 1, 2)t}_P - \underbrace{[0, -1, -2] + (1, 2, 3)s}_Q = k(1, -2, 1)$. Rozepsáním této rovnosti po souřadnicích, dostaneme

$$3 - s = k$$

$$1 + t - 2s = -2k$$

$$5 + 2t - 3s = k$$

s řešeními $t = 1$, $s = 2$, $k = 1$. Dosazením $t = 1$ do parametrického vyjádření přímky p dostáváme jeden bod osy, bod $[3, 1, 5]$, dosazením parametru $s = 2$ do vyjádření přímky q pak bod $[3, 1, 5]$. Těmito dvěma body je určena hledaná osa. \square

4.16. Nalezněte osu mimoběžek

$$p : [1, 1, 1] + t(2, 1, 0), \quad q : [2, 2, 0] + t(1, 1, 1).$$

B. Eukleidovská geometrie

4.17. Určete vzdálenost příemek v \mathbb{R}^3 .

$$p : [1, -1, 0] + t(-1, 2, 3), \quad a \quad q : [2, 5, -1] + t(-1, -2, 1).$$

Řešení. Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné přímky (spojnice) daných příemek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk zjistíme například pomocí vektorového součinu:

$$\begin{aligned} \langle (-1, 2, 3), (-1, -2, 1) \rangle^\perp &= \langle (-1, 2, 3) \times (-1, -2, 1) \rangle \\ &= \langle (8, -2, 4) \rangle = \langle (4, -1, 2) \rangle. \end{aligned}$$

Spojnicí daných přímek je například úsečka $[1, -1, 0][2, 5, -1]$, promítneme tedy vektor $[1, -1, 0] - [2, 5, -1] = (-1, -6, 1)$. Pro vzdálenost přímek pak dostáváme:

$$\rho(p, q) = \frac{|(-1, -6, 1) \cdot (4, -1, 2)|}{\|(4, -1, 2)\|} = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

□

4.18. Nalezněte bod A přímky

$$p : x + 2y + z - 1 = 0, \quad 3x - y + 4z - 29 = 0,$$

který má stejnou vzdálenost od bodů $B = [3, 11, 4]$, $C = [-5, -13, -2]$.

Řešení. Nejprve vyjádříme přímku p parametricky tak, že vyřešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1, \\ 3x - y + 4z &= 29. \end{aligned}$$

4.8a

Soustavu zapíšeme rozšířenou maticí a upravíme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 29 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & 26 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/7 & 59/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & -26/7 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Tím dostáváme vyjádření

$$p : \left[\frac{59}{7}, -\frac{26}{7}, 0 \right] + t \left(-\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Odkud substitucí $t = 7s + 26$ plyne

$$p : [-25, 0, 26] + s(-9, 1, 7), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Bod A obdržíme volbou jistého $s \in \mathbb{R}$. Přitom vektory

$$A - B = (-28 - 9s, -11 + s, 22 + 7s),$$

$$A - C = (-20 - 9s, 13 + s, 28 + 7s)$$

mají mít stejnou délku, tj. má platit

$$\begin{aligned} \sqrt{(-28 - 9s)^2 + (-11 + s)^2 + (22 + 7s)^2} \\ = \sqrt{(-20 - 9s)^2 + (13 + s)^2 + (28 + 7s)^2}, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} (-28 - 9s)^2 + (-11 + s)^2 + (22 + 7s)^2 \\ = (-20 - 9s)^2 + (13 + s)^2 + (28 + 7s)^2. \end{aligned}$$

Úpravou poslední rovnice získáme $s = -3$. Je tak

$$A = [-25, 0, 26] - 3(-9, 1, 7) = [2, -3, 5].$$

□

Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběma mimoběžkami. Výsledná příčka r tedy bude jednorozměrným afinním podprostorem. Pokud máme zadán jeho bod $A \in r$, pak afinní podprostor generovaný p a A je buď přímka ($A \in p$) nebo rovina ($A \notin p$). V prvním případě máme nekonečně mnoho řešení, jedno pro každý bod $z \in q$, v druhém stačí najít průnik B roviny $\langle p \cup A \rangle$ s q a $r = \langle \{A, B\} \rangle$. Pokud je průnik prázdný, úloha nemá řešení, v případě že $q \subset \langle p \cup A \rangle$, máme opět nekonečně mnoho řešení, a pokud je průnik jednorozměrný, dostáváme právě jedno řešení.

Máme-li místo bodu dán směr $u \in \mathbb{R}^n$, tj. zaměření r , pak uvažujeme opět podprostor Q generovaný p a zaměřením $Z(p) + \langle u \rangle \subset \mathbb{R}^n$. Opět, pokud $q \subset Q$, máme nekonečně mnoho řešení, jinak uvažíme průnik Q s q a úlohu dokončíme stejně jako v předchozím případě.

Řešení mnoha dalších praktických geometrických úloh vesměs spočívá v systematickém používání výše uvedených kroků.

4.11. Poznámky k lineárnímu programování. Na začátku



třetí kapitoly jsme se zastavili v odstavcích 3.4–3.8 u praktických problémů, které jsou zadány pomocí systémů lineárních nerovnic. Snadno ověříme, že každá taková jednotlivá nerovnice

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$$

zadáva v standardním afinním prostoru \mathbb{R}^n poloprostor ohraničený nadrovinou, kterou zadává příslušná rovnice (srovnej s definicí v odstavci 4.9(4)). Skutečně, jestliže zvolíme parametrický popis příslušné nadroviny

$$\{P + t_1v_1 + \dots + t_{n-1}v_{n-1}\}$$

s vektory zaměření v_1, \dots, v_{n-1} , pak doplněním těchto vektorů do báze celého \mathbb{R}^n vektorem v , nutně musí být hodota

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n - b$$

na lineární kombinaci $t_1v_1 + \dots + t_{n-1}v_{n-1} + t_nv$ vždy kladná pro všechny vektory buď s kladným nebo záporným t_n .

Zároveň tedy vidíme, že množina všech přípustných vektorů pro problém lineárního programování je vždy průnikem konečně mnoha konvexních množin a tedy je sama buď konvexní nebo prázdná.

Pokud je zároveň průnik neprázdný a omezený, pak jde zřejmě o konvexní mnohostěn. Jak jsme zdůvodnili již v 3.4, každá lineární forma je podél každé (parametrizované) přímky v afinním prostoru buď stále rostoucí nebo stále klesající nebo konstantní. Pokud je tedy daný problém lineárního programování řešitelný a omezený, pak musí mít optimální řešení v jednom z vrcholů příslušného konvexního mnohostěnu. Čtenář by si měl umět toto tvrzení bez problémů představit v případě dvourozměrného nebo třírozměrného problému. Přímocará zdůvodnění z těchto malých dimenzí však platí pro všechny konečněrozměrné případy.

Tím jsme podali „geometrický důkaz“ existenční části základní věty 3.7. Také jsme tak původní problém převedli k diskretní (tj. konečné) úvaze o hodnotách dané cenové funkce v konečně mnoha bodech prostoru. K příkladu praktického algoritmu, jak příslušné vrcholy konvexního mnohostěnu co nejlépe najít a vyhodnotit, se vrátíme ještě v kapitole o diskretní matematice.

4.9

4.12. Afinní zobrazení. Zobrazení $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ mezi afinními prostory nazýváme *afinní zobrazení*, jestliže mezi jejich zaměřeními existuje lineární zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{A}) \rightarrow Z(\mathcal{B})$ takové, že pro všechny $A \in \mathcal{A}$, $v \in Z(\mathcal{A})$ platí



$$f(A + v) = f(A) + \varphi(v).$$

Zobrazení f a φ jsou jednoznačně zadána touto vlastností a libovolně zvolenými obrazy ($\dim \mathcal{A} + 1$) bodů v obecné poloze.

Pro libovolnou afinní kombinaci bodů $t_0A_0 + \dots + t_sA_s \in \mathcal{A}$ pak dostaneme

$$\begin{aligned} f(t_0A_0 + \dots + t_sA_s) &= \\ &= f(A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \dots + t_s(A_s - A_0)) \\ &= f(A_0) + t_1\varphi(A_1 - A_0) + \dots + t_s\varphi(A_s - A_0) \\ &= t_0f(A_0) + t_1f(A_1) + \dots + t_sf(A_s). \end{aligned}$$

Naopak, pokud pro nějaké zobrazení platí, že zachovává afinní kombinace, můžeme použít speciální případ kombinace $n + 1$ pevně zvolených vektorů zadávajících afinní repér. Postupně pak volbou koeficientů $t_0 = 0$ a $t_i = 1$ definujeme hodnotu zobrazení φ mezi zaměřeními vztahem $\varphi(A_i - A_0) = f(A_i)$. Pak lze číst předchozí výpočet v opačném pořadí a ověřit korektnost i linearitu φ . Skutečně, z předpokladu, že se první a poslední řádek rovnají, dovedeme, že jsou si rovny také řádky druhý a třetí. Tím jsme zjistili, že se skutečně jedná o afinní zobrazení s lineárním zobrazením φ na zaměření, které jsme uvedeným postupem popsali ve zvoleném afinním repéru. Platí proto:

Věta. *Afinní zobrazení jsou právě ta zobrazení, která zachovávají afinní kombinace bodů.*

Ve skutečnosti stačí ověřit zachovávání afinní kombinace pro všechny dvojice bodů, protože z nich už vytvoříme i libovolnou konečnou afinní kombinaci. Skutečně, afinní kombinaci $k + 2$ bodů A_0, A_{k+1} vždycky můžeme vyjádřit takto:

$$r(t_0A_0 + \dots + t_kA_k) + sA_{k+1},$$

kde $\sum_{i=0}^k t_k = 1$ a $r + s = 1$. Prostě napřed si vybereme nějaký bod, který je afinní kombinací $k+1$ bodů a pak děláme jeho kombinace s posledním. Takto můžeme postupně skutečně jakoukoliv konečnou afinní kombinaci vyrobit z kombinací dvojic.

4.19. V eukleidovském prostoru \mathbb{R}^4 stanovte vzdálenost bodu $A = [2, -5, 1, 4]$ od podprostoru

$$U : 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 12 = 0, \quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 9 = 0.$$

Řešení. Nejdříve nalezneme libovolný bod podprostoru U (řešení soustavy). Např. je

$$B = [0, 3, 0, 3] \in U.$$

Víme, že vzdálenost A od U se rovná velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do ortogonálního doplňku zaměření podprostoru U . Ortogonální doplněk zaměření U ovšem známe (zadává tento podprostor) – jako množinu (lineárních kombinací normálových vektorů)

$$V := \{t(4, -2, -3, -2) + s(2, -1, -2, -2); t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Potřebujeme najít kolmý průmět P_{A-B} vektoru $A - B$ do V , který náleží do V , a proto je

$$P_{A-B} = a(4, -2, -3, -2) + b(2, -1, -2, -2)$$

pro jisté hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$. Zjevně musí platit $(A - B - P_{A-B}) \perp V$, tedy

$$((A - B) - P_{A-B}) \perp (4, -2, -3, -2),$$

$$((A - B) - P_{A-B}) \perp (2, -1, -2, -2).$$

Dosažením za $A - B$ a P_{A-B} odsud vyplývá

$$\begin{aligned} ((2, -8, 1, 1) - a(4, -2, -3, -2) - b(2, -1, -2, -2)) \\ \cdot (4, -2, -3, -2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((2, -8, 1, 1) - a(4, -2, -3, -2) - b(2, -1, -2, -2)) \\ \cdot (2, -1, -2, -2) = 0; \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} (2, -8, 1, 1) \cdot (4, -2, -3, -2) \\ - a(4, -2, -3, -2) \cdot (4, -2, -3, -2) \\ - b(2, -1, -2, -2) \cdot (4, -2, -3, -2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((2, -8, 1, 1) \cdot (2, -1, -2, -2)) \\ - a(4, -2, -3, -2) \cdot (2, -1, -2, -2) \\ - b(2, -1, -2, -2) \cdot (2, -1, -2, -2) = 0. \end{aligned}$$

Vyčíslíme-li tyto skalární součiny, obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 19 - 33a - 20b &= 0, \\ 8 - 20a - 13b &= 0, \end{aligned}$$

kteřá má jediné řešení $a = 3, b = -4$. Je tudíž

4.9a

$$P_{A-B} = 3(4, -2, -3, -2) - 4(2, -1, -2, -2) = (4, -2, -1, 2),$$

přičemž

$$\|P_{A-B}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 5.$$

Připomeňme, že vzdálenost A od U je rovna $\|P_{A-B}\| = 5$. \square

4.20. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 spočítejte vzdálenost v bodu $[0, 0, 6, 0]$ od vektorového podprostoru

$$U : [0, 0, 0, 0] + t_1(1, 0, 1, 1) + t_2(2, 1, 1, 0) + t_3(1, -1, 2, 3),$$

$$t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

Řešení. Úlohu budeme řešit postupem založeným na tzv. problému nejmenších čtverců. Vektory generující U napíšeme do sloupců matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.9b

a bod $[0, 0, 6, 0]$ nahradíme jemu odpovídajícím vektorem $b = (0, 0, 6, 0)^T$. Budeme řešit soustavu $A \cdot x = b$, tj. soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6, \\ x_1 + 3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

právě metodou nejmenších čtverců. (Upozorníme, že tato soustava nemá řešení – jinak by vzdálenost byla rovna 0.) Systém $A \cdot x = b$ vynásobíme zleva maticí A^T . Rozšířená matice soustavy $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$ pak je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 15 & 12 \end{array} \right).$$

Pomocí elementárních řádkových transformací ji postupně převedeme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 15 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Provedeme-li ještě zpětnou eliminaci

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

můžeme ihned napsat řešení

$$x = (2 - 3t, t, t)^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.13. Poměr bodů na přímce. Afinní kombinace dvojice bodů můžeme také dobře vyjádřit pomocí tzv. *poměru bodů* na přímce. Jeli bod C afinní kombinací bodů A a $B \neq C$, $C = rA + sB$, pak řekneme že číslo



$$\lambda = (C; A, B) = -\frac{s}{r}$$

je poměrem bodu C vzhledem k daným bodům A a B . Protože bod C můžeme vyjádřit jako

$$C = A + s(B - A) = B + r(A - B),$$

je poměr λ ve skutečnosti poměrem velikostí orientovaných vektorů $C - A$ a $C - B$. Zejména je $\lambda = -1$ právě, když je C středem úsečky dané body A a B (tj. v naší afinní kombinaci bude $r = s = \frac{1}{2}$).

Naše charakterizace afinních zobrazení prostřednictvím afinních kombinací tedy má velice srozumitelně znějící důsledek:

Důsledek. Afinní zobrazení jsou právě ta zobrazení, která zachovávají poměry.

4.14. Změny souřadnic. Volbou afinních souřadnic (A_0, u) na \mathcal{A} a (B_0, v) na \mathcal{B} dostáváme souřadné vyjádření afinního zobrazení $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Přímo z definice je zřejmé, že stačí vyjádřit obraz $f(A_0)$ počátku souřadnic v \mathcal{A} v souřadnicích na \mathcal{B} , tj. vyjádřit vektor $f(A_0) - B_0$ v bázi v jako sloupec souřadnic y_0 a vše ostatní je pak určeno násobením maticí zobrazení φ ve zvolených bazích a přičtením výsledku. Každé afinní zobrazení tedy v souřadnicích vypadá takto:

$$x \mapsto y_0 + Y \cdot x,$$

kde y_0 je jako výše a Y je matice zobrazení φ .

Transformace afinních souřadnic odpovídá, obdobně jako u lineárních zobrazení, vyjádření identického zobrazení ve zvolených afinních repérech. Změna souřadného vyjádření afinního zobrazení v důsledku změny bazí se snadno spočte pomocí násobení a sčítání matic a vektorů. Skutečně, při změně báze na definičním oboru daném posunutím w a maticí M , přičemž staré souřadnice pomocí nových jsou

$$x = w + M \cdot x',$$

a změně na oboru hodnot s posunutím z a maticí N , přičemž nové souřadnice jsou pomocí starých

$$y' = z + N \cdot y,$$

dostáváme pro zobrazení dané v původních bazích vektorem posunutí y_0 a maticí Y přímým výpočtem

$$\begin{aligned} y' &= z + N \cdot y = z + N \cdot (y_0 + Y \cdot x) \\ &= (z + N \cdot y_0 + N \cdot Y \cdot w) + (N \cdot Y \cdot M) \cdot x'. \end{aligned}$$

Je tedy afinní zobrazení v nových bazích dáno vektorem posunutí $z + N \cdot y_0 + N \cdot Y \cdot w$ a maticí $N \cdot Y \cdot M$.

4.10

4.15. Euklidovské bodové prostory. Zatím jsme pro naše elementární geometrické úvahy nepotřebovali pojem vzdálenosti nebo velikosti. V mnoha praktických úlohách ale velikost vektorů a odchylka vektorů, tak jak jsme je zavedli na samém konci třetí části druhé kapitoly (viz 2.40 a dále), hrají podstatnou roli. Ve skutečnosti se ale dodatečné informace týkají opravdu jen vektorů v zaměření, takže nám nezbyvá mnoho práce:



EUKLIDOVSKÉ PROSTORY

Standardní bodový euklidovský prostor \mathcal{E}_n je afinní prostor \mathcal{A}_n , jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor \mathbb{R}^n se skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = y^T \cdot x.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; u)$ s ortonormální bází u .

Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$.

Euklidovské podprostory v \mathcal{E}_n jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.

Bodovým euklidovským prostorem \mathcal{E} dimenze n pak obecně rozumíme afinní prostor, jehož zaměření je reálný n -rozměrný euklidovský vektorový prostor. Pojem kartézské souřadné soustavy má opět jasný smysl. Každá volba takové souřadné soustavy ovšem zadává ztotožnění \mathcal{E} se standardním prostorem \mathcal{E}_n . Proto se budeme v dalším, bez újmy na obecnosti, zabývat hlavně standardními euklidovskými prostory a jejich podprostory.



Z geometrického pohledu mají jednoduché vlastnosti skalárního součinu, jako jsou trojúhelníková nerovnost, Cauchyova nerovnost, Besselova nerovnost apod., odvozené ve čtvrté části předchozí kapitoly, viz 3.25, velmi užitečné přímé důsledky:

4.13

4.16. Věta. Pro body $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ platí

- (1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
- (2) $\rho(A, B) = 0$ právě, když $A = B$
- (3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$
- (4) V každé kartézské souřadné soustavě $(A_0; e)$ mají body $A = A_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, B = A_0 + b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$.
- (5) Je-li dán bod A a podprostor \mathcal{Q} v \mathcal{E}_n , pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů \mathcal{Q} od A . Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.
- (6) Obecněji, pro podprostory \mathcal{Q} a \mathcal{R} v \mathcal{E}_n existují body $P \in \mathcal{Q}$ a $Q \in \mathcal{R}$ minimalizující vzdálenosti bodů $B \in \mathcal{Q}$

Dodejme, že existence nekonečně mnoha řešení je zapříčiněna nadbytečností třetího ze zadávajících vektorů podprostoru U , neboť je

$$3(1, 0, 1, 1) - (2, 1, 1, 0) = (1, -1, 2, 3).$$

Libovolná $(t \in \mathbb{R})$ lineární kombinace

$$(2 - 3t)(1, 0, 1, 1) + t(2, 1, 1, 0) + t(1, -1, 2, 3) = (2, 0, 2, 2)$$

však odpovídá bodu $[2, 0, 2, 2]$ podprostoru U , který je nejbližší bodu $[0, 0, 6, 0]$. Pro hledanou vzdálenost proto platí

$$v = \|[2, 0, 2, 2] - [0, 0, 6, 0]\| = \sqrt{2^2 + 0 + (-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}.$$

□

4.21. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu v \mathbb{R}^3 s podstavou v rovině $z = 0$ a s hranami zadanými dvojicemi vrcholů $[0, 0, 0], [-2, 3, 0]; [0, 0, 0], [4, 1, 0]$ a $[0, 0, 0], [5, 7, 3]$.

Řešení. Rovnoběžnostěn je zadán vektory $(4, 1, 0), (-2, 3, 0), (5, 7, 3)$. Víme, že jeho objem je roven determinantu

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 14 = 42.$$

Doplňme, že při změnách pořadí vektorů bychom obdrželi výsledek ± 42 , neboť determinant udává orientovaný objem rovnoběžnostěnu. Ještě poznamenejme, že objem rovnoběžnostěnu by se dle výpočtu determinantu nezměnil, pokud by třetí vektor byl $[a, b, 3]$ pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Jeho objem pochopitelně závisí pouze na kolmé vzdálenosti rovin dolní a horní podstavy a jejich obsahu

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14.$$

□

4.22. Je dán rovnoběžník $[0, 0, 1], [2, 1, 1], [3, 3, 1], [1, 2, 1]$. Určete bod X na přímce $p : [0, 0, 1] + (1, 1, 1)t$ tak, aby rovnoběžnostěn určený daným rovnoběžníkem a bodem X měl objem 1.

Řešení. Sestavíme determinant udávající objem rovnoběžnostěnu při pohyblivém bodu X :

$$\begin{vmatrix} t & t & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Podmínka, že má být roven jedné dává $t = 1/3$.

□

4.23. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ (při obvyklém významu zápisu, tedy vektory $E-A$, $F-B$, $G-C$, $H-D$ jsou kolmé na rovinu určenou vrcholy A, B, C, D) v eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 . Vypočtěte odchylku φ vektorů $F-A$ a $H-A$.

Řešení. Tento příklad jsme již jednou řešili pomocí vzorce z definice odchylky. Nyní se zkusme zamyslet. Uvažované body A, F, H jsou vrcholy trojúhelníku, jehož všechny strany jsou úhlopříčkami stěn krychle. Jedná se tudíž o rovnostranný trojúhelník. Odtud plyne, že $\varphi = \pi/3$. \square

4.24. Označme S střed hrany AB krychle $ABCDEFGH$ (v obvyklém označení). Určete kosinus odchylky přímk ES a BG .

Řešení. Vzhledem k tomu, že homotetie (stejnolehlost) je podobným zobrazením, tj. zachovává úhly, můžeme předpokládat, že krychle má hranu velikosti 1. Umístíme-li navíc bod A do počátku souřadné soustavy a body B , resp. E do bodů o souřadnicích $[1, 0, 0]$, resp. $[0, 0, 1]$, pak mají zbylé uvažované body následující souřadnice: $S = [1/2, 0, 0]$, $G = [1, 1, 1]$, tedy vektor $ES = (1/2, 0, -1)$ a $BG = (0, 1, 1)$. Pro hledaný kosinus odchylky φ tedy máme

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{(1/2, 0, -1) \cdot (0, 1, 1)}{\|(1/2, 0, -1)\| \|(0, 1, 1)\|} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

4.25. Určete odchylku přímky p zadané implicitně rovnicemi

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0, \\ -x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

od roviny $q : x + y + 2z + 1 = 0$.

Řešení. Vidíme, že normálový vektor roviny q je $(1, 1, 2)$. Sečtení rovnic zadávajících přímku p při opsání první z nich dává

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0, \\ 2y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Odsud plyne, že $y = -z$ a $x = 2z$. Vektor $(2, -1, 1)$ je proto směrovým vektorem přímky p ; jinak řečeno, můžeme zapsat (p očividně prochází počátkem)

$$p : [0, 0, 0] + t(2, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro úhel φ vektorů $(1, 1, 2)$, $(2, -1, 1)$ platí

$$\cos \varphi = \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

Je tedy $\varphi = 60^\circ$. To je ovšem velikost úhlu, který svírá směrový vektor p s normálovým vektorem q . Hledaný úhel je doplňkem tohoto úhlu, a tak je výsledek $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$. \square

a $A \in \mathcal{R}$. Vzdálenost bodů Q a P je rovna velikosti kolmému průmětu vektoru $A - B$ do $Z(Q)^\perp$ pro libovolné body $B \in Q$ a $A \in \mathcal{R}$.



DŮKAZ. První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností velikosti vektorů v prostorech se skalárním součinem, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.

Podívejme se na vztah pro minimalizaci vzdáleností $\rho(A, B)$ pro $B \in Q$. Vektor $A - B$ se jednoznačně rozkládá na $A - B = u_1 + u_2$, $u_1 \in Z(Q)$, $u_2 \in Z(Q)^\perp$. Přitom u_2 nezávisí na volbě $B \in Q$, protože případná změna bodu B se projeví přičtením vektoru ze $Z(Q)$.

Nyní zvolme $P = A + (-u_2) = B + u_1 \in Q$. Dostáváme

$$\|A - B\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2 = \|A - P\|.$$

Odtud již vyplývá, že nejmenší možné vzdálenosti je skutečně dosaženo, a to právě pro náš bod P . Vypočtená vzdálenost je skutečně $\|u_2\|$.

Obdobně ukážeme obecný výsledek. Pro volbu libovolných bodů $A \in \mathcal{R}$ a $B \in Q$ je jejich rozdíl dán jako součet vektorů $u_1 \in Z(\mathcal{R}) + Z(Q)$ a $u_2 \in (Z(\mathcal{R}) + Z(Q))^\perp$, přičemž komponenta u_2 nezávisí na volbě bodů. Přičtením vhodných vektorů ze zaměření \mathcal{R} a Q zjevně obdržíme body A' a B' , jejichž vzdálenost je právě $\|u_2\|$. \square

Rozšíříme nyní náš stručný přehled elementárních úloh v analytické geometrii.

4.17. Příklady standardních úloh. (1) Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $Q \subset \mathcal{E}_n$:

Postup při řešení je dán ve větě 4.16.



(2) V \mathcal{E}_2 vedte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel:

Připomeňme, že na úrovni rovinné geometrie jsme s odchylkami vektorů již pracovali (viz např. 2.43). Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.

(3) Spočítejte patu kolmice vedené bodem na danou přímku:

Postup je uveden v důkazu předposledního bodu věty 4.16.

(4) V \mathcal{E}_3 určete vzdálenost dvou přímk p, q :

Zvolíme libovolně jeden bod z každé přímky, $A \in p$, $B \in q$. Komponenta vektoru $A - B$ v ortogonálním doplňku $(Z(p) + Z(q))^\perp$ má velikost rovnu vzdálenosti p a q .

(5) V \mathcal{E}_3 najděte osu dvou mimoběžek p a q :

Osou zde rozumíme příčku, která realizuje nejmenší možnou vzdálenost daných mimoběžek pomocí bodů průniku. Opět lze postup dovést z důkazu věty 4.16 (poslední bod). Nechť η je podprostor generovaný jedním bodem $A \in p$ a součtem $Z(p) + (Z(p) + Z(q))^\perp$. Pokud nejsou přímky p a q rovnoběžné, půjde o rovinu. Pak průnik $\eta \cap q$ spolu se zaměřením $(Z(p) + Z(q))^\perp$ dávají parametrický popis hledané osy. Pokud jsou přímky rovnoběžné, bude mít úloha nekonečně mnoho řešení.

4.15

4.18. Odchyly. Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchyly, orientace, objem apod. je v bodových prostorech \mathcal{E}_n zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech. Připomeňme, že odchyly dvou vektorů jsme definovali na konci třetí části druhé kapitoly, viz 2.43.



Skutečně, z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$, má tedy smysl definice odchyly $\varphi(u, v)$ vektorů $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

To je zcela v souladu s praxí v dvourozměrném euklidovském prostoru \mathbb{R}^2 a naší filozofií, že pojem týkající se dvou vektorů je ve své podstatě záležitostí dvourozměrné geometrie.

V euklidovské rovině jsme také již používali goniometrické funkce \cos a \sin , které jsme definovali pouze geometrickou úvahou, ke které se vrátíme na začátku kapitoly páté, kdy také budeme moci precizně ověřit geometrický názor, že je funkce \cos in intervalu $[0, \pi]$ klesající. Ve vícerozměrných prostorech je proto odchylyka dvou vektorů vždy měřena v rovině, kterou tyto vektory generují (nebo je nula) a náš definiční vztah odpovídá zvyklostem ve všech dimenzích.

V libovolném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem přímo z definic plyne

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \|v\| \cos \varphi(u, v). \end{aligned}$$

To je patrně dobře známá kosinová věta z rovinné geometrie.

Dále platí pro každou ortonormální bázi e zaměření V a nenulový vektor $u \in V$ vztah

$$\|u\|^2 = \sum_i |u \cdot e_i|^2.$$

Podělením této rovnice číslem $\|u\|^2$ dostáváme vztah

$$1 = \sum_i (\cos \varphi(u, e_i))^2,$$

který je větou o směrových kosinech $\varphi(u, e_i)$ vektoru u .

Z definice odchylek vektorů nyní můžeme dovodit rozumné definice pro odchylky obecných podprostorů v libovolném euklidovském vektorovém prostoru. Je přitom třeba rozhodnutí, jak se stavět k případům, kdy podprostory mají netriviální průnik. Za odchylku dvou přímk budeme chtít patrně brát menší ze dvou možných úhlů, u dvou nerovnoběžných rovin v \mathbb{R}^3 nebudeme chtít slyšet, že mají odchylku nula, protože mají společný alespoň jeden směr:

ODCHYLKY PODPROSTORŮ

4.16

4.19. Definice. Uvažujme konečněrozměrné podprostory U_1, U_2 v euklidovském vektorovém prostoru V libovolné dimenze.

4.26. V reálné rovině nalezněte přímku, která prochází bodem $[-3, 0]$ a s přímkou

$$p : \sqrt{3}x + 3y + 5 = 0$$

svírá úhel 60° .

Řešení. Nejprve si uvědomme, že podmínkám úlohy musí vyhovovat právě dvě přímky. Obecná rovnice přímky v rovině má tvar

$$ax + by + c = 0, \quad \text{přičemž lze volit } a^2 + b^2 = 1.$$

Nalezněme tedy taková čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, aby byly splněny uvedené podmínky. Dosadíme-li $x = -3, y = 0$ do této rovnice (přímka má procházet bodem $[-3, 0]$), dostaneme $c = 3a$. Podmínka, že přímka má svírat úhel 60° s přímkou p , potom dává

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{|\sqrt{3}a + 3b|}{\sqrt{12}}, \quad \text{tj. } \sqrt{3} = |\sqrt{3}a + 3b|.$$

Další úpravou obdržíme

$$\pm 1 = a + \sqrt{3}b \quad \text{a umocněním } 1 = a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{3}ab.$$

Využijeme-li $a^2 + b^2 = 1$, získáme

$$0 = 2b^2 + 2\sqrt{3}ab, \quad \text{tj. } 0 = b(b + \sqrt{3}a).$$

Celkem tak máme možnosti (připomeňme, že $c = 3a$ a $a^2 + b^2 = 1$)

$$a = \pm 1, \quad b = 0, \quad c = \pm 3; \quad a = \pm \frac{1}{2}, \quad b = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = \pm \frac{3}{2}.$$

Snadno se ověří, že těmito koeficienty určené přímky

$$x + 3 = 0, \quad \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} = 0$$

zadání skutečně vyhovují. \square

4.27. Určete obecnou rovnici všech rovin, které svírají odchylku 60° s rovinou $x + y + z - 1 = 0$ a obsahují přímku $p : [1, 0, 0] + t(1, 1, 0)$.

4.28. Určete odchylku rovin

$$\sigma : [1, 0, 2] + (1, -1, 1)t + (0, 1, -2)s$$

$$\rho : [3, 3, 3] + (1, -2, 0)t + (0, 1, 1)s$$

Řešení. Průsečnice má směrový vektor $(1, -1, 1)$, kolmá rovina na ni má pak s danými rovinami průniky generované vektory $(1, 0, -1)$ a $(0, 1, 1)$. Tyto jednorozměrné podprostory svírají úhel 60° . \square

4.29. Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ (ve standardním označení, tj. $ABCD$ a $A' B' C' D'$ jsou stěny, AA' pak hrana). Určete odchylku vektorů AB' a AD' .

Řešení. Uvažujme krychli o hraně 1 a umístěme ji v \mathbb{R}^3 tak, že bod A bude mít ve standardní bázi souřadnice $[0, 0, 0]$, bod B pak souřadnice $[1, 0, 0]$ a bod C souřadnice $[1, 1, 0]$. Potom má bod B' souřadnice $[1, 0, 1]$ a bod D' souřadnice $[0, 1, 1]$. Pro vyšetřované vektory tedy můžeme psát $AB' = B' - A = [1, 0, 1] - [0, 0, 0] = (1, 0, 1)$, $AD' = D' - A = [0, 1, 1] - [0, 0, 0] = (0, 1, 1)$. Podle definice odchylky φ těchto vektorů je pak

$$\cos(\varphi) = \frac{(1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1)}{\|(1, 0, 1)\| \|(0, 1, 1)\|} = \frac{1}{2},$$

tedy $\varphi = 60^\circ$.

□

4.30. Nyní ukážeme jednoduché využití Cauchyovy nerovnosti. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$n^2 \leq \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Poté uveďte, kdy nastává rovnost.

Řešení. Postačuje uvážit Cauchyovu nerovnost

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

v eukleidovském prostoru \mathbb{R}^n pro vektory

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right), \quad v = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n}).$$

Takto dostaneme

$$(4.1) \quad n \leq \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \cdot \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}. \quad \boxed{4.14}$$

Dokazovanou nerovnost potom obdržíme umocněním (4.1). Dále víme, že Cauchyova nerovnost přejde v rovnost, právě když bude vektor u násobkem vektoru v , což již implikuje $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

□

4.31. Jsou dány vektory $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Doplňte je třetím jednotkovým vektorem tak, aby rovnoběžnostěn daný těmito třemi vektory měl co největší objem.

Řešení. Označme hledaný jednotkový vektor jako $\underline{t} = (t_1, t_2, t_3)$. Podle Tvzení ?? je objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_3(0; \underline{u}, \underline{v}, \underline{t})$ dán jako absolutní hodnota determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \underline{t} \cdot (\underline{u} \times \underline{v}) \leq \|\underline{t}\| \|\underline{u} \times \underline{v}\| = \|\underline{u} \times \underline{v}\|.$$

Odchylka podprostorů U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

(1) Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1, U_1 = \langle u \rangle, U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos \alpha = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|}.$$

(2) Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak je odchylka minimem všech odchylek jednorozměrných podprostorů

$$\alpha = \min\{\varphi(\langle u \rangle, \langle v \rangle); 0 \neq u \in U_1, 0 \neq v \in U_2\}.$$

Ukážeme v zápětí, že takové minimum skutečně vždy existuje.

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru \mathcal{E}_n se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1), Z(\mathcal{Q}_2)$.

Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2). Všimněme si také, že v případě $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, jsou U_1 a U_2 kolmé podle našich dřívějších definic, právě když jejich odchylka je $\pi/2$. Pokud však mají netriviální průnik, nemohou být kolmé v dřívějším smyslu.

Ke korektnosti definice zbývá ukázat, že ve skutečnosti vždy existují vektory $u \in U_1, v \in U_2$, pro které nabývá výraz pro odchylku požadovaného minima. Nejdříve speciální případ:

4.20. Lemma. *Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U, v_2 \in U^\perp$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v , tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí*

$$\cos \varphi(\langle v \rangle, U) = \cos \varphi(\langle v \rangle, \langle v_1 \rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

DŮKAZ. Pro všechny vektory $u \in U$ platí díky Cauchyově nerovnosti

$$\begin{aligned} \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} &= \frac{|u \cdot (v_1 + v_2)|}{\|u\| \|v\|} = \frac{|u \cdot v_1|}{\|u\| \|v\|} \\ &\leq \frac{\|u\| \|v_1\|}{\|u\| \|v\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v\|} = \frac{\|v_1\|^2}{\|v\| \|v_1\|} = \frac{|v_1 \cdot v|}{\|v\| \|v_1\|}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\cos \varphi(\langle v \rangle, \langle u \rangle) \leq \cos \varphi(\langle v \rangle, \langle v_1 \rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}$$

a námi nalezený vektor v_1 tedy představuje největší možnou hodnotu pro kosinus úhlu mezi všemi volbami vektorů z U . Protože je funkce \cos na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ klesající, dostáváme tak nejmenší možný úhel a tvrzení je dokázané. \square

4.14a

4.21. Výpočet odchylek. Postupu v předchozím lemmatu můžeme rozumět tak, že jednorozměrný podprostor generovaný vektorem v kolmo promítneme do podprostoru U a podíváme se, jak moc se obrazy zmenšují. Podle toho pak poznáme odchylku. Podobný postup použijeme ve vyšších dimenzích také. Potíž je přitom ale s rozpoznáním, které směry nám svými průměty odchylku skutečně prozradí. V našem předchozím případě to můžeme dobře vidět, pokud nešikovně budeme promítat větší prostor U do jednorozměrného $\langle v \rangle$ a pak kolmo zpět do U . Zjistíme, že odchylku poznáme podle směru vlastního vektoru takového zobrazení, jeho vlastní číslo bude kvadrátem příslušného kosinu úhlu.

Uvažujme tedy dva obecné podprostory U_1, U_2 v euklidovském vektorovém prostoru V , předpokládejme $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, a zvolme pevně ortonormální báze e, e' celého prostoru V tak, aby $U_1 = \langle e_1, \dots, e_k \rangle, U_2 = \langle e'_1, \dots, e'_l \rangle$.

Uvažujme kolmý průmět φ prostoru V na U_2 , jeho zúžení na U_1 budeme opět značit $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$. Zobrazení $\psi : U_2 \rightarrow U_1$ nechť vznikne podobně z kolmého průmětu na U_1 . Tato zobrazení mají v bazích (e_1, \dots, e_k) a (e'_1, \dots, e'_l) matice

$$A = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e'_1 & \dots & e_k \cdot e'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ e_1 \cdot e'_l & \dots & e_k \cdot e'_l \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e'_1 \cdot e_1 & \dots & e'_l \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ e'_1 \cdot e_k & \dots & e'_l \cdot e_k \end{pmatrix}.$$

Protože jde o skalární součiny na reálném vektorovém prostoru, platí $e_i \cdot e'_j = e'_j \cdot e_i$ pro všechny indexy i, j a proto zejména platí $B = A^T$.

Složené zobrazení $\psi \circ \varphi : U_1 \rightarrow U_1$ má tedy symetrickou pozitivně semidefinitní matici $A^T A$ a ψ je zobrazení adjungované k φ . Viděli jsme, že každé takové zobrazení má pouze nezáporná reálná vlastní čísla a že má ve vhodné ortonormální bázi diagonální matici s těmito vlastními čísly na diagonále, viz 3.29 a 3.31.

Nyní můžeme odvodit obecný postup pro výpočet odchylky $\alpha = \varphi(U_1, U_2)$.

Věta. V předchozím označení nechť je λ největší vlastní hodnota matice $A^T A$. Pak $(\cos \alpha)^2 = \lambda$.



DŮKAZ. Nechť $u \in U_1$ je vlastní vektor zobrazení $\psi \circ \varphi$ příslušný největší vlastní hodnotě λ . Uvažme všechna vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (včetně násobnosti) a nechť $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ je příslušná ortonormální báze U_1 z vlastních vektorů. Můžeme přímo předpokládat, že $\lambda = \lambda_1, u = u_1$.

Použité znaménko nerovnosti vyplývá z Cauchyovy nerovnosti, přičemž víme, že rovnost nastává právě pro $\underline{t} = c(\underline{u} \times \underline{v})$, $c \in \mathbb{R}$. Velikost objemu hledaného rovnoběžnostěnu tedy může být maximálně rovna velikosti obsahu rovnoběžníka daného vektory $\underline{u}, \underline{v}$ (tj. velikosti vektoru $(\underline{u} \times \underline{v})$). Rovnost nastane právě když

$$\underline{t} = \pm \frac{(\underline{u} \times \underline{v})}{\|(\underline{u} \times \underline{v})\|}.$$

 \square

4.32. Určete patu kolmice spuštěné z bodu $[0, 0, 7]$ na rovinu

$$\rho : [0, 5, 3] + (1, 2, 1)t + (-2, 1, 1)s.$$

4.33. V eukleidovském prostoru \mathbb{R}^5 stanovte vzdálenost rovin

$$\varrho_1 : [7, 2, 7, -1, 1] + t_1(1, 0, -1, 0, 0) + s_1(0, 1, 0, 0, -1),$$

$$\varrho_2 : [2, 4, 7, -4, 2] + t_2(1, 1, 1, 0, 1) + s_2(0, -2, 0, 0, 3),$$

kde $t_1, s_1, t_2, s_2 \in \mathbb{R}$, a poté vzdálenost rovin

$$\sigma_1 : [0, 1, 2, 0, 0] + p_1(2, 1, 0, 0, 1) + q_1(-2, 0, 1, 1, 0),$$

$$\sigma_2 : [3, -1, 7, 7, 3] + p_2(2, 2, 4, 0, 3) + q_2(2, 0, 0, -2, -1),$$

kde $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{R}$.

Řešení. Případ ϱ_1, ϱ_2 . Nejprve určíme ortogonální doplněk součtu zaměření zadaných dvou rovin tak, že směrové vektory rovin napíšeme do řádků matice a tuto matici pomocí elementárních řádkových transformací převedeme na schodovitý tvar. Tím dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledaný ortogonální doplněk tak je $\langle (0, 0, 0, 1, 0) \rangle$. (Pochopitelně bylo očividné, že vektor $(0, 0, 0, 1, 0)$ náleží do uvažovaného ortogonálního doplněku. Úpravou na schodovitý tvar jsme v ak zjistili, že ortogonální doplněk je jednodimenzionální.) Vzdálenost rovin je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A_1 - A_2$ do podprostoru $\langle (0, 0, 0, 1, 0) \rangle$ pro libovolné body $A_1 \in \varrho_1, A_2 \in \varrho_2$. Zvolme kupř. $A_1 = [7, 2, 7, -1, 1], A_2 = [2, 4, 7, -4, 2]$. Zřejmě je kolmý průmět $A_1 - A_2 = (5, -2, 0, 3, -1)$ do $\langle (0, 0, 0, 1, 0) \rangle$ roven $(0, 0, 0, 3, 0)$. Velikost vektoru $(0, 0, 0, 3, 0)$ dává výslednou vzdálenost 3.

Případ σ_1, σ_2 . Součet zaměření rovin σ_1, σ_2 je generován směrovými vektory. Označme je

$$u_1 = (2, 1, 0, 0, 1), \quad u_2 = (-2, 0, 1, 1, 0),$$

$$v_1 = (2, 2, 4, 0, 3), \quad v_2 = (2, 0, 0, -2, -1).$$

Nalezneme body $X_1 \in \sigma_1$, $X_2 \in \sigma_2$, ve kterých se vzdálenost rovin σ_1 , σ_2 realizuje. Víme, že je

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 &= [0, 1, 2, 0, 0] - [3, -1, 7, 7, 3] \\ &\quad + p_1 u_1 + q_1 u_2 - p_2 v_1 - q_2 v_2 \\ &= (-3, 2, -5, -7, -3) + p_1 u_1 + q_1 u_2 - p_2 v_1 - q_2 v_2 \end{aligned}$$

a že má platit

$$\begin{aligned} \langle X_1 - X_2, u_1 \rangle &= 0, & \langle X_1 - X_2, u_2 \rangle &= 0, \\ \langle X_1 - X_2, v_1 \rangle &= 0, & \langle X_1 - X_2, v_2 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \langle (-3, 2, -5, -7, -3), u_1 \rangle + p_1 \langle u_1, u_1 \rangle + q_1 \langle u_2, u_1 \rangle \\ - p_2 \langle v_1, u_1 \rangle - q_2 \langle v_2, u_1 \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (-3, 2, -5, -7, -3), u_2 \rangle + p_1 \langle u_1, u_2 \rangle + q_1 \langle u_2, u_2 \rangle \\ - p_2 \langle v_1, u_2 \rangle - q_2 \langle v_2, u_2 \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (-3, 2, -5, -7, -3), v_1 \rangle + p_1 \langle u_1, v_1 \rangle + q_1 \langle u_2, v_1 \rangle \\ - p_2 \langle v_1, v_1 \rangle - q_2 \langle v_2, v_1 \rangle = 0, \end{aligned} \quad \boxed{4.21}$$

$$\begin{aligned} \langle (-3, 2, -5, -7, -3), v_2 \rangle + p_1 \langle u_1, v_2 \rangle + q_1 \langle u_2, v_2 \rangle \\ - p_2 \langle v_1, v_2 \rangle - q_2 \langle v_2, v_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Vyčíslením těchto skalárních součinů získáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 6p_1 - 4q_1 - 9p_2 - 3q_2 &= 7, \\ -4p_1 + 6q_1 + 6q_2 &= 6, \\ 9p_1 - 33p_2 - q_2 &= 31, \\ 3p_1 - 6q_1 - p_2 - 9q_2 &= -11, \end{aligned}$$

kterou vyřešíme pomocí řádkových transformací v maticovém zápisu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -4 & -9 & -3 & 7 \\ -4 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 9 & 0 & -33 & -1 & 31 \\ 3 & -6 & -1 & -9 & -11 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Řešením této soustavy je tedy čtveřice $(p_1, q_1, p_2, q_2) = (0, -1, -1, 2)$. Určili jsme

$$X_1 - X_2 = (-3, 2, -5, -7, -3) - u_2 + v_1 - 2v_2 = (-3, 4, -2, -4, 2).$$

Velikost vektoru $(-3, 4, -2, -4, 2)$ a současně vzdálenost rovin σ_1 , σ_2 činí

$$7 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 2^2}.$$

Potřebujeme ukázat, že odchylka libovolného $v \in U_1$ od U_2 je nejméně tak velká jako odchylka u od U_2 . Tzn. že kosinus příslušného úhlu nesmí být větší. Podle předchozího lemmatu stačí diskutovat odchylku u a $\varphi(u) \in U_2$ a přitom víme, že $\|u\| = 1$. Zvolme tedy $v \in U_1$, $v = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$, $\sum_{i=1}^k a_i^2 = \|v\|^2 = 1$. Pak

$$\begin{aligned} \|\varphi(v)\|^2 &= \varphi(v) \cdot \varphi(v) = (\psi \circ \varphi(v)) \cdot v \\ &\leq \|\psi \circ \varphi(v)\| \|v\| = \|\psi \circ \varphi(v)\|. \end{aligned}$$

Předchozí lemma navíc dává i vzorec pro odchylku α vektoru v od podprostoru U_2

$$\cos \alpha = \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} = \|\varphi(v)\|.$$

Protože jsme zvolili za λ_1 největší z vlastních hodnot a součet kvadrátů souřadnic a_i^2 je jedna, dostáváme

$$\begin{aligned} (\cos \alpha)^2 &= \|\varphi(v)\|^2 \leq \|\psi \circ \varphi(v)\|^2 = \sum_{i=1}^k (\lambda_i a_i)^2 = \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 + \sum_{i=1}^k a_i^2 (\lambda_i^2 - \lambda_1^2)} \leq \sqrt{\lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Při $v = u$ dostáváme ovšem přesně $\|\varphi(v)\|^2 = \lambda_1^2 \|v\|^2 = \lambda_1^2$ a tedy odchylka dosahuje pro tento vektor minimální možné hodnoty. Tím je věta dokázána. \square

4.22. Počítání objemu. S náznakem počítání objemu jsme se již setkali v rovinné geometrii v konci páté části první kapitoly (viz 1.34). Zjistili jsme přitom, že podstatným pojmem je přitom tzv. orientace, kterou jsme si mohli představit jako rozhodnutí, zda se na naši rovinu \mathbb{R}^2 díváme zhora či zezdola. Rozdíl je přitom v pořadí standardních bázových vektorů e_1 a e_2 na jednotkové kružnici. Stejně postupujeme obecně:



ORIENTACE VEKTOROVÉHO PROSTORU

Říkáme, že dvě báze \underline{u} a \underline{v} reálného vektorového prostoru V určují stejnou orientaci, jestliže má matice přechodu mezi nimi kladný determinant. Formálněji vzato, orientací reálného vektorového prostoru V tedy rozumíme třídu ekvivalence bází \underline{u} vzhledem k ekvivalenci, kterou jsme pomocí znaménka determinantu právě zavedli. Ekvivalentním bázím v tomto smyslu také říkáme souhlasné se zvolenou orientací.

Přímo z definice pak vyplývá, že na každém vektorovém prostoru jsou právě dvě orientace. Z každé souhlasné báze získáme snadno nesouhlasnou pomocí libovolné matice přechodu se záporným determinatem.

Vektorový prostor se zvolenou orientací nazýváme *orientovaný vektorový prostor*.

Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní euklidovský prostor \mathcal{E}_n spolu s orientací zadanou standardní bází \mathbb{R}^n .

Nechť u_1, \dots, u_k , jsou libovolné vektory v zaměření \mathbb{R}^n , $A \in \mathcal{E}_n$ je libovolný bod. Rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$ jsme definovali jako příklad konvexní množiny

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \dots + c_k u_k; 0 \leq c_i \leq 1\}.$$

Jsou-li vektory u_1, \dots, u_k nezávislé, hovoříme o k -rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$. Pro dané vektory u_1, \dots, u_k máme k dispozici také rovnoběžnostěny menších dimenzí

$$\mathcal{P}_1(A; u_1), \dots, \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)$$

v euklidovských podprostorech $A + \langle u_1 \rangle, \dots, A + \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Jsou-li u_1, \dots, u_k lineárně závislé definujeme objem

$$\text{Vol } \mathcal{P}_k = 0.$$

Jinak uvažujeme jako při Grammově–Schmidtově ortogonalizaci

$$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^\perp \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle.$$

V tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u'_k + e_k$$

kde $e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle$.

Absolutní hodnotu objemu rovnoběžnostěnu definujeme induktivně tak, abychom naplnili představu, že jde o součin objemu „základny“ a „výšky“:



$$|\text{Vol } \mathcal{P}_1(A; u_1)| = \|u_1\|$$

$$|\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)| = \|e_k\| |\text{Vol } \mathcal{P}_{k-1}(A; u_1, \dots, u_{k-1})|.$$

Je-li u_1, \dots, u_n báze souhlasná s orientací V , definujeme (orientovaný) objem rovnoběžnostěnu

$$\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = |\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)|,$$

v případě neousuhlasné báze klademe

$$\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = -|\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)|.$$

Následující tvrzení objasňuje naše dřívější poznámky, že determinant je v jistém smyslu nástroj vyjadřující objem. První tvrzení totiž říká právě, že na k -rozměrném prostoru dostaneme objem rovnoběžnostěnu nataženého na k vektorů tak, že jejich souřadnice (v ortonormální bázi) napíšeme do sloupců matice a spočteme determinant.

Výrazu ve druhém tvrzení se říká *Grammův determinant*. Jeho výhoda je, že je zcela nezávislý na volbě báze a zejména se s ním proto lépe pracuje v případě k menšího než je dimenze celého prostoru.

Věta. Nechť $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$ je euklidovský podprostor a nechť (e_1, \dots, e_k) je jeho ortonormální báze. Pak pro libovolné vektory $u_1, \dots, u_k \in Z(\mathcal{Q})$ a $A \in \mathcal{Q}$ platí



Vzdálenost ϱ_1 od ϱ_2 jsme určovali odlišným způsobem než vzdálenost σ_1 od σ_2 . Uvedené metody jsme samozřejmě mohli použít v obou případech. Zkusme znovu vypočítat vzdálenost rovin ϱ_1, ϱ_2 postupem použitým k vyčíslení vzdálenosti rovin σ_1, σ_2 . Hledejme tedy ortogonální doplněk vektorového podprostoru generovaného vektory

$$(2, 1, 0, 0, 1), \quad (-2, 0, 1, 1, 0), \quad (2, 2, 4, 0, 3), \quad (2, 0, 0, -2, -1).$$

Snadno získáme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

odkud dostáváme ortogonální doplněk $\langle (-3/2, 2, -1, -2, 1) \rangle$, příp. jej raději zapišme jako $\langle (3, -4, 2, 4, -2) \rangle$. Připomeňme, že vzdálenost σ_1 vůči σ_2 se rovná velikosti kolmého průmětu vektoru (rozdílu libovolného bodu σ_1 a libovolného bodu σ_2)

$$u = (3, -2, 5, 7, 3) = [3, -1, 7, 7, 3] - [0, 1, 2, 0, 0]$$

do tohoto ortogonálního doplněku. Označme zmíněný kolmý průmět u symbolem p_u a polo me $v = (3, -4, 2, 4, -2)$. Zřejmě je $p_u = a \cdot v$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a má platit

$$\langle u - p_u, v \rangle = 0, \quad \text{tj.} \quad \langle u, v \rangle - a \langle v, v \rangle = 0.$$

Vyčíslení dává $49 - a \cdot 49 = 0$. Je tudíž $p_u = 1 \cdot v = v$ a vzdálenost rovin σ_1, σ_2 je rovna

$$\|p_u\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2 + 4^2 + (-2)^2} = 7.$$

Ukázalo se, že výpočet vzdálenosti pomocí ortogonálního doplněku součtu zaměření byl v předešlém příkladu „rychlejší cestou k výsledku“. Pro roviny ϱ_1 a ϱ_2 tomu bude nepochybně stejně. Druhá metoda ovšem dává body, ve kterých se vzdálenost realizuje (body, kde si jsou roviny nejbližší). Nalezneme proto s její pomocí takové body v případě rovin ϱ_1, ϱ_2 . Označme

$$u_1 = (1, 0, -1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0, 0, -1),$$

$$v_1 = (1, 1, 1, 0, 1), \quad v_2 = (0, -2, 0, 0, 3).$$

Body $X_1 \in \varrho_1, X_2 \in \varrho_2$, ve kterých se vzdálenost rovin realizuje, můžeme vyjádřit jako

$$X_1 = [7, 2, 7, -1, 1] + t_1 u_1 + s_1 u_2,$$

$$X_2 = [2, 4, 7, -4, 2] + t_2 v_1 + s_2 v_2,$$

a tedy

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 &= [7, 2, 7, -1, 1] - [2, 4, 7, -4, 2] \\ &\quad + t_1 u_1 + s_1 u_2 - t_2 v_1 - s_2 v_2 \\ &= (5, -2, 0, 3, -1) + t_1 u_1 + s_1 u_2 - t_2 v_1 - s_2 v_2. \end{aligned}$$

Skalární součiny

$$\begin{aligned}\langle X_1 - X_2, u_1 \rangle &= 0, & \langle X_1 - X_2, u_2 \rangle &= 0, \\ \langle X_1 - X_2, v_1 \rangle &= 0, & \langle X_1 - X_2, v_2 \rangle &= 0\end{aligned}$$

pak vedou na soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}2t_1 &= -5, \\ 2s_1 &+ 5s_2 = 1, \\ -4t_2 &- s_2 = -2, \\ -5s_1 &- t_2 - 13s_2 = -1\end{aligned}$$

s jediným řešením $t_1 = -5/2$, $s_1 = 41/2$, $t_2 = 5/2$, $s_2 = -8$. Získali jsem tak

$$\begin{aligned}X_1 &= [7, 2, 7, -1, 1] - \frac{5}{2}u_1 + \frac{41}{2}u_2 = \left[\frac{9}{2}, \frac{45}{2}, \frac{19}{2}, -1, -\frac{39}{2} \right], \\ X_2 &= [2, 4, 7, -4, 2] + \frac{5}{2}v_1 - 8v_2 = \left[\frac{9}{2}, \frac{45}{2}, \frac{19}{2}, -4, -\frac{39}{2} \right].\end{aligned}$$

Nyní ji snadno ověříme, že vzdálenost bodů X_1, X_2 (a současně vzdálenost rovin ϱ_1, ϱ_2) je $\|X_1 - X_2\| = \|(0, 0, 0, 3, 0)\| = 3$. \square

4.34. Najděte průnik kolmé roviny spuštěné z bodu $A = [1, 2, 3, 4] \in \mathbb{R}^4$ na rovinu

$$\varrho : [1, 0, 1, 0] + (1, 2, -1, -2)s + (1, 0, 0, 1)t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Nalezněme nejprve kolmou rovinu k ϱ . Její zaměření bude kolmé na zaměření ϱ , pro vektory (a, b, c, d) patřící do jejího zaměření dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) \cdot (1, 2, -1, -2) &= 0 \quad \equiv \quad a + 2b - c - 2d = 0 \\ (a, b, c, d) \cdot (1, 0, 0, 1) &= 0 \quad \equiv \quad a + d = 0.\end{aligned}$$

Její řešení je dvojdimenzionální vektorový prostor $\langle (0, 1, 2, 0), (-1, 0, -3, 1) \rangle$. Rovina τ kolmá k rovině ϱ procházející bodem A má tedy parametrické vyjádření

$$\tau : [1, 2, 3, 4] + (0, 1, 2, 0)u + (-1, 0, -3, 1)v, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Průnik rovin potom můžeme získat pomocí obou parametrických vyjádření. Pro parametry popisující průnik tedy dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}1 + s + t &= 1 - v \\ 2s &= 2 + u \\ 1 - s &= 3 + 2u - 3v \\ -2s + t &= 4 + v,\end{aligned}$$

kteřá má jediné řešení (musí tomu tak být, protože sloupce matice soustavy jsou dány lineárně nezávislými vektory zaměření obou rovin) $s = -8/19$, $t = 34/19$, $u = -54/19$, $v = -26/19$. Dosazením hodnot parametrů s a t do parametrického vyjádření roviny ϱ pak dostaneme souřadnice průniku $[45/19, -16/19, 11/19, 18/19]$ (stejný

$$\begin{aligned}(1) \text{ Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) &= \begin{vmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{vmatrix} \\ (2) (\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 &= \begin{vmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{vmatrix}\end{aligned}$$

DŮKAZ. Matice

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{pmatrix}$$

má ve sloupcích souřadnice vektorů u_1, \dots, u_k ve zvolené ortonormální bázi. Platí

$$\begin{aligned}|A|^2 &= |A||A| = |A^T||A| = |A^T A| \\ &= \begin{vmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že pokud platí (1), platí i (2).

Přímo z definice je neorientovaný objem roven součinu

$$|\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)| = \|v_1\| \|v_2\| \dots \|v_k\|,$$

kde $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + a_1^2 v_1, \dots, v_k = u_k + a_1^k v_1 + \dots + a_{k-1}^k v_{k-1}$ je výsledek Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Je tedy

$$\begin{aligned}(\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 &= \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 \cdot v_k & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Označme B matici jejíž sloupce jsou souřadnice vektorů v_1, \dots, v_k v ortonormální bázi \underline{e} . Protože v_1, \dots, v_k vznikly z u_1, \dots, u_k jako obrazy v lineární transformaci s horní trojúhelníkovou maticí C s jedničkami na diagonále, je $B = CA$ a $|B| = |C||A| = |A|$. Pak ovšem $|A|^2 = |B|^2 = |A||A|$, proto $\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \pm |A|$. Přitom pokud jsou vektory u_1, \dots, u_k závislé vyjde objem nulový, pokud jsou nezávislé, pak znaménko determinantu je kladné, právě když je báze u_1, \dots, u_k zadává stejnou orientaci jako báze \underline{e} . \square

V geometrické formulaci dostáváme jako velice důležitý důsledek následující tvrzení:

4.21b

4.23. Důsledek. Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ euklidovského vektorového prostoru V je $\det \varphi$ roven (orientovanému) objemu obrazu rovnoběžnostěnu určeného vektory ortonormální báze. Obecněji, obraz rovnoběžnostěnu \mathcal{P} určeného libovolnými $\dim V$ vektory má objem roven $\det \varphi$ -násobku původního objemu.

4.21a



4.24. Vnější a vektorový součin vektorů. Předchozí úvahy úzce souvisí s tzv. vnějším tensorovým součinem vektorů. Nebudeme zacházet podrobně do této technicky poněkud nepřehledné oblasti, ale zmíníme alespoň případ vnějšího součinu $n = \dim V$ vektorů $u_1, \dots, u_n \in V$.

Nechť $(u_{1j}, \dots, u_{nj})^T$ jsou souřadná vyjádření vektorů u_j v nějaké pevně zvolené ortonormální bázi V a M nechť je matice s prvky (u_{ij}) . Pak determinant $|M|$ nezávisí na volbě báze a jeho hodnotu nazýváme *vnějším součinem vektorů* u_1, \dots, u_n a značíme $[u_1, \dots, u_n]$. Vnější součin je tedy právě orientovaný objem příslušného rovnoběžnostěnu, viz 4.22.

Přímo z definice nyní vyplývají užitečné vlastnosti vnějšího součinu

- (1) Zobrazení $(u_1, \dots, u_n) \mapsto [u_1, \dots, u_n]$ je antisymetrické n -lineární zobrazení. Tzn., že je lineární ve všech argumentech a výměna dvou argumentů se vždy projeví změnou znaménka výsledku.
- (2) Vnější součin je nulový, právě když jsou vektory u_1, \dots, u_n lineárně závislé.
- (3) Vektory u_1, \dots, u_n tvoří kladnou bázi, právě když je jejich vnější součin kladný.

V technických aplikacích v prostoru \mathbb{R}^3 se často používá velmi úzce související operace, tzv. vektorový součin, který dvojici vektorů přiřazuje vektor třetí.

Uvažme obecný euklidovský vektorový prostor V dimenze $n \geq 2$ a vektory $u_1, \dots, u_{n-1} \in V$. Dosadíme-li těchto $n - 1$ vektorů jako prvních $n - 1$ argumentů n -lineárního zobrazení definovaného pomocí determinantu při výpočtu objemu výše, pak nám zbude jeden volný argument, tj. lineární forma na V . Protože však máme k dispozici skalární součin, odpovídá každá lineární forma právě jednomu vektoru. Tento vektor $v \in V$ nazveme *vektorový součin* vektorů u_1, \dots, u_{n-1} , tj. pro každý vektor $w \in V$ platí

$$\langle v, w \rangle = [u_1, \dots, u_{n-1}, w].$$

Značíme $v = u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.

Jsou-li v nějaké ortonormální bázi souřadnice našich vektorů $v = (y_1, \dots, y_n)^T$, $w = (x_1, \dots, x_n)^T$ a $u_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})^T$, naše definice má vyjádření

$$y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1(n-1)} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{n(n-1)} & x_n \end{vmatrix}$$

výsledek pochopitelně obdržíme, dosadíme-li hodnoty parametrů u a v do parametrického vyjádření roviny τ). \square

4.35. Bodem $[1, 2] \in \mathbb{R}^2$ vedte přímku, která má odchylku 30° od přímky

$$p : [0, 1] + t(1, 1).$$

Řešení. Odchylka dvou přímek je dána úhlem, který svírají jejich směrové vektory. Stačí tedy najít směrový vektor \underline{v} hledané přímky. Ten získáme například rotací směrového vektoru přímky p o 30° . Matice rotace o 30° je

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Hledaný vektor \underline{v} je tedy

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rotovat jsme mohli i v opačném smyslu. Hledaná přímka (jedna ze dvou možných) má tedy parametrické vyjádření

$$[1, 2] + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) t.$$

 \square

4.36. Určete $\cos \alpha$, kde α je odchylka dvou sousedních stěn pravidelného osmistěnu (těleso, jehož stěny tvoří osm rovnostranných trojúhelníků).

Řešení. Odchylky libovolných dvou sousedních stěn jsou ze symetrie osmistěnu shodné. Rovněž tak nezáleží na jeho velikosti. Uvažujme osmistěn s délkou hrany 1, který je umístěn do standardní kartézské souřadné soustavy v \mathbb{R}^3 tak, že jeho těžiště je v bodě $[0, 0, 0]$. Jeho vrcholy jsou pak v bodech $A = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0]$, $B = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$, $C = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0]$, $D = [0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$, $E = [0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ a $F = [0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Určeme odchylku stěn CDF a BCF . Ta je dána odchylkou vektorů kolmých na jejich průnik a ležících v daných stěnách, tedy vektorů kolmých na CF . Těmi jsou vektory dané výškami z bodů D , resp. F na stranu CF v trojúhelnících CDF , resp. BCF . Výšky v rovnostranném trojúhelníku splývají s těžnicemi, jedná se tedy o úsečky SD a SB , kde S je střed strany CF . Protože známe souřadnice bodů C a F , má bod S souřadnice $[-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}]$ a pro vektory máme $SD = (\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$ a $SB = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$. Celkem

$$\cos \alpha = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})}{\|(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})\| \|(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})\|} = -\frac{1}{3}.$$

Je tedy $\alpha \doteq 132^\circ$. \square

4.37. V bodovém eukleidovském prostoru \mathbb{R}^5 vypočítejte odchylku φ podprostorů U, V , jestli e je

$$(a) \quad U : [3, 5, 1, 7, 2] + t(1, 0, 2, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}, \\ V : [0, 1, 0, 0, 0] + s(2, 0, -2, 1, -1), \quad s \in \mathbb{R};$$

$$(b) \quad U : [4, 1, 1, 0, 1] + t(2, 0, 0, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R}, \\ V : x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 7;$$

$$(c) \quad U : 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ V : x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = -1;$$

$$(d) \quad U : [0, 1, 1, 0, 0] + t(0, 0, 0, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}, \\ V : [1, 0, 1, 1, 1] + r(1, -1, 2, 1, 0) + s(0, 1, 3, 2, 0) \\ + p(1, 0, 0, 1, 0) + q(1, 3, 1, 0, 0), \quad r, s, p, q \in \mathbb{R};$$

$$(e) \quad U : [0, 2, 5, 0, 0] + t(2, 1, 3, 5, 3) + s(0, 3, 1, 4, -2) \\ + r(1, 2, 4, 0, 3), \quad t, s, r \in \mathbb{R}, \\ V : [0, 0, 0, 0, 0] + p(-1, 1, 1, -5, 0) \\ + q(1, 5, 1, 13, -4), \quad p, q \in \mathbb{R};$$

$$(f) \quad U : [1, 1, 1, 1, 1] + t(1, 0, 1, 1, 1) + s(1, 0, 0, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}, \\ V : [1, 1, 1, 1, 1] + p(1, 1, 1, 1, 1) + q(1, 1, 0, 1, 1) \\ + r(1, 1, 0, 1, 0), \quad p, q, r \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Nejdříve připomeňme, že odchylka afinních podprostorů je definována jako odchylka jejich zaměření, a proto při počítání φ nezohledňujeme posunutí vyjádřená přičtením bodu (příp. pravé strany soustav rovnic).

Varianta (a). Neboť oba podprostory U a V jsou jednodimenziální, odchylka $\varphi \in [0, \pi/2]$ je dána vzorcem

$$\cos \varphi = \frac{|(1,0,2,-2,1) \cdot (2,0,-2,1,-1)|}{\|(1,0,2,-2,1)\| \cdot \|(2,0,-2,1,-1)\|} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}.$$

Je tedy $\cos \varphi = 1/2$, tj. $\varphi = \pi/3$.

Varianta (b). Známe směrový vektor $(2, 0, 0, 2, 1)$ podprostoru U a normálový vektor $(1, 1, 1, 0, 1)$ podprostoru V . Snadno můžeme stanovit úhel $\psi = \pi/3$, který svírají, a to ze vztahu

$$\cos \psi = \frac{(2,0,0,2,1) \cdot (1,1,1,0,1)}{\|(2,0,0,2,1)\| \cdot \|(1,1,1,0,1)\|} = \frac{3}{3 \cdot 2}.$$

Nyní si stačí uvědomit, e je $\varphi = \pi/2 - \psi = \pi/6$ (odchylka φ je doplňkem úhlu ψ).

Varianta (c). Nadroviny U a V jsou zadány pomocí normálových vektorů $u = (2, -1, 2, 0, 1)$ a $v = (1, 2, 2, 0, 1)$. Zřejmě je odchylka φ rovna úhlu, který svírají přímky se směrovými vektory u a v . Platí tudíž (viz variantu (a))

$$\cos \varphi = \frac{|(2,-1,2,0,1) \cdot (1,2,2,0,1)|}{\|(2,-1,2,0,1)\| \cdot \|(1,2,2,0,1)\|} = \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Varianta (d). Označme

Odtud je přímo vidět, že vektor v je zadán jednoznačně a jeho souřadnice spočteme formálním rozvojem tohoto determinantu podle posledního sloupce. Zároveň jsou přímo z definice očekávatelné následující vlastnosti vektorového součinu:

Věta. Pro vektorový součin $v = u_1 \times \dots \times u_{n-1}$ platí

- (1) $v \in \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle^\perp$
- (2) v je nenulový vektor, právě když jsou vektory u_1, \dots, u_{n-1} lineárně nezávislé,
- (3) velikost $\|v\|$ vektorového součinu je rovna absolutní hodnotě objemu rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}(0; u_1, \dots, u_{n-1})$,
- (4) (u_1, \dots, u_{n-1}, v) je souhlasná báze orientovaného eukleidovského prostoru V .



DŮKAZ. První tvrzení plyne přímo z definičního vztahu pro v , protože dosazením libovolného vektoru u_j za w máme nalevo skalární součin $v \cdot u_j$ a napravo determinant s dvěma shodnými sloupci.

Hodnota matice s $n-1$ sloupci u_j je dána maximální velikostí nenulového minoru. Minory, které zadávají souřadnice vektorového součinu jsou stupně $n-1$ a tím je dokázáno tvrzení (2).

Jsou-li vektory u_1, \dots, u_{n-1} závislé, pak platí i (3). Nechť jsou tedy nezávislé, v je jejich vektorový součin a zvolme libovolnou ortonormální bázi (e_1, \dots, e_{n-1}) prostoru $\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$. Z již dokázaného vyplývá, že existuje nějaký násobek $(1/\alpha)v$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, takový, že $(e_1, \dots, e_k, (1/\alpha)v)$ je ortonormální báze celého V . Souřadnice našich vektorů v této bázi jsou

$$u_j = (u_{1j}, \dots, u_{(n-1)j}, 0)^T, \quad v = (0, \dots, 0, \alpha)^T.$$

Proto je vnější součin $[u_1, \dots, u_{n-1}, v]$ roven (viz. definice vektorového součinu)

$$[u_1, \dots, u_{n-1}, v] = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & \dots & u_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{vmatrix} \\ = \langle v, v \rangle = \alpha^2.$$

Rozvojem determinantu podle posledního sloupce zároveň obdržíme

$$\alpha^2 = \alpha \text{Vol } \mathcal{P}(0; u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Odtud už vyplývají obě zbylá tvrzení věty. \square

4.25. Afinní a euklidovské vlastnosti. Nyní se můžeme zamyslet nad tím, které vlastnosti jsou vlastní už afinním prostorům a zobrazením a na co skutečně teprve potřebujeme v zaměření skalární součin.

Je samozřejmé, že všechny euklidovské transformace, tj. bijektivní afinní zobrazení euklidovských prostorů, které zachovává vzdálenosti bodů, zachovávají všechny výše studované objekty. Tj. zachovávají kromě vzdáleností také neorientované úhly, neorientované objemy, odchylky podprostorů apod. Pokud chceme, aby zachovávaly i orientované úhly, vektorové součiny, objemy, pak musíme navíc předpokládat, že naše transformace zachovávají orientaci.

Naši otázku také můžeme přeformulovat takto: *Které koncepty euklidovské geometrie zůstávají zachovány při afinních transformacích?*

Připomněme nejprve, že afinní transformace na n -rozměrném prostoru \mathcal{A} je jednoznačně zadána zobrazením $n + 1$ bodů v obecné poloze, tj. zobrazením jednoho n -rozměrného simplexu. V rovině to znamená volbu obrazu jediného (nedegenerovaného) trojúhelníku, který ale můžeme zobrazit na jakýkoliv (nedegenerovaný) trojúhelník. Zachovány přitom zůstanou zejména příslušnosti k podprostorům, tj. vlastnosti typu „přímka prochází bodem“ nebo „rovina obsahuje přímku“ apod. Zároveň zůstává zachována kolinearita vektorů a pro každé dva kolineární vektory zůstává samozřejmě zachován poměr jejich velikostí (a to nezávisle, jakým skalárním součinem jejich velikost definujeme). Stejně jsme již viděli, že poměr objemů dvou n -rozměrných rovnoběžnostěnů zůstane po transformaci zachován (protože se zobrazením změní o stejný násobek determinantem příslušné matice).

V rovině lze tyto afinní vlastnosti velmi elegantně používat k důkazům geometrických tvrzení. Např. skutečnost, že se těžnice trojúhelníku všechny protínají v jednom bodě a zároveň v jedné třetině svých délek stačí ověřit na pravouhlém rovnoramenném trojúhelníku nebo pouze na rovnostranném trojúhelníku a odtud už nutně vlastnost vyplývá pro všechny trojúhelníky. Promyslete si tuto argumentaci podrobně!

2. Geometrie kvadratických forem

V analytické geometrii roviny jsou po přímkách jako další nejjednodušší křivky na řadě tzv. kuželosečky. Jsou v kartézských souřadnicích zadány kvadratickými rovnicemi a podle koeficientů poznáme, zda jde o kružnici, elipsu, parabolu nebo hyperbolu, případně ještě může jít o dvě přímky nebo bod (degenerované případy).

Uvidíme, že naše nástroje umožní vcelku účinnou klasifikaci takovýchto objektů v libovolných konečných dimenzích i práci s nimi. Je přitom zřejmé, že v afinní geometrii nemůžeme odlišit kružnici od elipsy, proto začneme v geometrii euklidovské.

4.24

4.26. Kvadriky v \mathcal{E}_n . V analogii k rovnicím kuželoseček v rovině začneme poznámkami o objektech v euklidovských bodových prostorech, které jsou v dané ortonormální bázi zadány kvadratickými rovnicemi, hovoříme o *kvadrikách*.

$$u = (0, 0, 0, 1, -1), \quad v_1 = (1, -1, 2, 1, 0),$$

$$v_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0, 1, 0), \quad v_4 = (1, 3, 1, 0, 0)$$

a jako p_u označme ortogonální projekci (kolmý průmět) vektoru u do zaměření podprostoru V (do vektorového podprostoru generovaného vektory v_1, v_2, v_3, v_4). Určíme-li p_u , ze vzorce

$$(4.2) \quad \cos \varphi = \frac{\|p_u\|}{\|u\|}$$

pak totiž obdržíme $\varphi \in [0, \pi/2]$. Víme, e

$$p_u = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 \quad \text{pro jisté hodnoty } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

a že má být

$$\langle p_u - u, v_1 \rangle = 0, \quad \langle p_u - u, v_2 \rangle = 0,$$

$$\langle p_u - u, v_3 \rangle = 0, \quad \langle p_u - u, v_4 \rangle = 0.$$

Odtud (dosazením za p_u) dostáváme systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 7a + 7b + 2c &= 1, \\ 7a + 14b + 2c + 6d &= 2, \\ 2a + 2b + 2c + d &= 1, \\ 6b + c + 11d &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $(a, b, c, d) = (-8/19, 7/19, 13/19, -5/19)$, a tak

$$p_u = -\frac{8}{19}v_1 + \frac{7}{19}v_2 + \frac{13}{19}v_3 - \frac{5}{19}v_4 = (0, 0, 0, 1, 0),$$

$$\cos \varphi = \frac{\|(0, 0, 0, 1, 0)\|}{\|(0, 0, 0, 1, -1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Je tedy $\varphi = \pi/4$.

Varianta (e). Stanovme průnik zaměření uvedených podprostorů.

Vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ nale í do zaměření U , právě kdy je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$

$$t(2, 1, 3, 5, 3) + s(0, 3, 1, 4, -2) + r(1, 2, 4, 0, 3)$$

pro jistá $t, s, r \in \mathbb{R}$, a současně $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$ (V je svým zaměření) tehdy a jenom tehdy, kdy je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = p(-1, 1, 1, -5, 0) + q(1, 5, 1, 13, -4)$$

pro jistá $p, q \in \mathbb{R}$. Hledejme proto taková $t, s, r, p, q \in \mathbb{R}$, aby platilo

$$t(2, 1, 3, 5, 3) + s(0, 3, 1, 4, -2) + r(1, 2, 4, 0, 3)$$

$$= p(-1, 1, 1, -5, 0) + q(1, 5, 1, 13, -4).$$

Jedná se o homogenní soustavu rovnic, kterou můžeme řešit v maticovém zápisu její levé strany (při pořadí proměnných t, s, r, p, q)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 0 & 5 & -13 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukázalo se, e vektory zadávající podprostor V jsou lineární kombinací vektorů ze zaměření podprostoru U . To ovšem znamená, e V je podmnožinou zaměření U , a tudíž je $\varphi = 0$.

Varianta (f). Opět nalezneme průnik zaměření U a V . Analogicky jako v předešlé variantě hledíme čísla $t, s, p, q, r \in \mathbb{R}$, pro která je

$$t(1, 0, 1, 1, 1) + s(1, 0, 0, 1, 1) = \\ p(1, 1, 1, 1, 1) + q(1, 1, 0, 1, 1) + r(1, 1, 0, 1, 0).$$

Řešením této soustavy je $(t, s, p, q, r) = (-a, a, -a, a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

Do průniku $Z(U) \cap Z(V)$ zaměření U a V tak náleží právě vektory

$$(0, 0, -a, 0, 0) = -a(1, 0, 1, 1, 1) + a(1, 0, 0, 1, 1) \\ = -a(1, 1, 1, 1, 1) + a(1, 1, 0, 1, 1) + 0(1, 1, 0, 1, 0),$$

kde $a \in \mathbb{R}$, tj. $Z(U) \cap Z(V)$ je podprostorem generovaným vektorem $(0, 0, 1, 0, 0)$ a jeho ortogonální doplněk $(Z(U) \cap Z(V))^\perp$ je zjevně generován vektory

$$(1, 0, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 0, 1). \quad \square_{25}$$

Zvláště dostáváme

$$Z(U) \cap Z(V) \neq \{0\}, \quad Z(U) \cap Z(V) \neq Z(U), \\ Z(U) \cap Z(V) \neq Z(V).$$

Odchylka φ je tedy definována jako odchylka podprostorů

$$Z(U) \cap (Z(U) \cap Z(V))^\perp \quad \text{a} \quad Z(V) \cap (Z(U) \cap Z(V))^\perp.$$

Dále je vidět, e je

$$Z(U) \cap (Z(U) \cap Z(V))^\perp = \langle (1, 0, 0, 1, 1) \rangle, \\ Z(V) \cap (Z(U) \cap Z(V))^\perp = \langle (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle.$$

Postačuje totiž vyjádřit $Z(U)$ jako lineární kombinaci vektorů

$$(0, 0, 1, 0, 0), \quad (1, 0, 0, 1, 1)$$

a podprostor $Z(V)$ pomocí vektorů

$$(0, 0, 1, 0, 0), \quad (1, 1, 0, 1, 1), \quad (1, 1, 0, 1, 0).$$

Protože dimenze prostoru $Z(U) \cap (Z(U) \cap Z(V))^\perp$ je 1, můžeme použít vzorec (4.2), kde $u = (1, 0, 0, 1, 1)$ a p_u je kolmá projekce u do $Z(V) \cap (Z(U) \cap Z(V))^\perp$. Má být

$$p_u = a(1, 1, 0, 1, 1) + b(1, 1, 0, 1, 0)$$

a má platit

$$\langle p_u - u, (1, 1, 0, 1, 1) \rangle = 0, \quad \langle p_u - u, (1, 1, 0, 1, 0) \rangle = 0,$$

což vede na soustavu rovnic

$$4a + 3b = 3, \\ 3a + 3b = 2$$

s jediným řešením $a = 1$, $b = -1/3$. Tímto jsme určili

$$p_u = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1\right)$$

Zvolme v \mathcal{E}_n pevně kartézskou souřadnou soustavu (tj. bod a ortonormální bázi zaměření) a uvažme obecnou kvadratickou rovnici pro souřadnice $(x_1, \dots, x_n)^T$ bodů $A \in \mathcal{E}_n$



$$(4.4) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^n 2a_ix_i + a = 0,$$

kde bez újmy na obecnosti můžeme rovnou předpokládat symetrii $a_{ij} = a_{ji}$. Tuto rovnici můžeme zapsat jako

$$f(u) + g(u) + a = 0$$

pro kvadratickou formu f (tj. zúžení symetrické bilineární formy F na dvojici stejných argumentů), lineární formu g a skalár $a \in \mathbb{R}$ a předpokládáme že alespoň jeden z koeficientů a_{ij} je nenulový (jinak by se jednalo o lineární rovnici popisující euklidovský podprostor).

Všimněme si také, že jakákoliv euklidovská (nebo i afinní) transformace souřadnic převede rovnici (4.4) opět na stejný tvar s kvadratickou, lineární a konstantní částí.

4.27. Kvadratické formy. Začneme naši diskuzi rovnice (4.4) její kvadratickou částí, tj. bilineární symetrickou formou $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Stejně dobře můžeme přemýšlet o obecné symetrické bilineární formě na libovolném vektorovém prostoru.

Pro libovolnou bázi na tomto vektorovém prostoru bude hodnota $f(x)$ na vektoru $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ dána vztahem

$$f(x) = F(x, x) = \sum_{i,j} x_i x_j F(e_i, e_j) = x^T \cdot A \cdot x$$

kde $A = (a_{ij})$ je symetrická matice s prvky $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Takovýmto zobrazením f říkáme *kvadratické formy* a výše uvedený vzorec pro hodnotu formy s použitím zvolených souřadnic se nazývá *analytický tvar* formy.

Obecně rozumíme kvadratickou formou zúžení $f(x)$ jakékoliv symetrické bilineární formy $F(x, y)$ na argumenty tvaru (x, x) . Evidentně umíme z hodnot $f(x)$ zrekonstruovat celou bilineární formu F , protože

$$f(x + y) = F(x + y, x + y) = f(x) + f(y) + 2F(x, y).$$

Jestliže změníme bázi e_i na jinou bázi e'_1, \dots, e'_n , dostaneme pro stejný vektor jiné souřadnice $x = S \cdot x'$ (zde S je příslušná matice přechodu) a tedy

$$f(x) = (S \cdot x')^T \cdot A \cdot (S \cdot x') = (x')^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot x'.$$

Předpokládejme opět, že je na našem vektorovém prostoru zadán skalární součin. Předchozí výpočet pak můžeme shrnout slovy, že matice bilineární formy F a tedy i kvadratické formy f se transformuje při změně souřadnic způsobem, který pro ortogonální změny souřadnic splývá s transformací matic zobrazení (skutečně, pak je $S^{-1} = S^T$). Tento výsledek můžeme intepretovat také jako následující pozorování:

Tvrzení. Necht' V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Pak vztah

$$\varphi \mapsto F, \quad F(u, u) = \langle \varphi(u), u \rangle$$

zadává bijekci mezi symetrickými lineárními zobrazeními a kvadratickými formami na V . □

DŮKAZ. Skutečně, bilineární forma s pevně zadaným druhým argumentem je lineární formou $\alpha_u(\cdot) = F(\cdot, u)$ a v přítomnosti skalárního součinu je nutně dána vztahem $\alpha(u)(v) = v \cdot w$ pro vhodný vektor w . Klademe $\varphi(u) = w$. Přímo ze vztahu v souřadnicích výše pak vyplývá, že φ je lineární zobrazení s maticí A . Je tedy samoadjungované.

Naopak, každé symetrické zobrazení φ zadává vztahem $F(u, v) = \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$ symetrickou bilineární formu a jejím zúžením kvadratickou formu. □

Z tohoto tvrzení vyplývá okamžitý důsledek, že pro každou kvadratickou formu f existuje ortonormální báze zaměření, ve které má f diagonální matici (a diagonální hodnoty jsou jednoznačně určeny až na pořadí).

Díky ztotožnění kvadratických forem se zobrazeními můžeme také korektně zavést *hodnot kvadratické formy* jakožto hodnotu její matice v kterékoliv bázi (tj. hodnota je rovna dimenzi obrazu příslušného zobrazení φ).

4.26

4.28. Klasifikace kvadrik. Vraťme se k naší rovnici (4.4). Naše výsledky o kvadratických formách nám umožňují dosáhnout rovnice ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + b = 0.$$

Můžeme tedy přímo předpokládat, že ji v takovém tvaru máme a v dalším kroku pro souřadnice x_i s $\lambda_i \neq 0$ provedeme doplnění do čtverců, které „pohltní“ kvadráty i lineární členy týchž neznámých (tzv. Lagrangeův algoritmus, kterému se budeme obecněji věnovat níže). Tak nám zůstanou nejvýše ty neznámé, pro které byl jejich koeficient u kvadrátu nulový, a získáme tvar

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - p_i)^2 + \sum_{j \text{ splňující } \lambda_j = 0} b_j x_j + c = 0.$$

To odpovídá posunutí počátku souřadnic o vektor se souřadnicemi p_i a zároveň volbě báze zaměření tak, abychom dostali požadovaný diagonální tvar v kvadratické části. Ve výše odvozeném ztotožnění forem se symetrickými zobrazeními to znamená, že φ je diagonální na ortogonálním doplněku svého jádra. Pokud nám opravdu zůstaly nějaké lineární členy, můžeme upravit ortonormální bázi zaměření na jádru zobrazení φ tak, aby odpovídající lineární forma byla

a z (4.2) již plyne

$$\cos \varphi = \frac{\|(2/3, 2/3, 0, 2/3, 1)\|}{\|(1, 0, 0, 1, 1)\|} = \frac{\sqrt{7}}{3}, \quad \text{tj. } \varphi \doteq 0,49 \ (\approx 28^\circ).$$

C. Geometrie kvadratických forem

4.38. Určete polární bázi formy $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$.

Řešení. Její matice je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Podle bodu (1) Lagrangeova algoritmu provedeme úpravy

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{3}(3x_1 + x_2)^2 + \frac{2}{3}x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2 \\ &= \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}y_2 + 2y_3\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}z_1^2 + \frac{3}{2}z_2^2 \end{aligned}$$

a vidíme, že forma má hodnotu 2 a matice přechodu do příslušné polární báze \underline{w} se získá posbíráním provedených transformací:

$$z_3 = y_3 = x_3, \quad z_2 = \frac{2}{3}y_2 + 2y_3 = \frac{2}{3}x_2 + 2x_3, \quad z_1 = y_1 = 3x_1 + x_2$$

Pokud by ale např. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + x_2^2$, tj. matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pak hned v prvním kroku můžeme přehodit proměnné: $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$, $y_3 = x_3$. Aplikace kroku (1) je pak triviální (nejsou tu žádné společné členy), pro další krok ale nastane situace z bodu (4). Zavedeme tedy transformaci $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3 - y_2$. Pak

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + 2z_2(z_3 + z_2) = z_1^2 + \frac{1}{2}(2z_2 + z_3)^2 - \frac{1}{2}z_3^2.$$

Matici přechodu do příslušné polární báze opět dostaneme posbíráním jednotlivých transformací (tj. vynásobením jednotlivých dílčích matic přechodu). □

4.39. Nalezněte polární bázi kvadratické formy $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, která je ve standardní bázi dána předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3.$$

Řešení. Aplikací uvedeného Lagrangeova algoritmu dostáváme:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_2x_3$$

provedeme substituci podle bodu (4) algoritmu $y_2 = x_2 - x_1, y_1 = x_1, y_3 = x_3$

$$\begin{aligned} &= 2x_1(x_1 + y_2) + (x_1 + y_2)x_3 = 2x_1^2 + 2x_1y_2 + x_1x_3 + y_2x_3 = \\ &= \frac{1}{2}(2x_1 + y_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{8}x_3^2 + y_2x_3 = \end{aligned}$$

substituce $y_1 = 2x_1 + y_2 + \frac{1}{2}x_3$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{8}x_3^2 + y_2x_3 = \frac{1}{2}y_1^2 - 2(\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{3}{8}x_3^2 =$$

substituce $y_3 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_3$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 - 2y_3^2 + \frac{3}{8}x_3^2.$$

4.27

V souřadnicích y_1, y_3, x_3 má tedy daná kvadratická forma diagonální tvar, to znamená že báze příslušná těmto souřadnicím je polární bázi dané kvadratické formy. Pokud ji máme vyjádřit musíme získat matici přechodu od této polární báze ke standardní bázi. Z definice matice přechodu jsou pak její sloupce bázovými vektory polární bázi. Matici přechodu získáme tak, že buď vyjádříme staré proměnné (x_1, x_2, x_3) pomocí nových proměnných (y_1, y_3, x_3) , nebo ekvivalentně vyjádříme nové proměnné pomocí starých (což jde jednodušeji), pak ale musíme spočítat inverzní matici.

Máme $y_1 = 2x_1 + y_2 + \frac{1}{2}x_3 = 2x_1 + (x_2 - x_1) + \frac{1}{2}x_3$ a $y_3 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_3$. Matice přechodu od standardní báze ke zvolené polární je tedy

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro inverzní matici pak máme

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedna z polárních bází dané kvadratické formy je tedy například báze $\{(1/3, 1/3, 0), (-2/3, 4/3, 0), (-1/2, 1/2, 1)\}$. □

4.28

4.40. Určete typ kuželosečky dané rovnicí:

$$3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2 - 1 = 0.$$

Řešení. Pomocí algoritmu úpravy na čtverec postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2 - 1 &= \frac{1}{3}(3x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{3}{4}x_2^2 + x_2 - 1 = \\ &= \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{4}{3}(\frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3} - 1 = \\ &= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{4}{3}y_2^2 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Podle seznamu kuželoseček 4.25 se tedy jedná o hyperbolu. □

násobkem prvního prvku duální báze. Umíme tedy již dosáhnout výsledného tvaru

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i y_i^2 + by_{k+1} + c = 0,$$

kde k je hodnota matice kvadratické formy f . Pokud je $b \neq 0$, můžeme ještě další změnou počátku dosáhnout vynulování konstanty c v rovnici.

Celkem si tedy shrňme, že lineární člen se může (ale nemusí) objevit jen pokud je hodnota f menší než n , $c \in \mathbb{R}$ může být nenulové pouze když je $b = 0$. Výsledné rovnice nazýváme *kanonickými analytickými tvary* kvadrik.

4.29. Případ \mathcal{E}_2 . Pro ilustraci předchozího postupu projdeme celou diskusi ještě jednou pro nejjednodušší případ netriviální dimenze. Původní rovnice má tvar



$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0.$$

Volbou vhodné báze zaměření a následným doplněním čtverců dosáhneme tvaru (opět používáme stejného značení x, y pro nové souřadnice):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

kde a_i může být nenulové pouze v případě, že a_{ii} je nulové. Posledním krokem obecného postupu, tj. v dimenzi $n = 2$ jen případnou volbou posunutí, dosáhneme právě jedné z rovnic:

$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1$	prázdná množina
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$	elipsa
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1$	hyperbola
$0 = x^2/a^2 - 2py$	parabola
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2$	bod
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2$	2 různoběžné přímky
$0 = x^2 - a^2$	2 rovnoběžné přímky
$0 = x^2$	2 splývající přímky
$0 = x^2 + a^2$	prázdná množina

Počátek kartézských souřadnic je *středem* zkoumané kuželosečky, nalezená ortonormální báze zaměření zadává směr *poloos*, výsledné koeficienty a, b pak dávají velikosti poloos v nedegenerovaných směrech.

4.30. Afinní pohled. V předchozích dvou odstavcích jsme hledali podstatné vlastnosti a standardizované analytické popisy objektů zadávaných v euklidovských prostorech kvadratickými rovnicemi.



Hledali jsme přitom co nejjednodušší rovnice v mezích daných volností výběru kartézských souřadnic. Geometrická formulace našeho výsledku pak může být taková, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje *euklidovská transformace* na \mathcal{E}_n (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic. Navíc můžeme při

našem postupu přímo získat kartézské souřadnice, ve kterých jsou naše objekty dány výslednými kanonickými tvary, a tím i explicitní vyjádření euklidovské transformace, která naše objekty na sebe převádí (jak víme bude vždy složena z operací posunutí, otočení a zrcadlení vůči nadrovině).

Pochopitelně se můžeme ptát, do jaké míry umíme podobnou věc v afinních prostorech s volností výběru jakékoliv afinní souřadné soustavy. Např. v rovině to bude znamenat, že neumíme rozlišit kružnici od elipsy, samozřejmě bychom přitom měli odlišit hyperbolu a všechny ostatní typy kuželoseček. Hlavně ale splynou mezi sebou všechny hyperboly atd.

Ukážeme si hlavní rozdíl postupu na kvadratických formách a k záležitosti se pak ještě vrátíme ve třetí části této kapitoly.

Uvažme nějakou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru V a její analytické vyjádření $f(u) = x^T A x$ vzhledem ke zvolené bázi na V . Pro vektor $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ pak také zapisujeme formu f ve tvaru

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j,$$

V předchozích odstavcích jsme již s využitím skalárního součinu ukázali, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. že pro příslušnou symetrickou formu F bude platit $F(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Každou takovou bázi nazýváme *polární báze* kvadratické formy f . Samozřejmě si pro takový účel můžeme vždy skalární součin vybrat. Dokážeme si ale toto tvrzení znovu bez využití skalárních součinů tak, že získáme daleko jednodušší algoritmus na to, jak takovou polární bázi najít mezi všemi bazemi. Tím se zároveň dovíme podstatné informace o afinních vlastnostech kvadratických forem. Následující věta bývá v literatuře uváděna pod názvem *Lagrangeův algoritmus*.

Věta. *Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V existuje polární báze pro f .*

DŮKAZ. (1) Nechť A je matice f v bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V a předpokládejme $a_{11} \neq 0$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{22}x_2^2 + \dots \\ &= a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 \\ &\quad + \text{členy neobsahující } x_1. \end{aligned}$$

Provedeme tedy transformaci souřadnic (tj. změnu báze) tak, aby v nových souřadnicích bylo

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \quad x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n.$$

To odpovídá nové bázi (spočtete si jako cvičení příslušnou matici přechodu!)

$$v_1 = a_{11}^{-1}u_1, \quad v_2 = u_2 - a_{11}^{-1}a_{12}u_1, \dots, \quad v_n = u_n - a_{11}^{-1}a_{1n}u_1$$

a tak, jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerární forma splňovat $g(v_i, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$

4.41. Klasifikace kuželoseček. O typu kuželosečky můžeme rozhodnout i bez úpravy na některý z tvarů uvedený v seznamu 4.25. Jak již víme, každou kuželosečku můžeme napsat ve tvaru

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

$$\text{Determinanty} \quad \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

jsou tzv. invariantami kuželosečky, což znamená, že se nemění při eukleidovské transformaci souřadnic (rotace a posunutí) navíc různé typy kuželoseček mají různá znaménka těchto determinantů.

- $\Delta \neq 0$ vlastní kuželosečky:
elipsa pro $\delta > 0$, hyperbola pro $\delta < 0$ a parabola pro $\delta = 0$
Aby šlo o reálnou elipsu, nikoliv imaginární, musí být navíc $(a_{11} + a_{22})\Delta < 0$.
- $\Delta = 0$ nevlastní kuželosečky (degenerované), přímky

Důkaz invariance vzhledem k transformaci souřadnic:

Označme $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ a A je matice kvadratické formy. Pak příslušná kuželosečka má tvar $X^T A X = 0$. Kuželosečku ve středovém základním tvaru dostaneme otočením a posunutím, tedy transformací do nových souřadnic x', y' , pro které platí

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + c_1 \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + c_2, \end{aligned}$$

tedy maticově pro nové souřadnice $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$ platí

$$(4.3) \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & c_1 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = M X'.$$

Dosažením vztahu $X = M X'$ do rovnice kuželosečky, pak dostáváme rovnici kuželosečky v nových souřadnicích, tj.

$$\begin{aligned} X^T A X &= 0 \\ (M X')^T A (M X') &= 0 \\ X'^T M^T A M X' &= 0. \end{aligned}$$

Označme A' matici kvadratické formy kuželosečky v nových souřadnicích. Pak tedy $A' = M^T A M$, kde matice $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & c_1 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ má jednotkový determinant, tedy

$$\det A' = \det M^T \det A \det M = \det A = \Delta.$$

Nutně také determinant A_{33} , který je algebraickým doplňkem prvku a_{33} je nezávislý na změně souřadnic, protože pro nulové posunutí

- tedy pouze otočení - je vztah $\det A' = \det M^T \det A \det M$ také platný. V tom případě matice $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\det A'_{33} = \det A_{33} = \delta$. Pro samotné posunutí je matice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a tento subdeterminant neovlivňuje.

4.42. Určete typ kuželosečky $2x^2 - 2xy + 3y^2 - x + y - 1 = 0$.

Řešení. Determinant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 5 > 0$ jde tedy o elipsu, která je reálná, protože $(a_{11} + a_{22})\Delta = (2 + 3) \cdot (-\frac{23}{4}) < 0$. \square

4.43. Určete typ kuželosečky $x^2 - 4xy - 5y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$.

Řešení. Determinant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 9 < 0$,

jde tedy o hyperbolu. \square

4.44. Určete rovnici kuželosečky (a poté její typ), která prochází body

$$[-2, -4], \quad [8, -4], \quad [0, -2], \quad [0, -6], \quad [6, -2].$$

Řešení. Do obecné rovnice kuželosečky

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0$$

postupně dosadíme souřadnice zadaných bodů. Takto obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 4a_{11} + 16a_{22} + 16a_{12} - 2a_1 - 4a_2 + a &= 0, \\ 64a_{11} + 16a_{22} - 64a_{12} + 8a_1 - 4a_2 + a &= 0, \\ 4a_{22} &= 2a_2 + a = 0, \\ 36a_{22} &= 6a_2 + a = 0, \\ 36a_{11} + 4a_{22} - 24a_{12} + 6a_1 - 2a_2 + a &= 0. \end{aligned}$$

V maticovém zápisu provedeme úpravy

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 4 & 16 & 16 & -2 & -4 & 1 \\ 64 & 16 & -64 & 8 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 36 & 4 & -24 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \\ &\sim \begin{pmatrix} 4 & 16 & 16 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 64 & -8 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -36 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \dots \\ &\sim \begin{pmatrix} 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(přepočtete!). Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1}x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1 .

Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1' , zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.

(2) Předpokládejme, že po provedení kroku (1) dostaneme pro h matici (řádu o jedničku menšího) s koeficientem u $x_2'^2$ různým od nuly. Pak můžeme zopakovat přesně stejný postup a získáme vyjádření $f = f_1 + f_2 + h$, kde v h vystupují pouze proměnné s indexem větším než dvě. Tak můžeme postupovat tak dlouho, až buď provedeme $n-1$ kroků a získáme diagonální tvar, nebo v řekněme i -tém kroku bude prvek a_{ii} právě získané matice nulový.

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i -tý prvek báze s j -tým a pokračovat podle předešlého postupu.

(4) Předpokládejme, že jsme narazili na situaci $a_{jj} = 0$ pro všechny $j \geq i$. Pokud přitom neexistuje ani žádný jiný prvek $a_{jk} \neq 0$ s $j \geq i, k \geq i$, pak jsme již úplně hotovi, neboť jsme již dosáhli diagonální matice. Předpokládejme, že $a_{jk} \neq 0$. Použijeme pak transformaci $v_j = u_j + u_k$, ostatní vektory báze ponecháme (tj. $x_k' = x_k - x_j$, ostatní zůstávají). Pak $h(v_j, v_j) = h(u_j, u_j) + h(u_k, u_k) + 2h(u_k, u_j) = 2a_{jk} \neq 0$ a můžeme pokračovat podle postupu v (1). \square

4.31. Afinní klasifikace kvadratických forem. Po vý-



počtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0. Následující věta o setrvačnosti říká navíc, že počet jedniček a mínus jedniček nezávisí na našich volbách v průběhu algoritmu. Tyto počty nazýváme *signaturou kvadratické formy*. Opět tedy dostáváme úplný popis kvadratických forem ve smyslu, že dvě takové formy jsou převoditelná jedna na druhou pomocí afinní transformace tehdy a jen tehdy, když mají stejnou signaturu.

Věta. Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \dots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \dots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy (a tedy i počet $r - p$ záporných koeficientů) nezávisí na volbě polární báze.

Dvě symetrické matice A, B dimenze n jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích, právě když mají stejnou hodnotu a když matice příslušných forem v polární bázi mají stejný počet kladných koeficientů.

DŮKAZ. Lagrangeovým algoritmem obdržíme $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$, $\lambda_i \neq 0$, v jisté bázi na V . Předpokládejme navíc, že právě prvních p koeficientů λ_i je kladných. Pak transformace $y_1 = \sqrt{\lambda_1} x_1, \dots, y_p = \sqrt{\lambda_p} x_p, y_{p+1} = \sqrt{-\lambda_{p+1}} x_{p+1}, \dots, y_r = \sqrt{-\lambda_r} x_r, y_{r+1} = x_{r+1}, \dots, y_n = x_n$ již vede na požadovaný tvar. Formy φ_i pak jsou právě formy z duální báze ve V^* k získané polární bázi. Musíme ale ještě ukázat, že p nezávisí na našem postupu. Předpokládejme, že se nám podařilo najít vyjádření téže formy f v polárních bazích $\underline{u}, \underline{v}$, tj.

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

$$f(y_1, \dots, y_n) = y_1^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - \dots - y_r^2$$

a označme podprostor generovaný prvními p vektory první báze $P = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$, a obdobně $Q = \langle v_{q+1}, \dots, v_n \rangle$. Pak pro každý $u \in P$ je $f(u) > 0$ zatímco pro $v \in Q$ je $f(v) \leq 0$. Nutně tedy platí $P \cap Q = \{0\}$, a proto $\dim P + \dim Q \leq n$. Odtud plyne $p + (n - q) \leq n$, tj. $p \leq q$. Opačnou volbou podprostorů však získáme i $q \leq p$.

Je tedy p nezávislé na volbě polární báze. Pak ovšem pro dvě matice se stejnou hodnotou a a stejným počtem kladných koeficientů v diagonálním tvaru příslušné kvadratické formy získáme stejný analytický tvar. \square

Při diskusi symetrických zobrazení jsme hovořili o definitních a semidefinitních zobrazeních. Tatáž diskuse má jasný smysl i pro symetrické bilineární formy a kvadratické formy. Kvadratickou formu f forma na reálném vektorovém prostoru V nazýváme

- (1) *pozitivně definitní*, je-li $f(u) > 0$ pro všechny vektory $u \neq 0$,
- (2) *pozitivně semidefinitní*, je-li $f(u) \geq 0$ pro všechny vektory $u \in V$,
- (3) *negativně definitní*, je-li $f(u) < 0$ pro všechny vektory $u \neq 0$,
- (4) *negativně semidefinitní*, je-li $f(u) \leq 0$ pro všechny vektory $u \in V$,
- (5) *indefinitní*, je-li $f(u) > 0$ a $f(v) < 0$ pro vhodné vektory $u, v \in V$.

Stejně názvy používáme i pro symetrické reálné matice, jsou-li maticemi patřičných kvadratických forem. Signaturou symetrické matice pak rozumíme signaturu příslušné kvadratické formy.

4.29a

4.32. Věta (Sylvestrovo kritérium). *Symetrická reálná matice A je pozitivně definitní, právě když jsou všechny její hlavní minory kladné.*

Symetrická reálná matice A je negativně definitní právě, když $(-1)^i |A_i| > 0$ pro všechny hlavní submatice A_i .

Hodnotu a můžeme zvolit. Zvolíme-li $a = 48$, dostaneme

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 4, \quad a_{12} = 0, \quad a_1 = -6, \quad a_2 = 32.$$

Kuželosečka má tudíž rovnici

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 32y + 48 = 0.$$

V této rovnici doplníme výrazy $x^2 - 6x, 4y^2 + 32y$ na druhé mocniny dvojčlenů, což dává

$$(x - 3)^2 + 4(y + 4)^2 - 25 = 0,$$

resp.

$$\frac{(x - 3)^2}{5^2} + \frac{(y + 4)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} - 1 = 0.$$

Vidíme, že se jedná o elipsu se středem v bodě $[3, -4]$. \square

4.45. Pomocí doplnění na čtverce vyjádřete kvadriku

$$-x^2 + 3y^2 + z^2 + 6xy - 4z = 0$$

ve tvaru, ze kterého lze vyčíst její typ.

Řešení. Všechny členy obsahující x připojíme k $-x^2$ a provedeme doplnění na čtverec. Tím získáme

$$-(x - 3y)^2 + 9y^2 + 3y^2 + z^2 - 4z = 0.$$

Žádné „nežádoucí“ členy obsahující y nemáme, a proto postup opakujeme pro proměnnou z , což dává

$$-(x - 3y)^2 + 12y^2 + (z - 2)^2 - 4 = 0.$$

Odtud plyne, že existuje transformace proměnných, při které obdržíme (rovnici můžeme nejdříve vydělit 4) rovnici

$$-\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 1 = 0.$$

 \square



DŮKAZ. Budeme si muset podrobněji rozebrat, jak vypadají transformace použité v Lagrangeově algoritmu pro konstrukci polární báze. Transformace použité v prvním kroku tohoto algoritmu mají vždy horní trojúhelníkovou matici T a navíc, při použití technické modifikace zmíněné v důkazu věty 4.30, má tato matice jedničky na diagonále:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{n2}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Taková matice přechodu od báze \underline{u} k bázi \underline{v} má několik pěkných vlastností. Zejména její hlavní submatice T_k tvořené prvními k řádky a sloupci jsou matice přechodu podprostorů $P_k = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ od báze (u_1, \dots, u_k) k bázi (v_1, \dots, v_k) . Hlavní submatice A_k matice A formy f jsou maticemi zúžení formy f na P_k . Při přechodu od \underline{u} k \underline{v} daném maticí přechodu T jsou tedy matice A_k a A'_k zúžení na podprostory P_k ve vztahu $A_k = T_k^T A'_k (T_k)^{-1}$. Inverzní matice k horní trojúhelníkové matici s jedničkami na diagonále je přitom opět horní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále, můžeme tedy podobně vyjádřit i A' pomocí A . Podle Cauchyovy věty jsou tedy determinanty matic A_k a A'_k stejné. Celkem jsme tak dokázali velice užitečné pomocné tvrzení:

Nechť je f kvadratická forma na V , $\dim V = n$, a nechť je \underline{u} báze V taková, že při hledání polární báze Lagrangeovým algoritmem není nikdy potřebné použít body (3) a (4). Pak je výsledkem analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$$

kde r je hodnota formy f , $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ a pro hlavní submatice (původní) matice A kvadratické formy f platí $|A_k| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$, $k \leq r$.

V námi uvažovaném postupu se při každé postupné transformaci vždy další sloupec pod diagonálou v matici A vynuluje. Odtud je již jasné, že případná nenulovost hlavních minorů v matici A zaručí nenulovost dalšího diagonálního členu v A . Touto úvahou jsme dokázali tzv. *Jacobiho větu*:

Důsledek. *Nechť f je kvadratická forma hodnosti r na vektorovém prostoru V s maticí A v bázi \underline{u} . V Lagrangeově algoritmu není zapotřebí jiného kroku než doplnění čtverců právě, když pro hlavní submatice v A platí $|A_1| \neq 0, \dots, |A_r| \neq 0$. Pak existuje polární báze (a obdržíme ji výše odvozeným algoritmem), ve které má f analytické vyjádření*

$$f(x_1, \dots, x_n) = |A_1| x_1^2 + \frac{|A_2|}{|A_1|} x_2^2 + \cdots + \frac{|A_r|}{|A_{r-1}|} x_r^2.$$

Jsou-li tedy všechny hlavní minory kladné, pak podle právě dokázané Jacobiho věty je jistě f pozitivně definitní.

Předpokládejme naopak, že forma f je pozitivně definitní. Pak pro vhodnou regulární matici P platí $A = P^T E P = P^T P$. Je tedy $|A| = |P|^2 > 0$. Nechť \underline{u} je zvolená báze, ve které má forma f matici A . Zúžení f na podprostory $V_k = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ je opět pozitivně definitní forma f_k ,

jejíž maticí v bázi u_1, \dots, u_k je hlavní submatice A_k . Proto je podle předchozí části důkazu také $|A_k| > 0$.

Tvrzení o negativně definitních vyplývá z předchozího a skutečnosti, že A je pozitivně definitní právě, když $-A$ je negativně definitní. \square

3. Projektivní geometrie



V mnoha elementárních textech o analytické geometrii autoři končí afinními a euklidovskými objekty popsanými výše. Na spoustu praktických úloh euklidovská nebo afinní geometrie stačí, na jiné bohužel ale nikoliv.

Tak třeba při zpracovávání obrazu z kamery nejsou zachovávány úhly a rovnoběžné přímky se mohou (ale nemusí) protínat. Dalším dobrým důvodem pro hledání širšího rámce geometrických úloh a úvah je požadovaná robustnost a jednoduchost numerických operací. Daleko jednodušší jsou totiž operace prováděné prostým násobením matic a velice těžko se totiž od sebe odlišují malinké úhly od nulových, proto je lepší mít nástroje, které takové odlišení nevyžadují.

Základní ideou projektivní geometrie je rozšíření afinních prostorů o body v nekonečnu způsobem, který bude dobře umožňovat manipulace s lineárními objekty typu bodů, přímek, rovin, projekcí, apod.

4.30

4.33. Projektivní rozšíření afinní roviny. Začneme tím nejjednodušším zajímavým případem, geometrií v rovině. Jestliže si body roviny \mathcal{A}_2 představíme jako rovinu $z = 1$ v \mathcal{R}^3 , pak každý bod P naší afinní roviny představuje vektor $u = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ a tím i jednorozměrný podprostor $\langle u \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Naopak, skoro každý jednorozměrný podprostor v \mathbb{R}^3 protíná naši rovinu v právě jednom bodě P a jednotlivé vektory takového podprostoru jsou dány souřadnicemi (x, y, z) jednoznačně, až na společný skalární násobek. Žádný průnik s naší rovinou nebudou mít pouze podprostory s body o souřadnicích $(x, y, 0)$.

PROJEKTIVNÍ ROVINA

Definice. *Projektivní rovina* \mathcal{P}_2 je množina všech jednorozměrných podprostorů v \mathbb{R}^3 . *Homogenní souřadnice* bodu $P = (x : y : z)$ v projektivní rovině jsou trojice reálných čísel určené až na společný skalární násobek, přičemž alespoň jedno z nich musí být nenulové. Přímka v projektivní rovině je definována jako množina jednorozměrných podprostorů (tj. bodů v \mathcal{P}_2), které vyplní dvourozměrný podprostor (tj. rovinu) v \mathbb{R}^3 .

Abychom měli před očima konkrétní příklad, podívejme se v afinní rovině \mathbb{R}^2 na dvě rovnoběžné přímky

$$L_1 : y - x - 1 = 0, \quad L_2 : y - x + 1 = 0.$$

Jestliže budeme body přímek L_1 a L_2 chápat jako konečné body v projektivním prostoru \mathcal{P}_2 , budou zjevně jejich homogenní souřadnice $(x : y : z)$ splňovat rovnice

$$L_1 : y - x - z = 0, \quad L_2 : y - x + z = 0.$$

Je vidět, že průnikem $L_1 \cap L_2$ bude v tomto kontextu bod $(-1 : 1 : 0) \in \mathcal{P}_2$, tj. nevlastní bod odpovídající společnému zaměření obou přímek.

4.31

4.34. Afinní souřadnice v projektivní rovině. Pokud začneme naopak projektivní rovinou \mathcal{P}_2 a budeme v ní chtít uvidět afinní rovinu jako její „konečnou“ část, pak můžeme místo roviny $z = 1$ vzít v \mathbb{R}^3 jakoukoliv jinou rovinu σ neprocházející počátkem $0 \in \mathbb{R}^3$. Konečné body pak budou ty jednorozměrné podprostory, které mají neprázdný průnik s rovinou σ .

Pokračujme v našem příkladu rovnoběžných přímek z předchozího odstavce a podívejme se, jak budou jejich rovnice vypadat v souřadnicích v afinní rovině, která bude dána jako $y = 1$. Za tím účelem stačí dosadit $y = 1$ do předchozích rovnic:

$$L'_1 : 1 - x - z = 0, \quad L'_2 : 1 - x + z = 0$$

Nyní jsou „nekonečné“ body naší původní afinní roviny dány vztahem $z = 0$ a vidíme, že naše přímky L'_1 a L'_2 se protínají v bodě $(1, 1, 0)$. To odpovídá geometrické představě, že rovnoběžné přímky L_1, L_2 v afinní rovině se protínají v nekonečnu a to v bodě $(1 : 1 : 0)$.

4.32

4.35. Projektivní prostory a transformace. Náš postup v afinní rovině se přirozeným způsobem zobecňuje na každou konečnou dimenzi.

Volbou libovolné afinní nadroviny \mathcal{A}_n ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^{n+1} , která neprochází počátkem, můžeme ztotožnit body $P \in \mathcal{A}_n$ s jednorozměrnými podprostory, které tyto body generují. Zbylé jednorozměrné podprostory vyplní nadrovinu rovnoběžnou s \mathcal{A}_n a říkáme jim *nekonečné body* nebo také *nevlastní body* v projektivním rozšíření \mathcal{P}_n afinní roviny \mathcal{A}_n .

Zjevně je vždy množina nevlastních bodů v \mathcal{P}_n projektivním prostorem dimenze o jedničku nižší. Afinní přímka má ve svém projektivním rozšíření pouze jediný nevlastní bod (oba konce přímky se „potkají“ v nekonečnu a projektivní přímka proto vypadá jako kružnice), projektivní rovina má projektivní přímku nevlastních bodů, trojrozměrný projektivní prostor má projektivní rovinu nevlastních bodů atd.

Ještě obecněji zavádíme *projektivizaci vektorového prostoru*: pro libovolný vektorový prostor V dimenze $n + 1$ definujeme

$$\mathcal{P}(V) = \{P \subset V; P \subset V, \dim V = 1\}.$$

Volbou libovolné báze \underline{u} ve V dostáváme tzv. *homogenní souřadnice* na $\mathcal{P}(V)$ tak, že pro $P \in \mathcal{P}(V)$ použijeme jeho libovolný nenulový vektor $u \in V$ a souřadnice tohoto vektoru

v bázi u . Bodům projektivního prostoru $\mathcal{P}(V)$ říkáme *geometrické body*, zatímco jejich nenulové generátory ve V nazýváme říkáme *aritmické reprezentanty*.

Při zvolených homogenních souřadnicích je možné jednu z jejich hodnot zafixovat na jedničku (tj. vyloučíme všechny body projektivního prostoru s touto souřadnicí nulovou) a získáme tak vložení n -rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(V)$. To je přesně konstrukce, kterou jsme použili v našem příkladu projektivní roviny.

4.33

4.36. Perspektivní projekce. Velmi dobře jsou výhody projektivní geometrie vidět na perspektivní projekci $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Přestavme si, že pozorovatel sedící v počátku pozoruje „polovinu světa“, tj. body $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ se $Z > 0$ a obraz vidí „promítnutý“ na plátně daném rovinou $Z = f > 0$.

Bod (X, Y, Z) „reálného světa“ se mu tedy promítá na bod (x, y) na průmětně takto:

$$x = f \frac{X}{Z}, \quad y = f \frac{Y}{Z}.$$

To je nejen nelineární formule, ale navíc při Z malém bude velice problematická přesnost výpočtů.

Při rozšíření této transformace na zobrazení $\mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ dostáváme zobrazení $(X : Y : Z : W) \mapsto (x : y : z) = (-fX : -fY : Z)$, tj. popsané prostým lineárním vztahem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

Tento jednoduchý výraz zadává perspektivní projekci pro konečné body v $\mathbb{R}^3 \subset \mathcal{P}_3$, které dosazujeme jako výrazy s $W = 1$. Přitom jsem elegantně odstranili problémy s body, jejichž obraz utíká do nekonečna. Skutečně, je-li Z -ová souřadnice skutečného bodu scény blízká nule, bude hodnota třetí homogenní souřadnice obrazu mít souřadnici blízkou nule, tj. bude představovat bod blízký nekonečnu.

4.34

4.37. Afinní a projektivní transformace. Každé prosté lineární zobrazení $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ mezi vektorovými prostory samozřejmě zobrazuje jednorozměrné podprostory na jednorozměrné podprostory. Tím vzniká zobrazení na projektivizacích $T : \mathcal{P}(V_1) \rightarrow \mathcal{P}(V_2)$.

Takovým zobrazením říkáme *projektivní zobrazení*, v literatuře je používán také pojem *kolineace*. Pokud je toto zobrazení invertibilní.

Jinak řečeno, projektivní zobrazení je takové zobrazení mezi projektivními prostory, že v každé soustavě homogenních souřadnic na definičním oboru i obrazu je toto zobrazení zadáno násobením vhodnou maticí. Obecněji, pokud naše pomocné lineární zobrazení není prosté, definuje projektivní zobrazení pouze mimo svoje jádro, tj. na bodech, jejichž homogenní souřadnice se nezobrazují na nulu.

Prostá zobrazení $V \rightarrow V$ vektorového prostoru na sebe jsou invertibilní, všechna projektivní zobrazení projektivního prostoru \mathcal{P}_n na sebe jsou tedy invertibilní též. Říká se jim také *regulární kolineace* nebo *projektivní transformace*. Odpovídají v homogenních souřadnicích invertibilním maticím dimenze $n + 1$. Dvě takové matice zadávají stejnou projektivní transformaci, právě když se liší o konstantní násobek.

Jestliže si zvolíme první souřadnici jako tu, jejíž nulovost určuje nevlastní body, budou transformace, které zachovávají nevlastní body, dány maticemi, jejichž první řádek musí být až na první člen nulový. Jestliže budeme chtít přejít do afinních souřadnic konečných bodů, tj. zafixujeme si hodnotu první souřadnice na jedničku, musí být první prvek na prvním řádku být také rovný jedné. Matice kolineací zachovávajících konečné body našeho afinního prostoru tedy mají tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kde $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a $A = (a_{ij})$ je invertibilní matice dimenze n . Působení takové matice na vektoru $(1, x_1, \dots, x_n)$ je právě obecná afinní transformace, kde b zadává posunutí a A její lineární část. Jsou tedy afinní zobrazení právě ty kolineace, které zachovávají nadrovinu nevlastních bodů.

4.35

4.38. Určení kolineací. K zadání afinního zobrazení je



nutné a stačí libovolně zadat obraz afinního repéru. V právě uvedeném popisu afinních transformací jako speciálního případu projektivních zobrazení to odpovídá vhodné volbě obrazu vhodné aritmetické báze vektorového prostoru V .

Obecně ale neplatí, že obraz aritmetické báze V jednoznačně určí kolineaci. Ukažme si podstatu problému na jednoduchém příkladu afinní roviny. Jestliže si zvolíme v rovině čtyři body A, B, C, D tak, aby každá z nich utvořená trojice byla v obecné poloze (tj. žádné tři z nich neleží na jedné přímce), můžeme si libovolně zvolit jejich obraz v kolineaci následujícím způsobem:

Zvolme jakkoliv jejich čtyři obrazy A', B', C', D' se stejnou vlastností a zvolme si jejich homogenní souřadnice $u, v, w, z, u', v', w', z'$ v \mathbb{R}^3 . Vektory z a z' pak můžeme jistě zapsat pomocí lineárních kombinací

$$z = c_1u + c_2v + c_3w, \quad z' = c'_1u' + c'_2v' + c'_3w',$$

přičemž všech šest koeficientů musí být nenulových, neboť jinak by některá trojice z našich bodů nebyla v obecné poloze.

Nyní si zvolíme nové aritmetické reprezentanty bodů A, B a C po řadě jako $\tilde{u} = c_1u, \tilde{v} = c_2v$ a $\tilde{w} = c_3w$ a stejně $\tilde{u}' = c'_1u', \tilde{v}' = c'_2v'$ a $\tilde{w}' = c'_3w'$ pro body A', B' a C' . Tato volba zadává jediné lineární zobrazení φ zobrazující postupně

$$\varphi(\tilde{u}) = \tilde{u}', \quad \varphi(\tilde{v}) = \tilde{v}', \quad \varphi(\tilde{w}) = \tilde{w}'.$$

Zároveň však platí

$$\varphi(z) = \varphi(\tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w}) = \tilde{u}' + \tilde{v}' + \tilde{w}' = z'$$

a tedy námi zkonstruovaná kolineace skutečně zobrazuje body tak, jak jsme si předem zvolili. Lineární zobrazení φ přitom bylo dáno naší konstrukcí jednoznačně, takže je kolineace dána naší volbou jednoznačně.

Naše argumentace zůstává v platnosti, i když jsou některé ze zvolených bodů nevlastní (tj. jeden nebo dva). Ještě jednodušeji bychom viděli ilustraci téhož jevu na regulárních kolineacích projektivní přímky, které jsou zadány po dvou různými obrazy třech po dvou různých bodů.

Postup, který jsme použili zjevně funguje pro libovolné dimenze. O $n + 2$ bodech projektivního prostoru řekneme, že jsou v *obecné poloze*, jestliže žádných $n + 1$ z nich neleží v stejné nadrovině. Říkáme také, že jde o lineárně nezávislé body, které tvoří *geometrickou bázi* projektivního prostoru.

Věta. *Regulární kolineace na n -rozměrném projektivním prostoru je jednoznačně určena libovolným zobrazením $n+2$ lineárně nezávislých bodů, jejichž obrazy jsou opět lineárně nezávislé.*

DŮKAZ. Důkaz se provede zcela stejně, jak jsme postupovali v dimenzi dvě. Doporučujeme rozepsat podrobně jako cvičení. \square

4.36

4.39. Dvojpoměry. Připomeňme, že afinní zobrazení zachovávají poměry velikostí úseček na každé přímce. Technicky jsme definovali tento poměr pro tři body A, B a $C \neq B, C = rA + sB$ jako $\lambda = (C; A, B) = -\frac{s}{r}$. Je zřejmé, že ale třeba středové promítání takové poměry nezachovávají, dokonce nemusí být zachována ani poloha bodů na přímce vůči sobě. Naopak jsme si uváděli, že můžeme na projektivní přímce libovolně určit obrazy tří po dvou různých bodů a tím jednoznačně zadat projektivní transformaci. Celkem snadno ale lze dovést, že se zachovává poměr takovýchto poměrů pro dva důležité body C :



Uvažme v projektivním prostoru čtveřici různých bodů A, B, C, D na jedné projektivní přímce, která je generována body A a B , a po řadě i jejich aritmetické souřadnice x, y, w, z . Protože tyto čtyři vektory leží v podprostoru $\langle x, y \rangle$, můžeme ostatní napsat jako lineární kombinace

$$w = t_1x + s_1y, \quad z = t_2x + s_2y$$

a definujeme tzv. *dvojpoměr čtveřice bodů* (A, B, C, D) jako

$$\rho = \frac{s_1 t_2}{t_1 s_2}.$$

To je korektní definice, protože jsou sice vektory x a y určeny každý až na skalární násobek, tyto násobky se ovšem v definici pokrátí.

Stejně tak je přímo z definice je zřejmé, že každá projektivní transformace zachovává dvojpoměry, protože když ji zadáme v našich aritmetických souřadnicích pomocí matice A , dostame obrazy $A \cdot w = t_1 A \cdot x + t_2 A \cdot y$ a podobně

pro Az , a proto i čtveřice obrazů našich bodů bude mít stejný dvojpoměr.

Zastavme se ještě u charakterizace projektivních transformací. Opět platí, že jsou to právě ta zobrazení, která zachovávají dvojpoměry. Ve skutečnosti to ale není příliš praktická charakterizace, protože implicitně obsahuje i tvrzení, že taková zobrazení musí zobrazovat projektivní přímky na projektivní přímky.

Lze ale dokázat daleko silnější tvrzení, že zobrazení jakkoliv malé otevřené oblasti v afinním prostoru \mathbb{R}^n (např. koule bez hranice), do téhož afinního prostoru, které zobrazuje přímky na přímky, je ve skutečnosti zúžením jednoznačně určené projektivní transformace projektivního rozšíření $\mathcal{P}\mathbb{R}^{n+1}$ původního afinního prostoru \mathbb{R}^n . A tyto transformace tedy nutně zachovávají i dvojpoměry.

možná půjde najít nějaký elementární klasický důkaz jako ilustraci pro důkaz. Počet, pak dodat odkaz, jinak tady jen říci, že se tomu nebudeme věnovat

4.37

4.40. Dualita. Projektivní nadroviny jsou definovány v n -rozměrném projektivním prostoru $\mathcal{P}(V)$ jako projektivizace n -rozměrných vektorových podprostorů ve vektorovém prostoru V . Jsou tedy v homogenních souřadnicích definovány jako jádra lineárních forem $\alpha \in V^*$, které jsou opět určeny až na skalární násobek.



Ve zvolené aritmetické bázi jsou tedy projektivní nadroviny dány řádkovým vektorem $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Přitom ale jsou formy α dány jednoznačně, až na skalární násobek. Každá nadrovina ve V tedy je identifikována s právě jedním geometrickým bodem v projektivizaci duálního prostoru $\mathcal{P}(V^*)$. Hovoříme o *duálním projektivním prostoru* a dualitě mezi body a nadrovinami.

Na formách působí lineární zobrazení zadávající danou kolineací pomocí násobení řádkových vektorů zprava toutéž maticí

$$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha \cdot A,$$

tj. matice duálních zobrazení je A^T . Duální zobrazení ovšem zobrazuje formy opačným směrem z „cílového prostoru“ ne „počáteční“, proto potřebujeme pro současné studium vlivu regulární kolineace na body a jejich duální nadroviny zobrazení inverzní ke kolineaci f . To je dáno maticí A^{-1} . Matice příslušného působení kolineace na formách je proto $(A^T)^{-1}$. Protože je přitom inverzní matice rovna algebraicky adjungované matici A_{alg}^* , až na násobek inverzí determinantu, viz vztah (2.2) na str. 92, můžeme rovnou pracovat s projektivní transformací prostoru $\mathcal{P}(V^*)$ zadanou maticí $(A_{\text{alg}}^*)^T$ (nebo bez transponování, pokud násobíme řádkové vektory zprava).

Okamžitě z definic je vidět, že projektivní bod X patří nadrovině α , když pro jejich aritmetické souřadnice platí $\alpha \cdot x = 0$. To samozřejmě zůstává v platnosti i po působení libovolnou kolineací, protože opět

$$(\alpha \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot x) = \alpha \cdot x = 0.$$

4.38

4.41. Samodružné body, středy a osy. Uvažujme regulární kolineaci f zadanou v nějaké aritmetické bázi projektivního prostoru $\mathcal{P}(V)$ pomocí matice A .



Samodružným bodem kolineace f rozumíme bod A , který je zobrazen na sebe, tj. $f(A) = A$, *samodružnou nadrovinou kolineace* f rozumíme nadrovinu α , která je zobrazována na sebe, tj. $f(\alpha) \subset \alpha$.

Přímo z definice tedy vidíme, že samodružné body mají za aritmetické reprezentanty právě vlastní vektory matice A .

V geometrii roviny jsme se s mnoha typy kolineací již jistě setkali: symetrie podle středu, zrcadlení podle přímky, posunutí, stejnolehlost atd. Možná vzpomeneme i na různé typy promítání, např. promítání jedné roviny v \mathbb{R}^3 na druhou z nějakého středu $S \in \mathbb{R}^3$.

Všimněme si, že kromě samodružných bodů se u všech takových afinních zobrazení objevovaly také samodružné přímky. Např. u symetrie podle středu se zachovávají také všechny přímky tímto středem procházející, u posunutí se (obdobně) zachovávají nevlastní body roviny.

Zastavíme se u tohoto jevu v obecné dimenzi. Nejprve zavedeme potřebné velmi klasických pojem související s incidencí bodů a nadrovin.

Trs nadrovin procházejí bodem $A \in \mathcal{P}(V)$ je množina všech nadrovin, které obsahují bod A . Z definice je zřejmé, že pro každý bod A je příslušný trs nadrovin sám nadrovinou v duálním prostoru $\mathcal{P}(V^*)$ (je zadán jednou homogenní lineární rovnicí v aritmetických souřadnicích).

Pro kolineaci $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ řekneme, že bod $S \in \mathcal{P}(V)$ je *středem kolineace* f jestliže všechny nadroviny v trsu nadrovin určeném bodem S jsou samodružné. Řekneme, že nadrovina α je *osou kolineace* f , jestliže jsou všechny její body samodružné.

Přímo z definice je zřejmé, že osa kolineace je středem kolineace duální, zatímco trs nadrovin zadávajících střed kolineace je sám osou kolineace duální.

Protože matice kolineace na původním a duálním prostoru se liší pouze transpozicí, jejich vlastní čísla splývají (vlastní vektory jsou sloupcové, resp. řádkové, k týmž vlastním číslům). Např. v projektivní rovině (a ze stejného důvodu v každém reálném projektivním prostoru sudé dimenze) má každá kolineace alespoň jeden samodružný bod, protože charakteristické polynomy příslušných lineárních zobrazení jsou lichého stupně a tedy mají alespoň jeden reálný kořen.

Nebudeme se již zde dále věnovat obecné teorii, ale budeme aspoň krátce ilustrovat její užitečnost na několika výsledcích pro projektivní roviny.

Tvrzení. *Projektivní transformace roviny různá od identity má buď právě jeden střed a právě jednu osu, nebo nemá ani střed ani osu.*

DŮKAZ. Uvažme kolineaci f na $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ a uvažme, že by měla dva různé středy A a B . Označme ℓ přímku zadanou těmito středy a zvolme bod X v projektivní rovině mimo ℓ .

Jsou-li p a q po řadě přímky procházející dvojicemi bodů (A, X) a (B, X) , pak také $f(p) = p$ a $f(q) = q$ a tedy zejména je i bod X samodružný. To ale znamená, že všechny body roviny mimo L jsou samodružné. Každá přímka různá od ℓ má tedy všechny body mimo ℓ samodružné a proto je i její průnik s ℓ samodružný. Je tedy f identické zobrazení a dokázali jsme, že neidentická projektivní transformace může mít nejvýše jeden střed. Tatáž úvaha pro duální projektivní rovinu nám dává výsledek o nejvýše jedině ose.

Jestliže má f střed A , pak všechny přímky procházející A jsou samodružné a odpovídají proto dvourozměrnému podprostoru vlastních řádkových vektorů příslušné matice pro transformaci f . Proto bude existovat dvourozměrný prostor sloupcových vlastních vektorů ke stejnému vlastnímu číslu a ten bude reprezentovat právě přímku samodružných bodů, tedy osu. Tatáž úvaha v obráceném pořadí dokazuje i opačné tvrzení — jestliže má projektivní transformace roviny osu, má i střed. \square

Pro praktické problémy je užitečné i pro reálnou rovinu pracovat v jejích komplexním projektivním rozšíření a geometrické chování transformací je pak velmi dobře čitelné z případné existence reálných či imaginárních středů a os.

4.42

4.42. Projektivní klasifikace kvadrik. Závěrem se ještě vrátíme ke kuželosečkám a kvadrikám. V n -rozměrném afinním prostoru \mathbb{R}^n zadáváme kvadriku Q v afinních souřadnicích pomocí obecné kvadratické rovnice (4.4), viz str. 222. Pohlížíme-li na afinní prostor \mathbb{R}^n jako na afinní souřadnice v projektivním prostoru $\mathcal{P}\mathbb{R}^{n+1}$, můžeme chtít tutéž množinu Q popsat pomocí homogenních souřadnic v projektivním prostoru. V nich by mělo jít o výraz, jehož všechny členy jsou druhého řádu, protože pouze vynulování takového homogenního výrazu bude mít pro homogenní souřadnice bodu smysl nezávisle na zvoleném konstantním násobku souřadnic (x_0, x_1, \dots, x_n) . Hledáme tedy takový výraz, jehož zúžením na afinní souřadnice, tj. dosazením $x_0 = 1$, získáme původní výraz z (4.4).

To je ale mimořádně jednoduché, prostě dopíšeme dostatek x_0 ke všem výrazům – žádný ke kvadratickým členům, jedno k lineárním a x_0^2 ke konstantnímu členu v původní afinní rovnici pro Q .

Získáme tak dobře definovanou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru \mathbb{R}^{n+1} , jejíž nulové body korektně definují tzv. *projektivní kvadriku* \tilde{Q} .

Průnik „kužele“ $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nulových bodů této formy s afinní rovinou $x_0 = 1$ je původní kvadrika Q , jejíž body označujeme jako vlastní body kvadriky, zatímco další body $\tilde{Q} \setminus Q$ v projektivním rozšíření jsou body nevlastní.

Klasifikace reálných či komplexních projektivních kvadrik, až na projektivní transformace, je úlohou, kterou jsme již zvládli — jde prostě o nalezení kanonické polární báze, viz odstavec 4.29. Z této klasifikace dané v reálném případě signaturou formy, v komplexním pouze hodnotí, vcelku snadno

můžeme dovodit i klasifikace kvadrik afinních. Stačí si všimnout množiny nekonečných bodů v projektivním rozšíření naší afinní kvadriky. Ukážeme si podstatu postupu na případu kuželoseček v afinní a projektivní rovině.

Projektivní klasifikace dává následující možnosti, popsané v homogenních souřadnicích $(x : y : z)$ v projektivní rovině $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$:

- imaginární regulární kuželosečka zadaná $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
- reálná regulární kuželosečka s rovnicí $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
- dvojice imaginárních přímek s rovnicí $x^2 + y^2 = 0$
- dvojice reálných přímek s rovnicí $x^2 - y^2 = 0$
- dvojnásobná přímka $x^2 = 0$.

Klasifikaci uvažujeme jako reálnou, tj. klasifikace kvadratických forem je dána nejen hodnotami, ale i signaturou, nicméně body kvadrik pak uvažujeme i v komplexním rozšíření. Tak je třeba chápat uvedené názvy, např. imaginární kuželosečka nemá žádné reálné body.

4.43

4.43. Afinní klasifikace kvadrik. Pro afinní klasifikaci musíme omezit projektivní transformace na ty, které zachovávají přímku nevlastních bodů. To ale můžeme také realizovat opačným postupem — pro zvolený projektivní typ kuželosečky Q , tj. její kužel $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^3$ budeme postupně různě volit afinní rovinu $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ neprocházející počátkem a sledovat, jak se mění množina bodů $\tilde{Q} \cap \alpha$, které jsou v afinních souřadnicích realizovaných pomocí roviny α vlastními body Q .

V případě reálné regulární kuželosečky tedy máme k dispozici skutečný kužel \tilde{Q} zadaný rovnicí $z^2 = x^2 + y^2$ a za rovinu α berme třebas tečnou rovinu jednotkové sféry. Začneme-li s rovinou $z = 1$, dostaneme jako průnik samé konečné body v ní ležící jednotkové kružnice Q . Postupným nakláněním α budeme dostávat protaženější a protaženější elipsy, až dosáhneme náklonu α rovnoběžného s jednou z přímek kužele. V tom okamžiku se již objeví jeden (dvojnásobný) nekonečný bod naší kuželosečky, jejíž konečné body ale stále tvoří jednu souvislou komponentu, a dostáváme parabolu parabola. Pokračováním náklánění vzniknou nekonečné body dva a množina konečných bodů přestane být souvislá a tak dostáváme poslední regulární kvadriku v afinní klasifikaci, hyperbolu.

Z uvedeného postupu si můžeme vzít poučení, které nám snadno umožní pokračovat do vyšších dimenzí. Předně, si všimněme, že průnikem naší kuželosečky s projektivní přímkou nevlastních bodů je vždy opět kvadrika v dimenzi o jedničku nižší, tj. v našem případě šlo o prázdnou množinu nebo dvojnásobný bod nebo dva body jakožto typy kvadrik na projektivní přímce. Dále jsme zjistili, že afinní transformaci převádějící jednu z možných realizací zvoleného projektivního typu na druhou jsme našli jen tehdy, když příslušné kvadriky v nevlastní přímce byly projektivně ekvivalentní. Takovýmto způsobem lze pokračovat v klasifikaci kvadrik v dimenzi tři a dále.

Řešení cvičení

4.3. Přímka $(2t, t, 7t) + [-5, 0, -9]$.

4.3. $[3, 2, 1][8/3, 8/3, 2/3]$.

4.10. 2, 3, 4, 6, 7, 8. Polohy rovin, které realizují dané počty si rozmyslete samostatně.

4.27. Pro normálový vektor (a, b, c) hledaných rovin máme rovnice $a + b = 0$ (kolmost na p) a volbou $a = -b = 1$ (vektor $(0, 0, 1)$ nevyhovuje podmínkám, takže vhodným pronásobením můžeme dosáhnout podmínky $a = -b = 1$) pak dostáváme z podmínky pro odchylku $\left| \frac{c}{\sqrt{3}\sqrt{2+c^2}} \right| = \frac{1}{2}$, celkem pak hledané rovnice přímek jsou $x - y \pm \sqrt{6} - 1 = 0$.

4.32. $(-1, 3, 2)$.

Zřízení ZOO

*jaké funkce potřebujeme pro naše modely?
– pořádný zvěřinec...*

V této kapitole začneme budovat nástroje umožňujících modelování závislostí, které nejsou ani lineární ani diskrétní. S takovou potřebou se často setkáme, když popisujeme systém vyvíjející se v čase a to ne jen v několika vybraných okamžicích, ale „souvisle“, tj. pro všechny možné okamžiky. Někdy je to přímo záměr či potřeba (třeba ve fyzikálních modelech klasické mechaniky), jindy je to vhodné přiblížení diskrétního modelu (třeba u ekonomických, chemických nebo biologických modelů).

Klíčovým pojmem budou stále funkce. Čím větší třídu funkcí připustíme, tím obtížnější bude vybudovat nástroje pro naši práci. Když ale bude různých typů funkcí málo, nebudeme patrně umět budovat dobré modely pro reálné situace vůbec. Cílem následujících dvou kapitol bude proto explicitně zavést několik typů elementárních funkcí, implicitně popsat daleko více funkcí a vybudovat standardní nástroje pro práci s nimi. Souhrnně se tomu říká diferenciální a integrální počet jedné proměnné. Zatímco dosud jsme se spíše pohybovali v oblasti matematiky nazývané *algebra*, nyní se pouštíme do tzv. *matematické analýzy*.

1. Interpolace polynomy

V předchozích kapitolách jsme pracovali často s posloupnostmi hodnot reálných nebo komplexních čísel, tj. se skalárními funkcemi $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ nebo $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$, kde \mathbb{K} byl zvolený číselný obor. Případně jsme pracovali s posloupnostmi vektorů nad reálnými nebo komplexními čísly.

Připomeňme si diskusi z odstavce 1.4, kde jsme přemýšleli nad způsoby, jak pracovat se skalárními funkcemi. Na této diskusi není třeba nic doplňovat a rádi bychom (pro začátek) uměli pracovat s funkcemi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*reálné funkce reálné proměnné*) nebo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (*komplexní funkce reálné proměnné*), případně funkcemi $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ (funkce jedné racionální proměnné s racionálními hodnotami) apod. Většinou půjdou naše závěry snadno rozšířit na případy s vektorovými hodnotami nad stejnými skaláry, ve výkladu se ale zpravidla omezíme jen na případ reálných a komplexních čísel.

Začneme od nejjednodušších funkcí, které umíme zadat explicitně pomocí konečně mnoha algebraických operací se skaláry.

A. Interpolace polynomy

Na úvod této kapitoly se budeme snažit odhadnout funkce pomocí polynomů. Předpokládejme, že o neznámé funkci máme pouze kusé informace, totiž její hodnoty v několika bodech, popřípadě i hodnoty její první či druhé derivace v těchto bodech. Budeme se snažit najít polynom (co nejmenšího stupně) splňující tyto závislosti.

5.1. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:



$$P(2) = 1, P(3) = 0, P(4) = -1, P(5) = 6.$$

Řešení. Řešíme buď přímo, tj. sestavením soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Předpokládáme polynom ve tvaru $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0$. Víme, že polynom stupně nejvýše tři splňující podmínky v zadání je dán jednoznačně.

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 0 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 &= -1 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 6. \end{aligned}$$

Každá rovnice vznikla z jedné z podmínek v zadání.

Druhou možností je vytvořit hledaný polynom pomocí fundamentálních Lagrangeových polynomů:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 \cdot \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} + 0 \cdot (\dots) + \\ &= (-1) \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} + 6 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} \\ &= \frac{4}{3}z^3 - 12z^2 + \frac{101}{3}z - 29. \end{aligned}$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou samozřejmě jediným řešením výše sestavené soustavy lineárních rovnic. \square

5.2. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1+i) = i, \quad P(2) = 1, \quad P(3) = -i.$$

5.3. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P'(2) = 3.$$

Řešení. Opět ukážeme dvě možnosti řešení.

Dané podmínky určují čtyři lineární rovnice pro koeficienty hledaného polynomu. Budeme-li hledat polynom třetího stupně, dostáváme tedy přesně tolik rovnic, kolik je neznámých koeficientů polynomu (nechť např. $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$):

$$\begin{aligned} P(1) &= (a_3 + a_2 + a_1 + a_0) = 0, \\ P'(1) &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1, \\ P(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3, \\ P'(2) &= 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3. \end{aligned}$$

5.1a

Vyřešením tohoto systému obděláme polynom $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5$.

Jiné řešení. Použijeme fundamentální Hermiteovy polynomy:

$$\begin{aligned} h_1^1(x) &= \left(1 - \frac{2}{0+(-1)}(x-1)\right)(2-x)^2 = (2x-1)(x-2)^2, \\ h_2^1(x) &= (5-2x)(x-1)^2, \\ h_1^2(x) &= (x-1)(x-2)^2, \\ h_2^2(x) &= (x-2)(x-1)^2. \end{aligned}$$

Celkem

$$P(x) = 0 \cdot h_1^1(x) + 3 \cdot h_2^1(x) + 1 \cdot h_1^2(x) + 3 \cdot h_2^2(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5.$$

\square

5.1. Polynomy. Skaláry umíme sčítat a násobit a tyto operace splňují řadu vlastností, které jsme vyjmenovali už v odstavcích 1.1 a 1.3. Když připustíme konečný počet těchto operací, přičemž jednu proměnnou ponecháme jako neznámou a další vstupující skaláry budou pevně zvolené, dostáváme tzv. polynomy:



POLYNOMY

Polynomem nad okruhem skalárů \mathbb{K} rozumíme zobrazení $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ dané výrazem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_i, i = 0, \dots, n$, jsou pevně zadané skaláry, násobení je znázorněno prostým zřetězením symbolů a „+“ označuje sčítání. Pokud je $a_n \neq 0$, říkáme, že polynom f je *stupně* n . Stupeň nulového polynomu není definován. Skaláry a_i označujeme jako *koeficienty polynomu* f .

Polynomy stupně nula jsou právě konstantní nenulová zobrazení $x \mapsto a_0$. V algebře jsou častěji polynomy definovány jako formální výrazy uvedeného tvaru $f(x)$, tj. jako posloupnosti koeficientů a_0, a_1, \dots s konečně mnoha nenulovými prvky. V zápětí si ale ukážeme, že v analýze budou oba přístupy ekvivalentní.

Je snadné ověřit, že polynomy nad okruhem skalárů tvoří opět okruh, kde násobení a sčítání je dáno operacemi v původním okruhu \mathbb{K} pomocí hodnot polynomů, tzn.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

kde nalevo a napravo musíme správně interpretovat příslušné operace v okruhu polynomů a v samotném okruhu skalárů.

5.2. Dělení polynomů se zbytkem. Jak jsme již zmínili, budeme v dalším pracovat výhradně s poli skalárů \mathbb{Q}, \mathbb{R} nebo \mathbb{C} . Pro všechna pole skalárů však platí

Tvrzení (O dělení polynomů se zbytkem). *Pro libovolné polynomy f stupně n a g stupně m , existují jednoznačně určené polynomy q a r takové, že $f = q \cdot g + r$ a přitom je stupeň r menší než m nebo $r = 0$.*



DŮKAZ. Začneme jednoznačností. Předpokládejme, že máme dvě požadovaná vyjádření polynomu f s polynomy g, g', r a r' , tj. platí

$$f = q \cdot g + r = q' \cdot g + r'.$$

Pak také odečtením dostaneme $0 = (q - q') \cdot g + (r - r')$.

Jestliže $q = q'$, pak také $r = r'$. Je-li $q \neq q'$, pak člen s nejvyšším stupněm v $(q - q') \cdot g$ nemůže být vykompenzován $r - r'$, což vede na spor. Dokázali jsme tedy jednoznačnost výsledku dělení, pokud existuje.

Zbývá dokázat, že umíme polynom f vždy napsat požadovaným způsobem. Pokud by stupeň g byl větší než stupeň f , pak můžeme rovnou psát $f = 0 \cdot g + f$. Předpokládejme proto $n \geq m$ a dokažme tvrzení indukci přes stupeň f .

Pokud je f polynom stupně nula, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro stupně menší než $n > 0$ a uvažme výraz $h(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$. Buď je $h(x)$ přímo nulový polynom a pak máme, co jsme hledali, nebo jde o polynom nižšího stupně a tedy jej již umíme napsat potřebným způsobem $h(x) = q \cdot g + r$ a tedy také

$$f(x) = h(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x) = (q + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m})g(x) + r$$

a tvrzení je dokázáno. \square

Je-li pro nějaký prvek $b \in \mathbb{K}$ hodnota $f(b) = 0$, pak to znamená, že v podílu $f(x) = q(x)(x-b)+r$ musí být $r = 0$. Jinak by totiž nebylo možné dosáhnout $f(b) = q(b) \cdot 0 + r$, kde stupeň r je nulový. Říkáme, že b je kořen polynomu f . Stupeň q je pak právě $n-1$. Pokud má q opět kořen, můžeme pokračovat a po nejvýše n krocích dojdeme ke konstantnímu polynomu. Dokázali jsme tedy, že každý nenulový polynom nad polem \mathbb{K} má nejvýše tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Odtud již snadno dovodíme i následující pozorování:

Důsledek. Je-li \mathbb{K} pole s nekonečně mnoha prvky, pak dva polynomy f a g jsou si rovny jako zobrazení, právě když mají shodné koeficienty.

DŮKAZ. Předpokládejme $f = g$, tj. $f - g = 0$, jako zobrazení. Polynom $(f - g)(x)$ tedy má nekonečně mnoho kořenů, což je možné pouze tehdy, je-li nulovým polynomem. \square

Uvědomme si, že u konečných polí samozřejmě takové tvrzení neplatí. Jednoduchým příkladem je např. polynom $x^2 + x$ nad \mathbb{Z}_2 , který představuje nulové zobrazení.

5.2

5.3. Interpolační polynom. Častá praktická úloha vyžaduje stanovení počítatelné formule pro funkci, pro kterou máme zadány hodnoty v předem daných bodech x_0, \dots, x_n . Pokud by šlo o nulové hodnoty, umíme přímo zadat polynom stupně $n + 1$



$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

který bude mít nulové hodnoty právě v těchto bodech a jinde jinde. To ale není jediná odpověď, protože požadovanou vlastnost má i nulový polynom. Ten je přitom jediný s touto vlastností ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše n . Obdobně to dopadne i v obecném případě:

INTERPOLAČNÍ POLYNOMY

Nechť \mathbb{K} je nekonečné pole skalárů. *Interpolační polynom* f pro množinu po dvou různých bodů $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ a předepsaných hodnot $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ je polynom stupně nejvýše n nebo nulový polynom, který splňuje $f(x_i) = y_i$ pro všechna $i = 0, 1, \dots, n$.

Věta. Pro každou množinu $n + 1$ po dvou různých bodů $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ a předepsaných hodnot $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ existuje právě jeden interpolační polynom f .

5.4. Pomocí Lagrangovy interpolace spočítejte přibližnou hodnotu $\cos^2 1$. Použijte k tomu hodnoty funkce v bodech $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Řešení. Nejprve určíme funkční hodnoty v zadaných bodech: $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = 1/2$, $\cos^2(\frac{\pi}{3}) = 1/4$, $\cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Dále určíme elementární Lagrangeovy polynomy, přitom můžeme počítat hodnoty přímo v zadaném bodě:

$$l_0(1) = \frac{(1 - \frac{\pi}{3})(1 - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} = 8 \frac{(\pi - 3)(\pi - 2)}{\pi^2}$$

$$l_1(1) = \frac{(1 - \frac{\pi}{4})(1 - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})} = -9 \frac{(\pi - 4)(\pi - 2)}{\pi^2}$$

$$l_2(1) = \frac{(1 - \frac{\pi}{4})(1 - \frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})} = 2 \frac{(\pi - 4)(\pi - 3)}{\pi^2}$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{1}{2} \cdot 8 \frac{(\pi - 3)(\pi - 2)}{\pi^2} - \frac{1}{4} \cdot 9 \frac{(\pi - 4)(\pi - 2)}{\pi^2} + 0 = \\ &= \frac{(5\pi - 12)(\pi - 2)}{4\pi^2} \doteq 0.288913. \end{aligned}$$

Vidíme, že při výpočtu třetí elementární polynom nebyl potřeba. Skutečná hodnota je $\cos^2 1 \doteq 0.291927$. \square

5.5. Franta potřebuje počítat hodnoty funkce \sin , ale má k dispozici jen mobilní telefon s jednoduchou kalkulačkou, která umí základní operace. Protože si pamatuje hodnoty funkce \sin v bodech 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{2}$ a ví, že přibližné hodnoty π , $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ jsou 3.1416, 1.4142 a 1.7321, rozhodl se, že použije k přibližnému výpočtu interpolaci. Pomozte mu sestavit přibližný vztah s využitím všech hodnot.

Řešení. Sestrojíme elementární Lagrangeovy polynomy:

$$l_0(x) = \frac{(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{2})}{(0 - \frac{\pi}{6})(0 - \frac{\pi}{4})(0 - \frac{\pi}{3})(0 - \frac{\pi}{2})} \doteq$$

$$\doteq 1.4783x^4 - 5.8052x^3 + 8.1057x^2 - 4.7746x + 1$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{6} - 0)(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2})} \doteq$$

$$\doteq -13.3046x^4 + 45.2808x^3 - 49.2419x^2 + 17.1887x$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4} - 0)(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} \doteq$$

$$\doteq 23.6526x^4 - 74.3070x^3 + 71.3298x^2 - 20.3718x$$

$$l_3(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3} - 0)(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})} \doteq$$

$$\doteq -13.3046x^4 + 38.3146x^3 - 32.8279x^2 + 8.5943x$$

$$l_4(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})} \doteq$$

$$\doteq 1.4783x^4 - 3.4831x^3 + 2.6343x^2 - 0.6366x$$

Hodnota interpolačního polynomu je pak

$$P(x) = 0 \cdot l_0(x) + \frac{1}{2}l_1(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}l_2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}l_3(x) + l_4(x) \doteq$$

$$\doteq 0.0288x^4 - 0.2043x^3 + 0.0214x^2 + 0.9956x.$$

□

Doplňující otázky: Může Franta tento přibližný výsledek použít i pro výpočet funkce \sin na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$? A pokud ne, jak by měl postupovat?

Jak by vypadaly přibližné vztahy, pokud by Franta ne použil všechny uzly, ale pro každý bod jen tři uzly nejbližší?

5.6. Další den potřeboval Franta spočítat dvojkový logaritmus 25.



(Ve skutečnosti potřeboval přirozený logaritmus, ale protože ví, že $\ln 2$ je zhruba 0.6931, vystačí s i s dvojkovým.) Nejprve tedy vzal uzly 16 a 32 s funkčními hodnotami $4\frac{5}{3}$

a sestrojil interpolační polynom (přímku) $P(x) = \frac{1}{16} + 3$, takže $P(25) = \frac{73}{16} = 4.5625$. Kvůli zpřesnění výsledku přidal další uzol 8 s funkční hodnotou 3. V tomto případě vyšel interpolační polynom roven $P(x) = -\frac{1}{384}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{5}{3}$, což dává $P(25) \doteq 4.7266$. Franta chtěl výsledek ještě zpřesnit, přidal tedy rovnou dva uzly, a to 2 a 4 s funkčními hodnotami 1 a 2. Jaké však bylo jeho překvapení, když mu vyšla hodnota $P(25) \doteq 5.892$, která je určitě nesprávná vzhledem k tomu, že logaritmus je rostoucí funkce. Dokážete vysvětlit, kde se vzala taková chyba?

Řešení. Franta trochu pátral na internetu a zjistil, že chyba při interpolaci se dá vyjádřit ve tvaru

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kde bod ξ není znám, ale leží v intervalu daném nejmenším a největším uzlem. Člen v čitateli zlomku způsobuje, že přidávání dalších vzdálených uzlů přesnost spíše zhoršuje. □

DŮKAZ. Začněme jednodušší částí, tj. jednoznačností.



Jsou-li f a g dva interpolační polynomy se stejnými definičními hodnotami, pak je jejich rozdíl polynomem stupně n , který má $n+1$ kořenů, a proto je $f-g=0$.

Zbývá existence. Označme si prozatím neznámé koeficienty polynomu f stupně n

$$f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Dosazením požadovaných hodnot dostaneme systém $n+1$ rovnic pro stejný počet neznámých koeficientů a_i

$$a_0 + x_0 a_1 + \dots + (x_0)^n a_n = y_0$$

$$\vdots$$

$$a_0 + x_n a_1 + \dots + (x_n)^n a_n = y_n.$$

Existenci řešení tohoto systému rovnic můžeme snadno ukázat přímou konstrukcí patřičného polynomu pomocí tzv. Lagrangeových polynomů pro dané body x_0, \dots, x_n , viz. další odstavec textu níže.

Nyní ale důkaz dokončíme pomocí jednoduchých znalostí z lineární algebry. Tento systém lineárních rovnic má totiž právě jedno řešení pokud je determinant jeho matice invertibilní skalár, tj. pokud je nenulový (viz 3.1 a 2.23). Jde o tzv. *Vandermondův determinant*, který jsme již diskutovali v příkladu 2.22 na straně 84.

Protože jsme ale už ověřili, že pro nulové pravé strany existuje řešení právě jedno, víme, že tento determinant nenulový být musí.

Protože polynomy jsou jako zobrazení stejné, právě když mají stejné koeficienty, věta je dokázána. □

5.4. Užítí interpolací. Na první pohled se může zdát, že reálné nebo případně racionální polynomy, tj. polynomiálně zadané funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, tvoří hezkou velikou třídu funkcí jedné proměnné. Můžeme jimi proložit jakékoliv sady předem zadaných hodnot. Navíc se zdají být snadno vyjádřitelné, takže by s jejich pomocí mělo být dobře možné počítat i hodnoty těchto funkcí pro jakoukoliv hodnotu proměnné. Při pokusu o praktické využití v tomto směru ovšem narazíme hned na několik problémů.



Prvním z nich je potřeba rychle vyjádřit polynom, kterým zadaná data proložíme. Pro řešení výše diskutovaného systému rovnic totiž budeme obecně potřebovat čas úměrný třetí mocnině počtu bodů, což při objemnějších datech je jistě těžko přijatelné. Podobným problémem je pomalé vyčíslení hodnoty polynomu vysokého stupně v zadaném bodě. Obojí lze částečně obejít tak, že zvolíme vhodné vyjádření interpolačního polynomu (tj. vybereme lepší bázi příslušného vektorového prostoru všech polynomů stupně nejvýše k , než je ta nejobvyklejší $1, x, x^2, \dots, x^n$).

Ukážeme si pouze jediný příklad takového postupu:

LAGRANGEOVY INTERPOLAČNÍ POLYNOMY

Lagrangeův interpolační polynom snadno zapíšeme pomocí tzv. elementárních Lagrangeových polynomů ℓ_i stupně n s vlastnostmi

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Zřejmě musí být tyto polynomy až na konstantu rovny výrazům $(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$ a proto

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

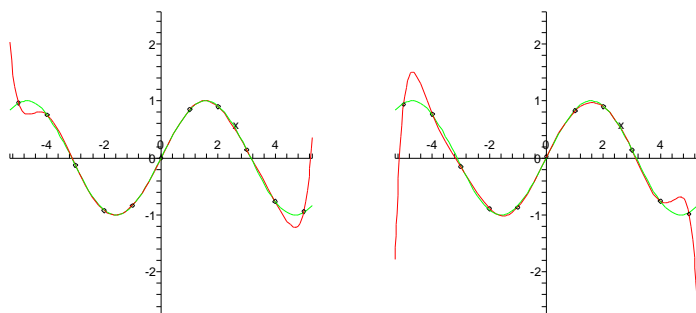
Hledaný Lagrangeův interpolační polynom je pak dán vztahem

$$f(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_n \ell_n(x).$$

Použití Lagrangeových polynomů je obzvlášť efektivní, když opakovaně prokládáme zadané hodnoty závislé proměnné y_i pro stále stejné hodnoty nezávislé proměnné x_i . Pak totiž máme elementární polynomy ℓ_i předem připraveny.

Toto vyjádření má nevýhodu ve velké citlivosti na nepřesnosti výpočtu při malých rozdílech zadaných hodnot x_i , protože se v něm těmito rozdíly dělí.

Další nepříjemností je velice špatná stabilita hodnot reálných nebo racionálních polynomů při zvětšující se hodnotě proměnné. Brzy budeme mít nástroje na přesný popis kvalitativního chování funkcí, nicméně i bez nich je zřejmé, že podle znaménka koeficientu u nejvyšší mocniny polynomu se hodnoty velice rychle při rostoucím x vydají buď do plus nebo minus nekonečna. Ani toto znaménko koeficientu u nejvyššího stupně se ale u interpolačního polynomu při malých změnách prokládaných hodnot nechová stabilně. Názorně to vidíme na dvou obrázcích, kde je proloženo jedenáct hodnot funkce $\sin(x)$ s různými malými náhodnými změnami hodnot. Zelenou barvou je vynesena aproximovaná funkce, kolečka jsou malinko posunutá hodnoty a červeně je vynesena jednoznačně zadaný interpolační polynom. Zatímco uvnitř intervalu je aproximace vcelku dobrá, stabilita na okrajích je otřesná.



Kolem interpolačních polynomů existuje bohatá teorie.

dát nějaké další odkazy

5.7. O týden později potřeboval Franta určit $\sqrt{7}$. Napadlo ho problém otočit a použít tzv. inverzní interpolaci, tedy zaměnit roli uzlů a funkčních hodnot a určit přibližnou hodnotu vhodné funkce v nule. Jak postupoval?

Řešení. $\sqrt{7}$ je nulový bod funkce $x^2 - 7$. Franta vzal uzly $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 3$, příslušné funkční hodnoty jsou -3 , -0.75 a 2 . Pak prohodil úlohu uzlů a funkčních hodnot a získal elementární Lagrangeovy polynomy

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x + 0.75)(x - 2)}{(-3 + 0.75)(-3 - 2)} = \frac{4}{45}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{2}{15} \\ l_1(x) &= -\frac{16}{99}x^2 - \frac{16}{99}x + \frac{32}{33} \\ l_2(x) &= \frac{6}{55}x^2 + \frac{3}{11}x + \frac{9}{55} \end{aligned}$$

Pro $\sqrt{7}$ tak dostal přibližnou hodnotu $2 \cdot l_0(0) + 2.5 \cdot l_1(0) + 3 \cdot l_2(0) = \frac{437}{165} \doteq 2.6485$.

Doplňující otázky: Frantovy se do výpočtu jednoho elementárního polynomu vloudila chyba, pokuste se ji vypátrat. Má tato chyba vliv na výslednou hodnotou?

Jak bychom mohli využít také hodnotu derivace v bodě 2.5? □

5.8. Nalezněte přirozený splajn S , který splňuje podmínky



$$S(-1) = 0, S(0) = 1, S(1) = 0.$$

Řešení. Hledaný přirozený splajn bude složen ze dvou kubických polynomů, jednoho, řekněme S_1 , pro interval $\langle -1, 0 \rangle$, druhého, řekněme S_2 pro interval $\langle 0, 1 \rangle$. Slůvko „přirozený“ navíc určuje, že hodnoty druhých derivací polynomů S_1 , resp. S_2 , budou nulové v bodě -1 , resp. 1 . Díky předepsané společné hodnotě v bodě 0 víme že absolutní člen obou polynomů je 1 , ze symetrie úlohy plyne, že společná hodnota první derivace v bodě 0 je nulová. Můžeme tedy psát $S_1(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ a $S_2(x) = cx^3 + dx^2 + 1$, pro neznámé reálné parametry a, b, c a d . Dosazením těchto tvarů do čtyř podmínek $S_1(-1) = 0, S_1''(-1) = 0, S_2(1) = 0$ a $S_2''(1) = 0$ dostáváme čtyři lineární rovnice pro tyto parametry:

$$\begin{aligned} -a + b + 1 &= 0, \\ -6a + 2b &= 0, \\ c + d + 1 &= 0, \\ 6c + 2d &= 0. \end{aligned}$$

Jejich vyřešením pak $S_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$, $S_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4a$
 $\frac{3}{2}x^2 + 1$. Celkem tedy

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 & \text{prox} \in \langle -1, 0 \rangle \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 & \text{prox} \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

□

5.9. Nalezněte splajn S , který splňuje podmínky

$$S(-1) = 0, S(0) = 1, S(1) = 0, S'(-1) = 1, S'(1) = 1.$$

Řešení. Hledaný splajn se od splajnu z předchozí úlohy liší pouze hodnotami derivací v bodech -1 a 1 . Obdobně jako v předchozí úloze tak dostáváme části S_1 a S_2 splajnu ve tvaru $S_1(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ a $S_2(x) = cx^3 + dx^2 + 1$, pro neznámé reálné parametry a, b, c a d . Dosazením do podmínek $S_1(-1) = 0, S_1'(-1) = 1, S_2(1) = 0$ a $S_2'(1) = 1$ dostáváme nyní soustavu

$$\begin{aligned} -a + b + 1 &= 0, \\ 3a - 2b &= 1, \\ c + d + 1 &= 0, \\ 3c + 2d &= 1 \end{aligned}$$

e5.1

s řešením $a = -1, b = -2, c = 3$ a $d = -4$, tedy hledaný splajn je funkce

$$S(x) = \begin{cases} -x^3 - 2x^2 + 1 & \text{prox} \in \langle -1, 0 \rangle \\ 3x^3 - 4x^2 + 1 & \text{prox} \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

□

Více příkladů k interpolačním polynomům najdete na straně 303.

B. Topologie komplexních čísel a jejich podmnožin

5.10. Vyznačte v komplexní rovině následující množiny:



- i) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\}$
- ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - i| \leq 2\}$
- iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) = 1\}$
- iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}\}$

Řešení.

- imaginární osa
- mezikruží okolo i
- hyperbola $a^2 - b^2 = 1$.
- vnějšek jednotkového kruhu se středem v 1 .

5.5. Poznámka. Numerická nestabilita způsobená případnou blízkostí (některých) z bodů x_i je dobře viditelná i na systému rovnic z důkazu Věty 5.3. Při řešení systémů lineárních rovnic totiž nestabilita do značné míry souvisí s velikostí determinantu matice systému, tj. v našem případě Vandermondova determinantu. Ten umíme vcelku snadno přímo spočítat:

Lemma. Pro posloupnost po dvou různých skalárů $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ platí

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i>k=0}^n (x_i - x_k).$$

DŮKAZ. Vztah dokážeme indukcí přes počet bodů x_i . Evidentně je správný pro $n = 1$ (a pro $n = 0$ je úloha nezájímavá). Předpokládejme, že výsledek je správný pro $n - 1$, tj.

$$V(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{i>k=0}^{n-1} (x_i - x_k).$$

Nyní považujme hodnoty x_0, \dots, x_{n-1} za pevné a hodnotu x_n ponechme jako volnou proměnnou. Rozvojem determinantu podle posledního řádku (viz ??) obdržíme hledaný determinant jako polynom

$$(5.1) \quad V(x_0, \dots, x_n) = (x_n)^n V(x_0, \dots, x_{n-1}) - (x_n)^{n-1} \dots$$

Toto je polynom stupně n , protože víme, že jeho koeficient u $(x_n)^n$ je nenulový dle indukčního předpokladu. Přitom bude zjevně nulový při dosazení kterékoliv hodnoty $x_n = x_i$ pro $i < n$, protože bude v takovém případě obsahovat původní determinant dva stejné řádky. Náš polynom tedy bude dělitelný výrazem

$$(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}),$$

který má sám již stupeň n . Odtud vyplývá, že celý Vandermondův determinant coby polynom v proměnné x_n musí být tomuto výrazu roven až na konstantní násobek, tj.

$$V(x_0, \dots, x_n) = c \cdot (x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Porovnáním koeficientů u nejvyšší mocniny v (5.1) a tomto výrazu dostáváme

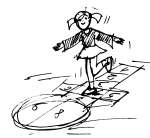
$$c = V(x_0, \dots, x_{n-1})$$

a tím je důkaz lemmatu ukončen. □

Opět tedy vidíme, že determinant bude velmi malý, pokud jsou malé vzdálenosti bodů x_i .

5.4

5.6. Derivace polynomů. Zjistili jsme, že hodnoty polynomů s rostoucí proměnnou rychle míří k nekonečným hodnotám (viz také obrázky). Proto je zřejmé, že polynomy nemohou nikdy vhodně popisovat jakékoliv periodicky se opakující děje (jako jsou např. hodnoty goniometrických funkcí). Mohlo by se ale zdát, že podstatně lepší výsledky



budeme alespoň mezi body x_i dosahovat, když si budeme kromě hodnot funkce hlídat, jak rychle naše funkce v daných bodech rostou.

Za tímto účelem zavedeme (prozatím spíše intuitivně) pojem *derivace* pro polynomy. Můžeme přitom pracovat opět s reálnými, komplexními nebo racionálními polynomy. Rychlost růstu v bodě $x \in \mathbb{R}$ pro reálný polynom $f(x)$ dobře vyjadřují podíly

e5.2

$$(5.2) \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a protože umíme spočítat (nad libovolným okruhem)

$$(x + \Delta x)^k = x^k + kx^{k-1}\Delta x + \dots + \binom{k}{l}x^l(\Delta x)^{k-l} + \dots + (\Delta x)^k,$$

dostaneme pro polynom $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ výše vedený podíl ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= a_n \frac{nx^{n-1}\Delta x + \dots + (\Delta x)^k}{\Delta x} + \dots + a_1 \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 + \Delta x(\dots) \end{aligned}$$

kde výraz v závorce je polynomiálně závislý na Δx . Evidentně pro hodnoty Δx velice blízké nule dostaneme hodnotu libovolně blízkou následujícímu výrazu:

DERIVACE POLYNOMŮ

Derivací polynomu $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ podle proměnné x rozumíme polynom

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Z definice je jasné, že právě hodnota $f'(x_0)$ derivace polynomu nám dává dobré přiblížení jeho chování v okolí bodu x_0 . Přesněji řečeno, přímky

$$y = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0),$$

tj. sečny grafu polynomu procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ se, se zmenšujícím se Δx , přibližují přímce

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

což tedy musí být tečna grafu polynomu f . Hovoříme o *lineárním přiblížení* polynomu f jeho *tečnou*.

Derivace polynomů je lineární zobrazení, které přiřazuje polynomům stupně nejvýše n polynomy stupně nejvýše $n-1$.

Iterací této operace dostáváme druhé derivace f'' , třetí derivace $f^{(3)}$ a obecně po k -násobném opakování polynom $f^{(k)}$ stupně $n-k$. Po $n+1$ derivacích je výsledkem nulový polynom. Toto lineární zobrazení je příkladem tzv. cyklického nilpotentního zobrazení, která jsou podrobněji rozebírána v odstavci 3.32 o nilpotentních zobrazeních.



5.11. Nalezněte hromadné, izolované, hraniční a vnitřní body množin \mathbb{N} , \mathbb{Q} , $X = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 1\}$ v \mathbb{R} .



Řešení. Množina \mathbb{N} . Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ očividně platí

$$\mathcal{O}_1(n) \cap \mathbb{N} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{N} = \{n\}.$$

Existuje tedy okolí bodu $n \in \mathbb{N}$ v \mathbb{R} , které obsahuje pouze jeden prvek množiny \mathbb{N} (pochopitelně právě uvažované n), tj. každý bod $n \in \mathbb{N}$ je izolovaný. Množina vnitřních bodů je proto prázdná (je-li bod izolovaný, nemůže být vnitřní). Bod $a \in \mathbb{R}$ je pak hromadným bodem A právě tehdy, když každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů A . Ovšem množina

$$\mathcal{O}_1(a) \cap \mathbb{N} = (a-1, a+1) \cap \mathbb{N}, \quad \text{přičemž } a \in \mathbb{R},$$

je konečná, z čehož plyne, že \mathbb{N} hromadné body nemá. To, že tato množina je konečná, dále implikuje

$$\delta_b := \inf_{n \in \mathbb{N}} |b - n| = \inf_{n \in \mathcal{O}_1(b) \cap \mathbb{N}} |b - n| > 0 \quad \text{pro } b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Odsud máme $\mathcal{O}_{\delta_b}(b) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, tj. žádné $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ není hraničním bodem \mathbb{N} . Současně víme, že každý bod dané množiny, který není vnitřním bodem, je nutně jejím hraničním bodem. Množina hraničních bodů tak obsahuje \mathbb{N} . Shrneme-li to, množina hraničních bodů \mathbb{N} je \mathbb{N} .

Množina \mathbb{Q} . Racionální čísla tvoří tzv. hustou podmnožinu množiny všech reálných čísel. To znamená, že ke každému reálnému číslu konverguje posloupnost racionálních čísel (představme si např. nekonečný desetinný rozvoj reálného čísla a jemu odpovídající posloupnost, kdy v následujícím členu přidáváme další cifru rozvoje). O této posloupnosti lze navíc předpokládat, že všechny její členy jsou navzájem různé (na poslední pozici konečného desetinného rozvoje se můžeme záměrně dopouštět chyby nebo kupř. číslu 1 přiřadíme desetinný rozvoj $0,999\dots$ apod.). Množina hromadných bodů \mathbb{Q} v \mathbb{R} je proto celé \mathbb{R} a každý bod $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je hraniční. Zvláště dostáváme,

že libovolné δ -okolí

5.5

$$\mathcal{O}_\delta\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - \delta, \frac{p}{q} + \delta\right), \quad \text{kde } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0,$$

racionálního čísla p/q musí obsahovat nekonečně mnoho racionálních čísel, což dává neexistenci izolovaných bodů. Číslo $\sqrt{2}/10^n$ není racionální pro žádné $n \in \mathbb{N}$. Předpokladem opaku (opět $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$)

$$\frac{\sqrt{2}}{10^n} = \frac{p}{q}, \quad \text{tj. } \sqrt{2} = \frac{10^n p}{q},$$

totiž okamžitě obdržíme spor – o číslu $\sqrt{2}$ víme, že není racionální. Libovolné okolí racionálního čísla p/q tak zároveň obsahuje nekonečně mnoho reálných čísel $p/q + \sqrt{2}/10^n$ ($n \in \mathbb{N}$), která nejsou racionální (množina \mathbb{Q} jako těleso je uzavřená vzhledem k odečítání). Všechny body $p/q \in \mathbb{Q}$ jsou tudíž rovněž hraniční a vnitřní body množina \mathbb{Q} nemá.

Množina $X = [0, 1)$. Nechť $a \in [0, 1)$ je zvoleno libovolně. Posloupnosti se členy (pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$)

$$a + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \subset [0, 1)$$

zjevně konvergují po řadě k hodnotám $a, 1$. Snadno jsme tak ukázali, že množina hromadných bodů obsahuje interval $[0, 1]$. Jiné hromadné body neexistují: pro jakékoli $b \notin [0, 1]$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\delta(b) \cap [0, 1] = \emptyset$ (pro $b < 0$ postačuje položit $\delta = -b$ a pro $b > 1$ potom $\delta = b - 1$). Protože každý bod intervalu $[0, 1)$ je hromadným bodem, množina izolovaných bodů je prázdná. Pro $a \in (0, 1)$ označme menší z kladných čísel $a, 1 - a$ jako δ_a . Uvážíme-li

$$\mathcal{O}_{\delta_a}(a) = (a - \delta_a, a + \delta_a) \subseteq (0, 1), \quad a \in (0, 1),$$

vidíme, že libovolný bod intervalu $(0, 1)$ je vnitřním bodem intervalu $[0, 1)$. Pro každé $\delta \in (0, 1)$ je

$$\mathcal{O}_\delta(0) \cap [0, 1) = (-\delta, \delta) \cap [0, 1) = [0, \delta),$$

$$\mathcal{O}_\delta(1) \cap [0, 1) = (1 - \delta, 1 + \delta) \cap [0, 1) = (1 - \delta, 1),$$

tj. každé δ -okolí bodu 0 obsahuje jisté body intervalu $[0, 1)$ a hodnoty z intervalu $(-\delta, 0)$ a každé δ -okolí bodu 1 má neprázdný průnik s intervaly $[0, 1)$, $[1, 1 + \delta)$. Body 0 a 1 jsou tedy hraničními body. Celkem jsme zjistili, že množina všech vnitřních bodů odpovídá intervalu $(0, 1)$ a množina hraničních bodů je $\{0, 1\}$. Stačí si uvědomit, že bod nemůže být současně vnitřní a hraniční a že hraniční bod musí být izolovaný, nebo hromadný. \square

Více příkladů k danému tématu najdete na straně 303

5.7. Hermiteův interpolační problém. Uvažme opět $m+1$ po dvou různých reálných hodnot x_0, \dots, x_m , tj. $x_i \neq x_j$ pro všechna $i \neq j$. Budeme chtít zase prokládat pomocí polynomů předem dané hodnoty, tentokrát ale budeme vedle hodnot předepisovat i první derivace. Tj. předpíšeme y_i a y'_i pro všechna i . Hledáme polynom f , který bude nabývat těchto předepsaných hodnot a derivací.



Zcela analogicky jako u interpolace pouhých hodnot obdržíme pro neznámé koeficienty polynomu $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ systém $2(m+1)$ rovnic

$$\begin{aligned} a_0 + x_0 a_1 + \dots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\ &\vdots \\ a_0 + x_m a_1 + \dots + (x_m)^n a_n &= y_m \\ a_1 + 2x_0 a_2 + \dots + n(x_0)^{n-1} a_n &= y'_0 \\ &\vdots \\ a_1 + 2x_m a_2 + \dots + n(x_m)^{n-1} a_n &= y'_m. \end{aligned}$$

Opět bychom mohli ověřit, že při volbě $n = 2m + 1$ bude determinant tohoto systému rovnic nenulový a tudíž bude existovat právě jedno řešení. Nicméně, obdobně ke konstrukci Lagrangeova polynomu lze zkonstruovat takový polynom f přímo. Prostě si vytvoříme jednu sadu polynomů s hodnotami nula nebo jedna jak u derivací tak u hodnot, abychom jejich jednoduchou lineární kombinací uměli dosáhnout potřebné hodnoty. Ověření následující definice a tvrzení necháme na čtenáři:

HERMITEŮV INTERPOLAČNÍ POLYNOM

Hermiteův interpolační polynom definujeme pomocí fundamentálních Hermiteových polynomů:

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \left[1 - \frac{\ell''(x_i)}{\ell'(x_i)}(x - x_i)\right] (\ell_i(x))^2 \\ h_i^2(x) &= (x - x_i) (\ell_i(x))^2, \end{aligned}$$

kde $\ell(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. Tyto polynomy splňují:

$$\begin{aligned} h_i^1(x_j) &= \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \\ (h_i^1)'(x_j) &= 0 \\ h_i^2(x_j) &= 0 \\ (h_i^2)'(x_j) &= \delta_i^j \end{aligned}$$

a proto je Hermiteův interpolační polynom dán výrazem

$$f(x) = \sum_{i=1}^k (y_i h_i^1(x) + y'_i h_i^2(x)).$$

5.5a

5.8. Příklady Hermiteových polynomů. Úplně nejjednodušší případ je zadání hodnoty a derivace v jediném bodě. Tím určíme beze zbytku polynom stupně jedna

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tj. právě rovnici přímky zadané hodnotou a směrnici v bodě x_0 . Když zadáme hodnotu a derivaci ve dvou bodech, tj. $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y'_1 = f'(x_1)$ pro dva různé body x_i , dostaneme ještě pořád snadno počítatelný problém.

Ukažme si jej ve zjednodušeném provedení, kdy $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Pak matice systému a její inverze budou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým vynásobením $A \cdot (y_0, y_1, y'_0, y'_1)^T$ pak vyjde vektor koeficientů $(a_3, a_2, a_1, a_0)^T$ polynomu f , tj.

$$f(x) = (2y_0 - 2y_1 + y'_0 + y'_1)x^3 + (-3y_0 + 3y_1 - 2y'_0 - y'_1)x^2 + y'_0x + y_0.$$

5.6

5.9. Interpolace splajny. Obdobně můžeme předepisovat libovolný konečný počet derivací v jednotlivých bodech a vhodnou volbou stupně polynomu obdržíme vždy jednoznačné interpolace. Nebudeme zde uvádět podrobnosti. Bohužel, u všech těchto interpolací pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky:

Jak jsme viděli na obrázcích demonstrujících nestabilitu interpolace jedním polynomem dostatečně vysokého stupně, malé lokální změny hodnot zapříčiňovaly dramatické celkové změny chování výsledného polynomu. Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků nízkých stupňů, které ale musíme umět rozumně navazovat.

Nejjednodušší je propojení vždy dvou sousedních bodů lineárním polynomem. Tak se nejčastěji zobrazují data. Z pohledu derivací to znamená, že budou na jednotlivých úsecích konstantní a pak se skokem změni.

O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. Tento polynom pak můžeme použít pro všechny hodnoty nezávislé proměnné mezi krajními hodnotami $x_0 < x_1$. Hovoříme o *intervalu* $[x_0, x_1]$. Takové polynomiální přiblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že první derivace na sebe budou navazovat.

V praxi ale není pouhé navazování první derivace dostatečné a navíc při naměřených datech nemíváme hodnoty derivací k dispozici. Přímou se proto vnučuje pokus využívat pouze zadané hodnoty ve dvou sousedních bodech, ale

C. Limity

V následujících příkladech se budeme zabývat výpočtem limit posloupností, tedy tím, jak posloupnosti „vypadají v nekonečnu“. Tj. pokud bychom chtěli předepsat n -tý člen posloupnosti pro hodně velké n , tak nám její limita posloupnosti (pokud existuje) velmi dobře přiblíží. Limitám posloupností a posléze funkcí věnujeme v příkladovém sloupci hodně prostoru, proto s nimi začínáme dříve (a končíme později), než ve sloupci teorie.

Začněme s limitami posloupností. Potřebné definice nalezneme čtenář na straně 252.

5.12. Spočítejte následující limity posloupností:



- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n + 1}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 1}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n^2 + 3n + 1}$,
- $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n$.

Řešení.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \infty$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2n + 3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2^n}{2^{-n}} - 1}{\frac{2^n}{2^{-n}} + 1} = -1$$

- Podle věty o třech limitách (5.20): $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\sqrt{4n^2}}{n} < \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n} < \frac{\sqrt{4n^2 + n + \frac{1}{16}}}{n}$. Dále pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n + \frac{1}{16}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \frac{1}{4}}{n} = 2$. Tedy i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n} = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + n} - 2n)(\sqrt{4n^2 + n} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

5.13. Bud' $c \in \mathbb{R}^+$ (kladné reálné číslo). Ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Řešení. Uvažme nejprve $c > 1$. Vzhledem k tomu, že funkce $\sqrt[n]{c}$ je vzhledem k n klesající a její hodnoty jsou stále větší než 1, tak musí mít posloupnost $\sqrt[n]{c}$ limitu a tou je infimum jejich členů. Předpokládejme, že by tato limita byla větší než 1, řekněme $1 + \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$. Pak by podle definice limity byly všechny hodnoty dané posloupnosti od jistého m menší než $1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$, t.j. zejména $\sqrt[m]{c} < 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$. Potom by však

$$\sqrt[2m]{c} = \sqrt{\sqrt[m]{c}} < \sqrt{1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon,$$

což je spor s tím, že $1 + \varepsilon$ je infimum dané posloupnosti. \square

5.14. Stanovte



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

Řešení. Zřejmě je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Můžeme tedy položit

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \quad \text{pro jistá čísla } a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Užitím binomické věty získáváme

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + \binom{n}{1}a_n + \binom{n}{2}a_n^2 + \dots + a_n^n, \quad n \geq 2 (n \in \mathbb{N}).$$

Odsud plyne odhad (všechna čísla a_n jsou nezáporná)

$$n \geq \binom{n}{2}a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}a_n^2, \quad n \geq 2 (n \in \mathbb{N}),$$

tj. po úpravě máme

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n \geq 2 (n \in \mathbb{N}).$$

Podle Věty o třech limitách je

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0.$$

Obdrželi jsme tak výsledek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = 1 + 0 = 1.$$

Poznamenejme, že další užití Věty o třech limitách mj. dává

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

pro libovolné reálné číslo $c \geq 1$. \square

požadovat zároveň rovnost prvních i druhých derivací u sousedních kousků polynomů třetího stupně. To totiž bude znamenat stejné množství rovnic a neznámých a pravděpodobně tedy i obdobnou praktickou řešitelnost problému:

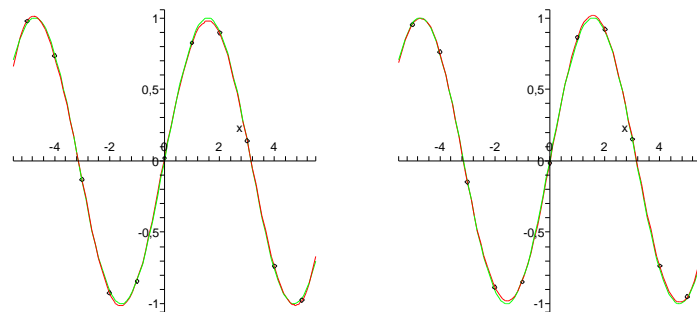
KUBICKÉ SPLAJNY

Nechť $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ jsou reálné hodnoty, ve kterých jsou zadány požadované hodnoty y_0, \dots, y_n . *Kubickým interpolačním splajnem* pro toto zadání je funkce $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje následující podmínky:

- zúžení S na interval $[x_{i-1}, x_i]$ je polynom S_i nejvýše třetího stupně, $i = 1, \dots, n$
- $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a $S_i(x_i) = y_i$ pro všechny $i = 1, \dots, n$,
- $S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n-1$,
- $S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n-1$.

Kubický splajn¹ pro $n+1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n + (n-1) + (n-1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro derivace v krajních bodech, tzv. *úplný splajn*, nebo jsou tyto zadány jako nula, tzv. *přirozený splajn*.

Výpočet celého splajnu už není bohužel tak jednoduchý jako u nezávislých výpočtů Hermiteových polynomů třetího stupně, protože data se prolínají vždy mezi sousedními intervaly. Při vhodném uspořádání se však dosáhne matice systému, která má nenulové prvky prakticky jen ve třech diagonálách, a pro takové existují vhodné numerické postupy, které umožní splajn počítat také v čase úměrném počtu bodů. Pro srovnání se podívejme na interpolaci stejných dat jako v případě Lagrangeova polynomu, nyní pomocí splajnů:



2. Reálná čísla a limitní procesy

Je důležité mít dostatečně velkou zásobu funkcí, se kterými bude možné vyjadřovat všechny běžné závislosti, zároveň ale musí být výběr šikovně omezen, abychom uměli vybudovat nějaké univerzální a hlavně účinné nástroje pro práci s nimi. Ve skutečnosti se budeme muset hned z

¹Ošklivé české slovo „splajn“ vzniklo fonetickým přepisem anglického ekvivalentu „spline“, který znamenal tvárné pravitko užívané inženýry pro kreslení křivek.

kraje soustředit na to, jak vůbec hodnoty funkcí definovat, když pomocí konečně mnoha násobení a sčítání dostáváme jen polynomy a navíc skutečně počítat umíme jen s čísly racionálními. S těmi ale nevystačíme ani při počítání odmocnin, protože už $\sqrt{2}$ racionální číslo není.

Prvním naším krokem tedy musí být pořádné zavedení tzv. limitních procesů, tj. dáme přesný obsah tvrzením, že se nějaké hodnoty blíží jejich hodnotě limitní.

Všimněme si také, že výraznou vlastností polynomů je jejich „spojitá“ závislost hodnot na nezávislé proměnné. Intuitivně řečeno, když dostatečně málo změníme x , určitě se nám moc nezmění ani hodnota $f(x)$. Takové chování naopak nemáme u po částech konstantních funkcí $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v okolí „skoků“. Např. u tzv. *Heavisideovy funkce*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro všechny } x < 0 \\ 1/2 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro všechny } x > 0 \end{cases}$$

taková „nespojitosť“ nastane pro $x = 0$.

Začneme formalizací takovýchto intuitivních výroků.

5.7

5.10. Reálná čísla. Prozatím jsme docela dobře vystačili s algebraickými vlastnostmi reálných čísel, které říkaly, že \mathbb{R} je pole. Už jsme ale používali i relaci uspořádání reálných čísel, kterou značíme „ \leq “ (viz odstavec 1.38). Vlastnosti (axiomy) reálných čísel, včetně souvislosti uspořádání a ostatních relací, jsou shrnuty v následující tabulce. Dělicí čáry naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, \mathbb{R} je pole, množina \mathbb{R} spolu s operacemi $+$, \cdot a s relací uspořádání je tzv. *uspořádané pole* a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že \mathbb{R} je „dostatečně husté“, tj. nechybí nám tam body, jako např. chybí $\sqrt{2}$ v číslech racionálních.

AXIOMY REÁLNÝCH ČÍSEL

5.15. Nyní přejdeme k určování limit funkcí. Definice viz strana 258.

Určete

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \sin x;$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2};$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arccos \frac{1}{x+1} \right)^3;$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x^4, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg (\sin x).$$

Řešení. Případ (a). Připomeňme, že funkce je spojitá v jistém bodě, když je v tomto bodě její limita rovna funkční hodnotě. O funkci $y = \sin x$ však víme, že je spojitá na \mathbb{R} . Dostáváme tak

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Případ (b). Přímé dosazení $x = 2$ dává nulový čítec i jmenovatel. Přesto je příklad velmi snadno řešitelný. Jednoduché krácení

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-1} = \frac{2+3}{2-1} = 5$$

totiž vedlo ke správnému výsledku (díky spojitosti obdržené funkce v bodě $x_0 = 2$). Uvědomme si zde, že limitu můžeme počítat pouze z funkčních hodnot v libovolně malém okolí daného bodu x_0 a že přitom limita nezávisí na hodnotě přímo v tomto bodě. Při počítání limit tedy můžeme využívat krácení a rozšiřování výrazů, které nemění hodnoty uvažované funkce v libovolně zvoleném ryzím okolí bodu x_0 .

Případ (c). Dvojnásobná záměna pořadí limity a vnější funkce převádí původní limitu na

$$\left(\arccos \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \right) \right)^3.$$

Lehce určíme, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Neboť je funkce $y = \arccos x$ spojitá v bodě 0, ve kterém nabývá hodnoty $\pi/2$, a funkce $y = x^3$ je spojitá v bodě $\pi/2$, platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arccos \frac{1}{x+1} \right)^3 = \left(\arccos \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \right) \right)^3 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^3.$$

Případ (d). Funkce $y = \arctg x$ má vlastnosti „užitečné při počítání limit“ – je spojitá a prostá (rostoucí) na celé reálné ose. Tyto vlastnosti

vždy (bez dalších podmínek či omezení) umožňují vnořit vyšetřovanou limitu do argumentu takové reálné funkce. Proto uvažujme

$$\arctg \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \right), \quad \arctg \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \right), \quad \arctg \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x \right).$$

Zřejmě je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

a limita $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ neexistuje, což již implikuje

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg \frac{1}{x} = \arctg 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x^4 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctg y = \frac{\pi}{2}$$

a neexistenci poslední limity. \square

5.16. Určete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} \right).$$

Řešení. Ke stanovení limity postačuje její členy vyjádřit ve tvaru

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdots 2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}}.$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}} \\ &= 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)} = 2^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

Ze známého vzorce pro součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2, \quad \text{tj.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 2 - 1 = 1,$$

plyne výsledek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} \right) = 2^1 = 2. \quad \square$$

5.17. Určete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \sin(x^2)}$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \sin(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2 \sin(x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)^2 \sin(x^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x^2)} = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty. \end{aligned}$$

Předchozí výpočet je nutné chápat „odzadu“. Protože existují limity na pravé straně (ať už vlastní či nevlastní) a výraz $\frac{1}{2} \cdot \infty$ má smysl

$$(R1) \quad (a + b) + c = a + (b + c), \text{ pro všechny } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(R2) \quad a + b = b + a, \text{ pro všechny } a, b \in \mathbb{R}$$

$$(R3) \quad \text{existuje prvek } 0 \in \mathbb{R} \text{ takový, že pro všechny } a \in \mathbb{R} \text{ platí } a + 0 = a$$

$$(R4) \quad \text{pro všechny } a \in \mathbb{R} \text{ existuje opačný prvek } (-a) \in \mathbb{R} \text{ takový, že platí } a + (-a) = 0$$

$$(R5) \quad a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ pro všechny } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(R6) \quad a \cdot b = b \cdot a \text{ pro všechny } a, b \in \mathbb{R}$$

$$(R7) \quad \text{existuje prvek } 1 \in \mathbb{R} \text{ takový, že pro všechny } a \in \mathbb{R} \text{ platí } 1 \cdot a = a$$

$$(R8) \quad \text{pro každý } a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ existuje inverzní prvek } a^{-1} \in \mathbb{R} \text{ takový, že platí } a \cdot a^{-1} = 1$$

$$(R9) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ pro všechny } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(R10) \quad \text{relace } \leq \text{ je úplné uspořádání, tj. reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná relace na } \mathbb{R}$$

$$(R11) \quad \text{pro všechny } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ platí, že } z a \leq b \text{ vyplývá také } a + c \leq b + c$$

$$(R12) \quad \text{pro všechny } a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, \text{ platí také } a \cdot b > 0$$

$$(R13) \quad \text{každá neprázdná ohraničená množina } A \subset \mathbb{R} \text{ má supremum.}$$

Pojem *supremum* musíme ale také zavést pořádně. Má smysl pro každou uspořádanou množinu, tj. množinu s pevně zadanou relací uspořádání, a budeme se s ním takto i později setkávat ve více algebraických souvislostech. Připomeňme, že v obecné úrovni je uspořádáním jakákoliv binární relace na množině, která má vlastnosti reflexivity, antisymetrie a tranzitivity, viz odstavec 1.38.

SUPREMUM A INFIMUM

Definice. Uvažme podmnožinu $A \subset B$ v uspořádané množině B . *Horní závora* množiny A je každý prvek $b \in B$, pro který platí, že $b \geq a$ pro všechny $a \in A$. Obdobně definujeme *dolní závory* množiny A jako prvky $b \in A$ takové, že $b \leq a$ pro všechny $a \in A$.

Nejmenší horní závora podmnožiny A , pokud existuje, se nazývá *supremum* této podmnožiny a značíme ji $\sup A$. Obdobně, největší dolní závora, pokud existuje, se nazývá *infimum*, píšeme $\inf A$.

Posledním axiomem v naší tabulce vlastností reálných čísel tedy předpokládáme, že pro každou množinu reálných čísel A platí, že pokud existuje nějaké číslo a větší nebo rovno než všechna $x \in A$, pak existuje také nejmenší takové číslo a . Např. volbou $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$ dostaneme jako supremum $\sup A$ právě $\sqrt{2}$.

Okamžitým důsledkem je také existence infim pro každou zdola ohraničenou množinu reálných čísel (stačí si všimnout, že obrácením znaménka všech čísel zaměníme suprema a infima).

Pro formální výstavbu další teorie ale potřebujeme vědět, zda námi požadované vlastnosti reálných čísel lze realizovat, tj. zda existuje taková množina \mathbb{R} s operacemi a relací uspořádání, které všech třináct axiomů skutečně splňují. Z tím jsem zkonstruovali korektně jen čísla racionální, která tvoří uspořádané pole, tj. splňují axiomy (R1) – (R12), což si čtenář jistě snadno ověří.

Ve skutečnosti lze reálná čísla nejen zkonstruovat, ale také lze ukázat, že až na izomorfismus to jde jediným způsobem. Pro naši potřebu vystačíme s intuitivní představou reálné přímky. Jednoznačnost proto nebudeme diskutovat vůbec a existenci jen naznačíme v dalších odstavcích.

5.7a

5.11. Komplexní rovina. Připomeňme, že komplexní čísla jsou dána jako dvojice reálných čísel, které jsme zvyklí zapisovat jako $z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z$. Dobrou představou o komplexních číslech je proto rovina $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.



Se sčítáním a násobením splňuje pole komplexních čísel axiomy (R1)–(R9), není na nich ale žádným rozumným způsobem definováno uspořádání, které by naplnilo axiomy (R10)–(R13). Nicméně s nimi budeme také pracovat a již dříve jsme viděli, že rozšíření skalárů na komplexní čísla je často pro výpočty mimořádně užitečné.

Důležitou operací na komplexních číslech je tzv. *konjugace*. Je to zrcadlení podle přímky reálných čísel, tj. obrácení znaménka u imaginární složky. Značíme ji pruhem nad daným číslem $z \in \mathbb{C}$,

$$\bar{z} = \operatorname{re} z - i \operatorname{im} z.$$

Protože je pro $z = x + iy$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

zadáva nám tento výraz právě kvadrát vzdálenosti komplexního čísla od nuly. Odmocnině z tohoto reálného nezáporného čísla říkáme absolutní hodnota komplexního čísla z , píšeme

e5.3

$$(5.3) \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Absolutní hodnotu máme definovanu také na každém uspořádaném poli skalárů, prostě definujeme *absolutní hodnotu* $|a|$ takto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{je-li } a \geq 0 \\ -a & \text{je-li } a < 0. \end{cases}$$

Samozřejmě platí pro každá dvě čísla $a, b \in \mathbb{K}$

e5.4

$$(5.4) \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Této vlastnosti říkáme trojúhelníková nerovnost a splňuje ji také absolutní hodnota komplexních čísel definovaná výše.

Zejména pro pole racionálních a reálných čísel, která jsou podmnožinami v komplexní rovině zjevně obě definice absolutní hodnoty splývají.

(viz Poznámka za větou (5.21)), existuje i původní limita. Kdybychom původní limitu rozdělili na součin limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \sin(x^2)}$$

, jednalo by se o součin typu $0 \cdot \infty$, tedy nedefinovaný výraz, ale tento fakt nevypovídá nic o existenci původní limity. \square

5.18. Určete následující limity:

i)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x},$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení.

i)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 2}} = \frac{0}{4} = 0.$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} \stackrel{(5.26)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

kde jsme využili toho, že $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0,$$

opět původní limita existuje, protože existují obě limity na pravé straně rovnosti a jejich součin je definován.

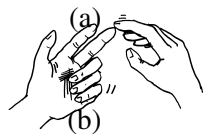
iv) Při výpočtu této limity musíme být obezřetní, protože obě jednostranné limity v bodě nula existují, jejich hodnoty se však liší, zkoumaná limita tedy neexistuje:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x}} = e^\infty = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

\square

5.19. Určete



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x-2)^6};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x-2)^5};$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}};$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-x}.$$

Řešení. V tomto příkladu se budeme věnovat tzv. neurčitým výrazům. Přesněji řečeno, budeme se zabývat situacemi, kdy se o ně nejedná. Čtenáři doporučujeme, aby neurčité výrazy vnímal jako pojem pomocný, který mu má pouze usnadnit orientování se při prvním počítání limit, neboť obdržený neurčitý výraz pouze znamená, že jsme „nic nezjistili“. Víme, že limita součtu je součet limit, limita součinu je součin limit a že limita podílu je podíl limit, pokud jednotlivé limity existují a nezískáme-li některý z výrazů $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ , o kterých právě hovoříme jako o neurčitých. Pro úplnost dodejme, že tato pravidla můžeme kombinovat (pro limity všech složek určené současně) a že za neurčitý výraz pak považujeme také ten, jenž obsahuje alespoň jeden neurčitý výraz. Např. tedy výrazy

$$-\infty + \infty = \infty - \infty, \quad \frac{-\infty}{3 + \infty} = -\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{(-\infty)^3 + \infty} = 0 \cdot (\infty - \infty)^{-1}$$

označujeme jako neurčité a o výrazech

$$-\infty - \infty, \quad \frac{0}{3 + \infty}, \quad \frac{0}{(-\infty)^3 - \infty}$$

můžeme říci, že jsou „určité“ (pro ně jsme schopni ihned příslušnou limitu stanovit – výrazy odpovídají po řadě hodnotám $-\infty$, 0 , 0).

V případě (a) podíl limit čitatele a jmenovatele dává výraz $4/0$. Zápis, ve kterém dělíme nulou, je sám o sobě přinejmenším nežádoucí (později bychom se mu měli být schopni vyvarovat). Přesto nám umožní stanovit výsledek: nejedná se o neurčitý výraz. Všimněme si, že jmenovatel se blíží k nule zprava (pro $x \neq 2$ je $(x-2)^6 > 0$). To zapisujeme jako $4/+0$. Číselník a jmenovatel tak mají stejné znaménko v jistém ryzím okolí bodu $x_0 = 2$ a lze říci, že jmenovatel je v limitě

5.8

5.12. Konvergence posloupností. V dalších odstavcích budeme pracovat s některým z číselných oborů \mathbb{K} racionálních, reálných nebo komplexních čísel. V tomto kontextu je tedy třeba chápat absolutní hodnotu a skutečnost, že ve všech případech platí trojúhelníková nerovnost.



CAUCHYOVSKÉ POSLOUPNOSTI

Uvažme libovolnou posloupnost čísel a_0, a_1, \dots v \mathbb{K} takovou, že pro libovolně pevně zvolené kladné číslo $\epsilon > 0$ platí pro všechny dvojice prvků a_i, a_j posloupnosti, až na konečně mnoho výjimek (které závisí na volbě ϵ),

$$|a_i - a_j| < \epsilon.$$

Jinak řečeno, pro každé pevné $\epsilon > 0$ existuje index N takový, že předcházející nerovnost platí pro všechna $i, j > N$. Takové posloupnosti prvků se říká *Cauchyovská posloupnost*.

Intuitivně jistě cítíme, že buď jsou v takové posloupnosti všechny prvky stejné až na konečně mnoho z nich (pak bude od určitého indexu N počínaje vždy $|a_i - a_j| = 0$) nebo se taková posloupnost „hromadí“ k nějaké hodnotě. Dobře je to představitelné v komplexní rovině: ať vybereme jakkoliv malý kruh (o poloměru ϵ), tak se nám jej u Cauchyovské posloupnosti vždy musí podařit položit do komplexní roviny tak, že zakryje všechny body nekonečné posloupnosti a_i , až na konečně mnoho z nich. Můžeme si pak představit, že postupným zmenšováním se kruh smrští až do jediné hodnoty a .

Pokud by taková hodnota $a \in \mathbb{K}$ pro Cauchyovskou posloupnost skutečně existovala, očekávali bychom od ní patrně následující vlastnost *konvergence*:

KONVERGUJÍCÍ POSLOUPNOST

Jestliže pro posloupnost čísel $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{K}$, pevně zvolené číslo $a \in \mathbb{K}$ a pro libovolné kladné reálné číslo ϵ platí pro všechny i , až na konečně mnoho výjimek (závisejících na volbě ϵ),

$$|a_i - a| < \epsilon,$$

říkáme, že posloupnost $a_i, i = 0, 1, \dots$, *konverguje* k hodnotě a . Číslo a také říkáme *limita* posloupnosti $a_i, i = 0, 1, \dots$.

Jestliže nějaká posloupnost $a_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, \dots$, konverguje k číslu $a \in \mathbb{K}$, pak pro každé pevně zvolené kladné ϵ víme, že $|a_i - a| < \epsilon$ pro všechna i větší než vhodné $N \in \mathbb{N}$. Pak ovšem, díky trojúhelníkové nerovnosti, pro každou dvojici indexů $i, j \geq N$ dostáváme

$$|a_i - a_j| = |a_i - a_N + a_N - a_j| < |a_i - a_N| + |a_N - a_j| < 2\epsilon.$$

Dokázali jsme tedy:

Lemma. *Každá konvergující posloupnost čísel je Cauchyovská.*

V poli racionálních čísel se ovšem může snadno stát, že pro Cauchyovské posloupnosti příslušná hodnota a neexistuje. Např. číslo $\sqrt{2}$ můžeme libovolně přesně přiblížit racionálními čísly a_i , dostaneme tedy konvergentní posloupnost s limitou $\sqrt{2}$, ale samotná limita již není racionální.

Uspořádaná pole skalárů, ve kterém všechny Cauchyovské posloupnosti konvergují, se nazývají *úplná*. Následující tvrzení říká, že axiom (R13) takové chování reálných čísel zaručuje:

Věta. Každá Cauchyovská posloupnost reálných čísel a_i konverguje k reálné hodnotě $a \in \mathbb{R}$.



DŮKAZ. Každá Cauchyovská posloupnost je zjevně ohraničená množina, protože pro libovolnou volbu ϵ ohraničíme všechny členy posloupnosti až na konečně mnoho z nich. Definujme si množinu B všech reálných čísel x , pro které platí $x < a_j$ pro všechny prvky a_j posloupnosti, až na konečně mnoho z nich.

Zřejmě má B horní závorku, tudíž podle axiomu (R13) má i supremum. Definujme $a = \sup B$. Nyní pro nějaké pevně zvolené $\epsilon > 0$ zvolme N takové, aby $|a_i - a_j| < \epsilon$ pro všechny $i, j \geq N$. Zejména tedy $a_j > a_N - \epsilon$ a $a_j < a_N + \epsilon$ pro všechny indexy $j > N$, takže $a_N - \epsilon$ patří do B , zatímco $a_N + \epsilon$ už nikoliv. Souhrnně z toho dostáváme, že $|a - a_N| \leq \epsilon$, a proto také

$$|a - a_j| \leq |a - a_N| + |a_N - a_j| \leq 2\epsilon$$

pro všechny $j > N$. To ale značí právě, že a je limitou uvažované posloupnosti. \square

Důsledek. Každá Cauchyovská posloupnost komplexních čísel z_i konverguje k nějakému komplexnímu číslu z .

DŮKAZ. Pišme $z_i = a_i + i b_i$. Protože je $|a_i - a_j|^2 \leq |z_i - z_j|^2$ a podobně i pro hodnoty b_i , jsou obě posloupnosti reálných čísel a_i a b_i Cauchyovské. Existují tedy jejich limity a resp. b a snadno ověříme, že $z = a + i b$ je limitou pro posloupnost z_i . \square

5.8a

5.13. Poznámka. Předchozí diskuse nám dává návod na jeden z možných postupů, jak korektně vybudovat reálná čísla. Postupujeme podobně jako při zúplňování přirozených čísel na celá (abychom přidali opačné hodnoty) a celých na racionální (abychom přidali podíly nenulových čísel). Tentokrát k racionálním číslům „přidáme“ limity všech Cauchyovských posloupností.

Skutečně se podbízí zavést vhodně relaci ekvivalence na množině všech Cauchyovských posloupností racionálních čísel tak, že dvě Cauchyovské posloupnosti jsou ekvivalentní, když jejich sloučením do jediné posloupnosti (např. tak, že první posloupnost bude představovat liché, zatímco druhá sudé členy výsledné posloupnosti) obdržíme opět posloupnost Cauchyovskou. Nebudeme zde podrobně ověřovat, že jde o ekvivalenci, ani zavádět operace násobení a sčítání, ani dokazovat, že všechny požadované axiomy skutečně dojdou

„nekonečněkrát menší“ než čísel, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{(x - 2)^6} = +\infty,$$

což odpovídá položení $4/ + 0 = +\infty$ (podobně se klade $4/ - 0 = -\infty$).

Při určování druhé limity lze postupovat analogicky. Protože čísla $a \in \mathbb{R}$ a a^5 mají stejná znaménka, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{(x - 2)^5} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{(x - 2)^5},$$

tj. oboustranná limita neexistuje. Tomu odpovídá zápis $4/ \pm 0$ (nebo obecnější $a/ \pm 0$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^*$), který je „určitým výrazem“. Při důsledném oddělování symbolů $+0$ a -0 od ± 0 vždy $a/\pm 0$ pro $a \neq 0$ znamená, že limita neexistuje.

Případy (c), (d). Je-li $f(x) > 0$ pro všechna uvažovaná $x \in \mathbb{R}$, platí

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Využijeme-li toho, že exponenciální funkce je spojitá a prostá na reálné přímce, můžeme nahradit limitu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

za

$$e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln f(x))}.$$

Připomeňme, že jedna z těchto limit existuje právě tehdy, když existuje druhá; a doplňme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln f(x)) = a \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^a,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln f(x)) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln f(x)) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = 0.$$

Můžeme tudíž psát

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)},$$

jestliže obě limity vpravo existují a neobdržíme-li neurčitý výraz $0 \cdot \infty$. Není obtížné si uvědomit, že tento neurčitý výraz lze získat pouze ve třech případech odpovídajících zbylým neurčitým výrazům 0^0 ; ∞^0 ; 1^∞ , kdy postupně je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

V ostatních případech nám tedy znalost (a pochopitelně existence) limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

citace nějakého zdroje, případně alternativní možnosti zavedení reálných čísel

umožňuje uvést výsledek (při dodefinování některých zápisů)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

5.9

Protože

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty,$$

je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 2^0 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^x = 0$$

nebo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^x)^{-1} = 0.$$

Poslední výsledek pak bychom mohli vyjádřit zápisem $0^\infty = 0$ či $\infty^\infty = \infty$, $\infty^{-1} = 0$ (zdůrazněme, že se nejedná o neurčité výrazy).

Přestože jsme kladli důraz na to, aby čtenář raději upřednostňoval úvahy o limitním chování funkcí před škatulkováním výrazů na určité a neurčité (a tyto pojmy vnímal jen jako pomocné), je snad dobře patrný důvod, proč se budeme nadále zabývat především neurčitými výrazy. \square

5.20. Vypočítejte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \pi x^2}{2 \cos x - 1 - x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + x^5 - 4x}{3^x + 2^x + x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x - 8x^6 - 2^x - 167}{3^x - 45x - \sqrt{11}\pi^{x+12}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sin^3 x + x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+2x+x^2}}.$$

Řešení. Vydělíme-li v případě první z limit čitatele i jmenovatele polynomem x^2 , obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x^2} + \pi}{2 \frac{\cos x - 1}{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x^2} + \pi}{\frac{2 \cos x - 1}{x^2} - 1}.$$

Ohraničenost výrazů

$$|\sin x| \leq 1, \quad |2 \cos x - 1| \leq 3 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

a $x^2 \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow +\infty$ pak dávají výsledek

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x^2} + \pi}{\frac{2 \cos x - 1}{x^2} - 1} = \frac{0 + \pi}{0 - 1} = -\pi.$$

naplnění. Není to ale složité počínání. Složitější ambicí je dokázat, že axiomy (R1)–(R13) definují reálné čísla v jistém smyslu jednoznačně.

5.14. Otevřené a uzavřené množiny. Pro další práci s reálnými nebo komplexními čísly budeme potřebovat podrobnější pochopení pojmů jako blízkost, omezenost, konvergence apod.



HROMADNÉ BODY MNOŽINY

Uvažme jakoukoliv množinu A bodů v \mathbb{K} a předpokládejme, že posloupnost a_0, a_1, \dots je vybraná z prvků A . Pokud konverguje k hodnotě $a \in \mathbb{K}$ a navíc je nekonečně mnoho bodů $a_i \in A$ různých od a , nazýváme a *hromadný bod množiny* A .

Hromadné body podmnožiny A racionálních, reálných nebo komplexních čísel jsou tedy ta čísla, která jsou limitami posloupností čísel z A . Všimněme si, že hromadný bod množiny do ní nemusí patřit.

UZAVŘENÉ MNOŽINY

Uzavřená podmnožina v \mathbb{K} je taková, která obsahuje i všechny své hromadné body. Typickou uzavřenou množinou je tzv. *uzavřený interval*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

reálných čísel. Zde a je reálné číslo nebo hraniční hodnota chybí a píšeme $a = -\infty$ (mínus nekonečno) a podobně $b > a$ je reálné číslo nebo $+\infty$.

Uzavřené množiny jsou tedy ty, které v sobě mají i vše, k čemu umí „dokonvergovat“. Uzavřenou množinu bude tvořit např. posloupnost reálných čísel bez hromadného bodu nebo posloupnost s konečným počtem hromadných bodů spolu s těmito body. Uzavřený je také např. jednotkový kruh v rovině komplexních čísel včetně hraniční kružnice.

Snadno ověříme, že libovolný průnik a libovolné konečné sjednocení uzavřených množin opět uzavřená množina. Skutečně, pokud všechny body nějaké posloupnosti patří do průniku našeho systému množin, pak jistě patří do každé z nich a proto do každé z nich patří i všechny hromadné body. Pokud bychom ale chtěli totéž říci o obecném sjednocení systému množin A_i , pak bychom neuspěli, protože např. jednobodové množiny jsou zjevně uzavřené, ale z nich utvořená posloupnost bodů už uzavřená nebývá. Pokud ale jde o konečné sjednocení množin a hromadný bod nějaké posloupnosti ležící v tomto sjednocení, pak takový hromadný bod musí být hromadným bodem i vybrané podposloupnosti, která ale už bude celá v jedné z našich množin. Každá je ale uzavřená, takže i hromadný bod do ní a tedy i celého sjednocení patří.

OTEVŘENÉ MNOŽINY A OKOLÍ BODŮ

Otevřená množina v \mathbb{K} je taková množina, jejíž doplněk je uzavřenou množinou.

Okolím bodu $a \in \mathbb{K}$ nazýváme libovolnou otevřenou množinu \mathcal{O} , která a obsahuje. Je-li okolí definované jako

$$\mathcal{O}_\delta(a) = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| < \delta\}$$

pro kladné číslo δ , hovoříme o δ -okolí bodu a .

Všimněme si, že pro libovolnou množinu A je $a \in \mathbb{K}$ hromadným bodem A , právě když v libovolném okolí a leží také alespoň jeden bod $b \in A$, $b \neq a$.

Lemma. Množina čísel $A \subset \mathbb{K}$ je otevřená, právě když každý její bod $a \in A$ do ní patří i s nějakým svým okolím.

DŮKAZ. Nechť je A otevřená a $a \in A$. Kdyby neexistovalo žádné okolí bodu a uvnitř A , musela by existovat posloupnost $a_n \notin A$, $|a - a_n| \leq 1/n$. Pak je ovšem $a \in A$ hromadným bodem množiny $\mathbb{K} \setminus A$, což není možné, protože doplněk A je uzavřený.

Naopak předpokládejme, že každé $a \in A$ leží v A i s nějakým svým okolím. To přirozeně zabraňuje, aby nějaký hromadný bod b pro množinu $\mathbb{K} \setminus A$ ležel v A . Je proto $\mathbb{K} \setminus A$ uzavřená a tedy je A otevřená. \square

Z právě dokázaného lemmatu okamžitě vyplývá, že je libovolné sjednocení otevřených množin opět otevřenou množinou a že každý konečný průnik otevřených množin je opět otevřená množina.

Typickou otevřenou množinou reálných čísel je *otevřený interval* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, kde pro hraniční hodnoty máme stejné možnosti jako výše. Jde o ohraničenou množinu právě, když jsou obě meze intervalu konečná čísla.

V případě reálných čísel jsou δ -okolí právě otevřené intervaly o délce 2δ s a uprostřed. V komplexní rovině je δ -okolí kruh o poloměru δ se středem v a .

5.9a

5.15. Ohraničené a kompaktní množiny čísel. Uzavřené a otevřené množiny představují základní pojmy tzv. *topologie*. Aniž bychom zacházeli do hlubších podrobností a souvislostí, seznámili jsme se právě s *topologií reálné přímky* a *topologií komplexní roviny*. Velice užitečné budou i následující pojmy:



OHRANIČENÉ A KOMPAKTNÍ MNOŽINY

Množina A racionálních, reálných nebo komplexních čísel se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje kladné reálné číslo r takové, že $|z| \leq r$ pro všechny čísla $z \in A$. V opačném případě je *neohraničená*.

Ohraničená a uzavřená množina se nazývá *kompaktní*.

Uzavřené konečné intervaly reálných čísel jsou typickým příkladem množin kompaktních.

Přidejme ještě několik topologických pojmů, které nám umožní účinné vyjadřování:

Vnitřním bodem množiny A reálných nebo komplexních čísel nazveme takový bod, který do A patří i s nějakým svým okolím.

V předešlé úvaze jsme vlastně použili Větu o třech limitách a zápis $c/\infty = 0$ platný pro $c \in \mathbb{R}$ (nebo přímo $\text{ohr.}/\infty = 0$, kde „ohr.“ značí ohraničenou funkci).

Tento postup lze zobecnit. Pro limitu tvaru

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)},$$

přičemž

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_i(x)}{f_1(x)} = 0, \quad i \in \{2, \dots, m\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_i(x)}{g_1(x)} = 0, \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje. Je přitom výhodné si uvědomit (třetí z limit lze určit např. pomocí l'Hospitalova pravidla, se kterým se seznámíme později), že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0$$

pro

$$c \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 1 < a < b.$$

Odtud ihned plyne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + x^5 - 4x}{3^x + 2^x + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 3^x}{3^x} = 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x - 8x^6 - 2^x - 167}{3^x - 45x - \sqrt{11}\pi^{x+12}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{-\sqrt{11}\pi^{12} \cdot \pi^x} = -\infty.$$

Uvědomíme-li si, že je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \geq 1,$$

stejně snadno dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sin^3 x + x \arctg x}{\sqrt{1 + 2x + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

5.21. Určete limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right).$$

Řešení. Neboť pro každé přirozené číslo $k \geq 2$ je (provádíme tzv. rozklad na parciální zlomky – budeme jej probírat u integrování racionálních lomených funkcí)

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Poznamenejme, že stanovení této limity je důležité: určuje součet jedné z tzv. teleskopických řad (se kterou pracoval již Johann I. Bernoulli).

Ke stanovení druhé limity využijeme Větu o třech limitách. Odhady

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

pro $n \in \mathbb{N}$ dávají

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1,$$

je rovněž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

5.22. Spočtete

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos(2x)};$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^4} \left(\sqrt[3]{x^2+2x+3} - \sqrt[3]{x^2+2x+2} \right) \right).$$

Řešení. Všechny uvedené limity vypočítáme pomocí vhodného rozšíření zadaného výrazu. V případě první limity vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

a využijeme známého vztahu $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Takto obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1.$$

Hraniční bodem množiny A rozumíme takový bod, jehož každé okolí má neprázdný průnik jak s A tak s doplňkem $\mathbb{R} \setminus A$. Hraniční bod tedy může, ale nemusí patřit do samotné množiny A .

Otevřené pokrytí množiny A je takový systém otevřených množin U_i , $i \in I$, že jejich sjednocení obsahuje celé A .

Izolovaným bodem množiny A rozumíme bod $a \in A$, který má okolí, jehož průnik s A je právě jednobodová množina $\{a\}$.

5.16. Věta. Pro podmnožiny A reálných čísel platí:

- (1) neprázdná množina A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému otevřených intervalů,
- (2) každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,
- (3) každý hraniční bod množiny A je buď izolovaným nebo hromadným bodem A ,
- (4) A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A ,
- (5) A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

DŮKAZ. (1) Zjevně je každá otevřená množina sjednocením nějakých okolí svých bodů, tj. otevřených intervalů. Jde tedy pouze o to, jestli nám jich vždy stačí spočetně mnoho. Zkusme tedy najít „co největší“ intervaly. Řekneme, že body $a, b \in A$ jsou v relaci, jestliže celý otevřený interval $(\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$ je podmnožinou v A . To je zjevně relace ekvivalence (otevřený interval (a, a) je prázdná množina a ta je podmnožinou, symetrie relace i tranzitivita jsou zřejmé). Třídy této ekvivalence budou zjevně intervaly, které budou navíc po dvou disjunktní. Každý z těchto intervalů jistě musí obsahovat nějaké racionální číslo a tyto musí být různé. Všech racionálních čísel je ale spočetně mnoho, proto máme tvrzení dokázané.

(2) Přímo z definic vyplývá, že bod nemůže být vnitřní a hraniční zároveň. Nechť tedy $a \in A$ není vnitřní. Pak ovšem existuje posloupnost bodů $a_i \notin A$ s hromadným bodem a . Zároveň a patří do každého svého okolí. Proto je a hraniční.

(3) Předpokládejme, že $a \in A$ je hraniční a není izolovaný. Pak stejně jako v argumentaci předchozího odstavce existují body a_i , tentokrát uvnitř A , jejichž hromadným bodem je a .

(4) Předpokládejme, že je A kompaktní, tj. uzavřená a ohraničená, a uvažme nějakou nekonečnou posloupnost bodů $a_i \in A$. Tato podmnožina má jistě supremum b i infimum a (nebo můžeme zvolit libovolnou horní a dolní závoru množiny A). Rozdělme nyní interval $[a, b]$ přesně na dvě poloviny $[a, \frac{1}{2}(b-a)]$ a $[\frac{1}{2}(b-a), b]$. V alespoň jedné z nich musí být nekonečně mnoho prvků a_i . Vyberme takovou polovinu, jeden z prvků v ní obsažených a následně tento interval

opět rozdělme uvažovaný interval na poloviny. Znovu vybereme tu polovinu, kde je nekonečně mnoho prvků posloupnosti a vybereme si jeden z nich. Tímto způsobem dostaneme posloupnost, která bude Cauchyovská (dokažte si detailně – vyžaduje si jen pozorné hraní s odhady, podobně jako výše). O Cauchyovských posloupnostech ovšem už víme, že mají vždy hromadné body nebo jsou konstantní až na konečně mnoho výjimek. Existuje tedy podposloupnost s námi hledanou limitou. Z uzavřenosti A zase vyplývá, že námi nalezený bod musí opět ležet v A .

Opačně, jestliže každá v A obsažená nekonečná podmnožina má hromadný bod v A , znamená to, že všechny hromadné body jsou v A a tedy je A uzavřená. Pokud by nebyla množina A zároveň ohraničená, uměli bychom najít posloupnost stále rostoucí nebo klesající s rozdíly dvou po sobě jdoucích čísel třeba alespoň 1. Taková posloupnost bodů z A ale nemůže mít hromadný bod vůbec.

(5) Nejprve se věnujme snadnější implikaci, tj. předpokládejme, že z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné a dokazujeme, že pak A je uzavřená i ohraničená. Jistě lze A pokrýt spočetným systémem intervalů $I_n = (n - 2, n + 2)$, $n \in \mathbb{Z}$, a jakýkoliv výběr konečně mnoha z nich říká, že je množina A ohraničená.



Předpokládejme nyní, že $a \in \mathbb{R} \setminus A$ je hromadným bodem posloupnosti $a_i \in A$ a předpokládejme rovnou, že $|a - a_n| < \frac{1}{n}$ (jinak bychom mohli vybrat takovou podposloupnost). Množiny

$$J_n = \mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$$

pro všechny $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, jsou sjednocení dvou otevřených intervalů a jistě také pokrývají naši množinu A . Protože je možné vybrat konečné pokrytí A , bod a je uvnitř doplňku $\mathbb{R} \setminus A$ včetně nějakého svého okolí a není tedy hromadným bodem. Proto musí být všechny hromadné body A opět v A a tato množina je i uzavřená.

Opačný směr důkazu je založený na existenci a vlastnostech suprema. Předpokládejme, že je A kompaktní a že je dáno nějaké její otevřené pokrytí \mathcal{C} . Z předchozího je zřejmé, že v A existují největší a nejmenší prvek, které jsou zároveň rovny $b = \sup A$ a $a = \inf A$. Označme si teď „nejzašší mez“, pro kterou ještě půjde konečné pokrytí z \mathcal{C} vybrat, tj. definujeme množinu

$B = \{x \in [a, b], \text{ existuje výběr konečného pokrytí } [a, x] \cap A\}$.

Evidentně $a \in B$, jde tedy o neprázdnou zhora ohraničenou množinu a existuje proto $c = \sup B$. Jde nám o to dokázat, že ve skutečnosti musí být $c = b$.

Argumentace je trochu nepřehledná, dokud si ji nenacrtneme na obrázku, podstata je ale snadná: Víme, že $a \leq c \leq b$, předpokládejme tedy chvíli, že $c < b$. Protože je $\mathbb{R} \setminus A$ otevřená, pro $c \notin A$ existuje okolí bodu c obsažené v $[a, b]$ a zároveň disjunktní s A . To by ale vylučovalo možnost $c = \sup B$.

Podobně vypočítáme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos(2x)} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)\cos(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)\cos(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

U provedeného krácení připomeňme identitu

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abychom mohli při určování poslední limity použít

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3,$$

k rozšíření potřebujeme výraz

$$\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} \cdot \sqrt[3]{x^2 + 2x + 2} + \sqrt[3]{(x^2 + 2x + 2)^2},$$

který odpovídá $a^2 + ab + b^2$, resp. volíme

$$a = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}, \quad b = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 2}.$$

Tímto rozšířením převedeme limitu ze zadání na

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4} ((x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x + 2))}{\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} \cdot \sqrt[3]{x^2 + 2x + 2} + \sqrt[3]{(x^2 + 2x + 2)^2}},$$

tj.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} \cdot \sqrt[3]{x^2 + 2x + 2} + \sqrt[3]{(x^2 + 2x + 2)^2}}.$$

Poslední limitu umíme snadno vyčíslit. Víme totiž, že je určena pouze jedním členem v čitateli a jedním ve jmenovateli, a to ax^p pro největší p (v tomto případě je uvažovaný člen ve jmenovateli rozdělen na několik sčítanců). Platí tudíž

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} \cdot \sqrt[3]{x^2 + 2x + 2} + \sqrt[3]{(x^2 + 2x + 2)^2}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{(x^2)^2} + \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x^2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Celkem tak je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^4} \left(\sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} - \sqrt[3]{x^2 + 2x + 2} \right) \right) = \frac{1}{3}.$$

□

5.23. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ určete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2nx)^n - (1 + nx)^{2n}}{x^2}.$$

Řešení. Podle binomické věty je

$$(1 + 2nx)^n = 1 + \binom{n}{1} 2nx + \binom{n}{2} (2nx)^2 + P(x) x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(1 + nx)^{2n} = 1 + \binom{2n}{1} nx + \binom{2n}{2} (nx)^2 + Q(x) x^3, \quad x \in \mathbb{R} \quad \boxed{5.11}$$

pro jisté polynomy P, Q . Raději vyzdvihněme, že předchozí vyjádření skutečně platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ si stačí uvědomit, že klademe $\binom{1}{2} = 0$ a že polynomy P, Q mohou být identicky rovny nule. Dostáváme tedy

$$(1 + 2nx)^n = 1 + 2n^2x + 2n^3(n-1)x^2 + P(x)x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(1 + nx)^{2n} = 1 + 2n^2x + n^3(2n-1)x^2 + Q(x)x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pouhé dosazení a jednoduché úpravy již dávají

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2nx)^n - (1 + nx)^{2n}}{x^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2n^3(n-1) - n^3(2n-1))x^2 + (P(x) - Q(x))x^3}{x^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-n^3 + (P(x) - Q(x))x) &= -n^3 + 0 = -n^3. \end{aligned}$$

□

5.24. Spočítejte

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}.$$

Řešení. Limity typu $1^{\pm\infty}$ (jako je v zadání) lze počítat podle vzorce

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} ((f(x)-1)g(x))},$$

jestliže limita na pravé straně existuje a $f(x) \neq 1$ pro x z jistého ryzího okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Určeme proto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} ((\operatorname{tg} x - 1) \operatorname{tg}(2x)) &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x} = -\frac{2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1. \end{aligned}$$

Odtud máme

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)} = \frac{1}{e}.$$

Doplňme, že použitý vzorec platí obecněji pro „typ 1^{cokoli} “, tj. bez kladení jakýchkoli podmínek týkajících se limity $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, která tak ani nemusí existovat. □

Zbývá tedy v takovém případě $c \in A$ a tedy je i nějaké okolí \mathcal{O} bodu c v otevřeném pokrytí \mathcal{C} . Zvolme si body $p < c < q$ v \mathcal{O} . Opět nyní bude existovat konečné pokrytí pro $[a, q] \cap A$. To ale značí, že $q > c$ leží v B , což není možné. Původní volba $c < b$ tedy vedla ke sporu, což dokazuje požadovanou rovnost $b = c$. Nyní ale s pomocí okolí b , které patří do \mathcal{C} umíme najít konečné pokrytí v \mathcal{C} pro celé A . □

5.17. Limity funkcí a posloupností. Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel \mathbb{R} o dvě nekonečné hodnoty $\pm\infty$, tak jak jsme to už dělali při označování intervalů.

Okolím nekonečna rozumíme interval (a, ∞) , resp. $(-\infty, a)$ je okolí $-\infty$. Pojem hromadného bodu množin rozšiřujeme tak, že ∞ je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{R}$ jestliže každé okolí ∞ s ní má neprázdný průnik, tj. jestliže je A zhora neohrazená. Obdobně pro $-\infty$. Hovoříme o *nevlastních hromadných bodech* množiny A .

„POČÍTÁNÍ SE NEKONEČNÝ“

Zavádíme i pravidla pro počítání s formálně přidanými hodnotami $\pm\infty$ a pro libovolná „konečná“ čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$a + \infty = \infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$a \cdot \infty = \infty, \text{ je-li } a > 0$$

$$a \cdot \infty = -\infty, \text{ je-li } a < 0$$

Následující definice pokrývá mnoho případů limitních procesů a bude třeba ji zvládnout dokonale. Jednotlivými případy se budeme podrobně zabývat v zápatí.

REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ LIMITY

Definice. Uvažme libovolnou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}$ a reálnou funkci $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, případně komplexní funkci $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, definovanou na A . Uvažme dále hromadný bod x_0 množiny A (tj. buď reálné číslo nebo případně $\pm\infty$).

Říkáme, že f má v x_0 *limitu* $a \in \mathbb{R}$ (nebo $a \in \mathbb{C}$) a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a lze najít okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechny $x \in A \cap (\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\})$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

Limita reálné funkce se nazývá *nevlastní*, jestliže je $a = \pm\infty$. V opačném případě se nazývá *vlastní*.

Je důležité si všimnout, že hodnota f v bodě x_0 v definici nevystupuje a f v tomto hromadném bodě vůbec nemusí být definována (a v případě nevlastního hromadného bodu ani nemůže)!

Také je zřejmé, že nevlastní limity komplexních funkcí nejsou definovány.

5.12

5.18. Nejčastější varianty definičních oborů. Naše definice limity pokrývá zdánlivě velice rozdílné koncepty:

(1) **Limity posloupností.** Jestliže je $A = \mathbb{N}$, tj. funkce f je definována pouze pro přirozená čísla, hovoříme o limitech posloupností reálných nebo komplexních čísel. Jediným hromadným bodem definičního oboru A je pak ∞ a zpravidla píšeme hodnoty poslounosti $f(n) = a_n$ a limitu ve tvaru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Podle definice to pak znamená, že pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ limitní hodnoty a existuje index $N \in \mathbb{N}$ takový, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$ pro všechny $n \geq N$. Ve skutečnosti jsme tedy v tomto speciálním případě přeformulovali definici konvergence poslounosti (viz 5.12). Přidali jsme pouze možnost nevlastních limit. Říkáme také, že *poslounost a_n konverguje k a .*

Přímo z naší definice pro komplexní hodnoty je opět vidět, že komplexní poslounost má limitu a , právě když reálné části a_i konvergují k a a zároveň imaginární části konvergují k $\text{im } a$.

(2) **Limita funkce ve vnitřním bodě intervalu.** Jestliže je f definována na intervalu $A = (a, b)$ a x_0 je vnitřním bodem intervalu, hovoříme o limitě funkce ve vnitřním bodě jejího definičního oboru. Podívejme se, proč je důležité v definici požadovat $f(x) \in \mathcal{O}(a)$ pouze pro body $x \neq x_0$ i v tomto případě. Vezměme jako příklad funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \neq 0 \\ 1 & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

Pak zjevně limita v nule je dobře definována a v souladu s naším očekáváním bude $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, přestože $f(0) = 1$ do malých okolí limitní hodnoty 0 nepatří.

(3) **Limity zprava a zleva.** Je-li $A = [a, b]$ ohraničený interval a $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$, hovoříme o limitě zprava, resp. zleva, v hraničním bodě definičního oboru funkce f . Jestliže je ale bod x_0 vnitřním bodem, můžeme pro účely výpočtu limity definiční obor zúžit na $[x_0, b]$ nebo $[a, x_0]$. Výsledným limitám pak říkáme *limita zprava*, resp. *limita zleva* pro funkci f v bodě x_0 . Označujeme ji výrazem $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Jako příklad nám může sloužit limita zprava a zleva v $x_0 = 0$ pro Heavisideovu funkci h z úvodu této části. Evidentně je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0.$$

Limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ přitom neexistuje.

Přímo z našich definic je zjevné, že limita ve vnitřním bodu definičního oboru libovolné reálné funkce f existuje, právě když existují limity zprava i zleva a jsou si rovny.

5.12a

5.19. Další příklady limit. (1) Limita komplexní funkce $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ existuje tehdy a jen tehdy, jestliže existují limity její reálné a imaginární části. V takovém případě je pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\text{re } f(x)) + i \lim_{x \rightarrow x_0} (\text{im } f(x)).$$

5.25. Ukažte, že je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Uvažujme jednotkovou čtvrtkružnici v prvním kvadrantu a její bod $[\cos x, \sin x]$, $x \in (0, \pi/2)$. Délka kruhového oblouku mezi body $[\cos x, \sin x]$ a $[1, 0]$ je rovna x . Zřejmě tedy je

$$\sin x < x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Hodnotu $\text{tg } x$ potom vyjadřuje délka úsečky s krajními body $[1, \sin x / \cos x]$ a $[1, 0]$. Vidíme, že je (příp. si nakreslete obrázek)

$$x < \text{tg } x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Tato nerovnost rovněž vyplývá z toho, že trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[1, \text{tg } x]$ má očividně větší obsah než uvažovaná kruhová výseč. Dohromady jsme získali

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

tj.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Z Věty o třech limitách nyní plynou nerovnosti

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Dokázali jsme tak, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkce $y = (\sin x)/x$ definovaná pro $x \neq 0$ je ovšem sudá, a tudíž je

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Protože obě jednostranné limity existují a jsou si rovny, existuje oboustranná limita a platí pro ni

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Poznamenejme ještě, že uvedenou limitu šlo velmi snadno vyčíslit za pomoci l'Hospitalova pravidla. \square

5.26. Stanovte limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \text{tg}^2 x}{5x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(3x)}{\sin(5x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{-x}}{\sin(2x)}.$$

Řešení. Při určování těchto limit využijeme znalosti limit ($a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Víme tedy, že je

$$e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Substituce $m = n - 1$ dává

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+1}.$$

Celkem máme

$$e^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+1}.$$

Druhá z limit je zjevně rovna 1. Když změníme označení (nahradíme n za m), můžeme napsat výsledek

$$e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^n = 0. \quad \boxed{5.12b}$$

Upozorníme, že první z předešlých vyčíslení vyplývá z limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

a druhé potom z

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty,$$

přičemž klademe $e^{-\infty} = 0$ (zápis označuje $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ – jedná se o určitý výraz).

Snadno lze získat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Zřejmě je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1^{-1} = 1$$

a limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$$

Důkaz je přímočarý a vychází přímo z definice vzdáleností a okolí bodů v komplexní rovině. Skutečně, příslušnost do δ -okolí komplexní hodnoty z je zajištěna pomocí reálných $(1/\sqrt{2})\delta$ -okolí reálné a imaginární složky z . Odtud již tvrzení bezprostředně vyplývá.

(2) Nechť f je reálný nebo komplexní polynom. Pak pro každý bod $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Skutečně, je-li $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, pak roznásobením $(x_0 + \delta)^k = x_0^k + k\delta x_0^{k-1} + \dots + \delta^k$ a dosazením pro $k = 0, \dots, n$ vidíme, že volbou dostatečně malého δ se hodnotou libovolně blízko přiblížíme $f(x_0)$.

(3) Uvažme nyní docela ošklivou funkci definovanou na celé reálné přímce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Přímo z definice je zjevné, že tato funkce nemá limitu v žádném bodě (dokonce ani zleva nebo zprava).

(4) Následující funkce je ještě záluďnější, než jsme viděli v předchozím případě. Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována takto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{jestliže } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ } p \text{ a } q \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zjevně tato funkce má limitu ve všech iracionálních reálných bodech x a to rovnu své hodnotě $f(x) = 0$, zatímco v racionálních bodech neexistují ani jednostranné limity zprava a zleva. Důkaz přenecháváme jako cvičení.

5.20. Věta (O třech limitách). *Buďte f, g, h reálné funkce se shodným definičním oborem A a takové, že existuje okolí hromadného bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ definičního oboru, kde platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.*

Pak pokud existují limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h_0$$

a navíc $f_0 = h_0$, pak také existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_0$$

a platí $g_0 = f_0 = h_0$.

DŮKAZ. Z definice limity, pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje okolí \mathcal{O} bodu x_0 , ve kterém jsou pro $x \neq x_0$ hodnoty $f(x), h(x) \in (g_0 - \varepsilon, g_0 + \varepsilon)$. Z podmínky $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ vyplývá, že i $g(x) \in (g_0 - \varepsilon, g_0 + \varepsilon)$, tedy $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_0$.

Drobnou modifikací předchozího postupu si čtenář doplní i argumentaci pro nevlastní hodnoty limit. \square

Všimněme si, že věta dává možnost výpočtu limit pro všechny typy diskutované výše, tj. limity posloupností, limity funkcí ve vnitřních bodech, jednostranné limity atd.

5.13

5.21. Věta. *Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je definiční obor reálných nebo komplexních funkcí f a g , x_0 nechť je hromadný bod A a existují limity*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Potom:

- (1) limita a je určena jednoznačně,
 (2) limita součtu $f + g$ existuje a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$$

- (3) limita součinu $f \cdot g$ existuje a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b,$$

- (4) pokud navíc $b \neq 0$, pak limita podílu f/g existuje a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

DŮKAZ. (1) Předpokládejme, že a a a' jsou dvě hodnoty limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Pokud je $a \neq a'$, pak existují disjunktní okolí $\mathcal{O}(a)$ a $\mathcal{O}(a')$. Pro dostatečně malá okolí x_0 ale mají hodnoty f ležet v obou naráz, což je spor. Proto je $a = a'$.

(2) Zvolme si nějaké okolí $a + b$, třeba $\mathcal{O}_{2\epsilon}(a + b)$. Pro dostatečně malé okolí x_0 a $x \neq x_0$ bude jak $f(x)$, tak $g(x)$ v ϵ -okolích bodů a a b . Proto jejich součet bude v 2ϵ -okolí kýžené hodnoty $a + b$. Tím je důkaz ukončen pro konečné limity, případ nevlastních limit je zcela obdobný.

(3) Podobně postupujeme u součinu s $\mathcal{O}_{\epsilon^2}(ab)$. Pro malá okolí x_0 se nám hodnoty f i g trefí do ϵ -okolí hodnot a a b . Proto jejich součin bude v požadovaném ϵ^2 -okolí.

- (4) Podobný postup ponechán jako cvičení. \square

Poznámka. Podrobnějším sledováním důkazů jednotlivých bodů věty můžeme její tvrzení rozšířit i na některé nekonečné hodnoty limit: V prvním případě je zapotřebí, aby buď alespoň jedna z limit byla konečná nebo aby obě měly stejné znaménko. Pak opět platí že limita součtu je součet limit s konvencemi z 5.17. Příklad „ $\infty - \infty$ “ ale není zahrnut.

V druhém případě může být jedna z limit nekonečná a druhá nenulová. Pak opět platí, že limita součinu je součin limit. Příklad „ $0 \cdot (\pm\infty)$ “ není ale zahrnut.

V případě podílu může být $a \in \mathbb{R}$ a $b = \pm\infty$, kdy výsledek limity bude nula, nebo $a = \pm\infty$ a $b \in \mathbb{R}$, kde výsledek bude $\pm\infty$ podle znamének čitatele a jmenovatele. Příklad „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ není zahrnut.

Zdůrazněme, že naše věta jako speciální případ pokrývá také odpovídající tvrzení o konvergenci posloupností i o limitech zprava a zleva funkcí definovaných na intervalu.

Pro úvahy o limitech bývá technicky užitečný i následující jednoduchý důsledek definic, který uvádí do souvislosti limity posloupností a funkcí obecně.

5.13a

5.22. Důsledek. *Uvažme reálnou nebo komplexní funkci f definovanou na množině $A \subset \mathbb{R}$ a hromadný bod x_0 množiny*

neexistuje (zapisujeme $1/\pm 0$). Kdybychom tedy k výpočtu limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^2 x}$$

užili pravidla o limitě součinu, obdrželi bychom $1 \cdot 1/\pm 0 = 1/\pm 0$. To znamená, že tato limita neexistuje (opět jde o určitý výraz). Ke stanovení

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

použijeme identitu $x = \sin(\arcsin x)$ platnou pro $x \in (-1, 1)$, tj. v jistém okolí bodu 0. Pomocí substituce $y = \arcsin x$ dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Poznamenejme, že $y \rightarrow 0$ plyne z dosazení $x = 0$ do $y = \arcsin x$ a ze spojitosti této funkce v počátku (to také zaručuje, že jsme tuto substituci mohli „bez obav“ zavést).

Ihned vidíme, že je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{5 x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Vhodné rozšíření a substituce dávají

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin(5x)} \cdot \frac{3}{5} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin(5x)} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} \cdot \frac{3}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Pomocí předešlého výsledku pak lehce spočítáme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(3x)} = \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Podobně můžeme stanovit

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{2x} \frac{e^{(5-2)x} - 1}{(5-2)x} (5-2) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3 \\ &= e^0 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \end{aligned}$$

a rovněž

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{-x}}{\sin(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 1}{\sin(2x)} - \frac{e^{-x} - 1}{\sin(2x)} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 1}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{5}{2} - \frac{e^{-x} - 1}{-x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right) &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{5}{2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} &= \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} \cdot \frac{5}{2} - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{e^v - 1}{v} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &= \end{aligned}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

5.27. Bez použití Věty o třech limitách dokažte, že funkce

$$R(x) = \begin{cases} x, & x \in \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

je spojitá v bodě 0.

Řešení. Funkce R je spojitá v bodě 0, právě když je

$$\lim_{x \rightarrow 0} R(x) = R(0) = 0.$$

Z definice limity ukážeme, že tato limita se skutečně rovná 0. Při „obvyklém“ značení je $a = 0$, $x_0 = 0$. Nechť $\delta > 0$ je nadále libovolné. Pro jakékoli $x \in (-\delta, \delta)$ je $R(x) = 0$, nebo $R(x) = x$, a tudíž (v obou případech) dostáváme $R(x) \in (-\delta, \delta)$. Jinými slovy, vezmeme-li libovolné δ -okolí $(-\delta, \delta)$ hodnoty a a přiřadíme-li mu $(-\delta, \delta)$ (jako okolí bodu x_0), pak pro každé $x \in (-\delta, \delta)$ (z uvažovaného okolí x_0) platí, že $R(x) \in (-\delta, \delta)$ (zde na interval $(-\delta, \delta)$ nahlížíme jako na okolí a). To odpovídá znění definice limity (nemuseli jsme ani požadovat, aby bylo $x \neq x_0$).

Uvažovaná funkce R se nazývá Riemannova funkce (proto označení R). V literatuře se ovšem uvádí v různých modifikacích. Např. o funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}; \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ pro nesoudělná } p, q \in \mathbb{Z} \text{ a } q > 1; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \boxed{5.14a}$$

se „často“ hovoří jako o Riemannově. □

5.28. Dodefinujte funkci

$$f(x) = (x^2 - 1) \sin \frac{2x - 1}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1 (x \in \mathbb{R})$$

v bodech $-1, 1$ tak, aby byla spojitá na \mathbb{R} .

A. Funkce f má v bodě x_0 limitu y právě, když pro každou posloupnost bodů $x_n \in A$ konvergující k x_0 a různých od x_0 má i posloupnost hodnot $f(x_n)$ limitu y .

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že limita f v bodě x_0 je skutečně y . Pak pro libovolné okolí V bodu y musí existovat okolí V bodu x_0 takové, že pro všechny $x \in V \cap A$, $x \neq x_0$, je $f(x) \in U$. Pro každou posloupnost $x_n \rightarrow x_0$ bodů různých od x_0 ale budou pro všechna n větší než vhodné N i všechny body $x_n \in V$. Budou tedy posloupnosti hodnot $f(x_n)$ konvergovat k hodnotě y .

Předpokládejme naopak, že funkce f nekonverguje k y při $x \rightarrow x_0$. Pak pro nějaké okolí U hodnoty y existuje posloupnost bodů $x_m \neq x_0$ v A , které jsou bližší k x_0 než $1/m$ a přitom hodnota $f(x_m)$ nepatří do U . Tím jsme zkonstruovali posloupnost bodů $z \in A$ různých od x_0 , pro které hodnoty $f(x_n)$ nekonvergují k y a důkaz je ukončen. □

SPOJITOST FUNKCÍ

5.14

Definice. Nyní máme nachystány nástroje na korektní formulaci vlastnosti spojitosti, se kterou jsme dříve intuitivně nakládali u polynomů. Nechť f je reálná nebo komplexní funkce definovaná na intervalu $A \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že f je *spojitá v bodě* $x_0 \in A$, jestliže je



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkce f je spojitá na A , jestliže je spojitá ve všech bodech $x_0 \in A$.

Všimněme si, že pro hraniční body intervalu A říká naše definice, že f v nich má hodnotu rovnou limitě zleva, resp. zprava. Říkáme, že je v takovém bodě *spojitá zprava, resp. zleva*. Již jsme také viděli, že každý polynom je spojitou funkcí na celém \mathbb{R} , viz 5.19(2). Potkali jsme také funkci, která je spojitá v iracionálních reálných číslech a nemá žádné limity v číslech racionálních, viz 5.19(4).

Z předchozí věty 5.21 o vlastnostech limit okamžitě vyplývá většina následujících tvrzení

5.23. Věta. *Nechť f a g jsou spojitě funkce na intervalu A . Pak*

- (1) *součet $f + g$ je spojitá funkce*
- (2) *součin $f \cdot g$ je spojitá funkce*
- (3) *pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak podíl f/g je dobře definován v nějakém okolí x_0 a je spojitý v x_0 .*
- (4) *pokud spojitá funkce h je definována na okolí hodnoty $f(x_0)$, pak složená funkce $h \circ f$ je definována na okolí bodu x_0 a je v bodě x_0 spojitá.*

DŮKAZ. Tvzení (1) a (2) jsou zřejmá, doplnit důkaz potřebujeme u tvrzení (3). Jestliže je $g(x_0) \neq 0$, pak také celé ϵ -okolí čísla $g(x_0)$ neobsahuje nulu pro dostatečně malé $\epsilon > 0$. Ze spojitosti g pak vyplývá, že na dostatečně malém δ -okolí bodu x_0 bude g nenulové a podíl f/g tam bude tedy dobře definován. Pak bude ovšem i spojitý v x_0 podle předchozí věty.

(4) Zvolme nějaké okolí \mathcal{O} hodnoty $h(f(x_0))$. Ze spojitosti h k němu existuje okolí \mathcal{O}' bodu $f(x_0)$, které je celé zobrazeno funkcí h do \mathcal{O} . Do tohoto okolí \mathcal{O}' spojitě zobrazení f zobrazí dostatečně malé okolí bodu x_0 . To je ale právě definiční vlastnost spojitosti a důkaz je ukončen. \square

Nyní si vcelku snadno můžeme odvodit zásadní souvislosti spojitých zobrazení a topologie reálných čísel:

5.15 **5.24. Věta.** *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak*

- (1) vzor $f^{-1}(U)$ každé otevřené množiny je otevřená množina,
- (2) vzor $f^{-1}(W)$ každé uzavřené množiny je uzavřená množina,
- (3) obraz $f(K)$ každé kompaktní množiny je kompaktní množina,
- (4) na libovolné kompaktní množině K dosahuje spojitě zobrazení maxima a minima.

DŮKAZ. (1) Uvažme nějaký bod $x_0 \in f^{-1}(U)$. Někaké okolí \mathcal{O} hodnoty $f(x_0)$ je celé v U , protože je U otevřená. Pak ovšem existuje okolí \mathcal{O}' bodu x_0 , které se celé zobrazí do \mathcal{O} , patří tedy do vzoru. Každý bod vzoru je tedy vnitřní a tím je důkaz ukončený.

(2) Uvažme nějaký hromadný bod x_0 vzoru $f^{-1}(W)$ a nějakou posloupnost x_i , $f(x_i) \in W$, která k němu konverguje. Ze spojitosti f nyní zjevně vyplývá, že $f(x_i)$ konverguje k $f(x_0)$, a protože je W uzavřená, musí i $f(x_0) \in W$. Zřejmě jsou tedy všechny hromadné body vzoru W ve W také obsaženy.

(3) Zvolme libovolné otevřené pokrytí $f(K)$. Vzory jednotlivých intervalů budou sjednoceními otevřených intervalů a tedy také vytvoří pokrytí množiny K . Z něho lze vybrat konečné pokrytí a proto nám stačilo konečně mnoho odpovídajících obrazů k pokrytí původní množiny $f(K)$.

(4) Protože je obrazem kompaktní množiny opět kompaktní množina, musí být obraz ohraničený a zároveň musí obsahovat svoje supremum i infimum. Odtud ale vyplývá, že tyto musí být zároveň maximem a minimem hodnot. \square

5.16 **5.25. Důsledek.** *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom*

- (1) obraz každého intervalu je opět interval
- (2) f na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nabývá všech hodnot mezi svou maximální a minimální hodnotou.

DŮKAZ. (1) Uvažme nějaký interval A (a ponechme stranou, jestli je A uzavřený nebo otevřený, ať už zleva nebo zprava) a předpokládejme, že existuje bod $y \in \mathbb{R}$ takový,

Řešení. Daná funkce je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech $-1, 1$ bude spojitá, právě když položíme

$$f(-1) := \lim_{x \rightarrow -1} \left((x^2 - 1) \sin \frac{2x - 1}{x^2 - 1} \right),$$

$$f(1) := \lim_{x \rightarrow 1} \left((x^2 - 1) \sin \frac{2x - 1}{x^2 - 1} \right).$$

Pokud by jedna z těchto limit neexistovala (příp. byla nevlastní), funkci by nešlo spojitě dodefinovat. Očividně je

$$\left| \sin \frac{2x - 1}{x^2 - 1} \right| \leq 1, \quad x \neq \pm 1 (x \in \mathbb{R}),$$

odkud plyne

$$-|x^2 - 1| \leq f(x) \leq |x^2 - 1|, \quad x \neq \pm 1 (x \in \mathbb{R}).$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} |x^2 - 1| = 0,$$

z Věty o třech limitách již dostáváme výsledek $f(\pm 1) := 0$. \square

D. Derivace

Ukažme si nejprve, že derivace funkcí uvedené v tabulce v odstavci 5.30 jsou skutečně správně. Určíme je přímo z definice derivace.

5.29. Z definice (viz 5.30) určete hodnoty derivací funkcí x^n (x je proměnná, n kladná celá konstanta), \sqrt{x} , $\sin x$.

Řešení. Nejprve podotkněme, že označíme-li v definici derivace výraz $x - x_0$ jako h , pak dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

V následujících výpočtech budeme pracovat s druhým vyjádřením téže limity.

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \dots + h^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(\sin \frac{h}{2})^2}{h} \\ &= \cos x \cdot 1 + \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) \frac{\sin(t)}{t} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

5.16a

5.30. Zderivujte a výsledek upravte:



- i) $x \sin x$,
- ii) $\frac{\sin x}{x}$,
- iii) $\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$, $a \neq 0$, $|x| \geq |a|$,
- iv) $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $|x| \leq 1$,
- v) x^x .

5.17

derivace

Řešení. (i) Podle pravidla o derivování součinu funkcí, tedy Leibnitzova pravidla, viz 5.32 dostáváme

$$(x \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

(ii) Podle pravidla o derivování podílu funkcí (5.33) je

$$\frac{\sin x}{x}' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin(x) \cdot x'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

(iii) Použijeme pravidla pro derivování složené funkce (5.32).

Označíme-li $h(x) = \ln(x)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 - a^2}$, máme

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})' &= h(f(x))' = h(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - a^2})'}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},\end{aligned}$$

že $f(A)$ obsahuje body menší i větší než y , ale $y \notin f(A)$. Znamená to tedy, že pro otevřené množiny $B_1 = (-\infty, y)$ a $B_2 = (y, \infty)$ jejich vzory $A_1 = f^{-1}(B_1)$ a $A_2 = f^{-1}(B_2)$ pokrývají A . Tyto množiny jsou přitom opět otevřené, jsou disjunktní a obě mají neprázdný průnik s A . Nutně tedy musí existovat bod $x \in A$, který neleží v B_1 , je ale jejím hromadným bodem. Musí však ležet v B_2 a to u disjunktních otevřených množin není možné. Dokázali jsme tedy, že pokud nějaký bod y nepatří do obrazu intervalu, musí být všechny hodnoty buď zároveň větší nebo zároveň menší. Odtud vyplývá, že obrazem bude opět interval. Všimněme si, že jeho krajní body mohou a nemusí do obrazu patřit.

(2) Toto tvrzení je přímým důsledkem předchozího, protože obrazem uzavřeného intervalu musí být opět uzavřený interval. \square

Na závěr naší úvodní diskuse spojitosti funkcí uvedeme ještě tvrzení, která jsou užitečným nástrojem při počítání limit.

5.26. Věta (O limitě složené funkce). *Nechť $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.*

(1) *Pokud je g je spojitá v b , potom*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = g(b).$$

(2) *Jestliže existuje limita $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$, potom*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y).$$

 \square

DŮKAZ. Je podobný jako ve větě 5.23(4). Z existence limity g v bodě b vyplývá, že pro jakékoliv okolí V této limity umíme najít dostatečně malé okolí U bodu b , na kterém jsou už hodnoty g ve V . Pokud ale f má bod b jako limitu v bodě a , pak se do U trefíme všemi hodnotami f pro dostatečně malé okolí a , což ověřuje druhé tvrzení. První pak je přímým důsledkem druhého. \square

5.27. Kdo už je v ZOO. Začali jsme budovat náš zvířetník funkcí s polynomy a s funkcemi, které se z nich dají vyrobit „po částech“. Zároveň jsme dovedli spoustu vlastností pro patrně obrovskou třídu spojitých funkcí, nemáme ale zatím moc prakticky zvladatelných příkladů. Jako další si prohlédneme pořádněji podíly polynomů.



Nechť f a g jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy $a_n x^n + \dots + a_0$ s komplexními $a_i \in \mathbb{C}$, ale dosazujeme jen reálné hodnoty za x).

Funkce $h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu g . Takové funkce nazýváme *racionální funkce*. Z věty 5.23 vyplývá, že racionální funkce jsou spojitě ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech, kde definovány nejsou mohou mít

- konečnou limitu, když jde o společný kořen obou polynomů f a g (v tomto případě rozšířením jejich definice o limitní hodnotu v tomto bodě dostaneme funkci i v tomto bodě spojitou)
- nekonečnou limitu, když limity zprava a zleva v tomto bodě jsou stejné
- různé nekonečné limity zprava a zleva.

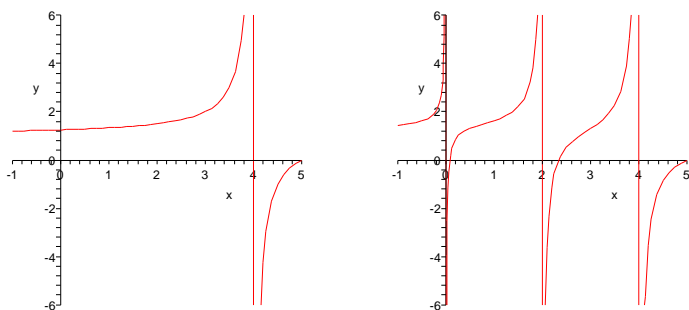
Názorně je možné tuto situaci vidět na obrázku, který ukazuje hodnoty funkce

$$h(x) = \frac{(x - 0.05a)(x - 2 - 0.2a)(x - 5)}{x(x - 2)(x - 4)}$$

pro hodnoty $a = 0$ (obrázek vlevo tedy vlastně zobrazuje racionální funkci $(x - 5)/(x - 4)$) a pro $a = 5/3$.

$a = 0$.

$a = 1.6667$



5.17a

5.28. Funkce mocinné a exponenciální. Polynomy jsou pomocí sčítání a násobení skaláry seskládány z jednoduchých mocinných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozených číslem $n = 0, 1, 2, \dots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici teď rozšíříme na obecnou *mocninou funkci* x^a s libovolným $a \in \mathbb{R}$.

Budeme vycházet z vlastností mocnin a odmocnin, které patrně považujeme za samozřejmé. Pro záporné celé číslo $-a$ proto definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu $b^n = x$ pro $n \in \mathbb{N}$ vyplývalo že b je n -tou odmocninou z x , tj. $b = x^{\frac{1}{n}}$. Je třeba ale ověřit, že taková b skutečně existují.

Z binomického rozkladu mocniny dvojčlenu je vidět, že funkce $y \mapsto y^n$ je pro $y > 0$ stále rostoucí. Předpokládejme $x > 0$ a uvažujme množinu $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0, y^n \leq x\}$. To je zřejmě zhora ohraničená množina a zvolíme $b = \sup B$. O mocinné funkci s přirozeným n již víme, že je to funkce spojitá, snadno tedy ověříme, že skutečně platí $b^n = x$. Skutečně, určitě je $b^n \leq x$ a kdyby platila ostrá nerovnost, našli bychom jistě i y s hodnotou $b < y^n < x$, což nutně znamená i $b < y$ a tedy jde o spor s definicí suprema.

Konečně, pro hodnoty $a \in \mathbb{R}$ a $x > 1$, si povšimněme, že jde pro racionální a o striktně rostoucí výraz (pro větší a je vždy větší výsledek). Proto klademe

$$x^a = \sup\{x^y, y \in \mathbb{Q}, y \leq a\}.$$

kde jsme pro derivování výrazu $\sqrt{x^2 - a^2}$ použili opět pravidlo o derivování složené funkce.

(iv) Opět derivujeme složenou funkci:

$$\begin{aligned} \left[\arctan \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right]' &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

(v) Funkci je nejprve převedeme na funkci o konstantním základu (nejlépe o základu e), kterou už umíme derivovat.

$$\begin{aligned} (x^x)' &= ((e^{\ln x})^x)' = (e^{x \ln x})' \\ &= (x \ln x)' \cdot e^{x \ln x} = (1 + \ln x) \cdot x^x \end{aligned}$$

□

Doporučíme čtenáři si vymyslet funkce, které potom sám zderivuje. Výsledek si může ověřit v celé řadě matematických výpočetních programů. V následujícím příkladu si uvědomíme geometrický význam derivace bodě, totiž, že určuje směrnici tečny ke grafu v daném bodě (viz 5.31)

5.31. Určete parametr $c \in \mathbb{R}$ tak, aby tečna ke grafu funkce $\frac{\ln(c \cdot x)}{\sqrt{x}}$ v bodě $[1, 0]$ procházela bodem $[2, 2]$.

Řešení. Podle zadání má mít tečna směrnici 2 ($\frac{2-0}{2-1}$). Směrnice je určena derivací funkce v daném bodě, dostáváme tedy podmínku

$$\frac{2 - \ln(cx)}{2\sqrt{x}}(1) = 2, \text{ neboli } 2 - \ln(c) = 4,$$

tedy $c = \frac{1}{e^2}$. Pro $c = \frac{1}{e^2}$ je však hodnota fce $\frac{\ln(c \cdot x)}{\sqrt{x}}$ v bodě 1 rovna -2 . Tedy žádné takové c neexistuje. □

E. L'Hospitalovo pravidlo

5.32. Ověřte, že je limita

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$ typu $\frac{0}{0}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x}$ typu $\frac{\infty}{\infty}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ typu $\infty - \infty$;

(d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(x-1) \cdot \ln x)$ typu $0 \cdot \infty$;

(e)
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad \text{typu } \infty^0;$$

(f)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{typu } 1^\infty;$$

(g)
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)^{\ln x} \quad \text{typu } 0^0.$$

Poté ji spočtete užitím l'Hospitalova pravidla.

Řešení. Bezprostředně můžeme potvrdit, že je

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(2x) - 2 \sin x) &= 0 - 0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - x^2 - 2x - 2) &= 2 - 0 - 0 - 2 = 0; \end{aligned}$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty;$$

(c)
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty; \quad \boxed{e5.3a}$$

(d)
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty;$$

(e)
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0;$$

(f)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

(g)
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0. \quad \boxed{5.17b}$$

Případ (a). Aplikování l'Hospitalova pravidla převádí limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$$

na limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x) - 2 \cos x}{2e^x - 2x - 2},$$

která je ovšem typu 0/0. Dalšími dvěma aplikacemi l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin(2x) + 2 \sin x}{2e^x - 2}$$

a (výše uvedená limita je opět typu 0/0)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \cos(2x) + 2 \cos x}{2e^x} = \frac{-8 + 2}{2} = -3.$$

Celkem tak máme (vrátíme se k původní limitě)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2} = -3.$$

Pro $0 < x < 1$ buď definujeme analogicky (je třeba si jen pohlát s nerovnicí) nebo klademe přímo $x^a = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a}$. Pro $x = 1$ je pak $1^a = 1$ pro libovolné a .

Obecnou mocninou funkci $x \mapsto x^a$ máme tedy dobře definovanou pro všechny $x \in [0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$. Naši konstrukci ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné $c > 0$ existuje dobře definovaná funkce na celém \mathbb{R} , $y \mapsto c^y$. Těto funkci říkáme *exponenciální funkce* o základu c .

Vlastnosti, které jsme použili při definici mocninné a exponenciální funkce $f(y) = c^y$, tj. $c = f(1)$, lze shrnout do jediné rovnosti pro libovolné reálné kladné x a y :

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

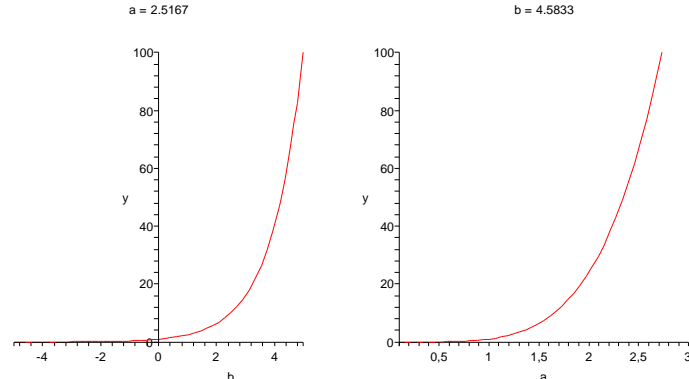
společně s požadavkem spojitosti.

Skutečně, pro $y = 0$ dostáváme z této rovnosti $f(0) = 1$, odtud pak $1 = f(0) = f(x-x) = f(x) \cdot (f(x))^{-1}$ a konečně pro přirozené n je zjevně $f(nx) = (f(x))^n$. Takto jsme již jednoznačně určili hodnoty x^a pro všechny $x > 0$ a $a \in \mathbb{Q}$ a požadavkem spojitosti byla již funkce určena všude.

Zejména tedy pro exponenciální funkci platí známé vztahy

$$(5.5) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

Na obrázcích vidíme funkce $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$ pro jednu konkrétní hodnotu $a = 2.5167$ a $b = 4.5833$.



5.29. Logaritmické funkce. Viděli jsme právě, že exponenciální funkce $f(x) = a^x$ je pro $a > 1$ stále rostoucí a pro $0 < a < 1$ je stále klesající. V obou případech tedy existuje k $f(x)$ funkce inverzní $f^{-1}(x)$ kterou nazýváme *logaritmickou funkcí se základem a* . Píšeme $\ln_a(x)$ a definiční vztah tedy je $\ln(a^x) = x$.

Rovnosti (5.5) jsou proto ekvivalentní vztahům

$$\ln_a(x \cdot y) = \ln_a(x) + \ln_a(y), \quad \ln_a(x^y) = y \cdot \ln_a(x).$$

Logaritmické funkce jsou definovány jen pro kladné hodnoty argumentu a jsou pro základ $a > 1$ rostoucí, pro základ $0 < a < 1$ klesající na celém definičním oboru. Pro každé a je $\ln_a(1) = 0$.

Brzy uvidíme, že obzvlášť důležitou hodnotou pro a je tzv. Eulerovo číslo e , viz odstavec 5.41. Funkci $\ln_e(x)$ nazýváme *přirozeným logaritmem* a základ e v označení vynecháváme, tj. píšeme prostě $\ln(x)$.

3. Derivace



U polynomů jsme již v odstavci 5.6 diskutovali, jak popisovat jednoduše velikost růstu hodnot polynomu kolem daného bodu jeho definičního oboru. Tehdy jsme pozorovali podíl (5.2), který vyjadřoval směrnici sečny mezi body $[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2$ a $[x + \Delta x, f(x + \Delta x)] \in \mathbb{R}^2$ pro (malý) přírůstek Δx nezávisle proměnné. Tehdejší úvaha funguje zrovna stejně pro libovolnou reálnou nebo komplexní funkci f , jen musíme místo intuitivního „zmenšování“ přírůstku Δx pracovat s pojmem limity.

Uvádíme definici pro vlastní i nevlastní derivace, tj. připouštíme i nekonečné hodnoty. Všimněte si, že na rozdíl od limity funkce, u derivace v daném bodě x_0 je nutné, aby byla sama funkce v tomto bodě definovaná.

DERIVACE FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

5.18 **5.30. Definice.** Nechť f je reálná nebo komplexní funkce definovaná na intervalu $A \subset \mathbb{R}$ a $x_0 \in A$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

pak říkáme, že f má v bodě x_0 derivaci a . Hodnotu derivace zapisujeme jako $f'(x_0)$ nebo $\frac{df}{dx}(x_0)$, případně $a = \frac{d}{dx} f(x_0)$.

Derivace reálné funkce je *vlastní*, resp. *nevlastní*, když je takovou příslušná limita.

Jednostranné derivace (tj. derivaci zprava a zleva) definujeme zcela stejně pomocí limity zprava a zleva.

S derivacemi se vcelku snadno počítá, dá nám ale dost práce korektně odvodit derivace i některých z funkcí, které už v našem zvěřinci máme. Proto s předstihem vsunujeme do textu souhrnnou tabulku, jak derivace pro několik z nich vychází. V posledním sloupci je odkaz na odstavec, kde se dá údaj skutečně i s úplným výkladem najít. Všimněme si také, že inverzní funkce k řadě z našich funkcí sice neumíme přímo vyjádřit elementárním způsobem, přesto ale budeme umět počítat jejich derivace, viz. 5.34

NĚKTERÉ DERIVACE FUNKCÍ

Dodejme, že opakované užití l'Hospitalova pravidla v jednom příkladu je běžné.

Nadále budeme klást, že se limity podílů derivací získané l'Hospitalovým pravidlem přímo rovnají původním limitám podílů. Takto si můžeme počínat, pokud obdržené limity na pravých stranách budou existovat, tj. o platnosti zápisů se vlastně budeme přesvědčovat dodatečně.

Případ (b). Tentokrát derivování čitatele a jmenovatele dává

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x}.$$

Poslední limitu umíme snadno určit (dokonce ji známe). Z

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

plyne výsledek $0 = 0 \cdot 1$. Také jsme mohli znovu použít l'Hospitalovo pravidlo (nyní pro výraz $0/0$) se ziskem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{1} = \frac{-2 \cdot 0 \cdot 1}{1} = 0.$$

Případ (c). Pouze převodem na společného jmenovatele

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x}$$

jste obdrželi typ $0/0$. Je

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + \frac{x}{x} - 1}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x}.$$

Máme podíl $0/0$, pro který (opět dle l'Hospitalova pravidla) platí

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Návratem k původní limitě zapíšeme výsledek

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{2}.$$

Případ (d). Uvedený výraz převedeme na typ ∞/∞ (přesněji řečeno, na typ $-\infty/\infty$) vytvořením zlomku

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(x-1) \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}.$$

Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \ln^2 x}{x-1}.$$

Pro tento neurčitý výraz (typu $0/0$) lze pokračovat l'Hospitalovým pravidlem a stanovit

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \ln^2 x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\ln^2 x - 2x \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \frac{0+0}{1} = 0.$$

Případy (e), (f), (g). Protože

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cotg x)}{\ln x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)^{\ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x \cdot \ln(\cos \frac{\pi x}{2}))},$$

postačuje vypočítat limity uvedené v argumentu exponenciální funkce.

Pomocí l'Hospitalova pravidla a jednoduchých úprav získáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cotg x)}{\ln x} = \left[\text{typ } \frac{+\infty}{-\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cotg x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\cos x \cdot \sin x} = \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{-1}{1-0} = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x}$$

$$= \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{4x \sin x + 2x^2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{4 \sin x + 2x \cos x} = \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{4 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} = \frac{-1}{4+2-0} = -\frac{1}{6},$$

a tudíž

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1} = \frac{1}{e};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$

Obdobně lze postupovat při určování poslední limity. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln x \cdot \ln \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\text{typ } \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2}} \left(-\sin \frac{\pi x}{2} \right) \frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \ln^2 x}{\cos \frac{\pi x}{2}}.$$

Neboť je tento výraz typu 0/0, mohli bychom pokračovat l'Hospitalovým pravidlem; místo toho ale přejdeme od

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \ln^2 x}{\cos \frac{\pi x}{2}}$$

k součinu limit

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x \sin \frac{\pi x}{2} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2 x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2 x}{\cos \frac{\pi x}{2}}.$$

funkce	definiční obor	derivace	
polynomy $f(x)$	celé \mathbb{R}	$f'(x)$ je opět polynom	5.6
kubické splajny $h(x)$	celé \mathbb{R}	$h'(x)$ je opět splajn	5.9
racionální funkce $f(x)/g(x)$	celé \mathbb{R} kromě kořenů jmenovatele g	racionální funkce: $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	5.33
mocninné funkce $f(x) = x^a$	interval $(0, \infty)$	$f'(x) = ax^{a-1}$??
exponenciála $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$	celé \mathbb{R}	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$??
logaritmus $f(x) = \ln_a(x)$, $a > 0, a \neq 1$	interval $(0, \infty)$	$f'(x) = (\ln(a))^{-1} \cdot \frac{1}{x}$??

Z formulace definice lze očekávat, že $f'(x_0)$ bude umožňovat dobře aproximovat danou funkci pomocí přímky

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Takto lze snad vnímat následující lemma, které říká, že nahrazením konstantního koeficientu $f'(x_0)$ ve vyjádření přímky spojitou funkcí dostaneme přímo hodnoty f . Odchyłka hodnot $\psi(x)$ na okolí bodu x_0 od hodnoty $\psi(x_0)$ pak přímo říká, jak se liší směrnice sečen a tečny v bodě x_0 .

Lemma. *Reálná nebo komplexní funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci, právě když existuje na nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0)$ funkce ψ spojitá v x_0 a taková, že pro všechny $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí*

$$f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0).$$

Navíc pak vždy $\psi(x_0) = f'(x_0)$ a sama funkce f je v bodě x_0 spojitá.

DŮKAZ. Nejprve předpokládejme, že $f'(x_0)$ je vlastní derivace. Pokud má ψ existovat, má jistě pro všechny $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ tvar

$$\psi(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0).$$

V bodě x_0 naopak definujme hodnotu derivací $f'(x_0)$. Pak jistě

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = f'(x_0) = \psi(x_0)$$

jak je požadováno.

Naopak, jestliže taková funkce ψ existuje, tentýž postup vypočte její limitu v x_0 . Proto existuje i $f'(x_0)$ a je $\psi(x_0)$ rovna.

Z vyjádření f pomocí spojitých funkcí je zřejmé, že je sama spojitá v bodě x_0 . \square

5.18a

5.31. Geometrický význam derivace. Předchozí lemma lze názorně vysvětlit geometricky a tím popsat smysl derivace. Říká totiž, že na grafu funkce $y = f(x)$, tj. na příslušné křivce v rovině se souřadnicemi x a y , poznáme, zda existuje derivace podle toho, jestli se spojitě mění hodnota směrnice sečny procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x, f(x)]$. Pokud ano, pak limitní hodnota této směrnice je hodnotou derivace.



ROSTOUCÍ A KLESAJÍCÍ FUNKCE

Důsledek. Má-li reálná funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x_0) > 0$, pak pro nějaké okolí $\mathcal{O}(x_0)$ platí $f(b) > f(a)$ pro všechny body $a, b \in \mathcal{O}(x_0)$, $b > a$.

Je-li derivace $f'(x_0) < 0$, pak naopak pro nějaké okolí $\mathcal{O}(x_0)$ platí $f(b) < f(a)$ pro všechny body $a, b \in \mathcal{O}(x_0)$, $b > a$.

DŮKAZ. Uvažme prvý případ. Pak podle předchozího lematu platí $f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$ a $\psi(x_0) > 0$. Protože je ale ψ v x_0 spojitá, musí existovat okolí $\mathcal{O}(x_0)$, na kterém bude $\psi(x) > 0$. Pak ale s rostoucím x nutně poroste i hodnota $f(x)$.

Stejná argumentace ověří i tvrzení se zápornou derivací. \square

Funkce, které mají vlastnost $f(b) > f(a)$ kdykoliv $b > a$ pro nějaké okolí bodu x_0 se nazývají *rostoucí v bodě* x_0 . Funkce rostoucí ve všech bodech nějakého intervalu se nazývá *rostoucí na intervalu*. Podobně je funkce *klesající v bodu*, resp. *klesající na intervalu*, jestliže $f(b) < f(a)$ kdykoliv je $a < b$. Náš důsledek tedy říká, že funkce která má v bodě nenulovou konečnou derivaci je v tomto bodě buď rostoucí nebo klesající podle znaménka této derivace.

Jako ilustraci jednoduchého použití vztahu derivace k růstu hodnot funkce se podíváme na existenci inverzí polynomů. Protože polynomy jen zřídka jsou výhradně rostoucí nebo klesající funkce, nemůžeme očekávat, že by k nim existovaly globálně definované inverzní funkce. Naopak ovšem inverzní funkce k polynomu f existují na každém intervalu mezi kořeny derivace f' , tj. tam kde derivace polynomu je nenulová a nemění znaménko. Tyto inverzní funkce nebudou nikdy polynomy, až na případ polynomů stupně jedna, kdy z rovnice

$$y = ax + b$$

spočteme přímo

$$x = \frac{1}{a}(y - b).$$

U polynomu druhého řádu obdobně

$$y = ax^2 + bx + c$$

vede k formuli

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a},$$

Teprve nyní aplikujeme l'Hospitalovo pravidlo pro

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2 x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Celkem máme

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln x \cdot \ln \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

tj.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)^{\ln x} = e^0 = 1. \quad \square$$

5.33. Jak jsme již implicitně zmínili, použití l'Hospitalova pravidla může vést k limitě, která neexistuje, ačkoliv původní limita existuje: určete limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x}$$

Řešení. Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$, použitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos(x)}{1},$$

a protože neexistuje limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$, neexistuje ani limita $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \cos(x)$. Původní limita ovšem existuje, je totiž

$$\frac{x - 1}{x} \leq \frac{x + \sin(x)}{x} \leq \frac{x + 1}{x},$$

a podle věty o třech limitách je

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x} = 1. \quad \square$$

5.34. Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg x - \frac{1}{x} \right).$$

Řešení. Uvědomíme-li si, že je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \cotg x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

vidíme, že v případě obou jednostranných limit dostáváme typ $\infty - \infty$.

Můžeme tedy uvažovat najednou oboustrannou limitu. Funkci kotangens zapíšeme jako podíl kosinu a sinu a zlomky převedeme na společného jmenovatele, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}.$$

Obdrželi jsme výraz $0/0$, pro který platí (podle l'Hospitalova pravidla)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x}.$$

Druhým použitím l'Hospitalova pravidla pro typ $0/0$ pak již dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0 - 0}{1 + 1 - 0} = 0.$$

5. 

5.35. Určete

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x e^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} x e^{-\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \ln x \cdot \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[5]{x+3}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení. Snadno lze zjistit (např. n -násobným užitím l'Hospitalova pravidla), že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Z Věty o třech limitách potom pro reálná čísla $a > 0$ ihned plyne zobecnění

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty.$$

Uvažíme-li, že grafy funkcí $y = e^x$ a $y = \ln x$ (inverzní funkce k $y = e^x$) jsou symetrické vzhledem k přímce $y = x$, víme dále

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$

Získali jsme tak první výsledek. Ten přitom dává rovněž l'Hospitalovo pravidlo, podle kterého je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Upozorníme, že l'Hospitalovo pravidlo lze použít k vyčíslení každé z dalších pěti uvedených limit. Je ovšem možné určit tyto limity jednoduššími způsoby. Např. substituce $y = 1/x$ vede na

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

Samozřejmě $x \rightarrow 0+$ dává $y = 1/x \rightarrow +\infty$ (píšeme $1/0 = +\infty$).

Pomocí substitucí $u = -1/x$, $v = 1/x^2$ po řadě dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0-} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} -\frac{e^u}{u} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v^{50}}{e^v} = 0,$$

a inverze tedy existuje (a je dána touto formulí) jen pro x na intervalech $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, $(-\frac{b}{2a}, \infty)$.

Pro práci s inverzními funkcemi k polynomům nevystačíme s dosavadními funkcemi a dostáváme v našem zvířetníku nové přírůstky.

5.32. Pravidla pro počítání derivací. Uvedme si nyní ně-



kolik základních tvrzení o výpočtech derivací.

Říkají nám, jak dobře se snáší operace derivování s algebraickými operacemi sčítání a násobení na reálných nebo komplexních funkcích.

Poslední z pravidel pak umožňuje efektivní výpočet derivace složených funkcí a říkává se mu „chain rule“.

Intuitivně jim můžeme všem velice snadno rozumět, když si derivaci funkce $y = f(x)$ představíme jako podíl přírůstků závislé proměnné y a nezávislé proměnné x :

$$f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Samozřejmě pak při $y = h(x) = f(x) + g(x)$ je přírůstek y dán součtem přírůstků f a g a přírůstek závislé proměnné zůstává stejný. Je tedy derivace součtu součtem derivací.

U součinu musíme být malinko pozornější. Pro $y = f(x)g(x)$ je přírůstek

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + (f(x + \Delta x) - f(x))g(x) \end{aligned}$$

Nyní ale když budeme zmenšovat přírůstek Δx , jde vlastně o výpočet limity součtu součinů a o tom už víme, že jej lze počítat jako součet součinů limit. Proto z naší formulky lze očekávat pro derivaci součinu fg výraz $fg' + f'g$, kterému se říká *Leibnitzovo pravidlo*.

Ještě zajímavější je to pro derivaci složené funkce $g = h \circ f$, kde definiční obor funkce $z = h(y)$ obsahuje obor hodnot funkce $y = f(x)$. Opět vypsáním přírůstků dostáváme

$$g' = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Můžeme tedy očekávat, že pravidlo pro výpočet bude $(h \circ f)'(x) = h'(f(x))f'(x)$.

Podáme nyní korektní formulace a důkaz:

PRAVIDLA PRO DERIVOVÁNÍ

Věta. *Nechť f a g jsou reálné nebo komplexní funkce definované na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a mající v tomto bodě vlastní derivaci. Potom*

(1) *pro každé reálné nebo komplexní číslo c má funkce $x \mapsto c \cdot f(x)$ derivaci v x_0 a platí*

$$(cf)'(x_0) = c(f'(x_0)),$$

(2) *funkce $f + g$ má v x_0 derivaci a platí*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

(3) *funkce $f \cdot g$ má v x_0 derivaci a platí*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(4) Je-li dále h funkce definovaná na okolí obrazu $y_0 = f(x_0)$, která má derivaci v bodě y_0 , má také složená funkce $h \circ f$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

DŮKAZ. (1) a (2) Přímé použití věty o součtech a součinech limit funkcí dává výsledek.

(3) Přepíšeme vztah pro podíl přírůstků, který jsme zmínili před formulací věty, takto

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0)$$

Limita tohoto výrazu pro $x \rightarrow x_0$ dá právě požadovaný výsledek, protože je funkce f spojitá v x_0 .

(4) Podle lematu 5.30 existují funkce ψ a φ spojitě v bodech x_0 a $y_0 = f(x_0)$ takové, že

$$h(y) = h(y_0) + \varphi(y)(y - y_0), \quad f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$$

na nějakých okolích x_0 a y_0 . Navíc pro ně platí $\psi(x_0) = f'(x_0)$ a $\varphi(y_0) = h'(y_0)$. Pak ovšem také platí

$$\begin{aligned} h(f(x)) - h(f(x_0)) &= \varphi(f(x))(f(x) - f(x_0)) \\ &= \varphi(f(x))\psi(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

pro x z okolí bodu x_0 . Součin $\varphi(f(x))\psi(x)$ je ovšem spojitá funkce v x_0 a její hodnota v bodě x_0 je právě požadovaná derivace složené funkce, opět podle lematu 5.30. \square

DERIVACE PODÍLU

5.19a

5.33. Důsledek. Necht' f a g jsou reálné funkce, která mají v bodě x_0 vlastní derivace a $g(x_0) \neq 0$. Pak pro funkci $h(x) = f(x)(g(x))^{-1}$ platí

$$h'(x_0) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

DŮKAZ. Dokážeme si nejprve speciální případ vzorce pro $h(x) = x^{-1}$. Přímou z definice derivace dostáváme

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - x - \Delta x}{\Delta x(x^2 + x\Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x} \end{aligned}$$

a z pravidel pro počítání limit okamžitě plyne

$$h'(x) = -x^{-2}.$$

Nyní pravidlo pro derivaci složené funkce říká, že

$$(g^{-1})' = -g^{-2} \cdot g',$$

a konečně pravidlo pro derivaci součinu nám dává právě

$$(f/g)' = (f \cdot g^{-1})' = f'g^{-1} - fg^{-2}g' = \frac{f'g - gf'}{g^2}.$$

přičemž $x \rightarrow 0^-$ odpovídá $u = -1/x \rightarrow +\infty$ (píšeme $-1/ -0 = +\infty$) a $x \rightarrow 0$ potom $v = 1/x^2 \rightarrow +\infty$ (znovu $1/ +0 = +\infty$). Již dříve jsme také objasnili, že platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty.$$

Případné pochyby snad rozptýlí limita

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{\ln x}\right) = -\infty,$$

kteřá dokazuje, že při zmenšení absolutní hodnoty uvažovaného výrazu (aniž by došlo ke změně znaménka) stále výraz v absolutní hodnotě roste nade všechny meze.

Stejně snadno umíme určit

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \ln x \cdot \cos x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[5]{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1. \end{aligned}$$

Viděli jsme, že l'Hospitalovo pravidlo nemusí být nejlepší metodou výpočtu limity jednoho z typů $0/0$, ∞/∞ . Na předchozích třech příkladech lze ilustrovat, že jej ani nelze vždy (pro neurčité výrazy) aplikovat. Kdybychom jej použili k řešení prvního z nich, obdrželi bychom pro $x > 0$ podíl

$$\frac{1}{1 + \frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \sin x} = \frac{x}{x + \cos x - x \ln x \cdot \sin x},$$

kteřý je složitější než původní. Dokonce pro $x \rightarrow +\infty$ limitu nemá. Není tedy splněn jeden z předpokladů l'Hospitalova pravidla. Ve druhém případě pak (libovolný počet opakovaných) použití l'Hospitalova pravidla vede na neurčité výrazy. Pro poslední limitu nás l'Hospitalovo pravidlo vrátí do zadání: dává nejdříve zlomek

$$\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

a následně

$$\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Odsud můžeme odvodit, že limita je rovna 1 (hledáme nezápornou hodnotu $a \in \mathbb{R}$ takovou, aby platilo $a = a^{-1}$), pouze když dříve dokážeme, že vůbec existuje. \square

Další příklady na výpočet limit užitím l'Hospitalova pravidla nalezneme na straně 307. \square

F. Extremální úlohy

5.20

Jednoduché pozorování 5.31 o geometrickém významu derivace nám také říká, že extrémy diferencovatelné reálné funkce jedné reálné proměnné mohou nastat pouze v bodech, kde je derivace dané funkce nulová. Tohoto prostého faktu lze využít při řešení množství zajímavých praktických úloh.

5.36. Určete x -ovou souřadnici x_A bodu paraboly $y = x^2$, který je nejbližší bodu $A = [1, 2]$.

Řešení. Není obtížné uvědomit si, že příklad má právě jedno řešení a že úkolem je vlastně najít absolutní minimum funkce

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce f má zjevně nejmenší hodnotu ve stejném bodě jako funkce

$$g(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Neboť

$$g'(x) = 4x^3 - 6x - 2, \quad x \in \mathbb{R},$$

řešením rovnice $0 = 2x^3 - 3x - 1$ dostáváme nejprve stacionární bod $x = -1$ a po vydělení polynomu $2x^3 - 3x - 1$ polynomem $x + 1$ také zbývající dva stacionární body

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Protože funkce g je polynomem (má derivaci na celé reálné ose), z geometrického významu úlohy již získáváme

$$x_A = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

□

5.37. Do rovnoramenného trojúhelníku o základně z a výšce v (nad základnou) vepište obdélník (jedna jeho strana bude částí základny trojúhelníku) s největším obsahem. Stanovte obsah S tohoto obdélníku.

Řešení. Pro vyřešení příkladu postačuje uvažovat úlohu, kdy se snažíme vepsat do pravouhlého trojúhelníku s odvěsnami délek $z/2$ a v obdélník s maximálním možným obsahem, přičemž dvě jeho strany musí být částmi odvěsen tohoto trojúhelníku. Úlohu takto převedeme na otázku maximalizace funkce

$$f(x) = x \left(v - \frac{2vx}{z} \right)$$

na intervalu $I = [0, z/2]$. Neboť je

$$f'(x) = v - \frac{4vx}{z} \quad \text{pro všechna } x \in I$$

a dále

$$f(0) = f\left(\frac{z}{2}\right) = 0, \quad f(x) \geq 0, \quad x \in I,$$

5.34. Derivace inverzních funkcí. V odstavci 1.36 jsme při obecné diskusi relací a zobrazení formulovali pojem *inverzní funkce*. Pokud k dané funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inverzní funkce f^{-1} existuje (nezaměňujeme značení s funkcí $x \mapsto (f(x))^{-1}$), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}},$$

a druhý již pak platí také. Pokud je f definováno na podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ a $f(A) = B$, je existence f^{-1} podmíněna stejnými vztahy s identickými zobrazeními id_A resp. id_B na pravých stranách.

Pokud bychom věděli, že pro diferencovatelnou funkci f je i f^{-1} diferencovatelná, pravidlo pro derivaci složené funkce nám okamžitě říká

$$1 = (\text{id})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

a tedy pak přímo víme vzorec (zjevně $f'(x)$ v takovém případě nemůže být nulové)

DERIVACE INVERZNÍ FUNKCE

$$(5.6) \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

To dobře odpovídá intuitivní představě, že pro $y = f(x)$ je přibližně $f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zatímco pro $x = f^{-1}(y)$ je to přibližně $(f^{-1})'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Takto skutečně můžeme derivace inverzních funkcí počítat:

Věta. Je-li f diferencovatelná reálná funkce na okolí bodu x_0 a v tomto bodě $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje na nějakém okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ funkce f^{-1} inverzní k f a platí vztah (5.6).

DŮKAZ. Nejprve si povšimněme, že nenulovost derivace znamená, že na nějakém okolí je naše funkce f buď ostře rostoucí nebo klesající, viz důsledek 5.31. Proto na nějakém okolí nutně existuje inverzní funkce. Protože je obrazem ohraničeného uzavřeného intervalu ve spojitě funkci opět uzavřený interval, nutně je také pro každou otevřenou množinu U v definičním oboru f i obraz $f(U)$ otevřený. Pak ale přímo z definice spojitosti pomocí okolí je pak tato inverzní funkce také spojitá.

Pro odvození našeho tvrzení nyní postačí pozorně znovu pročíst důkaz čtvrtého tvrzení věty 5.32. Jen volíme f místo funkce h a f^{-1} místo f a místo předpokladu existence derivací pro obě funkce víme, že funkce složená je diferencovatelná (a víme, že její derivace je identita): Skutečně, podle lematu 5.30 existuje funkce ψ spojitá v bodě y_0 taková, že

$$f(y) - f(y_0) = \varphi(y)(y - y_0),$$

na nějakém okolí y_0 . Navíc pro ni platí $\varphi(y_0) = f'(y_0)$. Pak ovšem po dosazení $y = f^{-1}(x)$ také platí

$$x - x_0 = \varphi(f^{-1}(x))(f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)),$$

pro x z nějakého okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 . Dále platí $f^{-1}(x_0) = y_0$ a protože je f buď ostře rostoucí nebo klesající, je $\varphi(f^{-1}(x)) \neq 0$ pro všechny $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Můžeme tedy psát

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(x))} \neq 0,$$

pro všechny $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Pravá strana tohoto výrazu je spojitá v bodě x_0 a limita je rovna $\varphi(y_0) = (f'(y_0))^{-1}$, proto i limita levé strany existuje a je rovna témuž výrazu. \square

5.22a

5.35. Derivace mocninné, exponenciální a logaritmické funkce. Obecnou mocninou funkci není tak snadné zderivovat, i když jsme už prozradili, že vzorec

e5.6

$$(5.7) \quad (x^a)' = ax^{a-1}$$

známý pro přirozená a bude platit i pro obecné a . ves7863k2 Odvodit tento vzorec však můžeme snadno s pomocí vztahu pro derivaci exponenciální funkce a logaritmické funkce:

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = ax^{a-1}.$$

Podívejme se teď na exponenciály $f(x) = a^x$. Pokud existuje derivace a^x ve všech bodech x , bude jistě platit

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = f'(0)a^x.$$

Naopak, pokud existuje derivace v nule, pak tento výpočet ověřuje existenci derivace v kterémkoliv bodě a dává její hodnotu. Zároveň jsme ověřili platnost téhož vztahu pro derivace zprava a zleva.

Bude nám to ještě dlouho trvat, než ověříme (viz 5.42, 5.47 a 6.43), že derivace exponenciálních funkcí skutečně existují. Již teď si ale všimněme, že jsou to tedy zvláštní případy funkcí, jejichž derivace jsou úměrné hodnotám s konstantním koeficientem úměrnosti. Zároveň uvidíme, že existuje obzvlášť užitečný základ e , tzv. Eulerovo číslo, pro které bude derivace v nule rovna jedné.

Zjevně pak

$$(a^x)' = (e^{\ln(a)x})' = \ln(a)(e^{\ln(a)x}) = \ln(a) \cdot a^x.$$

Z definičního vztahu pro přirozený logaritmus

$$e^{\ln x} = x$$

snadno spočteme podle pravidla pro derivaci složené funkce (užíváme již, že e^x je rovno své derivaci, a také definiční vztah pro logaritmus):

e5.7

$$(5.8) \quad (\ln)'(y) = (\ln)'(e^x) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

6.1

5.36. Věty o střední hodnotě. Než se pustíme do dalšího tématu na naší pouti za různorodými definicemi funkcí, odvodíme ještě několik jednoduchých výsledků o derivacích. Všechny jsou velice snadno intuitivně jasné z přiložených obrázků a důkazy vlastně jen rozepisují vizuální představu.



v jediném svém stacionárním bodě $x_0 = z/4$ nutně nabývá funkce f maxima na I . Proto jsou strany hledaného obdélníku dlouhé $z/2$ (dvojnásobek x_0 : uvažujeme původní úlohu) a $v/2$ (to lze získat dosazením $z/4$ za x do výrazu $v - 2vx/z$). Odsud dostáváme, že $S = vz/4$. \square

5.38. Firma hledá obdélníkovou parcelu o rozměrech $5a \times b$ se záměrem ji po obvodu celou oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 stejně velkých parcel o rozměrech $a \times b$. Pro jaké hodnoty a, b bude rozloha parcely $S = 5ab$ maximální, má-li být celková délka plotů 2 400 m?

Řešení. Přeformulujme zadání: Chceme maximalizovat součin $5ab$ při splnění podmínky

$$(5.1) \quad 6b + 10a = 2400, \quad a, b > 0.$$

Lehce lze ukázat, že funkce

$$a \mapsto 5a \frac{2400-10a}{6}$$

definovaná pro $a \in [0, 240]$ nabývá maximální hodnoty v bodě $a = 120$. Proto je výsledek

$$a = 120 \text{ m}, \quad b = 200 \text{ m}.$$

Doplňme, že uvedená hodnota b bezprostředně plyne z (5.1). \square

5.39. Mezi obdélníky, jejichž dva vrcholy leží na ose x a další dva s kladnými druhými souřadnicemi na parabole $y = 8 - 2x^2$, najděte obdélník s maximálním obsahem.

Řešení. Základna obdélníku s maximálním obsahem měří $4/\sqrt{3}$, jeho výška pak $16/3$. Tento výsledek lze obdržet nalezením absolutního maxima funkce

$$S(x) = 2x(8 - 2x^2)$$

na intervalu $I = [0, 2]$. Neboť tato funkce je na I nezáporná, v krajních bodech I nulová a má derivaci na celém I , přičemž její derivace je nulová pouze v jednom bodě intervalu I , a to v bodě $x = 2/\sqrt{3}$, nabývá zde maximální hodnoty. \square

5.40. Do rovnostranného trojúhelníka o straně a je vepsán pravoúhelník (jedna jeho strana leží na straně trojúhelníka, zbylé dva vrcholy leží na zbylých stranách trojúhelníka). Jaký může mít maximálně obsah?

Řešení. Vepsaný pravoúhelník má strany $x, \sqrt{3}/2(a - x)$, tedy obsah $\sqrt{3}/2(a - x)x$. Maximum pro $x = a/2$, tedy maximální obsah je $(\sqrt{3}/8)a^2$. \square

5.41. Ve čase $t = 0$ se začaly pohybovat tři body P, Q, R v rovině a to bod P z bodu $[-2, 1]$ směrem $(3, 1)$, rovnoměrnou rychlostí $\sqrt{10} \text{ m/s}$, bod Q z bodu $[0, 0]$ směrem $(-1, 1)$ rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $2\sqrt{2} \text{ m/s}^2$ a bod R z bodu $[0, 1]$ směrem

$(1, 0)$ rovnoměrnou rychlostí 2 m/s . V jakém čase bude obsah trojúhelníku PQR minimální?

Řešení. Rovnice bodů P , Q , R v čase jsou

$$\begin{aligned} P &: [-2, 1] + (3, 1)t \\ Q &: [0, 0] + (-1, 1)t^2 \\ R &: [0, 1] + (2, 0)t \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníka PQR je určený např. polovinou absolutní hodnoty determinantu, jehož řádky jsou souřadnice vektorů PQ a QR (viz Matematika I). Minimalizujeme tedy determinant:

$$\begin{vmatrix} -2+t & t \\ -t^2-2t & -1+t^2 \end{vmatrix} = 2t^3 - t + 2.$$

Derivace je $6t^2 - 1$, extrémy tedy nastávají pro $t = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze nezáporný čas, vyšetřujeme pouze $t = \frac{1}{\sqrt{6}}$, jde o minimum, navíc je hodnota determinantu v tomto bodě kladná a menší, než hodnota v bodě 0 (krajní bod intervalu, na kterém hledáme extrém), je tedy o globální minimum obsahu v čase. \square

5.42. V devět hodin ráno vylezl starý vlk z nory N a v rámci ranní rozcvičky začal běhat proti směru hodinových ručiček po kružnici o poloměru 1 km, kolem svého oblíbeného pařezu P a to rovnoměrnou rychlostí 4 km/h. Ve stejnou dobu vyrazila Karkulka z domu D k babičce sídlící v chaloupce C rychlostí 4 km/h (po přímce). Kdy si budou nejbliž a jaká tato vzdálenost bude? Souřadnice (v kilometrech): $N = [2, 3]$, $P = [2, 2]$, $D = [0, 0]$, $C = [5, 5]$.

Řešení. Vlk se pohybuje po jednotkové kružnici, jeho úhlová rychlost je tedy stejná jako jeho absolutní rychlost a jeho dráhu můžeme v závislosti na čase popsat následujícími parametrickými rovnicemi:

$$x(t) = 2 - \cos(4t), \quad y(t) = 2 - \sin(4t),$$

Karkulka se pak pohybuje po dráze

$$x(t) = 2\sqrt{2}t, \quad y(t) = 2\sqrt{2}t.$$

Nalezneme extrémy (čtverce) vzdálenosti ρ jejich drah v čase: $\boxed{\text{e6.1}}$

$$\begin{aligned} \rho(t) &= (2 - \cos(4t) - 2\sqrt{2}t)^2 + (2 - \sin(4t) - 2\sqrt{2}t)^2 \\ \rho'(t) &= 16(\cos(4t) - \sin(4t))(\sqrt{2}t - 1) + 32t + \\ &+ 4\sqrt{2}(\cos(4t) + \sin(4t)) - 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

Řešit algebraicky rovnici $\rho'(t) = 0$ se nám nepodaří (ani to nelze), zbývá pouze najít řešení numericky (pomocí výpočetního softwaru). Je jasné, že extrémů bude nekonečně mnoho: při každém kolečku je směr pohybu vlka v jistý časový okamžik rovnoběžný se směrem Karkulky,

Věta. Necht' funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na konečném uzavřeném intervalu $[a, b]$ a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Jestliže platí $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

DŮKAZ. Protože je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině), má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b) . Předpokládejme tedy, že buď maximum nebo minimum je jiné a necht' nastává jedno z nich ve vnitřním bodě c . Pak ovšem není možné, aby v c bylo $f'(c) \neq 0$, protože to by v tomto bodě byla funkce f buď rostoucí nebo klesající (viz 5.31) a jistě by tedy v okolí bodu c nabývala větších i menších hodnot, než je $f(c)$. \square

Právě dokázanému tvrzení se říká *Rolleova věta*. Z ní snadno vyplývá následující důsledek, známý jako *věta o střední hodnotě*.

5.37. Věta. Necht' funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DŮKAZ. Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (namalujte si obrázek). Rovnice naší sečny je

$$y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Rozdíl $h(x) = f(x) - g(x)$ udává vzdálenost grafu od sečny (v hodnotách y). Jistě platí $h(a) = h(b) = 0$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle předchozí věty existuje bod c , ve kterém je $h'(c) = 0$. \square

Větu o střední hodnotě můžeme také přepsat ve tvaru:

$$(5.9) \quad f(b) = f(a) + f'(c)(b - a).$$

V případě parametricky zadané křivky v rovině, tj. dvojice funkcí $y = f(t)$, $x = g(t)$, je stejný výsledek o existenci rovnoběžné tečny k sečně krajními body popsán takto:

Důsledek. Necht' funkce $y = f(t)$ a $x = g(t)$ jsou spojitě na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelné uvnitř tohoto intervalu a $g'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in (a, b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

DŮKAZ. Opět spoléháme na použití Rolleovy věty. Položíme proto

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t).$$

Nyní $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, $h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, takže existuje $c \in (a, b)$ takový, že $h'(c) = 0$. Protože je $g'(c) \neq 0$, dostáváme právě požadovaný vztah. \square

Podobná úvaha jako v posledním tvrzení vede k mimořádně užitečnému nástroji pro počítání limit podílu funkcí. Tvrzení je znám jako *L'Hospitalovo pravidlo*:

6.3

5.38. Věta. Předpokládejme, že f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a nechť existují limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pak existuje i limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a jsou si rovny.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v x_0 mají funkce f a g nulovou hodnotu.



Výsledek je opět jednoduše představitelný pomocí obrázku. Uvažujme body $[g(x), f(x)] \in \mathbb{R}^2$ parametrizované proměnnou x . Podíl hodnot pak odpovídá směrnici sečny mezi body $[0, 0]$ a $[f(x), g(x)]$. Zároveň víme, že podíl derivací odpovídá směrnici tečny v příslušném bodě. Z existence limity směrnic tečen tedy chceme dovodit existenci limity směrnic sečen.

Technicky lze využít věty o střední hodnotě v parametrickém tvaru. Předně si uvědomme, že v tvrzení věty implicitně předpokládáme existenci výrazu $f'(x)/g'(x)$ na nějakém okolí x_0 (kromě bodu x_0 samotného), zejména tedy pro dostatečně blízké body c k x_0 bude $g'(c) \neq 0$.² Díky větě o střední hodnotě nyní

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

kde c_x je číslo mezi x_0 a x , závislé na x . Z existence limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

vyplývá, že stejnou hodnotu bude mít i limita libovolné posloupnosti vzniklé dosazením hodnot $x = x_n$ jdoucích k x_0

²Pro samu existenci limity v obecném smyslu to vždy nutné není, nicméně pro tvrzení L'Hospitalovy věty je to potřebné. Podrobnou diskusi je možné najít (vygooglovat) v populárním článku 'R. P. Boas, Counterexamples to L'Hôpital's Rule, The American Mathematical Monthly, October 1986, Volume 93, Number 8, pp. 644–645.'

jejich vzdálenost se tedy po jistou dobu snižuje; Karkulka se však neustále vzdaluje konstantní rychlostí od středu kruhu, kolem kterého obíhá vlk. Zjistíme, že první lokální minimum nastává pro $t \doteq 0,31$ a poté pro $t \doteq 0,97$, kdy bude vzdálenost vlka a Karkulky asi 5 metrů. Je zřejmé, že půjde i o globální minimum.

Situace, kdy neumíme explicitně vyřešit daný problém je v praxi velmi častá a použití numerických metod výpočtu má velký význam. \square

5.43. Pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je kubický polynom P vyhovující vztahům $P(0) = 1$, $P'(0) = 1$, $P(1) = 2a + 2$, $P'(1) = 5a + 1$, monotónní funkcí na celém \mathbb{R} ?

Řešení. Z podmínek $P(0) = 1$ a $P'(0) = 1$ plyne, že $P(x) = bx^3 + cx^2 + x + 1$, kde $b, c \in \mathbb{R}$, zbylé dvě podmínky určují dvě rovnice pro neznámé b a c : $b + c + 2 = 2a + 2$, $3b + 2c + 1 = 5a + 1$ s jediným řešením $b = c = a$, polynom vyhovující zadaným podmínkám je tedy $P(x) = ax^3 + ax^2 + x + 1$. Podmínka na to, aby byl monotónní funkcí na celém \mathbb{R} , je ekvivalentní tomu, že polynom nemá lokální extrém. Extrémy mohou nastat v kritických bodech, tedy v nulových bodech derivace. Pokud tedy derivace nebude mít nulových bodů, funkce bude monotónní. Derivace je

$$P'(x) = 3ax^2 + 2ax + 1$$

a nebude mít nulových bodů, bude-li její diskriminant záporný. Navíc inflexní body $P(x)$ odpovídají bodům, kde je nulová první i druhá derivace (a nenulová třetí, což je v případě kubického polynomu automatické), tedy násobným kořenům $P'(x)$. $P'(x)$ má násobné kořeny, právě když je její diskriminant nulový. Celkem je podmínka monotónnosti $P(x)$ ekvivalentní nekladnosti diskriminantu $P'(x)$, tedy

$$\begin{aligned} 4a^2 - 12a &\leq 0 \\ 4a(a - 3) &\leq 0, \end{aligned}$$

což odpovídá $a \in (0, 3)$. Pro $a = 0$ však P sice je monotónní funkcí, nikoliv však kubickým polynomem. Dané podmínky splňují právě $a \in (0, 3)$. \square

5.44. Regiomontanův problém, 1471.

V muzeu na stěně visí obraz. Jeho dolní okraj je a metrů nad zemí



a horní okraj pak b metrů nad zemí (tj. výška obrazu je $b - a$). Na obraz se dívá turista, jehož oči jsou ve výšce

$h < a$ metrů nad zemí. (Důvodem nerovnosti $h < a$ může např. být, že se tak dá umožnit výhled stejně vysokým návštěvníkům

muzea stojícím v několika řadách.) Jak daleko od stěny má turista stát, aby maximalizoval velikost svého úhlu pohledu na obraz?

Řešení. Jako x označme vzdálenost (v metrech) turisty od stěny a jako φ jeho úhel pohledu na obraz. Dále zavedme (viz obrázek) úhly $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b-h}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a-h}{x}.$$

Naším úkolem je maximalizovat $\varphi = \alpha - \beta$. Doplníme, že pro $h > b$ lze postupovat analogicky a že pro $h \in [a, b]$ se zřejmě úhel φ stále zvětšuje při zmenšujícím se x ($\varphi = \pi$ pro $x = 0$ a $h \in (a, b)$). 6.4

Z podmínky $h < a$ plyne, že úhel φ je ostrý, tj. $\varphi \in (0, \pi/2)$. Protože je funkce $y = \operatorname{tg} x$ rostoucí na intervalu $(0, \pi/2)$, můžeme přejít k maximalizování hodnoty $\operatorname{tg} \varphi$. Platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{b-h}{x} - \frac{a-h}{x}}{1 + \frac{b-h}{x} \cdot \frac{a-h}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + (b-h)(a-h)}.$$

Stačí nám tedy najít globální maximum funkce

$$f(x) = \frac{x(b-a)}{x^2 + (b-h)(a-h)}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Z vyjádření

$$f'(x) = \frac{(b-a)[x^2 + (b-h)(a-h)] - 2x^2(b-a)}{[x^2 + (b-h)(a-h)]^2} = \frac{(b-a)[(b-h)(a-h) - x^2]}{[x^2 + (b-h)(a-h)]^2}, \quad x \in (0, +\infty)$$

vidíme, že

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro } x \in \left(0, \sqrt{(b-h)(a-h)}\right), \\ f'(x) < 0 \quad \text{pro } x \in \left(\sqrt{(b-h)(a-h)}, +\infty\right).$$

Funkce f má proto globální maximum v bodě $x_0 = \sqrt{(b-h)(a-h)}$ (připomeňme nerovnosti $h < a < b$).

Určit bod x_0 lze samozřejmě i jinými způsoby. Můžeme např. místo hledání maxima kladné funkce f na intervalu $(0, +\infty)$ pomocí diferenciálního počtu hledat globální minimum funkce

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{x^2 + (b-h)(a-h)}{x(b-a)} = \frac{x}{b-a} + \frac{(b-h)(a-h)}{x(b-a)}, \quad x \in (0, +\infty)$$

využitím tzv. A-G nerovnosti (mezi aritmetickým a geometrickým průměrem)

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \geq \sqrt{y_1 y_2}, \quad y_1, y_2 \geq 0,$$

ve které rovnost nastává právě pro $y_1 = y_2$. Volba

$$y_1(x) = \frac{x}{b-a}, \quad y_2(x) = \frac{(b-h)(a-h)}{x(b-a)}$$

totiž dává

$$g(x) = y_1(x) + y_2(x) \geq 2\sqrt{y_1(x)y_2(x)} = \frac{2}{b-a}\sqrt{(b-h)(a-h)}.$$

Pokud tak existuje $x > 0$, pro které je $y_1(x) = y_2(x)$, má funkce g v bodě x globální minimum. Rovnice

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \text{tj. } \frac{x}{b-a} = \frac{(b-h)(a-h)}{x(b-a)},$$

do $f'(x)/g'(x)$. Zejména tedy můžeme dosadit jakoukoliv posloupnost c_{x_n} pro $x_n \rightarrow x_0$ a proto bude existovat i limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

a poslední dvě limity zjevně budou mít stejnou hodnotu. Dokázali jsme tedy, že naše hledaná limita existuje a má také stejnou hodnotu. \square

Z důkazu věty je samozřejmé, že její tvrzení platí i pro jednostranné limity.

5.39. Důsledky. L'Hospitalovo pravidlo můžeme jednoduše rozšířit i pro limity v nevlastních bodech $\pm\infty$ a pro případ nevlastních hodnot limit. Je-li, např.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

potom je $\lim_{x \rightarrow 0+} f(1/x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 0+} g(1/x) = 0$.

Zároveň z existence limity podílu derivací v nekonečnu dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(f(1/x))'}{(g(1/x))'} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Použitím předchozí věty tedy dostáváme, že v tomto případě bude existovat i limita podílu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ještě jednodušší je postup při výpočtu limity v případě, kdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Stačí totiž psát

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)},$$

což je již případ pro použití L'Hospitalova pravidla z předchozí věty. Lze ale i dokázat, že L'Hospitalovo pravidlo platí ve stejné formě pro nevlastní limity:

Věta. *Nechť f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a nechť existují limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$. Jestliže existuje limita*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pak existuje i limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a jsou si rovny.

DŮKAZ. Opět lze vyjít z věty o střední hodnotě. Základem je vyjádření podílu tak, abychom dostali do hry derivaci:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{f(x) - f(y)} \cdot \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

kde y volíme nějaký pevný ze zvoleného okolí x_0 a x necháme blížit k x_0 . Protože jsou limity f i g v x_0 nekonečné, můžeme jistě předpokládat, že rozdíl hodnot v x a y jsou u obou funkcí při pevném y nenulové.

Pomocí věty o střední hodnotě můžeme nyní nahradit prostřední zlomek podílem derivací ve vhodném bodě c mezi x a y a výraz ve zkoumané limitě dostává tvar

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

kde c závisí na x i y . Při pevném y a x jdoucím k x_0 jde první zlomek zjevně k jedničce. Když zároveň budeme y přibližovat k x_0 , bude se nám druhý zlomek libovolně přesně blížit k limitní hodnotě podílu derivací. \square

6.4a

5.40. Příklad použití. Vhodnými úpravami sledovaných výrazů lze využít L'Hospitalova pravidla také na výrazy typu $\infty - \infty$, 1^∞ , $0 \cdot \infty$ apod. Zpravidla jde o prosté přepsání výrazů nebo o využití nějaké hladké funkce, např. exponenciální.

Ukážeme si pro ilustraci takového postupu souvislost aritmetického a geometrického průměru z n nezáporných hodnot x_i . *Aritmetický průměr*

$$M^1(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

je speciálním případem tzv. *mocninného průměru stupně r* :

$$M^r(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Speciální hodnota M^{-1} se nazývá *harmonický průměr*. Spočteme si nyní limitní hodnotu M^r pro r jdoucí k nule. Za tímto účelem spočteme limitu pomocí L'Hospitalova pravidla (jde o výraz $0/0$ a derivujeme podle r , zatímco x_i jsou při výpočtu konstantní parametry).

Následující výpočet, ve kterém užíváme pravidla pro derivování složených funkcí a znalosti hodnot derivace mocninné funkce, musíme číst odzadu. Z existence poslední limity plyne existence předposlední a její hodnota atd.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \ln(M^r(x_1, \dots, x_n)) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}(x_1^r + \dots + x_n^r)\right)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{x_1^r \ln x_1 + \dots + x_n^r \ln x_n}{n}}{\frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n}} \\ &= \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}. \end{aligned}$$

Odtud tedy je přímo vidět, že

$$\lim_{r \rightarrow 0} M^r(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n},$$

má jediné kladné řešení $x_0 = \sqrt{(b-h)(a-h)}$.

Dvěma odlišnými způsoby jsem stanovili ideální vzdálenost turistů od stěny. Hodnotě x_0 odpovídá

$$\varphi_0 = \arctg \frac{x_0(b-a)}{x_0^2 + (b-h)(a-h)} = \arctg \frac{b-a}{2\sqrt{(b-h)(a-h)}}.$$

Při pohledu z úrovně podlahy (kdyby se díval brouk) je $h = 0$, a tudíž je

$$x_0 = \sqrt{ab}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

Je-li obraz vysoký 1 m a jeho dolní okraj je 2 m nad zemí ($a = 2$, $b = 3$), bude brouk vidět obraz pod největším úhlem $\varphi_0 \doteq 0,2014 \text{ rad} \approx 11,5^\circ$ ve vzdálenosti $x_0 \doteq 2,45 \text{ m}$ od stěny. Pokud si bude stejný obraz prohlížet muž, který má oči ve výšce 1,8 m, se svým synem, který má oči ve výšce 1 m, měl by otec stát ve vzdálenosti $x_0 \doteq 0,49 \text{ m}$ a syn ve vzdálenosti $x_0 \doteq 1,41 \text{ m}$. Všimněme si, že pro otce je $\varphi_0 \doteq 0,7956 \text{ rad} \approx 45,6^\circ$, zatímco pro jeho syna je $\varphi_0 \doteq 0,3398 \text{ rad} \approx 19,5^\circ$. Poměr

$$\frac{0,7956}{0,3398} \approx \frac{45,6}{19,5} \doteq 2,3$$

dokládá, jak výrazně má otec lepší výhled. \square

5.45. Snellův zákon. Určete lomený světelný paprsek mezi bodem A v homogenním prostředí s rychlostí šíření světla v_1 a bodem B v homogenním prostředí s rychlostí šíření světla v_2 . Viz obrázek.

Řešení. V celém příkladu nebudeme uvádět fyzikální jednotky: můžeme kupř. předpokládat, že údaje o vzdálenostech budou v metrech a rychlosti v_1, v_2 jsou v metrech za sekundu (čas bude vyjádřen v sekundách). Paprsek je určen principem minimálního času, kdy k přenosu energie elektromagnetickým vlněním mezi body A a B dochází takovým způsobem, aby se odehrál v co nejkratším čase. V homogenních prostředích bude paprsek úsečkou. Stačí tedy stanovit bod R (určený hodnotou x), kde dojde k lomu. Vzdálenost mezi body A a R činí $\sqrt{h_1^2 + x^2}$ a mezi body R a B pak $\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}$. Celková doba přenosu energie mezi body A a B je tak dána funkcí

$$T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

v proměnné $x \in [0, d]$. Zdůrazněme, že chceme nalézt bod $x \in [0, d]$, ve kterém je hodnota $T(x)$ minimální.

Derivace

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}$$

je spojitou funkcí na intervalu $[0, d]$, a proto o znaménku derivace můžeme snadno rozhodnout pomocí jejích nulových bodů. Z rovnice

$$T'(x) = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}},$$

jednoduchou úpravou dostáváme

příklady budou jistě
hodně v druhé části
textu, včetně
takových jako je
zaprocetován

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}}{\frac{d-x}{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Tento tvar je pro nás užitečný, neboť (viz obrázek)

$$\sin \varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}.$$

5.23

Existuje tudíž nejvýše jeden stacionární bod; a ten je určen vztahem

$$(5.2) \quad \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Uvědomme si, že při zvětšujícím se $\varphi_1 \in [0, \pi/2]$ (když x roste) se úhel $\varphi_2 \in [0, \pi/2]$ zmenšuje. Funkce sinus je nezáporná a rostoucí na intervalu $[0, \pi/2]$, a tak je podíl $(\sin \varphi_1)/(\sin \varphi_2)$ rostoucí funkcí v závislosti na x . Protože $T'(0) < 0$ a $T'(d) > 0$, existuje právě jeden stacionární bod x_0 . Z nerovností $T'(x) < 0$ pro $x \in [0, x_0)$ a $T'(x) > 0$ pro $x \in (x_0, d]$ již plyne, že ve stacionárním bodě x_0 je globální minimum.

Shrňme předchozí. Paprsek je zadán bodem lomu R (hodnotou x_0) a bod R je potom určen identitou (5.2), která se ve fyzice označuje jako Snellův zákon.

Podíl rychlostí v_1 a v_2 je pro uvedená homogenní prostředí konstantní a vyjadřuje důležitou veličinu, jež popisuje rozhraní optických prostředí. Nazývá se index lomu a značí se n . Obvykle se požaduje, aby první z prostředí bylo vakuum, tj. klade se $v_1 = c$ a $v_2 = v$, se získá (absolutního) indexu lomu $n = c/v$. Pro vakuum je $n = 1$. Také pro vzduch se používá $n = 1$, neboť při standardních podmínkách (tj. při tlaku 101 325 Pa, teplotě 293 K a absolutní vlhkosti $0,9 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$) je pro vzduch $n \doteq 1,000\,272$. U ostatních prostředí se uvádí $n > 1$ (např. se klade $n = 1,31$ pro led, $n = 1,33$ pro vodu, $n = 1,5$ pro běžné sklo).

Index lomu ovšem rovněž závisí na vlnové délce uvažovaného elektromagnetického vlnění (kupř. pro vodu a světlo se jedná o rozsah od $n \doteq 1,331$ až po $n \doteq 1,344$), kdy index lomu zpravidla klesá s rostoucí vlnovou délkou. Rychlost světla v optickém prostředí s indexem lomu $n > 1$ totiž závisí na frekvenci světla. Hovoří se o tzv. disperzi světla. Právě disperze světla způsobuje, že se paprsky světla různých barev lámou pod různými úhly. (Nejvíce se láme paprsek fialového světla a nejméně paprsek světla červeného.) To je mj. příčina vzniku duhy. Můžeme dále vzpomenout slavný Newtonův pokus se skleněným jehlanem (optickým hranolem) z roku 1666.

Na závěr ještě doplníme, že naše úloha měla vždy řešení, protože jsme mohli volit bod R libovolně. Pokud by byl s rychlostmi v_1 a v_2 zadán také úhel φ_1 (naším úkolem by třeba bylo vypočítat, kde paprsek vycházející z bodu A protne přímkou $y = c$ pro jisté $c < 0$, když rozhraní optických prostředí je součástí osy x), pak by úhel $\varphi_2 \in (0, \pi/2)$

což je hodnota známá pod názvem *geometrický průměr*.

4. Mocninné řady

5.41. Jak se počítá e^x . Kromě sčítání a násobení už umíme také počítat s limitami posloupností. Podbízí se proto přibližovat nepolynomiální funkce pomocí posloupností spočítatelných hodnot. Když se takto podíváme na funkci e^x , hledáme vlastně funkci, jejíž okamžitý přírůstek je v každém bodě roven hodnotě této funkce. To si můžeme dobře představit jako úžasné úročení vkladu se sazbou rovnou okamžité hodnotě. Když budeme roční sazbou úroku realizovat jednou za měsíc, za den, za hodinu atd., budeme pro vklad x dostávat výsledné hodnoty

$$\left(1 + \frac{x}{12}\right)^{12}, \quad \left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365}, \quad \left(1 + \frac{x}{8760}\right)^{8760}, \quad \dots$$

Dalo by se tedy tušit, že bude platit:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Zároveň tušíme, že čím jemněji budeme postupovat při úročení, tím vyšší bude výnos, takže by posloupnost čísel na pravé straně měla být rostoucí.

Podívejme se tedy podrobně na číselnou posloupnost

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z binomického rozvoje je zřejmé, že pro každé kladné číslo b a přirozené n platí $(1+b)^n > 1+nb$, dostáváme proto pro dva po sobě jdoucí členy naší posloupnosti podíl

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &= \frac{(n^2 - 1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\ &> \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1. \end{aligned}$$

Je tedy naše posloupnost skutečně rostoucí. Zároveň stejným výpočtem ověříme, že posloupnost čísel

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je klesající a jistě je $b_n > a_n$. Posloupnost a_n je tedy zhora ohraničená a rostoucí a proto je její limita dána jejím supremem. Zároveň vidíme, že je tato limita rovna také limitě klesající posloupnosti b_n .

Tato limita proto zadává jedno z nejdůležitějších čísel v matematice (vedle nuly, jedničky a Ludolfova čísla π), *Eulerovo číslo* e . Je tedy

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

5.24

5.42. Mocnná řada pro e^x . Exponenciální funkci jsme definovali jako jedinou spojitou funkci splňující $f(1) = e$ a $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Základ e máme vyjádřen jako limitu posloupnosti čísel a_n , nutně tedy je



$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^x.$$

Počítejme nyní pro jednoduchost s kladným x . Jestliže v hodnotách a_n z minulého odstavce zaměníme n za n/x , opět dostaneme stejnou limitu a proto také

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}, \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Označme si n -tý člen této posloupnosti $u_n(x) = (1 + x/n)^n$ a vyjádřeme si jej pomocí binomické věty:

e5.11a

(5.10)

$$\begin{aligned} u_n(x) &= 1 + n \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)x^2}{2!n^2} + \dots + \frac{n!x^n}{n!n^n} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{x^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Protože jsou všechny závorky v součinech menší než jedna, dostáváme také

$$u_n(x) < v_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x^j.$$

Podívejme se nyní na formální nekonečný součet

e5.12

$$(5.11) \quad \sum_{j=0}^{\infty} c_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j$$

tj. $v_n(x)$ je právě součet prvních n členů v tomto formálním nekonečném výrazu. Podíl dvou po sobě jdoucích členů v řadě je $c_{j+1}/c_j = x/(j+1)$. Pro každé pevné x tedy existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $c_{j+1}/c_j < 1/2$ pro všechny $j \geq N$. Pro takto velké j je ovšem $c_{j+1} < \frac{1}{2}c_j < 2^{-(j-N+1)}c_N$. To ale znamená, že částečné součty prvních n členů v našem formálním součtu jsou shora ohraničeny součty

$$v_n < \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} x^j + \frac{1}{N!} x^N \sum_{j=0}^{n-N} \frac{1}{2^j}.$$

Protože pro každé q platí $(1-q)(1+q+\dots+q^k) = 1-q^{k+1}$, můžeme hodnoty v_n také odhadnout

$$v_n < \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} x^j + \frac{2}{N!} x^N (1 - 2^{-n+N-1})$$

splňující (5.2) nemusel existovat. Takové situaci odpovídá úplný odraz světla (k lomu světla vůbec nedojde). \square

5.46. Halleyova úloha, 1686.



Hráč stojí před basketbalovým košem ve vzdálenosti l od obroučky, která je ve výšce h nad bodem odhodu. Určete minimální počáteční rychlost v_0 , kterou musí udělit míči, aby skóroval, a příslušný elevační úhel φ pro toto v_0 . Viz obrázek.

Řešení. Opět vynecháváme fyzikální jednotky: můžeme předpokládat, že údaje o vzdálenostech jsou uváděny v metrech a časové údaje v sekundách (rychlosti pak v metrech za sekundu). Nechť hráč hodí míč v čase $t = 0$ a nechť míč projde obroučkou v čase $t_0 > 0$. Pozici míče (během jeho letu) vyjádříme body $[x(t), y(t)]$ pro $t \in [0, t_0]$, přičemž požadujeme, aby $x(0) = 0, y(0) = 0, x(t_0) = l, y(t_0) = h$.

Zřejmě je

$$x'(t) = v_0 \cos \varphi, \quad y'(t) = v_0 \sin \varphi - gt$$

pro $t \in (0, t_0)$, kde g je normální tíhové zrychlení (konstanta gravitačního zrychlení). Hodnoty $x'(t)$ a $y'(t)$ totiž po řadě udávají horizontální a vertikální rychlost míče. Integrováním těchto rovnic získáme

$$x(t) = v_0 t \cos \varphi + c_1, \quad y(t) = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 + c_2$$

pro $t \in (0, t_0)$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Z počátečních podmínek

$$\lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = x(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) = y(0) = 0$$

plyne, že $c_1 = c_2 = 0$. Dosazení zbývajících podmínek

$$\lim_{t \rightarrow t_0-} x(t) = x(t_0) = l, \quad \lim_{t \rightarrow t_0-} y(t) = y(t_0) = h$$

tak již dává

$$l = v_0 t_0 \cos \varphi, \quad h = v_0 t_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} g t_0^2.$$

Podle první rovnice je

$$(5.3) \quad t_0 = \frac{l}{v_0 \cos \varphi},$$

a tudíž dostáváme jedinou rovnici

$$(5.4) \quad h = l \operatorname{tg} \varphi - \frac{g l^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi},$$

přičemž $v_0 \in (0, +\infty), \varphi \in (0, \pi/2)$.

Zopakujme, že naším úkolem je stanovit minimální v_0 a odpovídající φ , které této rovnici vyhovuje. Řečeno srozumitelněji, chceme určit minimální hodnotu v_0 , pro kterou bude existovat φ splňující (5.4). Neboť

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

rovnici (5.4) můžeme převést do tvaru

$$h - l \operatorname{tg} \varphi + \frac{g l^2}{2 v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 0,$$

tj.

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{2v_0^2}{gl} \operatorname{tg} \varphi + \frac{2hv_0^2}{gl^2} + 1 = 0.$$

Z poslední rovnice (kvadratické rovnice pro neznámou $p = \operatorname{tg} \varphi$) vyplývá, že

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{2v_0^2}{gl} \pm \sqrt{\frac{4v_0^4}{g^2l^2} - 4\left(\frac{2hv_0^2}{gl^2} + 1\right)}}{2},$$

tj.

$$(5.5) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0^2}{gl} \pm \frac{\sqrt{v_0^4 - 2hv_0^2g - g^2l^2}}{gl}.$$

Úhel φ splňující (5.4) tedy existuje, právě když je

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2l^2 \geq 0.$$

Také nyní nám substituce (tentokrát $q = v_0^2$) umožní přejít ke kvadratickému výrazu (na levé straně nerovnice) a následně získat

$$\left(v_0^2 - g \left[h + \sqrt{h^2 + l^2}\right]\right) \left(v_0^2 - g \left[h - \sqrt{h^2 + l^2}\right]\right) \geq 0.$$

Protože $h < \sqrt{h^2 + l^2}$, musí být

$$v_0^2 \geq g \left[h + \sqrt{h^2 + l^2}\right], \quad \text{tj.} \quad v_0 \geq \sqrt{g \left[h + \sqrt{h^2 + l^2}\right]}.$$

Nejmenší přípustné hodnotě

$$(5.6) \quad v_0 = \sqrt{g \left[h + \sqrt{h^2 + l^2}\right]}$$

potom odpovídá (viz (5.5))

$$(5.7) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0^2}{gl} = \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l}, \quad \text{tj.} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l}.$$

Předchozí výpočet byl ovšem založen na podmínkách $x(t_0) = l$, $y(t_0) = h$, které pouze udávají požadovanou polohu v čase t_0 . Míč však mohl projít obroučkou zespodu. Doplňme proto podmínku $y'(t_0) < 0$, která říká, že míč v čase t_0 už klesal, a dokažme, že je pro v_0 z (5.6) a φ z (5.7) splněna.

Připomeňme, že je (viz (5.3), (5.4))

$$t_0 = \frac{l}{v_0 \cos \varphi}, \quad v_0^2 = \frac{gl^2}{2(l \operatorname{tg} \varphi - h) \cos^2 \varphi}.$$

Využitím toho z

$$y'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} y'(t) = v_0 \sin \varphi - gt_0 < 0$$

dostáváme

$$\frac{gl^2}{2(l \operatorname{tg} \varphi - h) \cos^2 \varphi} = v_0^2 < v_0 \cdot \frac{gt_0}{\sin \varphi} = \frac{gl}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

tj. nerovnici

$$l \sin \varphi \cos \varphi < 2(l \operatorname{tg} \varphi - h) \cos^2 \varphi,$$

z níž snadno vyjádříme

$$\frac{2h}{l} < \operatorname{tg} \varphi.$$

Porovnáním s (5.7) vidíme, že poslední nerovnost je splněna, neboť

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l} > \frac{h + \sqrt{h^2}}{l} = \frac{2h}{l}.$$

Limita výrazů na pravé straně pro n jdoucí do nekonečna proto jistě existuje a proto existuje i limita rostoucí posloupnosti v_n .

Nyní si prohlédněme pozorněji posloupnost čísel u_n , jejíž limitou je e^x . Budeme uvažovat $n > N$ pro nějaké pevné N (hodně velké) a zvolíme si $k < N$ pevné (docela malé). Pak pro dostatečně velká N umíme součet prvních k členů ve vyjádření u_N v (5.10) aproximovat libovolně přesně výrazem v_k . Protože je tato část součtu u_N ostře menší než u_N samotné, musí posloupnost u_n konvergovat k téže limitě jako posloupnost v_n . Dokázali jsme tedy:

MOCNINNÁ ŘADA PRO e^x

Věta. Exponenciální funkce je pro každé $x \in \mathbb{R}$ vyjádřena jako limita částečných součtů ve výrazu

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

5.43. Číselné řady. Při dovození mimořádně důležitého tvrzení o funkci e^x jsme mimoděk pracovali s několika užitečnými pojmy a nástroji. Sformulujeme si je nyní obecněji:



ČÍSELNÉ NEKONEČNÉ ŘADY

Definice. Nekonečná řada čísel je výraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots,$$

kde a_n jsou reálná nebo komplexní čísla. Posloupnost částečných součtů je dána svými členy $s_k = \sum_{n=0}^k a_n$ a říkáme, že řada konverguje a je rovna s , jestliže existuje konečná limita částečných součtů

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k.$$

Jestliže posloupnost částečných součtů řady má nevlastní limitu, říkáme že řada *diverguje* k ∞ nebo $-\infty$.

K tomu, aby posloupnost částečných součtů s_n konvergovala, je nutné a stačí, aby byla Cauchyovská. Tzn. že

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m|$$

musí být libovolně malé pro dostatečně velká $m > n$. Protože je

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_m| > |a_{n+1} + \dots + a_m|,$$

vyplývá z konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ i konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$.

ABSOLUTNĚ KONVERGENTNÍ ŘADY

Říkáme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konverguje *absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.



Absolutní konvergenci jsme zavedli, protože se často daleko snadněji ověřuje, zároveň ale následující věta ukazuje, že se v případě absolutně konvergentních řad i jednoduché algebraické operace chovají všechny velice dobře:

5.25a

5.44. Věta. *Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou dvě absolutně konvergentní řady. Pak*

(1) *jejich součet absolutně konverguje k součtu*

$$S + T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n),$$

(2) *jejich rozdíl absolutně konverguje k rozdílu*

$$S - T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n),$$

(3) *jejich součin absolutně konverguje k součinu*

$$S \cdot T = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right).$$

DŮKAZ. První i druhé tvrzení jsou bezprostředním důsledkem obdobných vlastností limit. Třetí tvrzení vyžaduje větší pozornost. Označme si

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k.$$

Z předpokladů a podle pravidel pro limitu součinu posloupností dostáváme

$$\left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k b_n \right) \rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Máme tedy dokázat, že

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k b_n \right) - \sum_{n=0}^k c_n \right).$$

Porovnejme si nyní výrazy

$$\left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k b_n \right) = \sum_{0 \leq i, j \leq k} a_i b_j,$$

$$c_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ 0 \leq i, j \leq k}} a_i b_j, \quad \sum_{n=0}^k c_n = \sum_{\substack{i+j \leq k \\ 0 \leq i, j \leq k}} a_i b_j.$$

Dostáváme tedy odhad

$$\left| \left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k b_n \right) - \sum_{n=0}^k c_n \right| = \left| \sum_{\substack{i+j > k \\ 0 \leq i, j \leq k}} a_i b_j \right| \leq \sum_{\substack{i+j > k \\ 0 \leq i, j \leq k}} |a_i b_j|.$$

K odhadu posledního výrazu nám poslouží jednoduchý trik: aby mohl být součet indexů větší než k , musí být alespoň jeden z nich větší než $k/2$. Jistě tedy výraz nezmenšíme, když do

Tím jsme ukázali, že při počáteční rychlosti uvedené v (5.6) může hráč koš dát.

Při trestném hodu, kdy hráč odhazuje míč ve výšce 2 m, je

$$h = 1,05 \text{ m}, \quad l = 4,225 \text{ m}, \quad g = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

a tudíž minimální počáteční rychlost míče činí

$$v_0 = \sqrt{9,80665 \left[1,05 + \sqrt{(1,05)^2 + (4,225)^2} \right]} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 7,28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Této rychlosti odpovídá úhel

$$\varphi = \arctg \frac{v_0^2}{9,80665 \cdot 4,225} \doteq 0,907 \text{ rad} \approx 52^\circ.$$

Zamysleme se ještě nad získanou hodnotou úhlu φ pro minimální rychlost v_0 . Podle obrázku je

$$2\beta + (\pi - \alpha) = \pi \quad \text{a} \quad \alpha + \gamma = \frac{\pi}{2},$$

odkud vyplývá

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}.$$

Platí tedy

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{h}{l} \right).$$

Obdrželi jsme, že elevační úhel při hodu s minimální energií je aritmetickým průměrem pravého úhlu a úhlu pohledu na obroučku (z pozice míče).

Problém stanovení minimální nutné rychlosti odhazovaného míče vlastně vyřešil Edmond Halley už v roce 1686, když určil minimální potřebné množství střelného prachu k tomu, aby vystřelená dělová koule mohla zasáhnout cíl na výšce položeném místě (např. za hradbami). Halley dokázal (tzv. Halleyovo kalibrační pravidlo), že pro zasažení cíle v bodě $[l, h]$ při střelbě z pozice $[0, 0]$ je potřeba stejné minimální množství prachu jako pro zasažení horizontálního cíle ve vzdálenosti $h + \sqrt{h^2 + l^2}$ (při úhlu $\varphi = 45^\circ$). Halley také prokázal, že hodnota φ je stabilní vzhledem k malým odchylkám množství použitého střelného prachu a nevýrazným chybám v odhadu vzdálenosti cíle. \square

5.47. Projektil je vystřelen pod úhlem φ z bodu ve výšce h nad zemí



s počáteční rychlostí v_0 . Dopadne na zem ve vzdálenosti R od místa výstřelu. Viz obrázek. Stanovte úhel φ , při kterém bude hodnota R maximální.

Řešení. Pozici projektilu v čase vyjádříme body $[x(t), y(t)]$. Předpokládáme, že projektil byl vystřelen v čase $t = 0$ z bodu $[0, 0]$ a dopadne na zem v bodě $[R, -h]$ v jistém čase $t = t_0$, tj. $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(t_0) = R$, $y(t_0) = -h$. Podobně jako v Halleyově úloze uvažujeme rovnice

$$x'(t) = v_0 \cos \varphi, \quad y'(t) = v_0 \sin \varphi - gt, \quad t \in (0, t_0)$$

pro horizontální a vertikální rychlost projektilu, kde g je normální tíhové zrychlení.

I nadále můžeme pokračovat jako při řešení Halleyovy úlohy, kdy integrováním těchto rovnic se zohledněním $x(0) = y(0) = 0$ získáme

$$x(t) = v_0 t \cos \varphi, \quad y(t) = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2, \quad t \in (0, t_0)$$

a z podmínek $\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) = x(t_0) = R$, $\lim_{t \rightarrow t_0^-} y(t) = y(t_0) = -h$ poté

$$R = v_0 t_0 \cos \varphi, \quad -h = v_0 t_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} g t_0^2.$$

Z první rovnice plyne

$$t_0 = \frac{R}{v_0 \cos \varphi},$$

a tak můžeme předchozí dvě rovnice vyjádřit jedinou rovnicí

$$(5.8) \quad -h = R \operatorname{tg} \varphi - \frac{g R^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi},$$

přičemž $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Na rozdíl od Halleyovy úlohy je však hodnota v_0 dána a měnné je R v závislosti na φ . Je tak vlastně $R = R(\varphi)$ funkcí v proměnné φ , která musí splňovat (5.8) (je určena rovnicí (5.8)). Jedná se tedy o funkci zadanou implicitně. Rovnici (5.8) zapíšeme jako (R nahradíme $R(\varphi)$)

$$R(\varphi) \operatorname{tg} \varphi \cdot 2 v_0^2 \cos^2 \varphi - g R^2(\varphi) + h \cdot 2 v_0^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

Využitím vztahu

$$2 \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi = \sin 2\varphi$$

pak (5.8) převedeme do tvaru

$$(5.9) \quad R(\varphi) v_0^2 \sin 2\varphi - g R^2(\varphi) + 2 h v_0^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

Derivování podle φ nyní dává

$$R'(\varphi) v_0^2 \sin 2\varphi + 2 R(\varphi) v_0^2 \cos 2\varphi - 2 g R(\varphi) R'(\varphi) - 2 h v_0^2 (2 \cos \varphi \sin \varphi) = 0,$$

tj.

$$R'(\varphi) [v_0^2 \sin 2\varphi - 2 g R(\varphi)] = -2 R(\varphi) v_0^2 \cos 2\varphi + 2 h v_0^2 \sin 2\varphi.$$

Vypočítali jsme tak, že

$$R'(\varphi) = \frac{2 v_0^2 [h \sin 2\varphi - R(\varphi) \cos 2\varphi]}{v_0^2 \sin 2\varphi - 2 g R(\varphi)}, \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Stačí ověřit, že $v_0^2 \sin 2\varphi - 2 g R(\varphi) \neq 0$ pro každé $\varphi \in (0, \pi/2)$. Předpokládáme opak a dosadíme

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{2g} = \frac{v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g}$$

do (5.8) se získá

$$-h = \frac{v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} \operatorname{tg} \varphi - \frac{g v_0^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{2 g^2 v_0^2 \cos^2 \varphi}.$$

Jednoduchými úpravami odbržíme

$$-h = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g},$$

něj přidáme více členů, tj. vezmeme všechny jako v součinnu a odebereme pouze ty, u kterých jsou oba nejvýše $k/2$.

$$\sum_{\substack{i+j>k \\ 0 \leq i, j \leq k}} |a_i b_j| \leq \sum_{0 \leq i, j \leq k} |a_i b_j| - \sum_{0 \leq i, j \leq k/2} |a_i b_j|.$$

Oba výrazy v rozdílu jsou ale částečné součty pro součin $S \cdot T$, mají tedy také stejnou limitu a proto jejich rozdíl jde k nule. \square

Další věta uvádí podmínky, pomocí kterých umíme ověřit konvergenci řad.

5.45. Věta. Necht $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada reálných nebo komplexních čísel.

- (1) Jestliže S konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (2) Předpokládejme, že existuje limita podílů po sobě jdoucích členů řady a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Pak řada S konverguje absolutně při $|q| < 1$ a nekonverguje při $|q| > 1$. Při $|q| = 1$ může řada konvergovat ale nemusí.

- (3) Jestliže existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q,$$

pak při $q < 1$ řada konverguje absolutně, zatímco při $q > 1$ diverguje. Je-li $q = 1$, může konvergovat i divergovat.

DŮKAZ. (1) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ neexistuje nebo je nenulová, existuje pro dostatečně malé číslo $\epsilon > 0$ nekonečně mnoho členů a_k s $|a_k| > \epsilon$. Zároveň tedy musí mezi nimi existovat nekonečně mnoho kladných nebo nekonečně mnoho záporných. Pak ovšem při přidání kteréhokoliv z nich do částečného součtu dostáváme rozdíl dvou po sobě jdoucích s_n a s_{n+1} o velikosti alespoň ϵ . Posloupnost částečných součtů proto nemůže být Cauchyovská a tedy ani konvergentní.

(2) Protože chceme dokazovat absolutní konvergenci, můžeme rovnou předpokládat $a_i > 0$. Důkaz jsme pro speciální hodnotu $q = 1/2$ provedli při dovození hodnoty e^x pomocí řady. Uvažme nyní $q < r < 1$ pro nějaké reálné r . Z existence limity podílů dovedíme pro všechna j větší než dostatečně veliké N

$$a_{j+1} < r \cdot a_j \leq r^{(j-N+1)} a_N.$$

To ale znamená, že částečné součty s_n jsou pro velká $n > N$ shora ohraničeny součty

$$s_n < \sum_{j=0}^N a_j + a_N \sum_{j=0}^{n-N} r^j = \sum_{j=0}^N a_j + \frac{1 - r^{n-N+1}}{1 - r}.$$

Protože $0 < r < 1$, je množina všech částečných součtů shora ohraničená rostoucí posloupností a proto je její limitou její supremum.

Při hodnotě $q > r > 1$ použijeme obdobný postup, ale z existence limity podílu q hned na začátku odvodíme

$$a_{j+1} > r \cdot a_j \geq r^{(j-N+1)} a_N.$$

To ale znamená, že částečné součty prvních s_n jsou zdola ohraničeny součty

$$s_n > \sum_{j=0}^N a_j + a_N \sum_{j=0}^{n-N} r^j.$$

Při $r > 1$ tento výraz poroste s rostoucím n nad všechny meze a proto ani naše řada nemůže konvergovat.

(3) Důkaz je zde velmi podobný předchozímu případu. Z existence limity $q < 1$ vyplývá, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje N takové, že pro všechny $n > N$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < r$. Umocněním pak dostáváme $|a_n| < r^n$, takže jsme opět v situaci, kdy srovnáváme s geometrickou řadou. Důkaz se proto dokončí stejně jako v případě podílového testu. \square

V důkazu druhého i třetího tvrzení jsme využívali slabšího tvrzení, než je existence limity. Potřebovali jsme pro studované posloupnosti nezáporných výrazů pouze tvrzení, že od určitého indexu už budou větší nebo menší než dané číslo.

K takovému odhadu nám ale postačí pro danou posloupnost b_n uvažovat s každým indexem n supremum hodnot členů s indexy vyššími. Tato suprema vždy existují a budou tvořit nerostoucí posloupnost. Její infimum pak označujeme jako *limes superior* dané posloupnosti a značíme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Výhodou je, že limes superior vždy existuje, můžeme proto předchozí výsledek (aniž bychom měnili důkaz) přeformulovat v silnější podobě:

Důsledek. *Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada reálných nebo komplexních čísel.*

(1) *Je-li*

$$q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

pak řada S konverguje absolutně při $q < 1$ a nekonverguje při $q > 1$. Při $q = 1$ může řada konvergovat ale nemusí.

(2) *Je-li*

$$q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

pak při $q < 1$ řada konverguje absolutně, zatímco při $q > 1$ diverguje. Je-li $q = 1$, může konvergovat i divergovat.

5.27

5.46. Mocnné řady. Jestliže máme místo posloupnosti čísel a_n k dispozici posloupnost funkcí $f_n(x)$ se stejným definičním oborem A , můžeme bod po bodu použít definici součtu číselné řady a dostáváme pojem součtu řady funkcí



což nemůže nastat (výraz na levé straně je záporný, na pravé kladný).

Podařilo se nám tedy určit $R'(\varphi)$ pro všechna $\varphi \in (0, \pi/2)$. Navíc je ihned vidět, že tato derivace je nulová, právě když

$$h \sin 2\varphi = R(\varphi) \cos 2\varphi, \quad \text{tj.} \quad R(\varphi) = h \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Neboť funkce R zřejmě nabývá na intervalu $(0, \pi/2)$ maximální hodnoty (podle fyzikálního významu úlohy se pro $\varphi \rightarrow 0+$ nebo $\varphi \rightarrow \pi/2-$ hodnota R zmenšuje) a má derivaci v každém bodě tohoto intervalu, maxima musí nabývat tam, kde je derivace nulová. To znamená, že $R(\varphi)$ může být maximální pouze tehdy, když je

$$(5.10) \quad R(\varphi) = h \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Dosaďme proto (5.10) do (5.9). Získáváme

$$h \operatorname{tg} 2\varphi v_0^2 \sin 2\varphi - gh^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2hv_0^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

Tuto rovnici postupně upravíme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\varphi v_0^2 \sin 2\varphi + 2v_0^2 \cos^2 \varphi &= gh \operatorname{tg}^2 2\varphi, \\ v_0^2 \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + v_0^2 (\cos 2\varphi + 1) &= gh \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}, \\ v_0^2 \sin^2 2\varphi + v_0^2 \cos^2 2\varphi + v_0^2 \cos 2\varphi &= gh \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}, \\ v_0^2 + v_0^2 \cos 2\varphi &= gh \frac{1 - \cos^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}, \\ v_0^2 (1 + \cos 2\varphi) &= gh \frac{(1 - \cos 2\varphi)(1 + \cos 2\varphi)}{\cos 2\varphi}, \\ v_0^2 \cos 2\varphi &= gh (1 - \cos 2\varphi), \\ (v_0^2 + gh) \cos 2\varphi &= gh, \\ \cos 2\varphi &= \frac{gh}{v_0^2 + gh}. \end{aligned}$$

Tím jsme však už jednoznačně určili bod

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arccos \frac{gh}{v_0^2 + gh},$$

ve kterém je R největší. Protože

$$\sin 2\varphi_0 = \sqrt{1 - \cos^2 2\varphi_0} = \sqrt{1 - \frac{g^2 h^2}{(v_0^2 + gh)^2}} = \frac{\sqrt{v_0^4 + 2ghv_0^2}}{v_0^2 + gh},$$

je funkční hodnota

$$R(\varphi_0) = h \operatorname{tg} 2\varphi_0 = h \frac{\frac{\sqrt{v_0^4 + 2ghv_0^2}}{v_0^2 + gh}}{\frac{gh}{v_0^2 + gh}} = \frac{\sqrt{v_0^4 + 2ghv_0^2}}{g} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Nechť např. oštěpařka Barbora Špotáková udělí oštěpu ve výši $h = 1,8$ m rychlost $v_0 = 27,778$ m/s $\doteq 100$ km/h (při $g = 9,80665$ m \cdot s $^{-2}$). Potom oštěp může doletět do vzdálenosti

$$R(\varphi_0) = \frac{27,778}{9,80665} \sqrt{27,778^2 + 2 \cdot 9,80665 \cdot 1,8} \text{ m} \doteq 80,46 \text{ m}.$$

Této vzdálenosti by bylo dosaženo pro

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arccos \frac{9,80665 \cdot 1,8}{27,778^2 + 9,80665 \cdot 1,8} \doteq 0,7742 \text{ rad} \approx 44,36^\circ.$$

Světový rekord Barbory Špotákové se ovšem hranici 80 m ani neblíží, přestože další vlivy (kupř. odpor vzduchu) lze zanedbat. Nesmíme však zapomenout, že IAAF (Mezinárodní asociace atletických federací) rozhodla o posunutí těžiště oštěpu směrem ke špičce k 1. dubnu

1 999 (v ženském oštěpu), čímž se zkrátila vzdálenost hodů zhruba o 10 %. Původní rekord (se „správně vyváženým“ typem oštěpu) byl právě 80, 00 m.

Provedené úvahy a získaný výsledek lze uplatnit také v jiných atletických disciplínách a sportech. Při golfu je třeba h blízké 0, a tudíž právě při úhlu

$$\varphi_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \arccos \frac{gh}{v_0^2 + gh} = \frac{1}{2} \arccos 0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$$

míček dopadne do největší vzdálenosti

$$R(\varphi_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Uvědomme si, že pro $h = 0$ nelze náš výpočet použít ($\varphi_0 = \pi/4$), neboť bychom pro vzdálenost R dostali nedefinovaný výraz $\text{tg}(\pi/2)$. My jsme však úlohu vyřešili pro libovolné $h > 0$, a proto jsme si mohli pomoci příslušnou jednostrannou limitou. \square

5.48. Proč má duha kruhový tvar?

Řešení.

V příkladu nazvaném Snellův zákon jsme si objasnili, co je příčinou vzniku duhy. (Duha vzniká rozkladem slunečního světla na vodních kapkách.) Nyní na tento příklad navážeme. Přesněji, detailně se podíváme, co se děje se světlem při jeho průchodu dešťovou kapkou. Viz obrázek. Paprsek dopadající na povrch kapky v bodě A se „rozdvojí“. Část světla se odrazí (pod úhlem φ_i od normály) a část se zlomí dovnitř kapky pod vyznačeným úhlem φ_r . Paprsek uvnitř kapky se odrazí od povrchu kapky v bodě B . Protože je $|OA| = |OB|$, úhel odrazu je roven φ_r . Samozřejmě během tohoto odrazu se opět část světla lomí ven z kapky. Paprsek odražený uvnitř kapky však dopadá na povrch kapky v bodě C a láme se směrem k pozorovateli pod úhlem φ_i od normály. Doplňme, že zanedbáváme možnost vzniku tzv. sekundární (vedlejší) duhy, kdy se paprsek v kapce odrazí dvakrát (a pochopitelně i vícečetné odrazy).

Vyjádríme si úhel $\alpha := \angle AIC$. Neboť $\angle OAI = \varphi_i$ a $\angle OAB = \varphi_r$, je $\angle BAI = \varphi_i - \varphi_r$. Platí tak

$$\angle BIA = \pi - (\angle ABI) - (\angle BAI) = \pi - (\pi - \varphi_r) - (\varphi_i - \varphi_r) = 2\varphi_r - \varphi_i$$

a dále

$$\alpha = 2 \cdot \angle BIA = 4\varphi_r - 2\varphi_i.$$

Podle Snellova zákona lomu je

$$\frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_r} = n,$$

kde n označuje index lomu pro vodu (klademe totiž index lomu pro vzduch roven 1). Máme tedy vztah

$$\varphi_r = \arcsin \frac{\sin \varphi_i}{n},$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

KONVERGENCE MOCNINNÉ ŘADY
Mocninná řada je dána výrazem

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Řekneme, že $S(x)$ má *poloměr konvergence* $\rho \geq 0$, jestliže $S(x)$ konverguje pro každé x splňující $|x| < \rho$ a diverguje při $|x| > \rho$.

5.47. Vlastnosti mocninných řad. Ačkoliv na podstatnou část důkazu následující věty si budeme muset počkat až na konec příští kapitoly, zformulujeme si základní vlastnosti mocninných řad hned:

ABSOLUTNÍ KONVERGENCE A DIFERENCOVÁNÍ ČLEN PO ČLENU

Věta. Necht' $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada a existuje limita

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Pak je poloměr konvergence řady S roven $r = \rho^{-1}$.

Mocninná řada $S(x)$ konverguje na celém svém intervalu konvergence absolutně a je na něm spojitá (včetně krajních bodů, pokud v nich konverguje také) a existuje její derivace,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

DŮKAZ. Pro ověření absolutní konvergence řady můžeme pro každou pevnou hodnotu x použít odmocninový test z věty 5.45(3). Počítáme přitom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho x$$

a řada konverguje absolutně, resp. diverguje, jestliže je tato limita různá od 1. Odtud plyne, že skutečně konverguje pro $|x| < r$ a diverguje pro $|x| > r$.

Tvrzení o spojitosti a derivaci dokážeme později v obecnějším kontextu, viz 6.43–6.45. \square

Všimněme si také, že můžeme při důkazu konvergence použít silnější variantu odmocninového testu a tedy lze poloměr konvergence r pro každou mocninnou řadu přímo zadat formulí

$$r^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

5.28

5.48. Poznámky. Pokud koeficienty řady velmi rychle rostou, např. $a_n = n^n$, pak je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, tj. poloměr konvergence je nula. Skutečně taková řada pak konverguje pouze v jediném bodě $x = 0$.



Podíváme se na konvergenci mocninných řad

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

včetně krajních bodů příslušného intervalu. ves32 ju5bh

První příklad je *geometrická řada*, kterou jsme se zabývali již dříve, a její součet je pro všechny x s $|x| < 1$

$$S(x) = \frac{1}{1-x},$$

zatímco $|x| > 1$ zaručuje divergenci. Pro $x = 1$ dostáváme také zjevně divergentní řadu $1 + 1 + 1 + \dots$ s nekonečným součtem, při $x = -1$ jde o řadu $1 - 1 + 1 - \dots$, jejíž částečné součty nemají limitu vůbec.

Věta 5.45(2) ukazuje, že poloměr konvergence druhého příkladu je také jedna, protože existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = x \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = x$$

Pro $x = 1$ tu dostaneme divergentní řadu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, protože umíme odhadnout částečné součty tak, že vždy postupně pro $k = 1, 2, 3, \dots$, sečteme 2^{k-1} po sobě jdoucích členů $1/2^{k-1}, \dots, 1/(2^k - 1)$ a nahradíme všechny 2^{-k} . Do spodního odhadu tedy každá taková část přispěje $1/2$ a odhad tedy roste nad všechny meze.

Naopak, řada $T(-1) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$ konverguje. Vyplyvá to z obecnějšího platného tvrzení, které ukážeme až v příští kapitole.

5.29

5.49. Komplexní exponenciála a goniometrické funkce.

S mocninnými řadami nám do našeho společenství funkcí přibyla spousta nových příkladů hladkých funkcí, tj. funkcí libovolněkrát diferencovatelných na celém svém definičním oboru. Podobně jako polynomy mají všechny tyto přírůstky do zvěřince navíc vlastnost, že jsou ve skutečnosti zadány vztahem, který definuje funkci $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Skutečně, naše úvahy o absolutní konvergenci jsou beze zbytku platné i pro komplexní číselné řady. Proto mocninné řady budou na celém kruhu v komplexní rovině se středem v počátku a poloměrem r představovat konvergentní číselné řady komplexních čísel.

Pohrejme si chvíli s nejvýznamnějším a prvním našim příkladem, exponenciálou

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Tato mocninná řada má poloměr konvergence nekonečný a dobře proto definuje hladkou funkci pro všechna

z něhož již plyne

$$(5.11) \quad \alpha = 4 \arcsin \left(\frac{\sin \varphi_i}{n} \right) - 2\varphi_i.$$

Pro paprsky vycházející z kapky je hodnota α odlišná. Konkrétní přípustné hodnoty α však nejsou rozloženy rovnoměrně. Je-li R poloměr kapky a y udává vzdálenost bodu A od horizontální roviny procházející středem kapky, platí

$$(5.12) \quad \sin \varphi_i = \frac{y}{R} \quad \text{pro } y \in [0, R].$$

Samozřejmě můžeme předpokládat (vzhledem k výrazné vzdálenosti Slunce), že množství sluneční energie pro $y \in [a - \delta, a + \delta]$ nezávisí na $a \in [\delta, R - \delta]$, ale závisí pouze na velikosti uvažovaného rozsahu hodnot y pro dostatečně malá $\delta > 0$. Má tak smysl analyzovat funkci (viz (5.11) a (5.12))

$$\alpha(y) = 4 \arcsin \frac{y}{nR} - 2 \arcsin \frac{y}{R}, \quad y \in [0, R].$$

Volbou vhodné jednotky délky (pro kterou je $R = 1$) přejdeme k funkci

$$\alpha(x) = 4 \arcsin \frac{x}{n} - 2 \arcsin x, \quad x \in [0, 1].$$

Po výpočtu derivace

$$\alpha'(x) = \frac{4}{n \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (0, 1)$$

snadno určíme, že rovnice $\alpha'(x) = 0$ má jediné řešení

$$x_0 = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \in (0, 1), \quad \text{pokud } n^2 \in (1, 4).$$

Položme $n = 4/3$ (což je přibližně index lomu pro vodu). Dále je

$$\alpha'(x) > 0, \quad x \in (0, x_0), \quad \alpha'(x) < 0, \quad x \in (x_0, 1).$$

Zjistili jsme, že v bodě

$$x_0 = \sqrt{\frac{4 - \left(\frac{4}{3}\right)^2}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} \doteq 0,86$$

má funkce α globální maximum

$$\alpha(x_0) = 4 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} - 2 \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \doteq 0,734 \text{ rad} \approx 42^\circ.$$

Přestože je zajímavé, že vrchol duhy nemůže být nad úrovní přibližně 42° vůči tomu, kdo ji pozoruje; mnohem důležitější jsou vyčíslení

$$\alpha(0,74) \doteq 39,4^\circ, \quad \alpha(0,94) \doteq 39,2^\circ,$$

$$\alpha(0,8) \doteq 41,2^\circ, \quad \alpha(0,9) \doteq 41,5^\circ.$$

Ta totiž implikují (funkce α roste na intervalu $[0, x_0]$ a klesá na intervalu $[x_0, 1]$), že více než 20 % hodnot α leží v úzkém pásu zhruba od 39° do 42° a 10 % v pásu o šířce menší než 1° . Pokud navíc uvážíme např.

$$\alpha(0,84) \doteq 41,9^\circ, \quad \alpha(0,88) \doteq 41,9^\circ,$$

vidíme, že paprsky, pro které je α blízké hodnotě 42° , mají největší intenzitu. Vyzdvihneme, že se jedná o případ tzv. principu minimální odchylky, kdy platí, že k největší koncentraci rozptýleného světla dochází právě u paprsků s minimální odchylkou. Celková úhlová odchylka paprsku se totiž rovná úhlu $\delta = \pi - \alpha$.

Kapky, ze kterých směřují paprsky k pozorovateli vidícímu duhu, tak leží na povrchu kuželu s centrálním úhlem $2\alpha(x_0)$. Nadzemní část tohoto kuželu se pak jeví pozorovateli právě jako kruhový oblouk duhy (viz obrázek). Při západu Slunce by tedy měla duha tvar půlkružnice. Uvažte také, že duha se realizuje vzhledem k pozorovateli – není nikde v prostoru. Na závěr poznamenejme, že onen kruhový tvar duhy podrobně zdokumentoval již René Descartes, který duhu vědecky zkoumal v letech 1635–1637. \square

Další praktické úlohy na hledání extrémů funkcí jedné proměnné viz 308

G. Řady

Řady se přirozeně vyskytují v celé řadě (problémů).

5.49. Sierpiňského koberec. Jednotkový čtverec se rozdělí na devět



shodných čtverců a odstraní se prostřední čtverec. Každý ze zbývajících čtverců se znovu rozdělí na devět shodných čtverců a odstraní se prostřední čtverec.

Určete obsah zbylého obrazce po prodloužení tohoto postupu do nekonečna.

Řešení. V prvním kroku se odstraní 1 čtverec o obsahu $1/9$. Ve druhém kroku se odstraní 8 čtverců o obsahu 9^{-2} , tj. o celkovém obsahu $8 \cdot 9^{-2}$. V každé další iteraci se odstraní osminásobek počtu čtverců z předešlého kroku, přičemž obsah každého z nich je devítinou obsahu 1 čtverce z předchozího kroku. Součet obsahů všech odstraněných čtverců je

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^{n+1}}.$$

Obsah zbylého obrazce (tzv. Sierpiňského koberce) tak činí

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^{n+1}} = 1 - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 0.$$

\square

5.50. Kochova vločka, 1904. Vytvořte „sněhovou vločku“ následujícím postupem. Na začátku uvažujte rovnostranný trojúhelník s jednotkovou délkou strany. Každou z jeho stran rozdělte na třetiny a nad prostředními třetinami sestrojte rovnostranné trojúhelníky, kdy základny (prostřední třetiny stran původního trojúhelníku) odstraníte.

komplexní čísla x . Její hodnoty jsou limitami hodnot (komplexních) polynomů s reálnými koeficienty a každý polynom je zcela určený konečně mnoha svými hodnotami. Zejména tedy jsou hodnoty mocninných řad i v komplexním oboru zcela určeny jejich hodnotami na reálných argumentech x . Proto i pro komplexní exponenciálu musí platit i obvyklé vztahy, které jsme pro reálné hodnoty proměnné x již odvodili. Zejména tedy platí

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y,$$

viz vztah (5.5) a věta 5.44(3). Dosadíme si hodnoty $x = i \cdot t$, kde $i \in \mathbb{C}$ je imaginární jednotka, $t \in \mathbb{R}$ libovolné.

$$e^{it} = 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - i\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + i\frac{1}{5!}t^5 - \dots$$

a zjevně tedy je komplexně konjugované číslo $k z = e^{it}$ číslo $\bar{z} = e^{-it}$. Proto

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0 = 1$$

a všechny hodnoty $z = e^{it}$ leží na jednotkové kružnici v komplexní rovině.

Reálné a imaginární složky bodů na jednotkové kružnici jsme popisovali pomocí *goniometrických funkcí* $\cos \theta$ a $\sin \theta$, kde θ je příslušný úhel.

Derivací parametrického popisu bodů kružnice, $t \mapsto e^{it}$ dostáváme vektory „rychlostí“, které budou dány výrazem (pokud zatím nevěříme derivování mocninných řad člen po členu, lze také zderivovat zvlášť reálnou a imaginární složku) $t \mapsto (e^{it})' = i \cdot e^{it}$ a jejich velikost proto také bude pořád jednotková. Odtud lze tušit, že celou kružnici oběhneme po dosažení hodnoty parametru rovného délce oblouku, tj. 2π (i když k pořádné definici délky křivky budeme potřebovat integrální počet). Tímto postupem skutečně definujeme *Ludolfovo číslo* π — je to délka poloviny jednotkové kružnice v euklidovském \mathbb{R}^2 .

Můžeme se ale nyní aspoň částečně ujistit pohledem na nejmenší kladné kořeny reálné části částečných součtů naší řady, tj. příslušných polynomů. Již při řádu deset nám vyjde číslo π přesně na 5 desetinných míst.

Dostali jsem tedy přímou definici goniometrických funkcí pomocí mocninných řad:

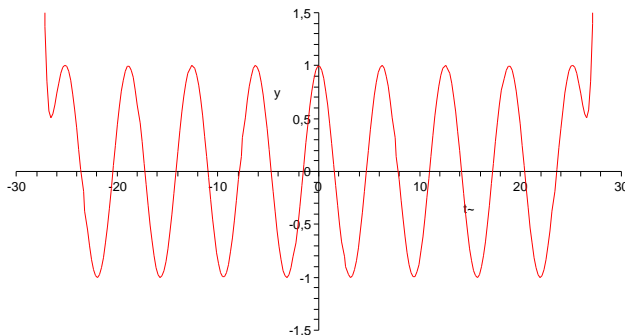
$$\cos t = \operatorname{re} e^{it} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 +$$

$$\dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} t^{2k} + \dots$$

$$\sin t = \operatorname{im} e^{it} = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 +$$

$$\dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1} + \dots$$

Ilustraci konvergence řady pro funkci \cos je vidět na obrázku. Jde o graf příslušného polynomu stupně 68. Při postupném vykreslení částečných součtů je vidět, že aproximace v okolí nuly je velice dobrá a prakticky beze změn. S rostoucím řádem se pak zlepšuje i dále od počátku.



Přímo z definice vyplývá známý vztah

$$e^{it} e^{-it} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

a také z derivace $(e^{it})' = i e^{it}$ vidíme, že

$$(\sin t)' = \cos t, \quad (\cos t)' = -\sin t.$$

Tento výsledek lze samozřejmě ověřit přímo derivací našich řad člen po členu.

Označme t_0 nejmenší kladné číslo, pro které je $e^{-it_0} = -e^{it_0}$, tj. první kladný nulový bod funkce $\cos t$. Podle naší definice Ludolfova čísla je $t_0 = \frac{1}{2}\pi$.

Pak kvadrát této hodnoty je $e^{i2t_0} = e^{-i2t_0} = (e^{-it_0})^2$ a jde tedy o nulový bod funkce $\sin t$. Samozřejmě přitom platí pro libovolné t

$$e^{i(4kt_0+t)} = (e^{it_0})^{4k} \cdot e^{it} = 1 \cdot e^{it}.$$

Jsou tedy obě goniometrické funkce \sin a \cos *periodické* s periodou 2π . Z našich definic je přitom vidět, že je to nejmenší jejich perioda.

Nyní můžeme snadno odvodit všechny obvyklé vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Uvedeme na ukázkou několik z nich. Nejprve si všimněme, že definice vlastně říká

$$\boxed{\text{e5.13}} \quad (5.12) \quad \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

$$\boxed{\text{e5.14}} \quad (5.13) \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Součin těchto funkcí jde tedy vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \sin t \cos t &= \frac{1}{4i}(e^{it} - e^{-it})(e^{it} + e^{-it}) \\ &= \frac{1}{4i}(e^{i2t} - e^{-i2t}) = \frac{1}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

Dále můžeme využít naši znalost derivací:

$$\cos 2t = \left(\frac{1}{2} \sin 2t\right)' = (\sin t \cos t)' = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Vlastnosti dalších goniometrických funkcí

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \operatorname{cotg} t = (\operatorname{tg} t)^{-1}$$

se snadno odvodí z jejich definice a pravidel pro derivování. Grafy funkcí sinus, cosinus, tangens a cotangens jsou na obrázcích (postupně červený a zelený vlevo, červený a zelený vpravo):

Takto z původního trojúhelníku dostanete šesticípou hvězdu. Celý postup opakujte tak, že každou úsečku obdrženou v předchozím kroku rozdělíte na třetiny a prostřední třetinu nahradíte za rovnostranný trojúhelník bez základny. Sněhovou vločku pak získáte nekonečným opakováním tohoto postupu. Dokažte, že vzniklý útvar (vločka) má nekonečný obvod. Poté určete jeho obsah.

Řešení. Obvod původního trojúhelníku je roven 3. V každém kroku konstrukce se prodlouží obvod útvaru o třetinu, neboť ze tří částí každé úsečky vzniknou čtyři stejné délky. Odsud vyplývá, že obvod vločky lze vyjádřit jako limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = +\infty.$$

Útvar se zřejmě během konstrukce zvětšuje. Ke stanovení jeho obsahu nám tudíž stačí zachytit, o kolik se jeho obsah zvětší v jednotlivých krocích. Počet jeho stran se v libovolném kroku stává čtyřnásobným (úsečky se rozdělí na třetiny, kdy místo prostřední třetiny máme dvě úsečky), přičemž délka nových stran je třetinová. V následujícím kroku se obsah útvaru zvětší právě o obsahy stejných rovnostranných trojúhelníků, jejichž počet je stejný jako počet úseček v předchozím kroku a jejichž strany mají délku třetiny těchto úseček. Když takto přecházíme od rovnostranného trojúhelníku k šesticípé hvězdě při první realizaci uvedeného postupu, obsah se zvětší o 3 rovnostranné trojúhelníky (jejich počet odpovídá počtu stran původního útvaru) s délkou stran $1/3$ (ta je třetinová). Označme obsah původního trojúhelníku jako S_0 . Pokud si uvědomíme, že zmenšením strany rovnostranného trojúhelníku na třetinu se jeho obsah zmenší devětkrát, dostaneme obsah šesticípé hvězdy ve tvaru

$$S_0 + 3 \cdot \frac{S_0}{9}.$$

Podobně v dalším kroku obdržíme obsah útvaru jako

$$S_0 + 3 \cdot \frac{S_0}{9} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{S_0}{9^2}.$$

Počet přidávaných trojúhelníků je čtyřnásobný a délky jejich stran třetinové.

Nyní již není obtížné odvodit, že obsah vločky je roven limitě

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_0 + 3 \cdot \frac{S_0}{9} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{S_0}{9^2} + \dots + 4^n \cdot 3 \cdot \frac{S_0}{9^{n+1}} \right) &= \\ S_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) &= \\ S_0 \left[1 + \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) \right] &= S_0 \left[1 + \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k \right] = \\ S_0 \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k \right] &= S_0 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} \right] = \frac{8}{5} S_0. \end{aligned}$$

Obsah vločky je tedy $8/5$ obsahu původního trojúhelníka, tj.

$$\frac{8}{5} S_0 = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Zopakujme, že tato vložka je příkladem toho, jak nekonečně dlouhá křivka může ohraničovat konečnou plochu. \square

5.51. Sečtěte řadu

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$;
 (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$;
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}} \right)$;
 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$;
 (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

Řešení. Případ (a). Podle definice je součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

Případ (b). Zjevně se jedná o pětinasobek konvergentní geometrické řady s kvocientem $q = 1/3$, a tudíž je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 5 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{15}{2}.$$

Případ (c). Platí (při substituci $m = n - 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}} \right) = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{2n-2}} \right) + \frac{2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{2n-2}} \right) =$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{16} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2m}} = \frac{14}{16} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16} \right)^m = \frac{14}{16} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{14}{15}.$$

Řadu lineárních kombinací jsme zde vyjádřili jako lineární kombinaci řad (přesněji řečeno, jako součet řad s vytknutím konstant), což je platná úprava, pokud obdržené řady jsou absolutně konvergentní.

Případ (d). Z částečného součtu

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

bezprostředně získáváme

$$\frac{s_n}{3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je tedy

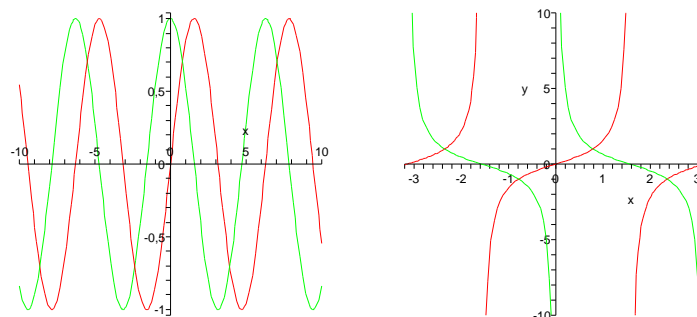
$$s_n - \frac{s_n}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^{n+1}} = 0$, dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(s_n - \frac{s_n}{3} \right) = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} =$$

$$\frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{3}{4}.$$

Případ (e). Stačí použít vyjádření (jde o tzv. rozklad na parciální zlomky)



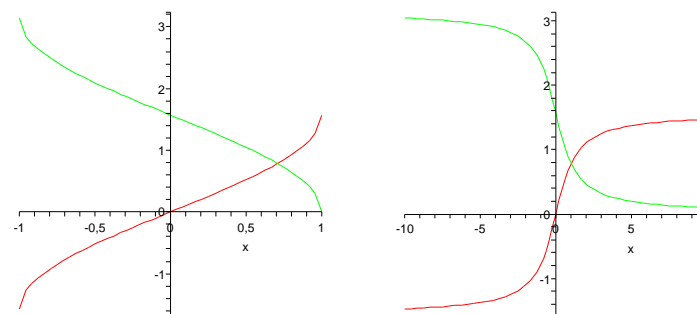
Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým. Protože jsou goniometrické funkce všechny periodické s periodou 2π , jsou jejich inverze definované vždy jen v rámci jedné periody a to ještě jen na části, kdy je daná funkce buď rostoucí nebo klesající. Jsou to funkce

$$\arcsin = \sin^{-1}$$

s definičním oborem $[-1, 1]$ a oborem hodnot $[-\pi/2, \pi/2]$. Dále

$$\arccos = \cos^{-1}$$

s definičním oborem $[-1, 1]$ a oborem hodnot $[0, \pi]$, viz obrázek vlevo.



Zbývají ještě funkce (zobrazené na obrázku vpravo)

$$\operatorname{arctg} = \operatorname{tg}^{-1}$$

s definičním oborem $[-\infty, \infty]$ a oborem hodnot $[-\pi/2, \pi/2]$ a konečně

$$\operatorname{arccotg} = \operatorname{cotg}^{-1}$$

s definičním oborem $[-\infty, \infty]$ a oborem hodnot $[0, \pi]$.

Velice často se také využívají tzv. *hyperbolické funkce*

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Název naznačuje, že by funkce mohly mít něco společného s hyperbolou. Přímý výpočet dává (druhé mocniny se v roznásobených dvojčlenech všechny odečtou a zůstanou smíšené členy)

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 2 \frac{1}{2}(e^x e^{-x}) = 1.$$

Body $[\cosh t, \sinh t] \in \mathbb{R}^2$ tedy skutečně parametricky popisují hyperbolu v rovině. Pro hyperbolické funkce lze snadno

odvodit podobné identity jako pro funkce goniometrické. Mimo jiné je přímo z definice snadno vidět (dosazením do vztahů (5.12) a (5.13))

$$\cosh x = \cos(ix), \quad i \sinh x = \sin(ix).$$

5.30

5.50. Poznámky. (1) Jestliže mocninnou řadu $S(x)$ vyjádříme s posunutou hodnotou proměnné x o konstantní posuv x_0 , dostaneme funkci $T(x) = S(x - x_0)$. Jestliže je ρ poloměr konvergence S , bude T dobře definovaná na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Říkáme, že T je *mocninná řada se středem v x_0* . Mocninné řady proto můžeme přímo definovat takto:



$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

kde x_0 je libovolné pevně zvolené reálné číslo. Všechny naše předchozí úvahy jsou pořád platné, jen je třeba mít na paměti, že se vztahují k bodu x_0 . Zejména tedy taková řada konverguje na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, kde ρ je její poloměr konvergence.

Dále platí, že má-li mocninná řada $y = T(x)$ hodnoty v intervalu, kde je dobře definována řada $S(y)$, potom i hodnoty funkce $S \circ T$ jsou vyjádřeny mocninnou řadou, kterou dostaneme formálním dosazením $y = T(x)$ za y do $S(y)$.

(2) Jakmile máme k dispozici mocninné řady s obecným středem, lze docela přímočaře počítat koeficienty mocninných řad zadávajících inverzní funkce. Nebudeme zde uvádět seznam formulí, snadno se k nim dostaneme například v Maple procedurou „series“. Pro ilustraci se podívejme alespoň na dva příklady:

Viděli jsme, že

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

Protože je $e^0 = 1$, budeme hledat pro inverzní funkci $\ln x$ mocninnou řadu se středem v $x = 1$, tj.

$$\ln x = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + \dots$$

Využijeme tedy rovnosti $x = e^{\ln x}$ a přeskupením koeficientů podle mocnin x dosazením dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \right) \\ &\quad + a_2 \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \right)^2 + a_3 \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \right)^3 + \dots \\ &= a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2 \right) x^2 + \left(\frac{1}{6}a_1 + a_2 + a_3 \right) x^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{24}a_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{6} \right) a_2 + \frac{3}{2}a_3 + a_4 \right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin nalevo a napravo

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = -\frac{1}{4}, \dots$$

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+4}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

které dává

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+4} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

5.52. Ověřte, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Řešení. Ihned je vidět, že

$$1 \leq 1, \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < 4 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4},$$

resp. obecný odhad

$$\frac{1}{(2^n)^2} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^2} < 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^2} = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odsud (porovnáním členů obou řad) dostáváme zadanou nerovnost, z níž mj. plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ještě upřesněme, že je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

□

5.53. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Řešení. Pokusme se uvedenou řadu sečíst. Platí

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln (n+1) = +\infty. \end{aligned}$$

Řada tudíž diverguje k $+\infty$.

□

5.54. Prokažte, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctg \frac{n^2+2n+3\sqrt{n}+4}{n+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n^3+n^2-n}$$

nekonvergují.

Řešení. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{n^2+2n+3\sqrt{n}+4}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{n^2}{n} = \frac{\pi}{2}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+1}{n^3+n^2-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^3} = +\infty,$$

není splněna nutná podmínka konvergence $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

□

5.55. Jaký je součet řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}?$$

Řešení. Z nerovností (uvažte graf přirozeného logaritmu)

$$1 \leq \ln n \leq n, \quad n \geq 3, \quad n \in \mathbb{N}$$

plyne

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\ln n} \leq \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podle Věty o třech limitách je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1.$$

Řada tedy není konvergentní. Neboť má nezáporné členy, musí divergovat k $+\infty$. \square

5.56. Zjistěte, zda řada

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3};$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$

konverguje.

Řešení. Všechny tři uvedené řady mají nezáporné členy, a tak mohou v jednotlivých variantách nastat jen dvě možnosti – součet je konečný, součet je roven $+\infty$. Platí

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} < +\infty;$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty;$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$

Odtud plyne, že řada (a) konverguje; (b) diverguje k $+\infty$; (c) diverguje k $+\infty$. \square

5.57. Aplikací podílového (tzv. d'Alembertova) kritéria (viz 5.45) určete, jestli nekonečná řada

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)^3}{3^n};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!};$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^2 \cdot n!}$

konverguje.

Řešení. Protože ($a_n \geq 0$ pro všechna n)

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+2)^3 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot 2^n \cdot (n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)^3}{3(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{3n^3} = \frac{2}{3} < 1;$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} = 0 < 1;$

což skutečně odpovídá platnému výrazu (ověříme později):

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n.$$

Podobně si můžeme pohrát s řadou

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots$$

a zatím neznámou řadou pro její inverzi (všimněme si, že počítáme opět se středem v nule, protože je $\sin 0 = 0$)

$$\arcsin t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

Opět dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} t &= a_0 + a_1 \left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots \right) + \\ & a_2 \left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots \right)^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \left(-\frac{1}{6}a_1 + a_3 \right) t^3 + \\ & \left(-\frac{2}{6}a_2 + a_4 \right) t^4 + \left(\frac{1}{120}a_1 - \frac{3}{6}a_3 + a_5 \right) t^5 + \dots \end{aligned}$$

a proto

$$\arcsin t = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{40}t^5 + \dots$$

(3) Všimněme si také, že kdybychom hned zpočátku uvěřili, že funkci e^x můžeme napsat jako mocninnou řadu se středem v nule a že se mocninné řady derivují člen po členu, pak bychom snadno obdrželi diferenční rovnici pro koeficienty a_n . Víme totiž $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$ a proto z našeho požadavku, že exponenciála má mít v každém bodě derivaci rovnou své hodnotě, vyplývá

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n, \quad a_0 = 1$$

a odtud už je jasné, že $a_n = \frac{1}{n!}$.

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n^2 \cdot n!}{n^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = 1 \cdot e > 1,$$

řada (a) konverguje; (b) konverguje; (c) nekonverguje (diverguje k $+\infty$). \square

5.58. Aplikací odmocninového (tzv. Cauchyova) kritéria určete, jestli nekonečná řada

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{n^3 \cdot 3^n};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{2n}{2^n}$$

konverguje.

Řešení. Opět máme řady s nezápornými členy, přičemž je

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1;$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt[n]{n^3 \cdot 3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{3 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}\right)^3} = \frac{e}{3} < 1;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{2n}{2^n} = \arcsin 0 = 0 < 1.$$

To znamená, že všechny zadané řady konvergují. \square

5.59. Rozhodněte, zda řada

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right);$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n^2}}{n!};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(6+(-1)^n)^n}$$

konverguje.

Řešení. Případ (a). Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2^x}\right)}{\frac{1}{2^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2^x}} \left(-\frac{1}{2^x}\right)'}{\left(\frac{1}{2^x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2^x}} = 1,$$

a proto platí

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{2}{2^n}$$

pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$. Ovšem o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$ víme, že je konvergentní. Musí tak být

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < +\infty,$$

tj. řada v zadání konverguje (absolutně).

Případ (b). Podílové kritérium dává

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(n+1)^2} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n}{n+1} = +\infty.$$

Řada tedy nekonverguje.

Případ (c). Nyní použijeme obecnou verzi odmocninového kritéria

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{6+(-1)^n} = \frac{3}{5} < 1,$$

z níž plyne (absolutní) konvergence řady. \square

5.60. Libovolným způsobem dojděte k rozhodnutí o konvergenci alternující řady

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n^4-3n^3+9n-1}{(5n^3-2) \cdot 4^n}.$$

Řešení. Příklad (a). Z toho, že je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{9n^2} = \frac{1}{9} \neq 0,$$

ihned vyplývá neexistence limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2} \right).$$

Řada tudíž nekonverguje (není splněna nutná podmínka konvergence).

Příklad (b). Viděli jsme, že při použití podílového (nebo odmocninového) kritéria polynomy v čitateli ani jmenovateli členů řady neovlivňují hodnotu počítané limity. Uvažujme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n},$$

pro kterou je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4} < 1.$$

To ovšem znamená, že rovněž původní řada je (absolutně) konvergentní. \square

5.61. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}}?$$

Řešení. Posloupnost $\left\{ 2/\sqrt{3n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je zřejmě klesající a funkce $y = \operatorname{arctg} x$ rostoucí (na celé reálné ose), a tudíž posloupnost $\left\{ \operatorname{arctg} \left(2/\sqrt{3n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je klesající. Je tedy zadána alternující řada splňující, že posloupnost absolutních hodnot jejích členů je klesající. Taková alternující řada konverguje, právě když posloupnost jejích členů konverguje k 0 (tzv. Leibnizovo kritérium), což je ovšem splněno:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}} = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}} \right) = 0.$$

\square

5.62. Zjistěte, jestli řada

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt[3]{n^2}}$$

konverguje absolutně, příp. neabsolutně (relativně), nebo nekongruje.

Řešení. Případ (a). Ukázat, že tato řada konverguje absolutně, je snadné. Např. je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

příčemž druhou nerovnost jsme dokázali dříve.

Případ (b). Je vidět, že $\cos(\pi n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Máme tedy alternující řadu, jejíž posloupnost členů v absolutní hodnotě je klesající. Proto z limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

již plyne, že řada konverguje. Zároveň však je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt[3]{n^2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Řada tak konverguje neabsolutně. □

5.63. Sečtěte řadu

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right);$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}} \right);$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n};$$

$$(e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}.$$

Řešení. Případ (a). Podle definice je součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

Případ (b). Zjevně se jedná o pětinasobek konvergentní geometrické řady s kvocientem $q = 1/3$, a tudíž je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{15}{2}.$$

Případ (c). Platí (při substituci $m = n - 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}} \right) = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{2n-2}} \right) + \frac{2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{2n-2}} \right) =$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{16} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2m}} = \frac{14}{16} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16} \right)^m = \frac{14}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{14}{15}.$$

Řadu lineárních kombinací jsme zde vyjádřili jako lineární kombinaci řad (přesněji řečeno, jako součet řad s vytknutím konstant), což je platná úprava, pokud obdržené řady jsou absolutně konvergentní.

Případ (d). Z částečného součtu

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

bezprostředně získáváme

$$\frac{s_n}{3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je tedy

$$s_n - \frac{s_n}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^{n+1}} = 0$, dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} (s_n - \frac{s_n}{3}) = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \\ &= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Případ (e). Stačí použít vyjádření (jde o tzv. rozklad na parciální zlomky)

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+4}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

které dává

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+4}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

5.64. Ověřte, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Řešení. Ihned je vidět, že

$$1 \leq 1, \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < 4 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4},$$

resp. obecný odhad

$$\frac{1}{(2^n)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^2} < 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^2} = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odsud (porovnáním členů obou řad) dostáváme zadanou nerovnost, z níž mj. plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ještě upřesněme, že je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

□

5.65. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Řešení. Pokusme se uvedenou řadu sečíst. Platí

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln (n+1) = +\infty. \end{aligned}$$

Řada tudíž diverguje k $+\infty$. □

5.66. Prokažte, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctg \frac{n^2+2n+3\sqrt{n}+4}{n+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n^3+n^2-n}$$

nekonvergují.

Řešení. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{n^2+2n+3\sqrt{n}+4}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{n^2}{n} = \frac{\pi}{2}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+1}{n^3+n^2-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^3} = +\infty,$$

není splněna nutná podmínka konvergence $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. □

5.67. Jaký je součet řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}?$$

Řešení. Z nerovností (uvažte graf přirozeného logaritmu)

$$1 \leq \ln n \leq n, \quad n \geq 3, \quad n \in \mathbb{N}$$

plyne

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\ln n} \leq \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podle Věty o třech limitách (5.20) je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1.$$

Řada tedy není konvergentní. Neboť má nezáporné členy, musí divergovat k $+\infty$. □

5.68. Zjistěte, zda řada

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$$

konverguje.

Řešení. Všechny tři uvedené řady mají nezáporné členy, a tak mohou v jednotlivých variantách nastat jen dvě možnosti – součet je konečný, součet je roven $+\infty$. Platí

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} < +\infty;$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty;$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Odtud plyne, že řada (a) konverguje; (b) diverguje k $+\infty$; (c) diverguje k $+\infty$. \square

5.69. Aplikací podílového (tzv. d'Alembertova) kritéria určete, jestli nekonečná řada

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)^3}{3^n};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^2 \cdot n!}$$

konverguje.

Řešení. Protože $(a_n \geq 0$ pro všechna $n)$

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+2)^3 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot 2^n \cdot (n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)^3}{3(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{3n^3} = \frac{2}{3} < 1;$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} = 0 < 1;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n^2 \cdot n!}{n^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e > 1,$$

řada (a) konverguje; (b) konverguje; (c) nekonverguje (diverguje k $+\infty$). \square

5.70. Aplikací odmocninového (tzv. Cauchyova) kritéria určete, jestli nekonečná řada

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{n^3 \cdot 3^n};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{2n}{2^n}$$

konverguje.

Řešení. Opět máme řady s nezápornými členy, přičemž je

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1;$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt[n^3 \cdot 3]} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{3 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}\right)^3} = \frac{e}{3} < 1;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{2n}{2^n} = \arcsin 0 = 0 < 1.$$

To znamená, že všechny zadané řady konvergují. \square

5.71. Rozhodněte, zda řada

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right);$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n^2}}{n!};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(6+(-1)^n)^n}$$

konverguje.

Řešení. Příklad (a). Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2^x}\right)}{\frac{1}{2^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2^x}} \left(1 + \frac{1}{2^x}\right)'}{\left(\frac{1}{2^x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^x}} = 1,$$

a proto platí

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{2}{2^n}$$

pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$. Ovšem o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$ víme, že je konvergentní. Musí tak být

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < +\infty,$$

tj. řada v zadání konverguje (absolutně).

Příklad (b). Podílové kritérium dává

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(n+1)^2} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n}{n+1} = +\infty.$$

Řada tedy nekonverguje.

Příklad (c). Nyní použijeme obecnou verzi odmocninového kritéria

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{6+(-1)^n} = \frac{3}{5} < 1,$$

z níž plyne (absolutní) konvergence řady. \square

5.72. Libovolným způsobem dojděte k rozhodnutí o konvergenci alternující řady

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n^4-3n^3+9n-1}{(5n^3-2) \cdot 4^n}.$$

Řešení. Příklad (a). Z toho, že je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{9n^2} = \frac{1}{9} \neq 0,$$

ihned vyplývá neexistence limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2} \right).$$

Řada tudíž nekonverguje (není splněna nutná podmínka konvergence).

Příklad (b). Viděli jsme, že při použití podílového (nebo odmocninového) kritéria polynomy v čitateli ani jmenovateli členů řady neovlivňují hodnotu počítané limity. Uvažujme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n},$$

pro kterou je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4} < 1.$$

To ovšem znamená, že rovněž původní řada je (absolutně) konvergentní. \square

5.73. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}}?$$

Řešení. Posloupnost $\left\{2/\sqrt{3n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je zřejmě klesající a funkce $y = \operatorname{arctg} x$ rostoucí (na celé reálné ose), a tudíž posloupnost $\left\{\operatorname{arctg} \left(2/\sqrt{3n}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je klesající. Je tedy zadána alternující řada splňující, že posloupnost absolutních hodnot jejích členů je klesající. Taková alternující řada konverguje, právě když posloupnost jejích členů konverguje k 0 (tzv. Leibnizovo kritérium), což je ovšem splněno:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}} = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}} \right) = 0.$$

□

5.74. Zjistěte, jestli řada

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt[3]{n^2}}$$

konverguje absolutně, příp. neabsolutně (relativně), nebo nekonverguje.

Řešení. Případ (a). Ukázat, že tato řada konverguje absolutně, je snadné. Např. je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

přičemž druhou nerovnost jsme dokázali dříve.

Případ (b). Je vidět, že $\cos(\pi n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Máme tedy alternující řadu, jejíž posloupnost členů v absolutní hodnotě je klesající. Proto z limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

již plyne, že řada konverguje. Zároveň však je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt[3]{n^2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Řada tak konverguje neabsolutně. □

5.75. Ukažte, že tzv. *harmonická řada*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

diverguje.

Řešení. Pro libovolné přirozené k je součet prvních 2^k členů řady větší než $k/2$:

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots,$$

součet členů od $2^l + 1$ do 2^{l+1} je totiž vždy větší než 2^l -krát (jejich počet) číslo $1/2^l$ (nejmenší z nich), což je dohromady $1/2$. \square

p5.26

5.76. Rozhodněte o následujících řadách, jestli konvergují či divergují:

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$
- ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{100000}}$
- iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$

Řešení.

i) Budeme zkoumat konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2 > 1,$$

řada tedy diverguje.

ii) Odhadneme řadu ze spodu: víme, že pro libovolné přirozené n platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pro posloupnost částečných součtů s_n zkoumané řady a posloupnost částečných součtů harmonické řady s'_n tedy platí:

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = s'_n.$$

A protože harmonická řada diverguje (viz předchozí příklad), diverguje i její posloupnost částečných součtů $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy diverguje i posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy diverguje i zadaná posloupnost.

iii) Diverguje, jedná se o násobek harmonické řady.

iv) Jedná se o geometrickou řadu s koeficientem $\frac{1}{1+i}$, ta bude konvergovat, bude-li absolutní hodnota koeficientu menší než 1. Víme, že

$$\left| \frac{1}{1+i} \right| = \left| \frac{1-i}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

řada tedy konverguje a umíme ji dokonce sečíst:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{i} = 1 - i.$$

□

Další příklady k číselným řadám naleznete na straně 311

H. Mocninné řady

V předchozí podkapitole jsme zkoumali, jestli lze přiřadit smysl součtu nekonečně mnoha čísel. Nyní se budeme zajímat o to, jaký může mít význam součet nekonečně mnoha funkcí. Pokud se omezíme

5.77. Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$
 ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} x^n$

Řešení.

i)

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{2},$$

viz úloha ?? . Daná mocniná řada tedy konverguje pro reálná $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, případně pro komplexní $|x| < \frac{1}{2}$. Všimněme si, že řada je divergentní pro $x = \frac{1}{2}$ (jde o harmonickou řadu) a naopak konverguje pro $x = -\frac{1}{2}$ (alternující harmonická řada). Rozhodnout o konvergenci pro libovoně x ležící v komplexní rovině na kružnici o poloměru $\frac{1}{2}$ je těžší otázka a přesahuje rámec našeho kurzu.

ii) Opět díky přechozímu příkladu víme, že

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{\frac{1}{(1+i)^n}} \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1+i} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

je tedy poloměr konvergence dané mocninné řady $r = \sqrt{2}$.

□

5.78. Určete poloměr konvergence r mocninné řady

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 8^n} x^n$;
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-4n)^n x^n$;
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;
 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(2+(-1)^n)^n} x^n$.

Řešení. Platí

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n \cdot 8}} = \frac{1}{8}$;
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n = +\infty$;

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

$$(d) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n^5]}{2+(-1)^n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{2+(-1)^n} = 1.$$

Proto je poloměr konvergence (a) $r = 8$, (b) $r = 0$, (c) $r = 1/e$, (d) $r = 1$. \square

5.79. Stanovte poloměr konvergence r mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} \frac{\sqrt[3]{n^3+n \cdot 3^n}}{\sqrt[3]{n^4+2n^3+1 \cdot \pi^n}} (x-2)^n.$$

Řešení. Poloměr konvergence libovolné mocninné řady se nezmění, pokud posuneme její střed nebo nahradíme koeficienty členů tak, že se nezmění jejich absolutní hodnota. Určeme tedy poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n \cdot 3^n}}{\sqrt[3]{n^4+2n^3+1 \cdot \pi^n}} x^n.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}\right)^a = 1 \quad \text{pro } a > 0,$$

můžeme dále přejít k řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\pi^n} x^n$$

se stejným poloměrem konvergence $r = \pi/3$. \square

5.80. Nalezněte přibližnou hodnotu čísla $\sin 1^\circ$ s chybou ostře menší než 10^{-10} .

Řešení. Víme, že je

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li $x = \pi/180$, pak částečné součty řady vpravo budou aproximacemi $\sin 1^\circ$. Zbývá určit počet členů, které je třeba sečíst, aby chyba byla prokazatelně menší než 10^{-10} . Číselná řada

$$\frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1}$$

je alternující s vlastností, že posloupnost absolutních hodnot jejích členů je klesající. Pokud libovolnou takovou konvergentní řadu nahradíme jejím částečným součtem, chyba, jíž se tím dopustíme, bude menší než absolutní hodnota prvního členu uvažované řady nezahrnutého do částečného součtu. (Důkaz tohoto tvrzení uvádět nebudeme.)

Chyba aproximace

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{180^3 \cdot 3!}$$

je tak menší než

$$\frac{\pi^5}{180^5 \cdot 5!} < 10^{-10}.$$

\square

5.81. Sečtěte:

$$2 + 1 + \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{2}{6!} + \dots$$

Řešení. Porovnáme-li tvar součtu s rozvojem funkcí \sinh a \cosh do mocninných řad, dostáváme výsledek

$$\sinh(1) + 2 \cosh(1).$$

□

I. Doplnující příklady k celé kapitole

Polynomy

5.82. Určete polynom $P(x)$ co nejmenšího stupně splňující podmínky $P(1) = 1$, $P(2) = 28$, $P(0) = 2$, $P'(0) = 1$, $P'(1) = 9$.

5.83. Určete polynom $P(x)$ co nejmenšího stupně splňující podmínky $P(0) = 0$, $P(1) = 4$, $P(-1) = -2$, $P'(0) = 1$, $P'(1) = 7$.

5.84. Určete polynom $P(x)$ co nejmenšího stupně splňující podmínky $P(0) = -1$, $P(1) = -1$, $P'(-1) = 10$, $P'(0) = -1$, $P'(1) = 6$.

Topologie

5.85. Určete suprema a infima množin

$$A = (-3, 0] \cup (1, \pi) \cup \{6\}; \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2}; n \in \mathbb{N} \right\}; \quad C = (-9, 9) \cap \mathbb{Q}$$

v \mathbb{R} .

5.86. Nalezněte $\sup A$ a $\inf A$ pro

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

5.87. Je-li

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}, \quad \mathcal{M} = \left\{ -\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathcal{J} = (0, 2] \cup [3, 5] \setminus \{4\},$$

stanovte $\inf \mathbb{N}$, $\sup \mathcal{M}$, $\inf \mathcal{J}$ a $\sup \mathcal{J}$ v \mathbb{R} .

5.88. Napište příklad množiny $M \subset \mathbb{R}$, která nemá v \mathbb{R} infimum, ale má zde supremum; a udejte příklad množiny $N \subset \mathbb{R}$, která nemá v \mathbb{R} supremum, ale má zde infimum.

5.89. Uveďte podmnožinu X množiny \mathbb{R} , pro kterou je $\sup X \leq \inf X$.

5.90. Udejte příklad množin $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ takových, aby platilo

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset, \quad \sup A = \inf B = \inf C = \sup C.$$

Limity

5.91. Vypočtěte limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Řešení. Využijeme faktu, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Snadno získáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin x}{x} = 2; \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dodejme, že jsme také mohli hned použít vyjádření

$$1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

5.92. Z definice limity dokažte, že je

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 2) = -2.$$

5.93. Z definice limity určete

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)^2 - 3}{2},$$

tj. mj. napište $\delta(\varepsilon)$ -předpis jako v minulém příkladu.

5.94. Ukažte z definice limity, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(x-2)^4}{2} = +\infty.$$

5.95. Stanovte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

5.96. Vypočítejte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 11n^2 + 2} + \sqrt[5]{n^7 - 2n^5 - n^3} - n + \sin^2 n}{2 - \sqrt[3]{5n^4 + 2n^3 + 5}}.$$

5.97. Určete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-2)! - (n-4)!}{n^{50} + n! - (n-1)!}.$$

5.98. Udejte příklad posloupností majících nevlastní limity se členy $x_n, y_n, n \in \mathbb{N}$, pro které je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n^2) = +\infty.$$

5.99. Napište všechny hromadné body posloupnosti dané členy

$$a_n = \frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{4n^2 + 5n + 3}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.100. Spočtěte

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{a} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

je-li

$$a_n = \frac{n^2 + 4n - 5}{n^2 + 9} \sin^2 \frac{n\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.101. Určete

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

5.102. Určete obě jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Na základě výsledku rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

5.103. Existuje některá z limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 + 1}{x}?$$

5.104. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

5.105. Určete

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin^3 x + 7 \sin^2 x + 2 \sin x - 3}{2 \sin^3 x + 3 \sin^2 x - 8 \sin x + 3}.$$

5.106. Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ určete

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

5.107. Určete

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right).$$

5.108. Stanovte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + x^2} - x^2 \right).$$

5.109. Vypočítejte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}.$$

5.110. Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

5.111. Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

5.112. Stanovte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + \sqrt{1 + x^2 - x^9} - 7x^5 + 44x^2}{3^x + \sqrt[5]{6x^6 + x^2} - 18x^5 - 592x^4}.$$

5.113. Nechť $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Je pravda, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = 0$ pro každou rostoucí funkci $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

5.114. V jakých bodech $x \in \mathbb{R}$ je funkce

$$y = \cos \left(\operatorname{arctg} \left(\left| 12x^{21} + 11 \right| \cdot \frac{e^{\cos(x+2)-x^3}}{-11 - x^{12}} \right) \right) + \sin(\sin(\sin(\sin x)))$$

s maximálním definičním oborem spojitá?

5.115. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0; \\ 0, & 0 \leq x < 1; \\ x, & x = 1; \\ 0, & 1 < x < 2; \\ x, & 2 \leq x \leq 3; \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

spojitá; spojitá zleva; spojitá zprava v bodech $-\pi, 0, 1, 2, 3, \pi$.

5.116. Dodefinujte funkci

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{5}{x^2} \right) \cdot \sin^2 x^5, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

pro $x = 0$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá.

5.117. Uveďte $p \in \mathbb{R}$, pro které je funkce

$$f(x) = \frac{\sin(6x)}{3x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad f(0) = p$$

spojitá v počátku.

5.118. Zvolte reálnou hodnotu a tak, aby funkce

$$h(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad x > 1; \quad h(x) = a, \quad x \leq 1$$

byla spojitá v \mathbb{R} .

5.119. Libovolným způsobem ověřte, že je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

5.120. Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^8 x}{x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin^8 x}{x^3}.$$

5.121. Určete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+5} \right)^{2n-1}.$$

5.122. Spočítejte

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Derivace

5.123. Nechť je pohyb tělesa (dráha hmotného bodu) popsán(a) funkcí

$$s(t) = -(t-3)^2 + 16, \quad t \in [0, 7]$$

v jednotkách m, s. Stanovte

- (a) počáteční (tj. v čase $t = 0$ s) rychlost tělesa;
- (b) čas a polohu, ve kterých má těleso nulovou rychlost;
- (c) rychlost a zrychlení tělesa v čase $t = 4$ s.

L'Hospital

Doplňme, že rychlost je derivace dráhy a zrychlení je derivace rychlosti.

5.124. Určete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left((1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right).$$

5.125. Stanovte

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right).$$

5.126. Pomocí l'Hospitalova pravidla určete

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right) x \right).$$

5.127. Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2 \ln x} - \frac{1}{x^2 - 1} \right).$$

5.128. Užitím l'Hospitalova pravidla spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2}{x} \right)^{x^2}.$$

5.129. Doplňte

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x} = \dots$$

5.130. Určete následující dvě limity

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\alpha}{\ln x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\alpha}{\ln x}},$$

Extremy

přičemž $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné.

5.131. V čase $t = 0$ vyjelo auto z bodu $A = [5, 0]$ rychlostí 4 jednotky za sekundu směrem $(-1, 0)$. Ve stejném čase vyjelo druhé auto z bodu $B = [-2, -1]$ rychlostí 2 jednotky za sekundu směrem $(0, 1)$. Kdy si budou auta nejbližší a jaká bude tato vzdálenost?

Řešení. $t = 1, 5s$, vzdálenost $\sqrt{5}$ jednotek. \square

5.132. Vrtulník dálniční hlídky letí 3 km nad rovnou silnicí rychlostí 120 km/h. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu vrtulníku a naměří, že auto se při vzdušné vzdálenosti 5 km od vrtulníku k němu přibližuje rychlostí 160 km/h. Spočítejte rychlost auta (vůči předmětu pohozenému na vozovce).

Řešení. Pro jednoduchost budeme v celém příkladu vynechávat fyzikální jednotky, a to kilometry pro dráhu a hodiny pro čas (rychlost tedy bude v km/h). Pozici vrtulníku v čase t vyjádříme bodem $[y(t), 3]$ a auta potom bodem $[x(t), 0]$; tj. 1 jednotka na osách odpovídá 1 km a současně osy volíme tak, aby „auto jelo po ose x “. Jako $s(t)$ označme vzdušnou vzdálenost vrtulníku od auta a jako t_0 ten časový okamžik, ze kterého jsou údaje v zadání. Spočtíme rychlost auta vzhledem k předmětu umístěnému do počátku soustavy souřadnic. Můžeme předpokládat, že $x(t) > y(t) > 0$. Za tohoto předpokladu je $x'(t) \leq 0$, $y'(t) \geq 0$ pro uvažovanou t . Auto se totiž blíží k bodu $[0, 0]$ zprava – hodnota $x(t)$ se zmenšuje pro zvětšující se t , tudíž $x'(t) \leq 0$. Podobně dostáváme $y'(t) \geq 0$ a také $s'(t) \leq 0$. Ještě dodejme, že např. $y'(t)$ udává, jak rychle se mění funkce y v čase t , tedy rychlost vrtulníku.

Víme, že je

$$s(t_0) = 5, \quad s'(t_0) = -160, \quad y'(t_0) = 120$$

a že platí ($s(t)$ je přepona pravoúhlého trojúhelníku)

$$(5.13) \quad (x(t) - y(t))^2 + 3^2 = s^2(t).$$

Odtud plyne ($x(t) > y(t) > 0$)

$$(x(t_0) - y(t_0))^2 + 3^2 = 5^2, \quad \text{tj.} \quad x(t_0) - y(t_0) = 4.$$

Derivováním identity (5.13) získáváme

$$2(x(t) - y(t)) (x'(t) - y'(t)) = 2s(t)s'(t)$$

a následně pro $t = t_0$

$$2 \cdot 4 (x'(t_0) - 120) = 2 \cdot 5 \cdot (-160), \quad \text{tj.} \quad x'(t_0) = -80.$$

Vypočítali jsme, že auto se blíží k předmětu na vozovce rychlostí 80 km/h. Stačí si uvědomit, s jakými jednotkami jsme pracovali. To, že jsme jako výsledek obdrželi zápornou hodnotu, je pak zapříčiněno naší volbou souřadnicového umístění. \square

5.133. Rozlehlý vojenský prostor (nadále zkráceno na VP) s půdorysem čtverce o rozloze 100 km² je kolem dokola ohraničený úzkou cestou. Z výchozího místa v jednom rohu VP se lze dostat do cílového místa uvnitř VP tak, že se jde 5 km po cestě a poté 2 km kolmo k ní. Ovšem můžete jít libovolnou dobu po cestě rychlostí 5 km za hodinu a potom šikmo přes VP rychlostí 3 km za hodinu. Kolik (kilo)metrů musíte jít po cestě, abyste došli na místo určení co nejdříve?

Řešení. K tomu, abychom po cestě ušli x km, přičemž $x \in [0, 5]$, potřebujeme $x/5$ hodin. Naše cesta přes VP pak bude měřit

$$\sqrt{2^2 + (5 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$$

kilometrů a ujdeme ji za $\sqrt{x^2 - 10x + 29}/3$ hodin. Celkem bude naše cesta trvat

$$f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 10x + 29}$$

hodin (připomeňme, že $x \in [0, 5]$). Jediný nulový bod funkce

$$f'(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}$$

je $x = 7/2$. Protože derivace f' existuje v každém bodě intervalu $[0, 5]$ a protože

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{23}{15} < f(5) = \frac{5}{3} < f(0) = \frac{\sqrt{29}}{3},$$

funkce f má v bodě $x = 7/2$ absolutní minimum. Po cestě bychom tudíž měli jít 3, 5 km. \square

5.134. Jste ve člunu na jezeře ve vzdálenosti d km od pobřeží. Chcete se dostat co nejrychleji do určeného místa na pobřeží ve vzdušné vzdálenosti $\sqrt{d^2 + l^2}$ km od Vás (viz obrázek). Jak si budete počínat, pokud dokážete veslovat rychlostí v_1 km/h a po břehu běžet rychlostí v_2 km/h? Jak dlouho Vám bude cesta trvat?

Řešení. Optimální strategie je zřejmě dána tím, že dorazíte ke břehu v jistém bodě $[0, x]$ pro $x \in [0, l]$ a poté budete běžet podél břehu do cílového místa $[0, l]$ (viz obrázek), kdy je tedy trajektorie složena ze dvou úseček (příp. z jedné pro $x = l$). Doplnout ke břehu v bodě $[0, x]$ Vám bude trvat

$$\frac{\sqrt{d^2+x^2}}{v_1} \text{ hodin}$$

a běh po pobřeží pak

$$\frac{l-x}{v_2} \text{ hodin.}$$

Jde o to, aby celkový čas byl minimální, tj. je potřeba minimalizovat funkci

$$t(x) = \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{v_1} + \frac{l-x}{v_2}$$

na intervalu $[0, l]$. Navíc lze předpokládat, že $v_1 < v_2$. (Pro $v_1 \geq v_2$ je nepochybně nejrychlejší veslovat přímo k cílovému místu, čemuž odpovídá $x = l$.)

Nejprve vypočítáme první derivaci

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{d^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}, \quad x \in (0, l)$$

a poté druhou

$$t''(x) = \frac{d^2}{v_1\sqrt{(d^2+x^2)^3}}, \quad x \in (0, l).$$

Dále vyřešíme rovnici

$$t'(x) = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Její umocněním obdržíme

$$x^2 = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 (d^2 + x^2).$$

Jednoduchá úprava tak již dává

$$x^2 = \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 d^2}{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{\frac{v_1}{v_2} d}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}}.$$

Uvědomme si, že uvažujeme pouze $x \in (0, l)$. Zajímá nás proto, zda je

$$\frac{\frac{v_1}{v_2} d}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} < l.$$

Tuto nerovnici můžeme umocnit a upravovat podobně jako rovnicí $t'(x) = 0$ se získá

$$(5.14) \quad \frac{v_1}{v_2} < \frac{l}{\sqrt{l^2 + d^2}}.$$

Pokud je tato nerovnost splněna, je rovněž $v_1 < v_2$ a funkce t' mění znaménko pouze v bodě

$$x_0 = \frac{\frac{v_1}{v_2} d}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} \in (0, l),$$

a to ze záporného na kladné (uvažte $\lim_{x \rightarrow 0^+} t'(x) < 0$ a $t''(x) > 0$, $x \in (0, l)$). To znamená, že v tomto případě je v bodě x_0 globální minimum funkce t na intervalu $[0, l]$. Jestliže nerovnost (5.14) splněna není, pak je $t'(x) < 0$ pro všechna $x \in (0, l)$, odkud plyne, že globální minimum funkce t na $[0, l]$ je v pravém krajním bodě (funkce t je na svém definičním oboru klesající). Nejrychlejší cesta tedy bude trvat

$$\begin{aligned} t(x_0) &= \frac{\sqrt{d^2 + x_0^2}}{v_1} + \frac{l - x_0}{v_2} = \frac{1}{v_1} \sqrt{d^2 + \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 d^2}{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} + \frac{1}{v_2} \left(l - \frac{\frac{v_1}{v_2} d}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} \right) = \frac{d}{v_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} + \frac{l \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2} - \frac{v_1}{v_2} d}{v_2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} = \\ &= \frac{dv_2 + lv_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2} - \frac{v_1^2}{v_2} d}{v_1 v_2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} = \frac{dv_2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\right) + lv_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}}{v_1 v_2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} = \frac{dv_2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2} + lv_1}{v_1 v_2} = \frac{d \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} + \frac{l}{v_2} \text{ hodin,} \end{aligned}$$

platí-li (5.14), a

$$t(l) = \frac{\sqrt{d^2 + l^2}}{v_1} \text{ hodin,}$$

když (5.14) neplatí. □

5.135. O dům je opřený žebřík dlouhý 13 stop. Náhle základna žebříku podklouzne a žebřík začne sjíždět k zemi (stále zůstává opřený o dům). Když je základna žebříku 12 stop od domu, klouže od něj rychlostí 5 ft/s. Jak rychle v tomto okamžiku

- klesá vršek žebříku po zdi;
- se mění obsah trojúhelníku vymezeného žebříkem, domem a zemí;
- se mění úhel, který svírá žebřík se zemí?

5.136. Předpokládejte, že vlastníte dostatek finančních prostředků bez možnosti investovat mimo svou továrnu s působností na cenově regulovaném trhu s takřka neomezenou poptávkou a omezeným přístupem k některým klíčovým surovinám, což Vám umožňuje produkovat nejvýše 10 000 výrobků denně. Víte, že pro hrubé výnosy v a náklady n jako funkce proměnné x , udávající v tisících průměrný počet výrobků vyrobených za den, platí

$$v(x) = 9x, \quad n(x) = x^3 - 6x^2 + 15x, \quad x \in [0, 10].$$

Při jakém objemu výroby budete mít z Vaší továrny největší zisky?

5.137. Zvolte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu 32 m^3 tak, aby na natření jeho stěn a dna bylo potřeba nejmenší množství barvy.

5.138. Číslo 28 rozložte na 2 nezáporné sčítance tak, aby součet druhé mocniny prvního sčítance a třetí mocniny druhého sčítance byl minimální.

5.139. Pomocí první derivace nalezněte reálné číslo $a > 0$, pro které je součet $a + 1/a$ minimální. Poté tuto úlohu řešte bez použití diferenciálního počtu.

5.140. Vepište do půlkruhu o poloměru r obdélník s největším možným obvodem. Uveďte jeho obvod.

5.141. Existuje-li mezi obdélníky o obvodu $4c$ obdélník s maximálním obsahem, stanovte délky jeho stran.

5.142. Zjistěte výšku v a poloměr podstavy r nejobjemnějšího kužele, který se vejde do koule o poloměru R .

5.143. Ze všech trojúhelníků s konstantním obvodem $o > 0$ vyberte ten, jenž má největší obsah.

5.144. Na parabole $2x^2 - 2y = 9$ najděte body s minimální vzdáleností od počátku soustavy souřadnic.

5.145. Vaším úkolem je vyrobit jednolitrovou plechovou konzervu „obvyklého“ tvaru rotačního válce tak, aby na její výrobu bylo potřeba co nejméně plechu. Určete správný poměr mezi její výškou v a poloměrem podstavy r .

Rady

5.146. Do čtverce o délce strany $a > 0$ je vepsán čtverec, jehož strany jsou spojnicemi středů stran zadaného čtverce. Do vepsaného čtverce je stejným způsobem vepsán další čtverec atd. Stanovte součet obsahů a součet obvodů všech těchto (nekonečně mnoha) čtverců.

5.147. Nechť je dána posloupnost řádků půlkruhů, přičemž v n -tém řádku je 2^n půlkruhů o poloměru 2^{-n} pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jaký bude obsah libovolného obrazce složeného ze všech těchto půlkruhů, když nebudou umístěny přes sebe?

5.148. Vyřešte rovnici

$$1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^5 x + \dots = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x+1}.$$

5.149. Určete

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}} \right).$$

5.150. Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2n + 1}.$$

5.151. Dokažte konvergenci a nalezněte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}.$$

5.152. Stanovte součet řady

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}.$$

5.153. Sečtěte

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

5.154. Pomocí rozkladu na parciální zlomky vyčíste

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}.$$

5.155. Sečtěte konvergentní řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

5.156. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}.$$

5.157. V závislosti na

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

vyjádřete součty řad

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots; \\ & \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots, \end{aligned}$$

které z výše uvedené řady vznikly přerovnáním (tj. změnou pořadí členů).

5.158. Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{5^n}$$

konverguje.

5.159. Dokažte následující tvrzení: Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(3a_n + \pi) = 0$.

5.160. Pro jaké hodnoty

$$\alpha \in \mathbb{R}; \quad \beta \in \mathbb{Z}; \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

řady

$$\sum_{n=120}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n}; \quad \sum_{n=240}^{\infty} \frac{\beta^n \cdot n!}{n^n}; \quad \sum_{n=360}^{\infty} \frac{n}{\gamma^n}$$

konvergují?

5.161. Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=21}^{\infty} (-1)^n \frac{n^8 - 5n^6 + 2n}{2^n}$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně (relativně), nebo nekonverguje.

5.162. Zjistěte, jestli je limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

vlastní. Upozorníme, že k tomu nelze využít součtů

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} = +\infty.$$

5.163. Najděte všechna reálná čísla $A \geq 0$, pro která řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + A^{2n})$$

konverguje.

5.164. Zopakujme, že harmonická řada diverguje; tj. platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Rozhodněte, zda také řada

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{29} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{91} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{119} + \frac{1}{121} + \dots \end{aligned}$$

diverguje.

5.165. Udejte příklad divergentních číselných řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy, pro které řada $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n)$ absolutně konverguje.

5.166. Zjistěte, zda jednotlivé řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^7 - n^4 + n}{n^8 + 2n^6 + n}$$

konvergují absolutně, konvergují neabsolutně, či nekonvergují.

5.167. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[5]{n} + 1}{n + \sqrt[3]{n}}?$$

5.168. Nalezněte hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro které řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{p}{n}$$

konverguje.

5.169. Určete poloměr konvergence r mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \cdot n!}{(2n)!} x^n.$$

5.170. Stanovte poloměr konvergence pro $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} x^n$.

5.171. Bez počítání uveďte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n \cdot 3^{n-1}} x^{n-1}.$$

5.172. Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^{\sqrt{n}}} x^n.$$

5.173. Určete, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n^4 + 2n^3 + 111}} (x - 2)^n$$

konverguje.

5.174. Je pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ poloměr konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

stejný?

5.175. Rozhodněte o platnosti implikací:

(a) Pokud existuje vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3n]{a_n^2}$, pak mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

konverguje absolutně alespoň ve dvou různých bodech x .

(b) Z neabsolutní konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne, že rovněž řada $\sum_{n=1}^{\infty} (6a_n - 5b_n)$ konverguje.

(c) Jestliže pro číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0,$$

pak tato řada konverguje.

(d) Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje, potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

konverguje absolutně.

5.176. Určete $\cos \frac{\pi}{10}$ s chybou menší než 10^{-5} .

5.177. Pro konvergentní řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+100}}$$

odhadněte chybu aproximace jejího součtu částečným součtem s_{999} .

5.178. Bez počítání derivací uveďte Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \cos x - 2 \sin x - \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1).$$

Poté rozhodněte, zda je graf funkce f v okolí bodu $[0, 1]$ nad tečnou, pod tečnou.

5.179. Rozviňte funkci

$$y = \frac{1}{3-2x}, \quad x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

v Taylorovu řadu se středem v počátku.

5.180. Funkci $y = e^x$ definovanou na celé reálné přímce vyjádřete jako nekonečný polynom se členy tvaru $a_n(x-1)^n$ a funkci $y = 2^x$ definovanou na \mathbb{R} vyjádřete jako nekonečný polynom se členy $a_n x^n$.

5.181. Nalezněte funkci f , k níž pro $x \in \mathbb{R}$ konverguje posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^3}{n^2 x^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je tato konvergence stejnoměrná na \mathbb{R} ?

5.182. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x}{n^4 + x^2}, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R},$$

stejně na celé reálné ose?

5.183. Z Taylorova rozvoje se středem v počátku funkce $y = \sin x$ získejte pomocí derivace Taylorův rozvoj funkce $y = \cos x$.

5.184. Odhadněte

- (a) kosinus deseti stupňů s přesností alespoň 10^{-5} ;
- (b) určitý integrál $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4+1}$ s přesností alespoň 10^{-3} .

5.185. Určete mocninný rozvoj se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.186. Najděte analytickou funkci, jejíž Taylorova řada je

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots,$$

přičemž $x \in [-1, 1]$.

5.187. Ze znalosti součtu geometrické řady odvoďte Taylorovu řadu funkce

$$y = \frac{1}{5+2x}$$

se středem v počátku. Poté určete její poloměr konvergence.

5.188. Užitím integrálního kritéria nalezněte hodnoty $a > 0$, pro které řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

konverguje.

5.189. Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^x}$$

konverguje?

5.190. Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

konverguje absolutně, příp. relativně, nebo zda diverguje k $+\infty$, resp. k $-\infty$, či nic z toho (říkáme, že osciluje).

5.191. Stanovte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$$

pomocí součtu vhodné mocninné řady.

5.192. Pro $x \in (-1, 1)$ sečtěte

$$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$$

5.193. Je-li $|x| < 1$, určete součet řady

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

5.194. Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(-2)^{n-1}}$$

pomocí součtu mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$$

pro jisté $x \in (-1, 1)$.

5.195. Pro $x \in \mathbb{R}$ sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} x^{3n+1}.$$

Řešení cvičení

$$5.2. P(x) = \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)x^2 + (2 + 3i)x - \frac{3}{5} - \frac{14}{5}i.$$

$$5.82. x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 2.$$

$$5.83. x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 2.$$

$$5.84. x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x - 1.$$

5.85.

$$\sup A = 6, \quad \inf A = -3;$$

$$\sup B = \frac{1}{4}, \quad \inf B = -1;$$

$$\sup C = 9, \quad \inf C = -9.$$

5.86. Lehce lze ukázat, že

$$\sup A = \frac{3}{2}, \quad \inf A = 0.$$

5.87. Zřejmě je

$$\inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathcal{M} = 0, \quad \inf \mathcal{J} = 0, \quad \sup \mathcal{J} = 5.$$

5.88. Lze položit kupř.

$$M := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}; \quad N := \mathbb{N}.$$

5.89. Uvažte jakoukoli jednoprvkovou množinu $X \subset \mathbb{R}$.5.90. Množina C musí být jednoprvková. Nechť je tedy např. $C = \{0\}$. Nyní můžeme zvolit $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$.5.92. Pro každé $\varepsilon > 0$ stačí ε -okolí bodu -2 přiřadit δ -okolí bodu 0 předpisem

$$\varepsilon \mapsto \delta, \quad \delta = \varepsilon,$$

přičemž bez újmy na obecnosti lze požadovat, aby $\varepsilon \leq 1$. Pokud by totiž bylo $\varepsilon > 1$, lze položit $\delta = 1$.

5.93. Existence limity a rovnost

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)^2 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$$

např. opět plyne z volby $\delta := \varepsilon$ pro $\varepsilon \in (0, 1)$.5.94. Neboť $-(x-2)^4 < x$ pro $x < 0$, dostáváme $3(x-2)^4/2 > -x$ pro $x < 0$.

5.95. Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n-1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

5.96. Snadno lze ukázat, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 11n^2 + 2} + \sqrt[3]{n^7 - 2n^5 - n^3} - n + \sin^2 n}{2 - \sqrt[3]{5n^4 + 2n^3 + 5}} = -\infty.$$

5.97. Limita je rovna 1.

5.98. Kupř. lze položit

$$x_n := n, \quad y_n := -n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.99. Správná odpověď je ± 1 .

5.100. Výsledek je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

5.101. Platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \sin \frac{n\pi}{4} \right) = -e - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5.102. Neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

uvažovaná oboustranná limita neexistuje.

5.103. První z limit je rovna $+\infty$, druhá neexistuje.

5.104. Limitu lze spočítat více způsoby. Nabízí se např.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} \cdot \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x (1 - \cos^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5.105. Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin^3 x + 7 \sin^2 x + 2 \sin x - 3}{2 \sin^3 x + 3 \sin^2 x - 8 \sin x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.$$

5.106. Je

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}.$$

5.107. Po rozšíření výrazem

$$\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

lze lehce dostat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}.$$

5.108. Platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sqrt{1 + x^2} - x^2) = \frac{1}{2}.$$

5.109. Je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

5.110. Rozšířením zlomku ze zadání je možné obdržet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1} - 1} = 8.$$

5.111. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x} = 1.$$

5.112. Zřejmě je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{1 + x^2} - x^9 - 7x^5 + 44x^2}{3x + \sqrt[5]{6x^6 + x^2} - 18x^5 - 592x^4} = \frac{7}{18}.$$

5.113. Výrok není pravdivý. Uvažte kupř.

$$f(x) := \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0); \quad g(x) := x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.114. Uvedená funkce je spojitá na celém \mathbb{R} .

5.115. V bodech $-\pi, 0, \pi$ je spojitá; v bodě 2 je spojitá pouze zprava a v bodě 3 pouze zleva; v bodě 1 není spojitá ani z jedné strany.

5.116. Je nutné položit $f(0) := 0$.

5.117. Funkce je spojitá právě pro $p = 2$.

5.118. Správná odpověď je $a = 4$.

5.119. Limitu lze snadno určit např. pomocí l'Hospitalova pravidla.

5.120. Je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^8 x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin^8 x}{x^3} = 0.$$

5.121.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+5} \right)^{2n-1} = e^{-10}.$$

5.123. (a) $v(0) = 6 \text{ m/s}$; (b) $t = 3 \text{ s}$, $s(3) = 16 \text{ m}$; (c) $v(4) = -2 \text{ m/s}$, $a(4) = -2 \text{ m/s}^2$.

5.123. Trojnásobné použití l'Hospitalova pravidla dává

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

5.124. $2/\pi$.

5.125.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right) = 1.$$

5.126.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right) x \right) = \ln \frac{3}{2}.$$

5.127. $1/2$.

5.128. Platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2}{x} \right)^{x^2} = e^{-2}.$$

5.129. Dvojnásobnou aplikací l'Hospitalova pravidla lze obdržet

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

5.130. V obou případech je výsledek e^α .

5.135. (a) 12 ft/s ; (b) $-59, 5 \text{ ft}^2/\text{s}$; (c) -1 rad/s .

5.136. Při produkci zhruba 3 414 výrobků denně.

5.137. $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$.

5.138. $28 = 24 + 4$.

5.139. $a = 1$.

5.140. $2\sqrt{5}r$.

- 5.141. Jedná se o čtverec (s délkou strany c).
- 5.142. $v = \frac{4}{3}R, r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.
- 5.143. Největší obsah $\sqrt{3}o^2/36$ má rovnostranný trojúhelník.
- 5.144. $[2, -1/2], [-2, -1/2]$.
- 5.145. $v = 2r$.
- 5.146. $2a^2; 4a(2 + \sqrt{2})$.
- 5.147. $\pi/2$.
- 5.148. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 5.149. 5.
- 5.150. $+\infty$.
- 5.151. $3/2$.
- 5.152. (a) 3; (b) $9/4$.
- 5.153. $1/2$.
- 5.154. (a) $3/4$; (b) $1/4$.
- 5.155. $-1/2$.
- 5.156. $11/18$.
- 5.157. $s/2; 3s/2$ ($s = \ln 2$).
- 5.158. Konverguje.
- 5.159. Postačuje uvážit nutnou podmínku konvergence $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- 5.160. $\alpha > 0; \beta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}; \gamma \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- 5.161. Konverguje absolutně.
- 5.162. Limita je rovna $1/2$.
- 5.163. $A \in [0, 1)$.
- 5.164. Součet uvedené řady je konečný – řada konverguje.
- 5.165. Např. $a_n = n/3, b_n = n/2, n \in \mathbb{N}$.
- 5.166. První řada konverguje absolutně; druhá neabsolutně.
- 5.167. Ano.
- 5.168. $p \in \mathbb{R}$.
- 5.169. $r = +\infty$.
- 5.170. 1.
- 5.171. 3.
- 5.172. $[-1, 1]$.
- 5.173. $x \in \left[2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right]$.
- 5.174. Ano.
- 5.175.
- (a) Platí.
 (b) Neplatí.
 (c) Neplatí.
 (d) Platí.
- 5.176. $1 - \frac{\pi^2}{10^2 \cdot 2} + \frac{\pi^4}{10^4 \cdot 4!}$.
- 5.177. Chyba náleží do intervalu $(0, 1/200)$.
- 5.178. $1 - 3x + \frac{7}{24}x^4$; nad tečnou.
- 5.179. $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} x^n$.
- 5.180. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} x^n$.
- 5.181. $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$; ano.
- 5.182. Nikoli.

$$5.183. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$5.184. \text{(a) } 1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!}; \text{(b) } \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5}.$$

$$5.185. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} x^{2n+1}.$$

$$5.186. y = \operatorname{arctg} x.$$

5.187. Právě pro $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ je

$$\frac{1}{5+2x} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n x^n.$$

$$5.188. a > 1.$$

$$5.189. x > 2.$$

5.190. Konverguje absolutně.

$$5.191. \ln(3/2).$$

$$5.192. \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

$$5.193. \text{(a) } \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}; \text{(b) } \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

$$5.194. 2/9.$$

$$5.195. x e^{\frac{x^3}{2}}.$$

Diferenciální a integrální počet

*zvěřinec teď máme, ale co s ním?
– naučíme se s ním zacházet...*

V minulé kapitole jsme si postupně hráli buď s mimořádně velikými třídami funkcí — všechny spojité, všechny diferencovatelné apod. — nebo jen s konkrétními funkcemi — např. exponenciální, goniometrické, polynomy atd. Měli jsme ale přitom jen minimum nástrojů a vše jsme počítali tak říkajíc na koleně. Z kvalitativního pohledu jsme jen naznačili, jak využívat znalost lineárního přiblížení funkce její derivací k diskusi lokálního chování takové funkce kolem daného bodu. Teď dáme dohromady několik výsledků, které umožní snáze pracovat s funkcemi při modelování reálných problémů.

Pomocí derivování jsme se naučili zaznamenávat velikosti okamžitých změn. V této kapitole se vyrovnáme i s úlohou, jak počítat nekonečně mnoho takových „nekonečně malých“ změn, tj. jak „integrovat“. Nejdříve si ale uděláme více jasno o derivacích.

5.22

1. Derivování

6.1. Derivace vyšších řádů. Říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f má v bodě x_0 derivaci druhého řádu, jestliže derivace f' existuje na nějakém okolí bodu x_0 a existuje její derivace v bodě x_0 . Píšeme



$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

nebo také $f^{(2)}(x_0)$. Funkce f je *dvakrát diferencovatelná* na nějakém intervalu A , jestliže má druhou derivaci v každém jeho bodě. Derivace vyšších řádů definujeme induktivně:

HLADKÉ A FUNKCE A k -KRÁT DIFERENCOVATELNÉ FUNKCE

Říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f je $(k+1)$ -krát diferencovatelná pro nějaké přirozené číslo k v bodě x_0 , jestliže je k -krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu x_0 a její k -tá derivace má v bodě x_0 derivaci. Pro k -tou derivaci funkce $f(x)$ píšeme $f^{(k)}(x)$.

Jestliže existují derivace všech řádů na intervalu, říkáme, že je tam funkce f *hladká*. Většinou se také užívá konvence, že 0-krát diferencovatelná funkce znamená spojitá funkce.

Pro funkce se spojitou k -tou derivací používáme označení *třída funkcí* $C^k(A)$ na intervalu A , kde k může nabývat hodnot $0, 1, \dots, \infty$. Často píšeme pouze C^k , je-li definiční obor znám z kontextu.

A. Derivace vyšších řádů

Nejprve zavedme konvenci, jak značit derivace vyšších řádů: druhou derivaci funkce f jedné proměnné budeme značit f'' nebo $f^{(2)}$, derivace od třetího řádu výše pak pouze $f^{(3)}, f^{(4)}, \dots, f^{(n)}$.

6.1. Určete následující derivace:

- i) $(x^2 \cdot \sin(x))''$,
- ii) $(x^x)''$,
- iii) $\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{(3)}$,
- iv) $(x^n)^{(n)}$,
- v) $(\sin x)^{(n)}$.

Řešení. (a) $(x^2 \cdot \sin(x))'' = (2x \sin x + x^2 \cos x)' = 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x$.

(b) $(x^x)'' \stackrel{\text{viz 6.4(v)}}{=} (\ln x + 1)x^x' = x^{x-1} + x^x(\ln(x) + 1)^2$.

(c) $\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{(3)} = \frac{1}{x^2(\ln x)^2} - \frac{6}{x^2(\ln x)^4}$.

(d) $(x^n)^{(n)} = [(x^n)']^{(n-1)} = (nx^{n-1})^{(n-1)} = \dots = n!$.

(e) $(\sin x)^{(n)} = \operatorname{re}(i^n \sin x) + \operatorname{im}(i^n \cos x)$. □

Taylorovy rozvoje. Derivace vyšších řádů nutně potřebujeme k tomu, abychom určili Taylorův rozvoj dané funkce.

6.2. Určete Taylorovy rozvoje T_x^k (k -tého řádu v bodě x) z následujících funkcí:

- i) T_0^3 z funkce $\sin x$,
- ii) T_1^3 z funkce $\frac{e^x}{x}$.

Řešení.

- i) Spočítáme hodnoty první až třetí derivace funkce $f = \sin$ v bodě 0: $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$, dále $f(0) = 0$ Taylorův rozvoj 3-tího řádu funkce $\sin(x)$ v bodě 0 je tedy

$$T_0^3(\sin(x)) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

- ii) Opět $f(1) = e$,

$$f'(1) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} (1) = 0$$

$$f^{(2)} = \frac{e^x}{x} - 2\frac{e^{x^2}}{x} + \frac{2e^x}{x^3} (1) = e$$

$$f^{(3)} = \frac{e^x}{x} - 3\frac{e^{x^2}}{x} + \frac{6e^x}{x^3} - \frac{6e^x}{x^4} (1) = -2e$$

Dostáváme tedy Taylorův rozvoj třetího řádu funkce $\frac{e^x}{x}$ v bodě 1:

$$T_1^3\left(\frac{e^x}{x}\right) = e + \frac{e}{2}(x-1)^2 - \frac{e}{3}(x-1)^3 = e\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{5}{6}\right).$$

□

6.3. Určete Taylorův polynom T_0^6 funkce \sin a pomocí věty (6.4) odhadněte chybu polynomu v bodě $\pi/4$.

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladu určíme

$$T_0^6(\sin(x)) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Dle věty 6.4 pak odhadneme velikost zbytku (chyby) R . Podle věty 5.22a existuje $c \in (0, \frac{\pi}{4})$ takové, že

$$R(\pi/4) = \left| \frac{-\cos(c)\pi^7}{7!4^7} \right| < \frac{1}{7!} \doteq 0,0002.$$

□

6.4. Rozviňte funkci $\ln(1+x)$ do mocninné řady v bodech 0 a 1 a určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která tyto řady konvergují.

Řešení. Nejprve určíme rozvoj v bodě 0. Rozvinout funkci do mocninné řady v daném bodě je to stejné, jako určit její Taylorův rovoj v daném bodě. Snadno nahlédneme, že

$$\ln(x+1)^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n},$$

takže vyčíslením derivací v nule máme $\ln(x) = \ln(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Můžeme tedy psát



Ilustrovat můžeme rychle pojem derivace vyššího řádu na polynomech. Protože výsledkem derivování polynomu je opět polynom, ale derivací se vždy o jedničku snižuje jeho stupeň, dostaneme po konečném počtu derivací nulový polynom. Přesněji řečeno, právě po $k+1$ derivacích, kde k je stupeň polynomu, dostaneme nulu. Samozřejmě pak existují derivace všech řádů, tj. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Při konstrukci splajnů, viz 5.9, jsme pohlídali, aby výsledné funkce byly třídy $C^2(\mathbb{R})$. Jejich třetí derivace budou po částech konstantní funkce. Proto nebudou splajny patřit do $C^3(\mathbb{R})$, přestože jejich všechny derivace vyšších řádů budou nulové ve všech vnitřních bodech jednotlivých intervalů v interpolaci. Promyslete si podrobně tento příklad!

Následující tvrzení je jednoduchým kombinatorickým důsledkem Leibnitzova pravidla pro derivaci součinu funkcí:

Lemma. Jsou-li f a g dvě funkce mající derivaci řádu k v bodě x_0 , pak má derivaci řádu k i jejich součin a platí:

$$(f \cdot g)^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)}(x_0)g^{(k-i)}(x_0)$$

DŮKAZ. Pro $k=0$ je tvrzení triviální, pro $k=1$ je to Leibnitzovo pravidlo pro derivaci součinu. Jestliže pravidlo platí pro nějaké k , derivací pravé strany a použitím Leibnitzova pravidla dostaneme obdobný výraz

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(f^{(i+1)}(x_0)g^{(k-i)}(x_0) + f^{(i)}(x_0)g^{(k-i+1)}(x_0) \right).$$

V této nové sumě je součet řádů derivací u součinů v jednotlivých sčítancích $k+1$ a koeficienty u $f^{(j)}(x_0)g^{(k+1-j)}(x_0)$ jsou součty binomických koeficientů $\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} = \binom{k+1}{j}$. □

6.2. Násobné kořeny a inverze polynomů. Derivace polynomů jsme spočítali již v odstavci 5.6 a je vidět, že jde o hladké funkce. Derivace je v tomto případě vlastně prosté algebraické zobrazení a podívejme se, jak se nám derivace bude hodit pro diskusi násobných kořenů polynomů.

Nejprve zformulujeme *základní větu algebry*, kterou však patrně dodám skoro úplný důkaz o pár kapitol později v algebře nebudeme nyní dokazovat:

Věta. Každý nenulový komplexní polynom $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stupně alespoň jedna má kořen.

Nutně tedy polynom stupně $k > 0$ má právě k komplexních kořenů včetně násobností a můžeme jej vždy psát jednoznačně ve tvaru

$$f(x) = (x - a_1)^{c_1} \cdot (x - a_q)^{c_q}$$

kde a_1, \dots, a_q jsou všechny kořeny polynomu f a

$$1 \leq c_1, \dots, c_q \leq k$$

jsou jejich násobnosti (tj. přirozená čísla).

Derivací $f(x)$ jakožto funkce reálné proměnné x dostaneme

$$f'(x) = c_1(x-a_1)^{c_1-1} \cdot (x-a_2)^{c_2} + \dots + c_q(x-a_1)^{c_1} \cdot (x-a_q)^{c_q-1}$$

Jestliže je $c_1 = 1$ a kořen a_1 je reálný, bude hodnota derivace f' v bodě a_1 nenulová, protože první člen výrazu je nenulový, zatímco všechny zbývající po dosažení hodnoty $x = a_1$ zmizí. Oddobně to bude i s ostatními kořeny. Ověřili jsme tedy užitečnou vlastnost, že reálný kořen a polynomu f je vícenásobný tehdy a jen tehdy, když je zároveň kořenem jeho derivace f' . (Toto tvrzení si časem rozšíříme i na všechny komplexní kořeny.)

6.5

6.3. Význam druhé derivace. Již jsme viděli, že první derivace funkce je jejím lineárním přiblížením v okolí daného bodu a že ze znaménka nenulové derivace vyplývá, že funkce je v bodě x_0 rostoucí nebo klesající. Body, ve kterých je první derivace nulová se nazývají *kritické body* dané funkce.

Je-li x_0 kritický bod funkce f , může být chování funkce f v okolí bodu x_0 jakékoliv. Vidíme to již z chování funkce $f(x) = x^n$ v okolí nuly pro libovolné n . Pro lichá $n > 0$ bude $f(x)$ rostoucí, pro sudá n naopak bude nalevo klesající a napravo rostoucí, dosáhne tedy v bodě x_0 své minimální hodnoty mezi body z (dostatečně malého) okolí bodu $x_0 = 0$.

Tentýž pohled můžeme aplikovat na funkci f' . Jestliže totiž je druhá derivace nenulová, určuje její znaménko chování derivace první. Proto v kritickém bodě x_0 bude derivace $f'(x)$ rostoucí při kladné druhé derivaci a klesající při záporné. Jestliže je ale rostoucí, znamená to, že nutně bude záporná nalevo od kritického bodu a kladná napravo od něj. Funkce f v takovém případě je klesající nalevo od kritického bodu a rostoucí napravo od něj. To znamená, že má funkce f v bodě x_0 minimum ze všech hodnot z nějakého malého okolí bodu x_0 .

Naopak, je-li druhá derivace záporná v x_0 , je první derivace klesající, tedy záporná vlevo od x_0 a kladná vpravo. Funkce f bude tedy mít v bodě x_0 maximální hodnotu ze všech hodnot na nějakém okolí.

Funkce diferencovatelná na (a, b) a spojitá na $[a, b]$ má jistě na tomto intervalu absolutní maximum a minimum. Může ho dosáhnout pouze buď na hranici nebo v bodě s nulovou derivací, tj. v kritickém bodě. Pro diskusi extrémů nám tedy mohou stačit kritické body a druhé derivace pomůžou určit typy extrémů, pokud jsou nenulové. Pro přesnější diskusi ale potřebujeme lepší než lineární aproximace zkoumaných funkcí. Proto se nejprve budeme věnovat úvahám v tomto směru a teprve poté se vrátíme k diskusi průběhu funkcí.

6.6

$$\begin{aligned} \ln x &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \end{aligned}$$

Pro poloměr konvergence potom použijeme limitu podílu následujících koeficientů členů mocninné řady

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n+1}{n}}} = 1. \end{aligned}$$

Řada tedy konverguje pro libovolné $x \in (-1, 1)$. Pro $x = -1$ dostáváme harmonickou řadu (se znaménkem minus), pro $x = 1$ dostáváme atenující harmonickou řadu, která podle Leibnizova kritéria konverguje. Daná řada proto konverguje právě pro $x \in (-1, 1)$.

Pro rozvoj v bodě 1 dostáváme podobně vyčíslením výše uvedených derivací z 6.4

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-1)^3 - \frac{1}{4 \cdot 2^4}(x-1)^4 + \dots \\ &= \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} (x-1)^n, \end{aligned}$$

pro poloměr konvergence této řady pak dostáváme

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}}} = 1. \end{aligned}$$

První řada konverguje pro $-1 < x \leq 1$, druhá pro $-1 < x \leq 3$.

□

6.5. Rozviňte funkci

- (a) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$;
 (b) $y = e^{x^2} + x^2 e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$

do Taylorovy řady se středem v počátku.

Řešení. Pokud lze funkci vyjádřit jako součet mocninné řady (s kladným poloměrem konvergence) na jejím oboru konvergence, pak je tato řada nutně Taylorovou řadou uvažované funkce (svého součtu). To nám umožní snadno najít příslušné Taylorovy řady.

Případ (a). Víme, že je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

tj.

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-x)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Celkem máme

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1}$$

pro $x \in (-1, 1)$.

Případ (b). Podobně ze známé identity

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

plyne

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a

$$x^2 e^{-2x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Platí tudíž

$$e^{x^2} + x^2 e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} + (-2)^n x^{n+2}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Další příklady na Taylorovy polynomy a řady naleznete na straně 372.

6.6. Určete Taylorovu řadu se středem v počátku funkce

$$(a) y = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x \in (-1, 1);$$

$$(b) y = \arctg x, \quad x \in (-1, 1).$$

Řešení. Případ (a). Využijeme vzorec

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

o součtu geometrické řady. Jeho derivováním dostáváme

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

přičemž $(x^0)' = 0$, a tak je dolní index $n = 1$. Vidíme, že

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Případ (b). Derivaci funkce $y = \arctg t$ umíme vyjádřit jako

$$(\arctg t)' = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \quad t \in (-1, 1).$$

Protože pro $x \in (-1, 1)$ je

$$\int_0^x (\arctg t)' dt = \arctg x - \arctg 0 = \arctg x$$

a

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

máme již výsledek

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

6.4. Taylorův rozvoj. Jako překvapivě jednoduché využití



Rolleovy věty teď odvodíme mimořádně důležitý výsledek. Říkává se mu *Taylorův rozvoj se zbytkem*. Intuitivně se k němu můžeme dostat obrácením našich úvah kolem mocninných řad. Máme-li totiž mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

a derivujeme-li ji opakovaně, dostáváme mocninné řady (víme, že je možné takový výraz derivovat člen po členu, i když jsme to ještě nedokázali)

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

V bodě $x = a$ je tedy $S^{(k)}(a) = k!a_k$. Můžeme tedy naopak číst poslední tvrzení jako rovnici pro a_k a původní řadu přepsat jako

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^{(k)}(a)(x-a)^n.$$

Jestliže místo mocninné řady máme nějakou dostatečně hladkou funkci $f(x)$, je tedy na místě se ptát, zda ji můžeme vyjádřit jako mocninnou řadu a jak rychle budou konvergovat částečné součty (tj. přiblížení funkce f polynomy). Naše úvaha právě naznačila, že můžeme očekávat v okolí bodu a dobrou aproximaci polynomy, tzv. *Taylorovými polynomy k -tého řádu*:

$$P_k f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k.$$

Přesná odpověď vypadá podobně jako věta o střední hodnotě, jen pracujeme s vyššími stupni polynomů (tzv. *Taylorův rozvoj se zbytkem*):

Věta. *Nechť je $f(x)$ funkce k -krát diferencovatelná na intervalu (a, b) a spojitá na $[a, b]$. Pak pro každé $x \in (a, b)$ existuje číslo $c \in (a, x)$ takové, že*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \dots \\ &+ \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1} + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-a)^k \\ &= P_{k-1} f(x) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-a)^k. \end{aligned}$$

DŮKAZ. Definujme zbytek R (tj. chybu při aproximaci pro pevně zvolené x) takto



$$f(x) = P_{k-1} f(x) + R$$

tj. $R = \frac{1}{k!} r(x-a)^k$ pro vhodné číslo r (závislé na x). Nyní uvažujme funkci $F(\xi)$ definovanou

$$F(\xi) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\xi)(x-\xi)^j + \frac{1}{k!} r(x-\xi)^k.$$

Její derivace (přičemž x je pro nás konstantní parametr) je

$$F'(\xi) = f'(\xi) +$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{j!} f^{(j+1)}(\xi)(x-\xi)^j - \frac{1}{(j-1)!} f^{(j)}(\xi)(x-\xi)^{j-1} \right) \\ & - \frac{1}{(k-1)!} r(x-\xi)^{k-1} \\ & = \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(\xi)(x-\xi)^{k-1} - \frac{1}{(k-1)!} r(x-\xi)^{k-1} \\ & = \frac{1}{(k-1)!} (x-\xi)^{k-1} (f^{(k)}(\xi) - r), \end{aligned}$$

protože výrazy v sumě se postupně vzájemně ruší. Nyní si stačí všimnout, že $F(a) = F(x) = f(x)$ (připomeňme, že x je libovolně zvolená ale pevná hodnota v intervalu (a, b)). Proto podle Rolleovy věty existuje číslo c , $a < c < x$, takové, že $F'(c) = 0$. To ale je právě požadovaný vztah. \square

6.6a

6.5. Odhady pro rozvoje se zbytkem. Obzvlášť jednoduchý je Taylorův rozvoj libovolného polynomu

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Protože je $(n+1)$ -ní derivace f identicky nulová, má Taylorův polynom stupně n nulový zbytek a tedy je pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

a všechny derivace snadno vyčíslíme (např. poslední výraz je vždy tvaru $a_n(x-x_0)^n$).

Tento výsledek je velmi speciálním odhadem chyby v Taylorově rozvoji se zbytkem. Víme totiž předem, že zbytek je odhadnutelný pomocí velikosti derivace a ta je u polynomu od určitého řádu identicky nulová.

I obecněji vede odhad velikost k -té derivace na nějakém intervalu k odhadu chyby na témže intervalu. Speciálním případem je také věta o střední hodnotě coby aproximace Taylorovým rozvojem řádu nula, viz (5.9).

Dobrym příkladem pro libovolný řád jsou třeba goniometrické funkce. Iterováním derivace funkce $\sin x$ dostaneme vždy buď sinus nebo cosinus s nějakým znaménkem, ale v absolutní hodnotě budou hodnoty vždy nejvýše jedna. Dostáváme tedy přímý odhad rychlosti konvergence mocninné řady

$$|\sin x - (P_k \sin)(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Vidíme tedy, že pro x výrazně menší než k bude chyba malá, pro x srovnatelné s k nebo větší ale bude obrovská.

6.7. Najděte Taylorovu řadu se středem $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \int_0^x u \cos u^2 du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Z vyjádření

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}, \quad t \in \mathbb{R}$$

plyne

$$u \cos u^2 = u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (u^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^{4n+1}, \quad u \in \mathbb{R}$$

a následně (pro $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x u \cos u^2 du = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^{4n+1} \right) du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x u^{4n+1} du \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! (4n+2)} x^{4n+2}. \end{aligned}$$

6.8. Na intervalu konvergence $(-1, 1)$ stanovte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(x^{n+1})' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1} \right)' = \\ & \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} x^2 \right)' = \left[x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \right]' = \left[x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \right]' = \\ & \left[x^2 \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' \right]' = \left[x^2 \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right)' \right]' = \left[x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \right]' = \\ & \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. \square

6.9. Pro $x \in (-1, 1)$ sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

Řešení. Nejprve upozorněme, že symbolem pro neurčitý integrál budeme označovat jednu konkrétní primitivní funkci (při zachování proměnné), kterou je vhodné chápat jako tzv. funkci horní meze, přičemž dolní mez je nula. Užitím věty o integraci mocninné řady pro $x \in (-1, 1)$ obdržíme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} \int x^n dx \right) = \\ & \int \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right) dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1} \int x^{n-1} dx) dx = \end{aligned}$$

$$\int \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} dx \right) dx = \int \left(\int 1 - x + x^2 - x^3 + \dots dx \right) dx \quad \boxed{6.7}$$

$$\int \left(\int \frac{1}{1+x} dx \right) dx = \int \ln(1+x) + C_1 dx.$$

Jelikož

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right) dx = \int \ln(1+x) + C_1 dx,$$

ze spojitosti uvažovaných funkcí víme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x) + C_1, \quad x \in (-1, 1).$$

Volba $x = 0$ potom dává $0 = \ln 1 + C_1$, tj. $C_1 = 0$. Dále je

$$\int \ln(1+x) dx = \left| \text{per partes} \right| =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \quad u' = \frac{1}{1+x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x} dx =$$

$$x \ln(1+x) - \int 1 - \frac{1}{1+x} dx = x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) + C_2 =$$

$$(x+1) \ln(x+1) - x + C_2.$$

Protože zadaná řada konverguje v bodě $x = 0$ se součtem 0, analogicky jako pro C_1 z

$$0 = 1 \cdot \ln 1 - 0 + C_2$$

vyplývá, že $C_2 = 0$. Celkem tedy získáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1} = (x+1) \ln(x+1) - x, \quad x \in (-1, 1).$$

□

6.10. Napište mocninnou řadu se středem v počátku, jejíž součet je na intervalu $(-3, 3)$ funkce

$$\frac{1}{x^2 - x - 12}.$$

Řešení. Neboť

$$\frac{1}{x^2 - x - 12} = \frac{1}{(x-4)(x+3)} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+3} \right)$$

a

$$\frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{x}{4}} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2} + \dots + \frac{x^n}{4^n} + \dots \right),$$

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \dots + \frac{(-x)^n}{3^n} + \dots \right),$$

dostáváme

$$\frac{1}{x^2 - x - 12} = -\frac{1}{28} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n} - \frac{1}{21} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{21 \cdot 3^n} - \frac{1}{28 \cdot 4^n} \right) x^n.$$

□

6.11. Rozviňte do mocninné řady funkci $\cos^2(x)$ (tj. určete Taylorův rozvoj funkce) v bodě 0 a určete pro která reálná čísla tato řada konverguje.

6.6. Analytické a hladké funkce. Je-li f v bodě a hladká, pak můžeme napsat formálně mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Taylorova věta nám říká, že pokud tato mocninná řada má nenulový poloměr konvergence, pak je $S(x) = f(x)$ na příslušném intervalu. Takovým funkcím říkáme *analytické funkce* v bodě a . Funkce je analytická na intervalu, je-li analytická v každém jeho bodě.

Ne všechny hladké funkce jsou ale analytické. Ve skutečnosti lze dokázat, že pro každou posloupnost čísel a_n umíme najít hladkou funkci, jejíž derivace řádů k budou tato čísla a_k .¹

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si (jak se později uvidí velice užitečnou) funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová. Uvažme funkci definovanou vztahem



$$f(x) = e^{-1/x^2}.$$

Evidentně jde o dobře definovanou hladkou funkci ve všech bodech $x \neq 0$. V bodě $x = 0$ však existuje limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Můžeme proto dodefinovat $f(0) = 0$ a získáváme spojitou funkci.

Přímým výpočtem s použitím L'Hospitalova pravidla vyjádříme derivaci

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{e^{1/x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{1/x^2}} = 0.$$

Derivací f v obecném bodě dostaneme $f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot 2x^{-3}$ a libovolnou konečněkrát opakovanou derivací funkce $f(x)$ dostaneme součet konečně mnoha členů tvaru $C \cdot f(x) \cdot x^{-k}$, kde C je nějaké celé číslo a k je přirozené číslo. Každý výraz $x^{-k} e^{-1/x^2} = x^{-k} / e^{1/x^2}$ je pro $x \rightarrow 0$ výrazem typu ∞/∞ , na který můžeme opakovaně použít L'Hospitalovo pravidlo. Zjevně po několika derivacích čitatele i jmenovatele bude ve jmenovateli stále stejný výraz, zatímco v čitateli již bude mocnina nezáporná. Celý výraz tedy nutně má v nule limitu nulovou, stejně jako jsme počítali v případě první derivace výše. Protože totéž bude platit pro konečný součet takových výrazů, bude mít nulovou hodnotu v limitě v nule i každá derivace $f^{(k)}(x)$.

Jestliže nyní dodefinujeme hodnoty všech derivací naší funkce v nule rovnicí

$$f^{(k)}(0) = 0,$$

a zkusíme derivovat funkci $f^{(k)}$ v nule, dostaneme opět konečný součet výrazů jako výše a proto ukazuje náš předchozí

¹Jde o speciální případ tzv. Whitneyho věty, viz. DOPLNIT CITACI A INFO.

výpočet s pomocí L'Hospitalova pravidla, že skutečně derivace této funkce bude i v nule existovat a bude skutečně rovna opět nule. Získali jsme tedy hladkou funkci na celém \mathbb{R} . Je vidět, že skutečně jde o nenulovou funkci všude mimo $x = 0$, všechny její derivace v tomto bodě jsou ale nulové. Samozřejmě to tedy není analytická funkce v bodě $x_0 = 0$.

6.7a

6.7. Další příklady neanalytických hladkých funkcí. Snadno můžeme naši funkci $f(x)$ z předchozího odstavce modifikovat takto:

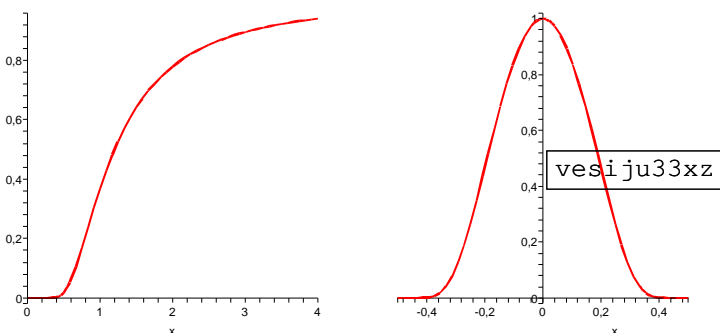
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{je-li } x > 0 \end{cases}$$

Opět jde o hladkou funkci na celém \mathbb{R} . Další úpravou můžeme získat funkci nenulovou ve všech vnitřních bodech intervalu $[-a, a]$, $a > 0$ a nulovou jinde:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2} + \frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

vesdwkxccc156

Tato funkce je opět hladká na celém \mathbb{R} . Poslední dvě funkce jsou na obrázcích, vpravo je použit parametr $a = 1$.



Nakonec ještě ukážeme, jak lze dostat hladké analogie Heavisideových funkcí. Pro dvě pevně zvolená reálná čísla $a < b$ definujeme funkci $f(x)$ s použitím výše definované funkce g takto:

$$f(x) = \frac{g(x-a)}{g(x-a) + g(b-x)}.$$

Zjevně je pro každé $x \in \mathbb{R}$ jmenovatel zlomku kladný (pro každý z intervalů určených čísly a a b je totiž alespoň jeden ze sčítanců jmenovatele nenulový a tedy je celý jmenovatel kladný). Dostáváme z našeho definičního vztahu proto hladkou funkci $f(x)$ na celém \mathbb{R} . Při $x \leq a$ je přitom jmenovatel zlomku přímo dle definice funkce g nulový, při $x \geq b$ je čitatel i jmenovatel stejný. Na dalších dvou obrázcích jsou právě funkce $f(x)$ a to s parametry $a = 1 - \alpha$, $b = 1 + \alpha$, kde nalevo je $\alpha = 0.8$ a napravo $\alpha = 0.4$.

6.12. Rozviňte do mocninné řady funkci $\sin^2(x)$ v bodě 0 a určete pro která reálná čísla tato řada konverguje.

6.13. Rozviňte do mocninné řady funkci $\ln(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$ v bodě 0 a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje.

Nyní několik „klasických“ příkladů, ve kterých budeme vyšetřovat průběh různých funkcí.

6.14. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|^3 + 1}.$$

Řešení. Definičním oborem i oborem spojitosti je celá reálná osa (f tedy nemá body nespojitosti). Postačuje např. uvážit, že funkce $y = \sqrt[3]{x}$ je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ (na rozdíl od odmocnin o sudém základě definovaných pouze na nezáporné poloose). Ihned je také vidět, že $f(x) \geq 1$ a $f(-x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. funkce f je kladná a sudá. Bod $[0, 1]$ jako jediný průsečík grafu f s osami proto dostaneme dosazením $x = 0$. Limitní chování funkce má smysl uvažovat pouze v $\pm\infty$ (neexistují body nespojitosti), kde lehce určíme

$$(6.1) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{|x|^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{|x|^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty.$$

Nyní přistoupíme ke zkoumání průběhu funkce pomocí jejích derivací. Pro $x > 0$ je

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}},$$

a tedy

$$(6.2) \quad f'(x) = \frac{1}{3} (x^3 + 1)^{-\frac{2}{3}} 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} > 0, \quad x > 0.$$

Odtud vyplývá, že funkce f je rostoucí na intervalu $(0, +\infty)$. Vzhledem ke své spojitosti v počátku je však nutně f rostoucí na $[0, +\infty)$. Neboť se jedná o sudou funkci, víme dále, že na intervalu $(-\infty, 0]$ klesá. Má tak jediné lokální minimum v bodě $x_0 = 0$, které je současně (ostrým) minimem globálním. Protože nekonstantní spojitá funkce zobrazuje interval na interval, je oborem hodnot f právě $[1, +\infty)$ (uvažte $f(x_0) = 1$ a (6.1)). Všimněme si, že díky sudosti funkce jsme nemuseli počítat derivaci f' na záporné poloose, kterou lze však snadno určit náhradou $|x|^3 = (-x)^3 = -x^3$ se ziskem

$$f'(x) = \frac{1}{3} (-x^3 + 1)^{-\frac{2}{3}} (-3x^2) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(-x^3+1)^2}} < 0, \quad x < 0.$$

Při výpočtu $f'(0)$ můžeme vyjít přímo z definice nebo pomocí limit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(-x^3+1)^2}}$$

stanovit jednostranné derivace a následně $f'(0) = 0$. Ve skutečnosti jsme nemuseli počítat první derivaci ani na kladné poloose. K tomu, abychom obdrželi, že f roste na $(0, +\infty)$, si stačilo uvědomit, že

funkce $y = \sqrt[3]{x}$ a $y = x^3 + 1$ jsou rostoucí na \mathbb{R} a že kompozice rostoucích funkcí je funkce rostoucí.

Snadno pro $x > 0$ však z (6.2) vypočítáme druhou derivaci

$$f''(x) = \frac{2x\sqrt[3]{(x^3+1)^2} - \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{(x^3+1)^{-1}}(3x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+1)^4}},$$

tj. po úpravě máme

$$(6.3) \quad f''(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^5}} > 0, \quad x > 0.$$

Podobně můžeme spočítat

$$f''(x) = -\frac{2x\sqrt[3]{(-x^3+1)^2} - \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{(-x^3+1)^{-1}}(-3x^2)}{\sqrt[3]{(-x^3+1)^4}} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(-x^3+1)^5}} > 0, \quad x < 0$$

a poté $f''(0) = 0$ zlimitněním

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^5}} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{2x}{\sqrt[3]{(-x^3+1)^5}}.$$

Podle nerovnosti (6.3) je f ryze konvexní na intervalu $(0, +\infty)$. Také dostáváme ryzi konvexnost funkce f na $(-\infty, 0)$. K tomuto závěru ovšem opět nebylo potřeba druhou derivaci pro $x < 0$ počítat: stačilo využít sudosti zadané funkce. Celkem jsme pak obdrželi, že f je konvexní na celém svém definičním oboru (nemá inflexní body).

K vykreslení grafu funkce ještě potřebujeme nalézt asymptoty (vyčíslení funkce v jistých bodech přenecháváme čtenáři). Neboť je funkce f spojitá na \mathbb{R} , asymptoty bez směrnice mít nemůže. **Přímka** $y = ax + b$ je pak asymptotou se směrnici pro $x \rightarrow \infty$ tehdy a jenom tehdy, když existují (jako vlastní) obě limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogické tvrzení platí pro $x \rightarrow -\infty$. Z limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\sqrt[3]{x^3+1} - x \right] \frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^2} = 0$$

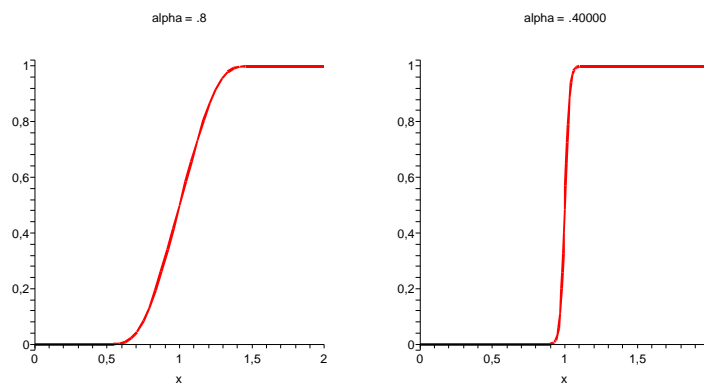
tak již plyne, že přímka $y = x$ je asymptotou v $+\infty$. Když znovu uvážíme, že funkce f je sudá, bezprostředně obdržíme přímku $y = -x$ jako asymptotu v $-\infty$. \square

6.15. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

Řešení. Do definičního oboru náleží všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je $\cos 2x \neq 0$. Rovnice $\cos 2x = 0$ je splněna právě pro

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Snadno nyní také vytvoříme hladkou obdobu charakteristické funkce intervalu $[c, d]$. Označme si jako $f_\epsilon(x)$ výše uvedenou funkci $f(x)$ s parametry $a = -\epsilon$, $b = +\epsilon$. Nyní pro interval (c, d) , s délkou $d - c > 2\epsilon$ definujeme funkci $h_\epsilon(x) = f_\epsilon(x - c) \cdot f_\epsilon(d - x)$. Tato funkce je identicky nulová na intervalech $(-\infty, c - \epsilon)$ a $(d + \epsilon, \infty)$ a je identicky rovna jedné na intervalu $(c + \epsilon, d - \epsilon)$, přičemž je všude hladká a lokálně je buď konstantní nebo monotóní. Čím menší je $\epsilon > 0$, tím rychleji naše funkce přeskočí z nuly na jedničku kolem začátku intervalu nebo zpět na konci intervalu.

Vidíme tedy, že hladké funkce jsou velice „plastické“ — z lokálního chování kolem jednoho bodu nemůžeme říci vůbec nic o globálním chování takové funkce. Naopak, analytické funkce jsou zcela určené dokonce jen derivacemi v jediném bodě. Zejména jsou tedy bezesbýtku určeny svým chováním na libovolně malém okolí jediného bodu ze svého definičního oboru. Jsou tedy v tomto smyslu velice „rigidní“.

6.8. Lokální chování funkcí. Viděli jsme, že znaménko první derivace určuje u každé diferencovatelné funkce, zda roste nebo klesá na nějakém okolí daného bodu. Pokud je ale derivace nulová, sama o sobě mnoho o chování funkce neříká.



Už jsme se ale setkali s významem druhé derivace při popisu kritických bodů. Teď zobecníme diskusi kritických bodů pro všechny řády. Začneme diskusí lokálních extrémů funkcí, tj. hodnot, které jsou ostře větší nebo ostře menší než všechny z nějakého okolí daného bodu.

Budeme v dalším uvažovat funkce s dostatečným počtem spojitých derivací, aniž bychom tento předpoklad přímo uváděli.

Řekneme, že bod a v definičním oboru funkce f je *kritický bod řádu k* , jestliže platí

$$f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0, \quad f^{(k+1)}(a) \neq 0.$$

Předpokládejme, že $f^{(k+1)}(a) > 0$. Pak je tato spojitá derivace kladná i na jistém okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a . Taylorův rozvoj se zbytkem nám v takovém případě dává pro všechna $x \in \mathcal{O}(a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) (x - a)^{k+1}.$$

Je proto změna hodnot $f(x)$ v okolí bodu a dána chováním funkce $(x - a)^{k+1}$. Je-li přitom $k + 1$ sudé číslo, jsou

nutně hodnoty $f(x)$ v takovém okolí větší než hodnota $f(a)$ a zjevně je proto bod a bodem lokálního minima. Pokud je ale k sudé číslo, pak jsou hodnoty vlevo menší a vpravo větší než než $f(a)$, extrém tedy ani lokálně nenastává. Zato si můžeme všimnout, že graf funkce $f(x)$ protíná svoji tečnu $y = f(a)$ bodem $[a, f(a)]$.

Naopak, je-li $f^{(k+1)}(a) < 0$, pak ze stejného důvodu jde o lokální maximum při lichém k a extrém opět nenastává pro k sudé.

6.8a

6.9. Konvexní a konkávní funkce. Říkáme, že funkce f je v bodě a *konkávní*, jestliže se její graf nachází v jistém okolí celý pod tečnou v bodě $[a, f(a)]$, tj.



$$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a).$$

Říkáme, že funkce f je *konvexní* v bodě a , jestliže naopak je její graf nad tečnou v bodě a , tj.

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funkce je konvexní nebo konkávní na intervalu, jestliže má tuto vlastnost v každém jeho bodě.

Z Taylorova rozvoje druhého řádu se zbytkem dostáváme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(c)(x - a)^2.$$

Proto je zjevně funkce konvexní, kdykoliv je $f''(a) > 0$, a je konkávní, kdykoliv $f''(a) < 0$. Pokud je druhá derivace nulová, můžeme použít derivace vyšších řádů. Stejný závěr ovšem umíme učinit pouze, pokud první další nenulová derivace po první derivaci bude sudého řádu. Pokud bude naopak první nenulová řádu lichého, bude zjevně body grafu funkce na různých stranách nějakého malého okolí zkoumaného bodu na opačných stranách tečny v tomto bodě.

6.8b

6.10. Inflexní body. Bod a nazýváme *inflexní bod* funkce f , jestliže graf funkce f přechází z jedné strany tečny na druhou.

Napišme si Taylorův rozvoj třetího řádu se zbytkem:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{6}f'''(c)(x - a)^3.$$

Je-li a nulový bod druhé derivace takový, že $f'''(a) \neq 0$, pak je třetí derivace nenulová i na nějakém okolí a jde proto zjevně o inflexní bod. Znaménko třetí derivace nám v takovém případě určuje, zda graf funkce přechází tečnu zdola nahoru nebo naopak.

Pokud je bod a navíc izolovaným nulovým bodem druhé derivace a zároveň inflexním bodem, pak zjevně je na nějakém malém okolí bodu a funkce na jedné straně konkávní a na druhé konvexní. Inflexní body tedy můžeme také vnímat jako body přechodu mezi konkávním a konvexním chováním grafu funkce.

Jako definiční obor tak obdržíme množinu

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Zřejmě je

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\cos(-2x)} = \frac{\cos x}{\cos 2x} = f(x)$$

pro všechna x z definičního oboru, a tudíž je f s definičním oborem symetrickým kolem počátku sudou funkcí, což vyplynulo ze sudosti funkce $y = \cos x$. Když dále uvážíme, že kosinus je periodický s periodou 2π (tj. $y = \cos 2x$ má periodu π), dostaneme, že postačuje uvažovat funkci f pro

$$x \in \mathcal{D} := [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right],$$

neboť průběh zadané funkce na celém jejím definičním oboru lze odvodit s použitím toho, že je sudá a periodická s periodou 2π .

Zabývejme se proto pouze body nespojitosti $x_1 = \pi/4$ a $x_2 = 3\pi/4$ a stanovme pro ně příslušné jednostranné limity

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos 2x} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos 2x} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos 2x} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos 2x} &= -\infty. \end{aligned}$$

Přihlédneme-li ke spojitosti f na intervalu $(\pi/4, 3\pi/4)$, vidíme, že f na tomto intervalu nabývá všech reálných hodnot. Oborem hodnot f je tedy celé \mathbb{R} . Rovněž jsme zjistili, že body nespojitosti jsou tzv. druhého druhu, kdy aspoň jedna jednostranná limita je nevlastní (příp. neexistuje). Tím jsme současně dokázali, že přímky $x = \pi/4$ a $x = 3\pi/4$ jsou asymptotami bez směrnice. Kdybychom předchozí výsledky formulovali bez omezení se na interval $[0, \pi]$, tak můžeme např. říci, že ve všech bodech

$$\hat{x}_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

má f nespojitost druhého druhu a že každá přímka

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

je asymptotou bez směrnice. Současně z periodičnosti funkce f vyplývá, že jiné asymptoty neexistují. Zvláště nemůže mít žádné asymptoty se směrnicí, ani nemohou existovat (jako nevlastní) limity $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Ještě určíme průsečíky s osami. Průsečík $[0, 1]$ s osou y nalezneme vyčíslením $f(0) = 1$. Při hledání průsečíků s osou x uvažujeme rovnici $\cos x = 0$, $x \in \mathcal{D}$ s jediným řešením $x = \pi/2$. Snadno dále získáme intervaly $[0, \pi/4)$, $(\pi/2, 3\pi/4)$, kde je funkce f kladná, a intervaly $(\pi/4, \pi/2)$, $(3\pi/4, \pi]$, kde je záporná.

Nyní přistoupíme k výpočtu derivace

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x \cos 2x - 2 \cos x (-\sin 2x)}{\cos^2 2x} = \\ &= \frac{-\sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \cos x (2 \sin x \cos x)}{\cos^2 2x} = \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x}{\cos^2 2x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cos^2 x) \sin x}{\cos^2 2x} = \frac{(2 \cos^2 x + 1) \sin x}{\cos^2 2x}, \quad \boxed{68c}$$

$$\mathcal{D}.$$

Body, ve kterých je $f'(x) = 0$, jsou očividně řešením rovnice $\sin x = 0$, $x \in \mathcal{D}$, tj. derivace je nulová v bodech $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$. Z nerovností

$$2 \cos^2 x + 1 \geq \cos^2 2x > 0, \quad \sin x > 0, \quad x \in \mathcal{D} \cap (0, \pi)$$

plyne, že v každém vnitřním bodě množiny \mathcal{D} funkce f roste, a tudíž f roste na každém podintervalu \mathcal{D} . Sudost f potom implikuje, že klesá v každém bodě $x \in (-\pi, 0)$, $x \neq -3\pi/4$, $x \neq -\pi/4$. Funkce má proto ostré lokální extrémy právě v bodech

$$\tilde{x}_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vzhledem k periodičnosti f tyto extrémy jednoznačně popíšeme pozorováním, že pro $x_3 = \tilde{x}_0 = 0$ dostáváme lokální minimum (zopakujme funkční hodnotu $f(0) = 1$) a pro $x_4 = \tilde{x}_1 = \pi$ lokální maximum s funkční hodnotou $f(\pi) = -1$.

Spočítejme druhou derivaci

$$f''(x) = \frac{[4 \cos x (-\sin x) \sin x + (2 \cos^2 x + 1) \cos x] \cos^2 2x - 4 \cos 2x (-\sin 2x) (2 \cos^2 x + 1) \sin x}{\cos^4 2x} =$$

$$\frac{[-4 \cos x \sin^2 x + 2 \cos^3 x + \cos x] (\cos^2 x - \sin^2 x) - 4(-2 \sin x \cos x) (2 \cos^2 x + 1) \sin x}{\cos^3 2x} =$$

$$\frac{-6 \cos^3 x \sin^2 x + 2 \cos^5 x + \cos^3 x + 4 \cos x \sin^4 x - \cos x \sin^2 x + 16 \sin^2 x \cos^3 x + 8 \sin^2 x \cos x}{\cos^3 2x} =$$

$$\frac{[10 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x + \cos^2 x + 4 \sin^4 x + 7 \sin^2 x] \cos x}{\cos^3 2x}, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Poznamenejme, že jednoduchými úpravami lze také vyjádřit

$$f''(x) = \frac{(3 + 4 \cos^2 x \sin^2 x + 8 \sin^2 x) \cos x}{\cos^3 2x}, \quad x \in \mathcal{D}$$

nebo

$$f''(x) = \frac{(11 - 4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x) \cos x}{\cos^3 2x}, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Protože

$$10 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x + \cos^2 x + 4 \sin^4 x + 7 \sin^2 x > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

resp.

$$3 + 4 \cos^2 x \sin^2 x + 8 \sin^2 x = 11 - 4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x \geq 3, \quad x \in \mathbb{R},$$

je $f''(x) = 0$ pro jisté $x \in \mathcal{D}$ tehdy a jen tehdy, když $\cos x = 0$. Tomu ale vyhovuje pouze $x_5 = \pi/2 \in \mathcal{D}$. Je vidět, že v tomto bodě mění f'' znaménko, tj. jedná se o inflexní bod. Jiný inflexní bod neexistuje (druhá derivace f'' je spojitá na \mathcal{D}). K dalším změnám znaménka f'' dochází v nulových bodech jmenovatele, které jsme již dříve určili jako body nespojitosti $x_1 = \pi/4$ a $x_2 = 3\pi/4$. Znaménko se tedy mění právě v bodech x_1, x_2, x_5 , a tak z nerovnosti

$$f''(x) > 0 \quad \text{pro} \quad x \rightarrow 0^+$$

vyplývá, že f je konvexní na intervalu $[0, \pi/4)$, konkávní na $(\pi/4, \pi/2]$, konvexní na $[\pi/2, 3\pi/4)$ a konkávní na $(3\pi/4, \pi]$.

6.11. Asymptoty grafu funkce. Poslední dobrou pomůckou pro náčrtek grafu funkce je zjištění *asymptoty*, tj. přímek, ke kterým se blíží hodnoty funkce f . Asymptotou v nevlastním bodě ∞ je proto taková přímka $y = ax + b$, pro kterou je



$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Pokud asymptota existuje, platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

a tedy existuje i limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Pokud ovšem existují poslední dvě limity, existuje i limita z definice asymptoty, jde proto i o podmínky dostatečné. Podobně se definuje a počítá asymptota i v nevlastním bodě $-\infty$.

Tímto způsobem dohledáme všechny potenciální přímky splňující vlastnosti asymptot s konečnou reálnou směrnici. Zbývají nám případné přímky kolmé na osu x : Asymptoty v bodech $a \in \mathbb{R}$ jsou přímky $x = a$ takové, že funkce f má v bodě a alespoň jednu nekonečnou jednostrannou limitu.

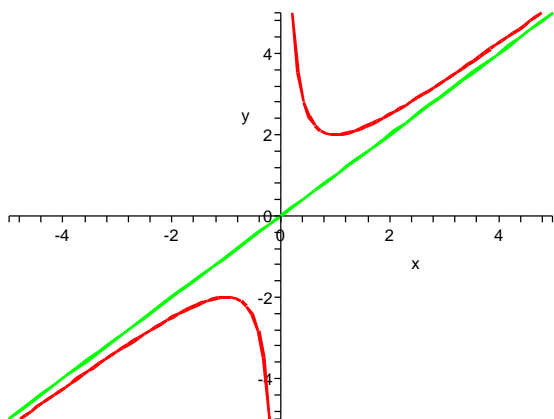
Např. racionální funkce lomené mají v nulových bodech jmenovatele, které nejsou nulovými body čitatele, asymptotu.

Spočtěme aspoň jeden jednoduchý příklad: Funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ má za asymptoty přímky $y = x$ a $x = 0$. Skutečně, jednostranné limity zprava a zleva v nule jsou zjevně $\pm\infty$, zatímco limita $f(x)/x = 1 + 1/x^2$ je samozřejmě v nevlastních bodech právě ± 1 , zatímco limita $f(x) - x = 1/x$ je v nevlastních bodech nulová.

Derivací obdržíme

$$f'(x) = 1 - x^{-2}, \quad f''(x) = 2x^{-3}.$$

Funkce $f'(x)$ má dva nulové body ± 1 . V bodě $x = 1$ má funkce lokální minimum, v bodě $x = -1$ lokální maximum. Druhá derivace nemá nulové body v celém definičním oboru $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, f tedy nemá naše funkce žádný inflexní bod.



6.8d

6.12. Diferenciál funkce. Při praktickém používání diferenciálního počtu často pracujeme se závislostmi mezi různými veličinami, řekněme y a x , a není dána pevně volba závislé a nezávislé proměnné. Explicitní vztah $y = f(x)$ s nějakou funkcí f je tedy jen jednou z možností. Derivování pak vyjadřuje, že okamžitá změna $y = f(x)$ je úměrná okamžité změně x a to s úměrou $f'(x) = \frac{df}{dx}$. Tento vztah se často píše jako

$$df = \frac{df}{dx}(x)dx,$$

kde $df(x)$ interpretujeme jako lineární zobrazení přírůstků dané $df(x)(\Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x$, zatímco $dx(x)(\Delta x) = \Delta x$.

Hovoříme o *diferenciálu funkce* f pokud platí aproximační vlastnost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - df(x)(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Z Taylorovy věty tedy vyplývá, že funkce s ohraničenou derivací f' má diferenciál df . To zejména nastane v bodě x , když v něm první derivace existuje a je spojitá.

Pokud je veličina x vyjádřena pomocí další veličiny t , tj. $x = g(t)$, a to opět funkcí se spojitou první derivací, pak pravidlo o derivaci složené funkce říká, že i složená funkce $f \circ g$ má opět diferenciál

$$df = \frac{df}{dx}(x) \frac{dx}{dt}(t)dt.$$

Můžeme proto vnímat df jako lineární přiblížení dané veličiny v závislosti na přírůstcích závislé proměnné, ať už je tato závislost dána jakkoliv.

6.8e

6.13. Křivost grafu funkce. Abychom se pocvičili v základních pravidlech pro derivování složených funkcí apod., budeme graf hladké funkce $f(x)$ teď chvíli diskutovat jako zvláštní případ parametrizované křivky v rovině. Můžeme si ji představit jako pohyb v rovině parametrizovaný pomocí nezávislé proměnné x . Pro libovolný bod x z definičního oboru naší



Konvexnost a konkávnost funkce f na jiných podintervalech je dána její periodičností a následujícím jednoduchým pozorováním. Je-li funkce sudá a konvexní na intervalu (a, b) , kde $0 \leq a < b$, potom je konvexní rovněž na $(-b, -a)$.

Zbývá jen vyčíslit derivaci (k odhadu rychlosti růstu funkce) v inflexním bodě se ziskem $f'(\pi/2) = 1$. S pomocí všech předchozích výsledků lze již lehce sestavit graf funkce f . \square

6.16. Vyšetřete průběh funkce

$$\frac{x}{\ln(x)},$$

a načrtněte její graf.

Řešení.

- i) Nejprve určíme definiční obor funkce: $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
- ii) Nalezneme intervaly monotónnosti funkce: nejprve nalezneme nulové body derivace:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0$$

Tato rovnice má kořen e . Dále vidíme, že $f'(x)$ je na intervalu $(0, 1)$ i $(1, e)$ záporná, tedy je $f(x)$ na intervalu $(0, 1)$ i na $(1, e)$ klesající, dále je $f'(x)$ na intervalu (e, ∞) kladná a tedy $f(x)$ rostoucí. Má tedy funkce f jediný extrém v bodě e a to minimum. (také bychom o tom mohli rozhodnout pomocí znaménka druhé derivace funkce f v bodě e , je totiž $f^{(2)}(e) > 0$)

- iii) Určíme inflexní body:

$$f^{(2)}(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x \ln^3(x)} = 0$$

Tato rovnice má kořen e^2 , který musí být inflexním bodem (extrém to již být nemůže vzhledem k předchozímu bodu).

- iv) Asymptoty. Funkce má asymptotu přímku $x = 1$. Dále hledáme asymptoty s konečnou směrnici k :

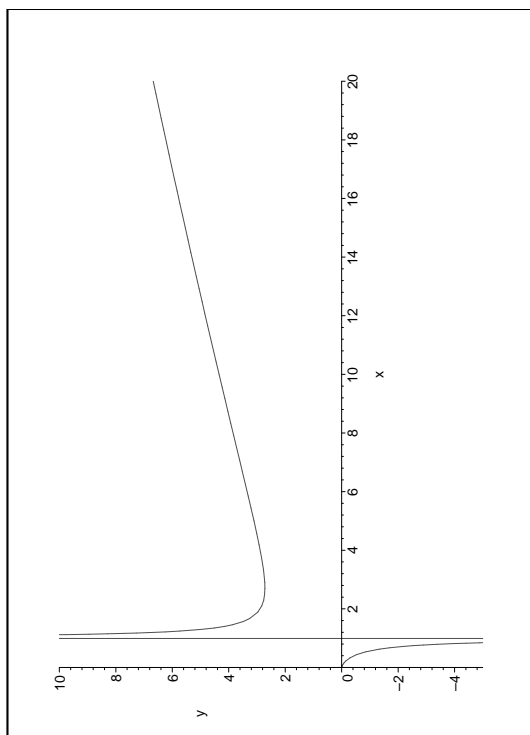
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0.$$

Pokud asymptota existuje, má tedy směrnici 0. Pokračujeme tedy ve výpočtu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x)} - 0 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty,$$

a protože limita není konečná, asymptota s konečnou směrnici neexistuje.

Průběh funkce:



Ukažme si ještě některé praktické příklady na užití diferenciálního počtu. Nejpve však zmiňme Jensenovu nerovnost, která hovoří o konvexních, resp. konkávních funkcích a kterou dále využijeme.

6.17. Jensenova nerovnost. Pro ostře konvexní funkci f na intervalu I a pro libovolné body $x_1, \dots, x_n \in I$ a reálná čísla $c_1, \dots, c_n > 0$ taková, že $c_1 + \dots + c_n = 1$, platí

$$f\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

přičemž rovnost nastane, právě když je $x_1 = \dots = x_n$.

Řešení. Důkaz lze nalézt např. v ??

Poznámka. Jensenovu nerovnost lze sformulovat i více intuitivně: těžiště hmotných bodů umístěných na grafu ostře konvexní funkce leží nad tímto grafem.

6.18. Dokažte, že mezi všemi (konvexními) n -úhelníky vepsanými do kružnice má největší obsah právě pravidelný n -úhelník (pro libovolné $n \geq 3$).

Řešení. Očividně stačí uvažovat n -úhelníky, uvnitř kterých leží střed kružnice. Každý takový n -úhelník vepsaný do dané kružnice o poloměru r rozdělíme podle obrázku na n trojúhelníků s obsahy S_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Vzhledem k tomu, že

$$\sin \frac{\varphi_i}{2} = \frac{x_i}{r}, \quad \cos \frac{\varphi_i}{2} = \frac{h_i}{r}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

platí

funkce můžeme okamžitě výpočtem první derivace vidět vektor $(1, f'(x)) \in \mathbb{R}^2$, který představuje okamžitou rychlost takového pohybu. Tečna bodem $[x, f(x)]$ parametrizovaná pomocí tohoto směrového vektoru pak představuje lineární přiblížení křivky.

Viděli jsme už také, že v případě, že $f''(x) = 0$, přechází graf naší funkce přes svoji tečnu, tzn. že tečna je i nejlepším přiblížením křivky v bodě x i do druhého řádu. To zpravidla popisujeme tvrzením, že má graf funkce f v bodě x nulovou křivost. Tak jak u první derivace nenulové hodnoty vyjadřovaly rychlost růstu (ať už s jakýmkoliv znaménkem), stejně asi intuitivně očekáváme, že druhá derivace bude popisovat míru zakřivení grafu. Zatím jsme jen viděli, že je graf funkce nad svojí tečnou pro kladnou hodnotu a pod tečnou v případě opačném.

Tečnu grafu v pevném bodě $P = [x, f(x)]$ jsme dostali pomocí limity sečen, tj. přímkou procházejícími body P a $Q = [x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$. Chceme-li přiblížit druhou derivaci, budeme body P a $Q \neq P$ prokládat kružnicí C_Q , jejíž střed je na průsečíku kolmic na tečnu, vztyčených v bodech P a Q . Z obrázku je patrné, že jestliže tečna v pevném bodě P svírá s osou x úhel α a tečna v Q úhel $\alpha + \Delta\alpha$, pak i úhel zmíněných kolmic v jejich průsečíku bude $\Delta\alpha$. Označíme-li poloměr naší kružnice ρ , pak délka oblouku kružnice mezi body P a Q bude $\rho\Delta\alpha$. Jestliže budeme limitně přibližovat bod Q k pevnému bodu P , bude se zároveň délka oblouku kružnice blížit délce s studované křivky, tj. grafu funkce $f(x)$, a kružnice limitně přejde do kružnice C_P . Dostáváme tedy pro limitní poloměr ρ kružnice C_P základní vztah

$$\rho = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Křivost grafu funkce f v bodě P definujeme jako číslo $1/\rho$. Nulová křivost tedy odpovídá nekonečnému poloměru ρ .

Pro výpočet poloměru ρ potřebujeme umět vyjádřit délku oblouku s pomocí změny úhlu α a derivaci této funkce pak vyjádřit pomocí derivací funkce f .

Všimněme si již teď, že při rostoucím úhlu θ může délka oblouku buď také růst nebo klesat, podle toho, jestli má kružnice C_Q střed nad nebo pod grafem funkce f . Znaménko ρ nám tedy odráží, zda je funkce konkávní nebo konvexní. Je třeba také pomyslet na zvláštní případ, kdy střed limitně „uteče“ do nekonečna, tj. místo kružnice limitně dostaneme přímkou a to opět tečnu.

Evidentně nemáme přímý nástroj na vyčíslení derivace $\frac{ds}{d\alpha}$. Víme však, že $\text{tg } \alpha = df/dx$ a derivováním této rovnosti podle x dostaneme (s využitím pravidla pro derivaci složených funkcí)

$$\frac{1}{(\cos \alpha)^2} \frac{d\alpha}{dx} = f''.$$

Na levé straně můžeme dosadit $\frac{1}{(\cos \alpha)^2} = 1 + (\text{tg } \alpha)^2 = 1 + (f')^2$ a proto platí také (viz pravidlo pro derivování inverzní

funkce)

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2}{f''} = \frac{1 + (f')^2}{f''}.$$

To už jsme ale skoro hotoví, protože přírůstek délky oblouku s v závislosti na proměnné x je dán vztahem

$$\frac{ds}{dx} = (1 + (f')^2)^{1/2}$$

a tedy můžeme již snadno spočítat podle pravidla pro derivování složené funkce

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{d\alpha} = \frac{(1 + (f')^2)^{3/2}}{f''}.$$

Nyní již můžeme vyčíst vztah křivosti a druhé derivace: čitatel našeho zlomku je, nezávisle na hodnotě první derivace, vždy kladný. Je roven třetí mocnině velikosti tečného vektoru ke studované křivce. Znaménko křivosti tedy je dáno jen znaménkem druhé derivace, což jen znovu potvrzuje naši úvahu o konkávních a konvexních bodech funkcí. V případě, že je druhá derivace nulová, dostaneme i křivost nulovou.

Kružnici, pomocí které jsme křivost definovali nazýváme *oskulační kružnicí*.

Zkuste si spočítat křivost jednoduchých funkcí sami a využijte oskulační kružnice při náčrtech jejich grafů. Nejjednodušší je výpočet v kritických bodech funkce f — v těch dostáváme poloměr oskulační kružnice jako reciprokou hodnotu druhé derivace opatřenou znaménkem.

6.8f

6.14. Vektorový diferenciální počet v rovině a v prostoru.

Jak jsme zmínili hned v úvodu k páté kapitole, pro naše úvahy o derivování bylo vesměs podstatné, že jsme zkoumali funkce definované na reálných číslech a že jejich hodnoty lze mezi sebou sčítat a lze je násobit reálnými čísly. Tj., potřebujeme, aby naše funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow V$ měly hodnoty ve vektorovém prostoru V . Budeme jim pro odlišení říkat *vektorové funkce*.

Nyní se budeme podrobněji věnovat zobrazením $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Hovoříme o (parametrizovaných) křivkách v rovině a v prostoru. Obdobně bychom mohli pracovat s hodnotami v \mathbb{R}^n pro jakoukoliv konečnou dimenzi n .

Pro zjednodušení budeme pracovat v pevných standardních bazích e_i v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 , takže naše křivky budou dány dvojicemi, resp. trojicemi obyčejných reálných funkcí jedné reálné proměnné. Vektorová funkce r v rovině, resp. v prostoru, je tedy dána

$$r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2, \quad r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3.$$

Derivace takové vektorové funkce je opět vektor, který přibližuje zobrazení r pomocí linerárního zobrazení přímkou do roviny či prostoru. V rovině je to tedy

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}(t)e_1 + \frac{dy}{dt}(t)e_2$$

$$S_i = x_i h_i = r^2 \sin \frac{\varphi_i}{2} \cos \frac{\varphi_i}{2} = \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Odsud plyne, že obsah celého n -úhelníku je

$$S = \sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{2} r^2 \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i.$$

Chceme tedy maximalizovat součet $\sum_{i=1}^n \sin \varphi_i$, přičemž pro hodnoty $\varphi_i \in (0, \pi)$ musí zjevně být

$$(6.4) \quad \varphi_1 + \dots + \varphi_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i = 2\pi.$$

Funkce $y = \sin x$ je ostře konkávní na intervalu $(0, \pi)$, což znamená, že funkce $y = -\sin x$ je na tomto intervalu ostře konvexní.

Podle Jensenovy nerovnosti pro $c_i = 1/n$ a $x_i = \varphi_i$ je proto

$$-\sin \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \varphi_i \right) \leq -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sin \varphi_i, \quad \text{tj.} \quad \sin \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \varphi_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sin \varphi_i.$$

Navíc víme, že rovnost nastává právě pro $\varphi_1 = \dots = \varphi_n$. Když tak vyjádříme (s pomocí (6.4))

$$S = \frac{r^2 n}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sin \varphi_i \leq \frac{r^2 n}{2} \sin \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \varphi_i \right) = \frac{r^2 n}{2} \sin \frac{2\pi}{n},$$

vidíme, že S může nabývat nejvýše hodnoty na pravé straně. Ovšem to nastane tehdy a jenom tehdy, když je $\varphi_1 = \dots = \varphi_n$ (volili jsme $x_i = \varphi_i$). Maximální obsah má tudíž pravidelný n -úhelník, neboť právě pro něj je $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 2\pi/n$. \square

6.19. Izoperimetrický podíl. Pro uzavřenou rovinnou křivku ohraničující jistý obrazec se definuje její izoperimetrický podíl jako číslo

$$IP := \frac{S}{\pi \left(\frac{o}{2\pi}\right)^2} = \frac{4\pi S}{o^2},$$

kde S udává obsah uvažovaného obrazce a o jeho obvod (tj. délku křivky). Určete IP pro pravidelný mnohoúhelník a kružnici a najděte kruhovou výseč, pro niž je IP její hranice největší.

Řešení. Nejdříve si uvědomme, že hodnota IP se nemění při změně měřítka na osách. Když se totiž rozměry obrazce a -krát zvětší (pro libovolné $a > 0$), obvod se také zvětší a -krát a obsah a^2 -krát (jde o plošnou míru). Takže IP nezávisí na velikosti obrazce, nýbrž pouze na jeho tvaru. Uvažujme proto pravidelný n -úhelník vepsaný do jednotkové kružnice. Podle obrázku je

$$h = \cos \varphi = \cos \frac{\pi}{n}, \quad \frac{x}{2} = \sin \varphi = \sin \frac{\pi}{n},$$

což dává vyjádření pro jeho obvod

$$o_n = n \cdot x = 2n \sin \frac{\pi}{n}$$

i obsah

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2} hx = n \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}.$$

Pro pravidelný n -úhelník tak je

$$IP = \frac{4\pi n \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{4n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{n} \cotg \frac{\pi}{n},$$

což můžeme ověřit kupř. pro čtverec ($n = 4$) s délkou strany a , kdy máme

$$IP = \frac{4\pi a^2}{(4a)^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cotg \frac{\pi}{4}.$$

Provedeme-li limitní přechod pro $n \rightarrow \infty$ s použitím limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

dostaneme izoperimetrický podíl pro kružnici

$$IP = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cotg \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Pochopitelně jsme také mohli pro kružnici o poloměru r přímo vypočítat

$$IP = \frac{4\pi S}{o^2} = \frac{4\pi(\pi r^2)}{(2\pi r)^2} = 1.$$

Pro hranici kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $\varphi \in (0, 2\pi)$ je

$$IP = \frac{4\pi S}{o^2} = \frac{4\pi \frac{\varphi r^2}{2}}{(2r+r\varphi)^2} = \frac{2\pi\varphi}{(2+\varphi)^2}.$$

6. 8g

Potřebuje najít maximum funkce

$$f(\varphi) := \frac{2\pi\varphi}{(2+\varphi)^2}, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

Vypočtem

$$f'(\varphi) = 2\pi \frac{(2+\varphi)^2 - 2\varphi(2+\varphi)}{(2+\varphi)^4} = 2\pi \frac{2-\varphi}{(2+\varphi)^3}, \quad \varphi \in (0, 2\pi)$$

však snadno získáváme, že

$$f'(\varphi) > 0, \quad \varphi \in (0, 2), \quad f'(\varphi) < 0, \quad \varphi \in (2, 2\pi).$$

Funkce f tedy nabývá maximální hodnoty pro $\varphi_0 = 2$ a při středovém úhlu $\varphi_0 = 2$ dostáváme největší

$$IP = \frac{2\pi\varphi_0}{(2+\varphi_0)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Doplňme tzv. izoperimetrickou větu, která říká, že pro každou uzavřenou křivku je její $IP \leq 1$, přičemž rovnost nastává jedině pro kružnici. Dále doplňme, že pro těleso v trojrozměrném prostoru (přesněji řečeno, pro uzavřenou plochu, která je jeho hranicí) se klade

$$IP := \frac{V}{\frac{4\pi}{3} \left(\frac{S}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

kde V je objem a S povrch tělesa. \square

6.20. Je dán provázek délky l . Máte jej rozstříhat na n částí tak, aby ze vzniklých n menších provázků bylo možné vytvořit hranice předem daných geometrických obrazců (kupř. čtverce, trojúhelníku, kruhu, půlkruhu) s nejmenším součtem ploch.

Řešení. K vyřešení příkladu použijeme izoperimetrický podíl křivek a Jensenovu nerovnost (uvedené v předchozích příkladech). Pro předem určené geometrické obrazce označujeme hodnoty jejich izoperimetrických podílů jako

$$\frac{1}{\lambda_i} := \frac{4\pi S_i}{o_i^2}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

a podobně v prostoru. V tomto kontextu je také třeba vnímat diferenciál vektorové funkce:

$$dr = \left(\frac{dx}{dt} e_1 + \frac{dy}{dt} e_2 + \frac{dz}{dt} e_3 \right) dt$$

kde výraz na pravé straně chápeme tak, že se přírůstek skalární nezávisle proměnné t lineárně zobrazí pomocí vynásobení vektoru derivace a tím dostaneme příslušný přírůstek vektorové veličiny r .

Jestliže vektor $r(t)$ představuje parametrizaci křivky, pak jeho derivace je vektorem rychlosti takto zadané dráhy. Speciální případ vektoru $r(t) = te_1 + f(t)e_2$ zadávajícího graf funkce f jsme zkoumali v minulém odstavci. Druhá derivace pak představuje zrychlení takto zadaného pohybu. Všimněme si, že samozřejmě zrychlení nemusí být kolineární s rychlostí. V případě grafu funkce je dokonce zrychlení kolineární s rychlostí pouze v bodech, kde je f'' nulová, což odpovídá představě, že kolineární může zrychlení být pouze, když je křivost grafu nulová.

6.15. Diferencování složených zobrazení.

V lineární algebře a geometrii jsou velice užitečná zobrazení, kterým říkáme formy. Jako argumenty mají jeden nebo více vektorů a v každém ze svých argumentů jsou lineární. Zadáváme tak velikost vektorů (skalární součin je symetrická bilineární forma) nebo objem rovnoběžnostěn (to je n -lineární antisymetrická forma, kde n je dimenze prostoru), viz např. odstavce 2.44 a 4.22.

Do těchto operací samozřejmě můžeme dosazovat vektory $r(t)$ závislé na parametru. Přímočarou aplikací Leibnitzova pravidla pro derivaci součinu funkcí ověříme následující

Věta. (1) Je-li $r(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencovatelný vektor a $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, pak pro derivaci zobrazení $\Psi \circ r$ platí

$$\frac{d(\Psi \circ r)}{dt} = \Psi \circ \frac{dr}{dt}.$$

(2) Uvažujme diferencovatelné vektory $r_1, \dots, r_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a je k -lineární formu $\Phi : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ na prostoru \mathbb{R}^n . Pak pro derivaci složeného zobrazení $\varphi(t) = \Phi(r_1(t), \dots, r_k(t))$ platí

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi\left(\frac{dr_1}{dt}, r_2, \dots, r_k\right) + \dots + \Phi\left(r_1, \dots, r_{k-1}, \frac{dr_k}{dt}\right).$$

(3) Předchozí tvrzení zůstává beze změny v platnosti i pokud Φ je samo vektorově hodnotové (a také lineární ve všech k argumentech).

DŮKAZ. (1) V lineární algebře se ukazuje, že lineární zobrazení jsou dána konstantní maticí skalárů $A = (a_{ij})$ tak, že

$$\Psi \circ r(t) = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} r_i(t), \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi} r_i(t) \right).$$

Derivaci nyní provádíme po jednotlivých souřadnicích výsledku. Víme ale, že derivace se chová lineárně vůči skalárním lineárním kombinacím, viz Věta 5.32. Proto skutečně dostaneme derivaci $\Psi \circ r(t)$ prostým vyčíslením původního lineárního zobrazení Ψ na derivaci $r'(t)$.

(2) Zcela obdobně dostaneme i druhé tvrzení. V souřadnicích rozepíšeme vyčíslení k -lineární formy na vektorech r_1, \dots, r_k takto

$$\Phi(r_1(t), \dots, r_k(t)) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n B_{i_1 \dots i_k} \cdot (r_1)_{i_1}(t) \dots (r_k)_{i_k}(t),$$

kde skaláry $B_{i_1 \dots i_k}$ jsou pro každou volbu indexů dány jako hodnota dané formy $\Phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ na zvolené k -tici báze vektorů. Pravidlo pro derivaci součinu skalárních funkcí nám dá právě dokazované tvrzení.

(3) Pokud má Φ vektorové hodnoty, je zadáno konečně mnoha komponentami a můžeme použít předchozí úvahu na každou z nich. \square

Na euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 máme kromě skalárního součinu, který dvěma vektorům přiřadí skalár, také vektorový součin, který dvěma vektorům u a v přiřadí vektor $u \times v \in \mathbb{R}^3$, viz 4.24.. Tento vektor $u \times v$ je kolmý na oba vektory u a v , má velikost rovnou obsahu rovnoběžníka určeného vektory u a v (v tomto pořadí) a orientaci takovou, trojice $u, v, u \times v$ byla kladně orientovanou bází.

Z předchozí věty okamžitě vyplývají užitečná tvrzení:

Důsledek. V prostoru \mathbb{R}^3 uvažme vektory $u(t)$ a $v(t)$. Pro derivace jejich skalárního součin $\langle u(t), v(t) \rangle$ a vektorový součin $u(t) \times v(t)$ platí

$$(6.1) \quad \frac{d}{dt} \langle u(t), v(t) \rangle = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle$$

$$(6.2) \quad \frac{d}{dt} (u(t) \times v(t)) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$$

6.8h

6.16. Křivost křivek. Nyní máme daleko mocnější nástroje pro studium křivek systematictější způsobem, než když jsme diskutovali křivost grafů funkcí.

Podívejme se obecně na křivku $r(t) \in \mathbb{R}^3$ v prostoru a předpokládejme, že jsou parametrizovány tak, aby jejich tečný vektor měl stále velikost jedna, tj. $\langle r'(t), r'(t) \rangle = 1$ pro všechna t . Říkáme, že je křivka $r(t)$ parametrizována délkou. Další derivací tohoto jednotkového vektoru $r'(t)$ dostaneme vektor $r''(t)$, pro který spočteme (využíváme symetrie skalárního součinu)

$$0 = \frac{d}{dt} \langle r'(t), r'(t) \rangle = 2 \langle r''(t), r'(t) \rangle$$

a je tedy vektor zrychlení $r''(t)$ vždy kolmý na vektor rychlosti. To odpovídá představě, že volbou parametrizace s konstantní velikostí rychlosti, nemůže být zrychlení ve směru pohybu znatelné, musí tedy celé zrychlení být v rovině kolmé k

příčměž S_i je obsah a o_i obvod i -tého obrazce. Ještě budeme používat označení

$$\Lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Připomeňme, že izoperimetrický podíl je dán pouze tvarem obrazce a nezávisí na jeho velikosti. Zvláště hodnota Λ je konstantní (je určena tvarem zadaných obrazců).

Naším úkolem je minimalizovat součet $\sum_{i=1}^n S_i$ při dodržení podmínky $\sum_{i=1}^n o_i = l$. Protože je však

$$S_i = \frac{o_i^2}{4\pi\lambda_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

jde nám o minimalizaci výrazu

$$S := \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{o_i^2}{\lambda_i}.$$

Použijeme-li Jensenovu nerovnost pro ostře konvexní funkci $y = x^2$ (na celé reálné ose), obdržíme

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i^2$$

pro $x_i \in \mathbb{R}$ a $c_i > 0$ s vlastností $c_1 + \dots + c_n = 1$. Dále víme, že v této nerovnosti nastane rovnost právě tehdy, když je $x_1 = \dots = x_n$.

Volbou

$$c_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \quad x_i = \frac{o_i}{\lambda_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

pak dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} \frac{o_i}{\lambda_i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} \left(\frac{o_i}{\lambda_i} \right)^2.$$

Jednoduchými úpravami přejdeme k nerovnici

$$\frac{1}{\Lambda^2} \left(\sum_{i=1}^n o_i \right)^2 \leq \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \frac{o_i^2}{\lambda_i}$$

a poté (uvažte, že $\sum_{i=1}^n o_i = l$)

$$\frac{l^2}{\Lambda} \leq \sum_{i=1}^n \frac{o_i^2}{\lambda_i},$$

příčměž opět rovnost nastává právě pro

$$(6.5) \quad x_1 = \dots = x_n, \quad \text{tj.} \quad \frac{o_1}{\lambda_1} = \dots = \frac{o_n}{\lambda_n}.$$

Odsud vyplývá, že S je nejmenší, právě když platí (6.5). Tato nejmenší hodnota S je $l^2 / (4\pi \Lambda)$. Zbývá stanovit délky nastříhaných částí o_i . Pokud je (6.5) splněno, musí zjevně být $o_i = k\lambda_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a jistou konstantu $k > 0$. Z

$$\sum_{i=1}^n o_i = l \quad \text{a současně} \quad \sum_{i=1}^n o_i = k \sum_{i=1}^n \lambda_i = k\Lambda$$

ihned plyne, že $k = l/\Lambda$, tj.

$$o_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda} l, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Podívejme se na konkrétní situaci, kdy máme provázek o délce 1 m rozříznout na dva menší a z nich potom vytvořit čtverec a kruh

tak, aby součet jejich obsahů byl co nejmenší. Pro čtverec a kruh je po řadě (viz příklad nazvaný Izoperimetrický podíl)

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \text{tj.} \quad \Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{4+\pi}{\pi}.$$

Délky příslušných částí tak jsou

$$o_1 = \frac{\frac{4}{\pi}}{\frac{4+\pi}{\pi}} \cdot 1 \text{ m} = \frac{4}{4+\pi} \text{ m} \doteq 0,56 \text{ m}, \quad o_2 = \frac{1}{\frac{4+\pi}{\pi}} \cdot 1 \text{ m} = \frac{\pi}{4+\pi} \text{ m} \doteq 0,44 \text{ m}.$$

Obsah čtverce o obvodu 0,56 m (s délkou strany $a = 0,14$ m) je 0,0196 m² a obsah kruhu s obvodem 0,44 m (a poloměrem $r \doteq 0,07$ m) pak činí přibližně 0,0154 m². Můžeme ověřit, že

$$\frac{l^2}{4\pi\Lambda} = \frac{1}{4(4+\pi)} \text{ m}^2 \doteq 0,035 \text{ m}^2 = 0,0196 \text{ m}^2 + 0,0154 \text{ m}^2.$$

□

6.21. L'Hospitalova kladka. Ke stropu je v bobě A uvázáno lano délky r . Na jeho druhém konci je připevněna kladka. Ve vzdálenosti d (v bodě B) od bodu A je ke stropu přivázáno druhé lano délky $l > \sqrt{d^2 + r^2}$, které prochází kladkou. Na tomto druhém laně je zavěšeno závaží. V jaké pozici se závaží ustálí (systém přejde do stacionární polohy)? Při řešení úlohy zanedbejte hmotnost i velikost lan a kladky. Viz obrázek.

Řešení. Systém bude ve stacionární poloze, pokud bude minimalizována jeho potenciální energie, tj. vzdálenost závaží od stropu $f(x)$ bude maximální. To však znamená, že pro $r \geq d$ se kladka pouze přesune pod bod B . Nadále proto budeme předpokládat, že $r < d$. Podle Pythagorovy věty je vzdálenost kladky od stropu $\sqrt{r^2 - x^2}$ a vzdálenost kladky a závaží je $l - \sqrt{(d-x)^2 + r^2 - x^2}$, což dává

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + l - \sqrt{(d-x)^2 + r^2 - x^2}.$$

Poloha systému je zcela popsána hodnotou $x \in [0, r]$ (viz obrázek), a tudíž stačí najít globální maximum funkce f na intervalu $[0, r]$.

Nejprve spočítáme derivaci

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{-(d-x) - x}{\sqrt{(d-x)^2 + r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{d}{\sqrt{(d-x)^2 + r^2 - x^2}}, \quad x \in (0, r).$$

Umocnění rovnice $f'(x) = 0$ pro $x \in (0, r)$ vede na

$$\frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{d^2}{(d-x)^2 + r^2 - x^2}.$$

Vynásobením obou stran výrazem $(r^2 - x^2)((d-x)^2 + r^2 - x^2)$ pak (po úpravě) dostaneme

$$2dx^3 - (2d^2 + r^2)x^2 + d^2r^2 = 0, \quad x \in (0, r).$$

Všimneme-li si, že jedním z kořenů polynomu na levé straně je zřejmě $x = d$, snadno převedeme poslední rovnici do tvaru

$$(x-d)(2dx^2 - r^2x - dr^2) = 0, \quad x \in (0, r),$$

resp. (pro kvadratickou rovnici máme vzorec)

vektoru rychlosti. Pokud je druhá derivace nenulová, normovaný vektor

$$n(t) = \frac{1}{\|r''(t)\|} r''(t)$$

nazýváme *hlavní normálou* křivky $r(t)$. Skalární funkce $\kappa(t)$ splňující (v bodech, kde je $r''(t) \neq 0$)

$$r''(t) = \kappa(t)n(t)$$

se nazývá *křivost křivky* $r(t)$. V nulových bodech druhé derivace definujeme $\kappa(t)$ také nulovou hodnotou.

V nenulových bodech křivosti je dobře definován jednotkový vektor $b(t) = r'(t) \times n(t)$, který nazýváme *binormála křivky* $r(t)$. Přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle b(t), r'(t) \rangle = \langle b'(t), r'(t) \rangle + \langle b(t), r''(t) \rangle \\ &= \langle b'(t), r'(t) \rangle + \kappa(t) \langle b(t), n(t) \rangle = \langle b'(t), r'(t) \rangle, \end{aligned}$$

což ukazuje, že je tečný vektor k binormále kolmý jak na $b(t)$, tak na $r'(t)$. Musí tedy být násobkem vektoru hlavní normály. Píšeme

$$b'(t) = -\tau(t)n(t)$$

a skalární funkci $\tau(t)$ nazýváme *torze křivky* $r(t)$.

Ještě jsme nespočetli rychlost změny hlavní normály, kterou můžeme také psát jako $n(t) = b(t) \times r'(t)$.

$$n'(t) = b'(t) \times r'(t) + \kappa(t)b(t) \times n(t)$$

$$= -\tau(t)n(t) \times r'(t) + \kappa(t)(-r'(t)) = \tau(t)b(t) - \kappa(t)r'(t).$$

Postupně jsme pro všechny body s nenulovou druhou derivací křivky $r(t)$ parametrizované délkou oblouku odvodili význačnou bázi $(r'(t), n(t), b(t))$, které se v klasické literatuře říká *Frenetův reper* a zároveň jsme v této bázi vyjádřili derivace jejích komponent formou tzv. *Frenetových-Serretových formulí*

$$\frac{dr'}{dt}(t) = \kappa(t)n(t), \quad \frac{dn}{dt}(t) = \tau(t)b(t) - \kappa(t)r'(t)$$

$$\frac{db}{dt}(t) = -\tau(t)n(t).$$

Všimněme si, že pokud křivka $r(t)$ leží stále v jedné rovině, pak je její torze identicky nulovou funkcí. Ve skutečnosti platí i obrácené tvrzení, které tu nebudeme dokazovat, vyplývá ale z následujícího klasického výsledku geometrické teorie křivek:

Dvě křivky v prostoru parametrizované délkou oblouku lze jednu na druhou zobrazit pomocí euklidovské transformace právě, když jejich funkce křivosti a torze splývají, až na konstantní posuv parametru. Navíc, pro každou volbu hladkých funkcí κ a τ existuje hladká křivka s těmito parametry.

Tento výsledek tu nebudeme dokazovat, zájemce může podrobný výklad nalézt v [?].

Přímým výpočtem můžeme zkontrolovat, že křivost grafu funkce f v rovině a křivost κ této křivky zavedené v tomto odstavci splývají. Skutečně, výpočtem

derivace složené funkce s pomocí diferenciálu délku oblouky pro graf funkce ve tvaru $dt = (1 + (f')^2)dx$, tj. $dx = (1 + (f')^2)^{-1/2}dt$ dostaneme pro náš jednotkový tečný vektor grafu křivky vztah

$$r'(t) = ((1 + (f')^2)^{-1/2}, f'(1 + (f')^2)^{-1/2})$$

a poměrně nepřehledným, ale obdobným výpočtem druhé derivace a její velikosti skutečně obdržíme

$$\kappa^2 = \|r''\|^2 = (f'')^2(1 + (f')^2)^{-3}.$$

6.8i

6.17. Aproximace derivací a asymptotické odhady. Hned na začátku této učebnice jsme v odstavcích 1.3, 1.9 a dále diskutovali, jak zadávat hodnotu funkce pomocí změn, tj. diferencií. V další části textu budeme obdobně rekonstruovat funkci f z jejích derivací, tj. okamžitých změn. Předtím se ale pozastavme u souvislosti derivací a diferencií. Klíčem nám k tomu bude Taylorova věta.

Předpokládejme, že z (dostatečně) diferencovatelné funkce $f(x)$, definované na intervalu $[a, b]$, známe hodnoty $f_i = f(x_i)$ v bodech $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$, přičemž pro všechny indexy $i = 1, \dots, n$ platí $x_i - x_{i-1} = h > 0$ pro nějakou konstantu h . Taylorův rozvoj pro funkci f v bodě x_i pišme ve tvaru

$$f(x_i \pm h) = f_i \pm hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) \pm \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \dots$$

Víme, že když v rozvoji skončíme členem řádu k v h , tj. výrazem obsahujícím h^k , pak se dopustíme chyby, která je omezená každým odhadem výrazu

$$\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x)$$

na intervalu $[x_i - h, x_i + h]$. Pokud je $i(k+1)$ -vá derivace f spojitá, můžeme ji odhadnout konstantou. Vidíme pak, že se pro malá h chová Taylorův polynom stupně k stejně jako h^{k+1} , až na konstantní násobek. Takovému odhadu se říká *asymptotický odhad*.

Definice. Řekneme, že výraz $G(h)$ je pro $h \rightarrow 0$ asymptoticky stejný s výrazem $F(h)$ a pišme $G(h) = O(F(h))$, jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)}{h^k} = a \in \mathbb{R}.$$

Označme si hledané odhady hodnot derivací $f'(x)$ v bodech x_i jako $f_i^{(j)}$. Pro odhady první derivací můžeme okamžitě použít tři různé difference spočtené z Taylorova rozvoje:

$$f_i^{(1)} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_i) - \dots$$

$$f_i^{(1)} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2!}f''(x_i) + \dots$$

$$f_i^{(1)} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{h}{2!}f''(x_i) + \dots$$

$$2d(x-d) \left(x - \frac{r^2 + r\sqrt{r^2 + 8d^2}}{4d} \right) \left(x - \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 + 8d^2}}{4d} \right) = 0, \quad x \in (0, r).$$

Odsud vidíme, že rovnice $f'(x) = 0$ má v intervalu $(0, r)$ nejvýše jedno řešení. (Neboť je $r < d$ a $\sqrt{r^2 + 8d^2} > r$, dva kořeny uvažovaného polynomu v proměnné x určitě v intervalu $(0, r)$ neleží.) Zbývá rozhodnout, zda

$$x_0 = \frac{r^2 + r\sqrt{r^2 + 8d^2}}{4d} = \frac{1}{4}r \left[\frac{r}{d} + \sqrt{\left(\frac{r}{d}\right)^2 + 8} \right] \in (0, r).$$

Když však uvážíme, že $r, d > 0$ a $r < d$, snadno získáme

$$0 < x_0 < \frac{1}{4}r \left[1 + \sqrt{1^2 + 8} \right] = r.$$

Vzhledem ke spojitosti funkce f' na intervalu $(0, r)$ může dojít ke změně jejího znaménka pouze v bodě x_0 . Z limit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow r^-} f'(x) = -\infty$$

tak již vyplývá, že

$$f'(x) > 0, \quad x \in (0, x_0), \quad f'(x) < 0, \quad x \in (x_0, r).$$

Funkce f má proto globální maximum na intervalu $[0, r]$ v bodě x_0 .

□

6.22. Nejmenovaná poštovní společnost má ve svých podmínkách uvedeno, že délka jí přepravovaného balíku nesmí být větší než 108 palců a že součet jeho délky a maximálního obvodu nesmí přesáhnout hodnotu 165 palců. Nalezněte balík největšího objemu, který podle svých podmínek společnost může doručit.



Řešení. Nechť M označuje hodnotu 165 in (tj. palců) a x délku balíku (v palcích). Hledaný balík bude mít zřejmě takový tvar, že jeho průřez pro libovolné $t \in (0, x)$ bude mít stejný (ten maximální) obvod, který (rovněž vyjádřen v palcích) budeme značit jako o . Chceme, aby balík měl maximální objem, a tudíž aby průřez daného obvodu měl maximální obsah. Není obtížné si uvědomit, že rovinný útvar, který má při daném obvodu maximální obsah, je kruh. Tím jsme dospěli k závěru, že hledaný balík největšího objemu má tvar válce o výšce x a poloměru podstavu $r = o/2\pi$.

Jeho objem je

$$V = \pi r^2 x = \frac{o^2 x}{4\pi},$$

přičemž musí být $o + x \leq M$ a také $x \leq 108$ in. Uvažujme proto balík, pro který je právě $o + x = M$. Ten má objem

$$V(x) = \frac{(M-x)^2 x}{4\pi} = \frac{x^3 - 2Mx^2 + M^2 x}{4\pi}, \quad \text{kde } x \in (0, 108].$$

Spočítáme-li derivaci

$$V'(x) = \frac{3x^2 - 4Mx + M^2}{4\pi} = \frac{3(x-M)\left(x - \frac{M}{3}\right)}{4\pi}, \quad x \in (0, 108),$$

snadno zjistíme, že funkce V roste na intervalu $(0, 55] = (0, M/3]$ a klesá na intervalu $[55, 108] = [M/3, \min\{108, M\}]$. Největší objem tak dostáváme pro $x = M/3$, přičemž

$$V\left(\frac{M}{3}\right) = \frac{M^3}{27\pi} \doteq 0,011\,789\,M^3 \approx 0,867\,8\,m^3.$$

Pokud by společnost v přepravních podmínkách požadovala, aby měl balík tvar kvádru, příp. jistého hranolu, můžeme předchozí úvahy zopakovat pro daný průřez o obsahu S , aniž bychom specifikovali, jak tento průřez vypadá. Stačí si uvědomit, že nutně $S = ko^2$ pro jisté $k > 0$, které je právě určeno tvarem průřezu. (Když se pouze změní velikost mnohoúhelníku, jenž je průřezem, tak se změní ve stejném poměru také jeho obvod. Obsah se však např. zdevítinásobí při trojnásobné velikosti – trojnásobném obvodu.) Objem balíku je tedy funkcí

$$V(x) = Sx = ko^2x = k(M-x)^2x, \quad x \in (0, 108].$$

Konstanta k neovlivňuje bod, kde je globální maximum funkce V , a proto toto maximum nastává opět pro $x = M/3$. Např. pro nejobemnější kvádr s podstavou čtverce je $o = M - x = 2M/3$, tj. délka strany jeho podstavy je $a = M/6$ a objem potom

$$V = a^2x = \frac{M^3}{6^2 \cdot 3} \doteq 0,009\,259\,M^3 \approx 0,681\,6\,m^3.$$

Pro balík ve tvaru koule, kdy je x průměrem, podmínku $o+x \leq M$ můžeme ihned přepsat do tvaru $\pi x + x \leq M$, tj. $x \leq M/(\pi + 1) < 108$ in. Pro $x = M/(\pi + 1)$ tak získáváme maximální objem

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{\pi M^3}{6(\pi+1)^3} \doteq 0,007\,370\,M^3 \approx 0,542\,6\,m^3.$$

Podobně pro balík ve tvaru krychle, kdy x udává délku hrany, podmínka $o + x \leq M$ znamená, že $x \leq M/5 < 108$ in. Takže pro $x = M/5$ dostáváme maximální objem

$$V = x^3 = \left(\frac{M}{5}\right)^3 = 0,008\,M^3 \approx 0,588\,9\,m^3.$$

Ještě doplníme, že krychle, která má stejný objem jako nalezený válec, má délku hrany

$$a = \frac{M}{\sqrt[3]{3\pi}} \doteq 0,227\,595\,M \approx 0,953\,849\,m.$$

Uvědomme si, že pro ni je součet její délky a obvodu roven $5a \doteq 1,138\,M$, tj. o bezmála 14 % překračuje hodnotu stanovenou společností. \square

B. Integrovaní

Nejprve několik jednoduchých příkladů, které by měl zvládnout každý.

6.23. Integrovaním „po paměti“ vyjádřete

kde jsme prostě jen odečetli příslušné Taylorovy polynomy. Získáváme tak numerická vyjádření pro první derivaci. První z nich má asymptotický odhad chyby

$$f^{(1)} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$

další dvě mají chybu $O(h)$. Říkáme jim *středová diference*, *dopředná diference* a *zpětná diference*. Kupodivu je středová diference o řád lepší než zbylé dvě.

Stejně můžeme postupovat při odhadu druhé derivace. Nejjednodušší kombinace Taylorových polynomů, ze které nám půjde spočítat $f''(x_i)$ je (potřebujeme vyrušit první derivace i hodnotu v x_i , podaří se přitom přímo zrušit i všechny liché derivace)

$$f_i^{(2)} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

Hvoříme o *diferenci druhého řádu* a stejně jako u středové první diference je asymptotický odhad chyby o jeden řád lepší, než bychom na první pohled čekali:

$$f_i^{(2)} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^4).$$

2. Integrovaní

6.18. Newtonův integrál. Nyní se budeme zajímat o opačný postup než tomu bylo u derivování. Budeme chtít ze znalosti okamžitých změn nějaké funkce rekonstruovat její skutečné hodnoty.

Jestliže danou funkci $f(x)$ považujeme za derivaci neznámé funkce $F(x)$, pak na úrovni diferenciálů můžeme psát

$$dF = f(x)dx.$$

Funkci F nazýváme *antiderivace* nebo *neurčitý integrál* funkce f a tradičně píšeme

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Lemma. *Antiderivace $F(x)$ funkce $f(x)$ je na každém intervalu $[a, b]$ určena jednoznačně až na konstantu.*

DŮKAZ. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$ na celém intervalu $[a, b]$, pak Taylorův rozvoj prvního řádu se zbytkem pro funkci $F - G$ v bodě a dává

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= F(a) - G(a) + (f(c) - f(c))(x - a) \\ &= F(a) - G(a) \end{aligned}$$

pro jisté $c \in [a, x]$ a to pro všechna x z nějakého okolí bodu a . Pokud by ale $x_0 < b$ bylo supremem všech hodnot x , pro které tento vztah ještě platí, opětovnou volbou tohoto bodu za a dosáhneme rozšíření tohoto vztahu i napravo od něj. Musí tedy platit na celém intervalu. \square

Předchozí lemma nás vede k tomu, že neurčitý integrál obvykle zapisujeme ve tvaru

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

s neznámou konstantou C .

Hodnotu $f(x)$ můžeme také považovat za okamžitý přírůstek plochy vymezené grafem funkce f a osou x a snažit se najít velikost této plochy mezi krajními hodnotami a a b nějakého intervalu. Zkusme tuto představu dát do souvislosti s neurčitým integrálem. Předpokládejme tedy, že na intervalu $[a, b]$ známe reálnou funkci a její neurčitý integrál $F(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$.

Jestliže rozdělíme interval $[a, b]$ na n částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech x_i výrazy

$$f(x_i) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součtem přes všechny intervaly našeho dělení odhad hledané velikosti plochy:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i) = F(b) - F(a)$$

Dá se tedy očekávat, že pro „dostatečně pěkné“ funkce $f(x)$ velikost plochy vymezené grafem funkce a osou x skutečně spočteme jako rozdíl hodnot antiderivace v krajních bodech intervalu. Tomuto postupu se říká *Newtonův integrál*. Píšeme


$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

V případě komplexní funkce f je reálná a imaginární část jejího neurčitého integrálu jednoznačně dána reálnou a imaginární částí f , budeme proto v dalším pracovat výhradně s reálnými funkcemi.

6.13

6.19. Integrace „po paměti“. Ještě než si uděláme jasno, jak Newtonův integrál skutečně souvisí s velikostí plochy a jak jej případně lze používat pro modelování praktických problémů, ukážeme několik postupů, jak Newtonův integrál spočítat. Budeme přitom využívat jen naše znalosti o derivacích.

Nejsnadnější je případ, kdy v integrované funkci umíme derivaci přímo uvidět. K tomu v jednoduchých případech stačí číst tabulky pro derivace funkcí v našem zvěřinci naopak. Dostáváme tak např. následující tvrzení pro všechna

- 
- (a) $\int e^{-x} dx, x \in \mathbb{R};$
 - (b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx, x \in (-2, 2);$
 - (c) $\int \frac{1}{x^2+3} dx, x \in \mathbb{R};$
 - (d) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2} dx, x \neq -1.$

Řešení. Snadno získáváme

- (a) $\int e^{-x} dx = -\int -e^{-x} dx = -e^{-x} + C;$
- (b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} + C;$
- (c) $\int \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\frac{x^2}{3}+1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C;$
- (d) $\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+2} dx = \ln |x^3 + 3x + 2| + C,$
kde jsem využil vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$

6.24. Spočítejte neurčitý integrál

$$\int \left(7^x + 4e^{\frac{2x}{3}} - \frac{1}{2^x} + 9 \sin 5x + 2 \cos \frac{x}{2} - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{1}{3-x} \right) dx$$

pro $x \neq 3, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Řešení. Pouze spojením dříve odvozených vzorců dostáváme

$$\int \left(7^x + 4e^{\frac{2x}{3}} - \frac{1}{2^x} + 9 \sin 5x + 2 \cos \frac{x}{2} - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{1}{3-x} \right) dx = \frac{7^x}{\ln 7} + 6e^{\frac{2x}{3}} + \frac{1}{2^x \ln 2} - \frac{9}{5} \cos 5x + 4 \sin \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} x - \ln |3-x| + C.$$

6.25. Metoda per partes. (viz 6.20) Vypočítejte $\int x \cos x dx$ a $\int \ln x dx.$

Řešení.

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.$$

6.26. Metodou per partes vypočítejte

- (a) $\int (x^2 + 1) e^{-x} dx, x \in \mathbb{R};$
- (b) $\int (2x - 1) \ln x dx, x > 0;$
- (c) $\int \arctg x dx, x \in \mathbb{R};$
- (d) $\int e^x \sin x dx, x \in \mathbb{R}.$

Řešení. Nejdříve vyzdvihneme, že metodou per partes lze vypočítat každý integrál ve tvaru

$$\begin{aligned} \int P(x) a^{bx} dx, \quad \int P(x) \sin(bx) dx, \quad \int P(x) \cos(bx) dx, \\ \int P(x) \log_a^n x dx, \quad \int x^b \log_a^n(kx) dx, \\ \int P(x) \arcsin(bx) dx, \quad \int P(x) \arccos(bx) dx, \\ \int P(x) \operatorname{arctg}(bx) dx, \quad \int P(x) \operatorname{arccotg}(bx) dx, \\ \int a^{bx} \sin(cx) dx, \quad \int a^{bx} \cos(cx) dx, \end{aligned}$$

kde P je libovolný polynom a

$$a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \quad b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k > 0.$$

Proto víme, že

(a)

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1) e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} F(x) = x^2 + 1 \\ G'(x) = e^{-x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 2x \\ G(x) = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -(x^2 + 1) e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} F(x) = 2x \\ G'(x) = e^{-x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 2 \\ G(x) = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -(x^2 + 1) e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2 e^{-x} dx = -(x^2 + 1) e^{-x} - \\ &= 2x e^{-x} - 2 e^{-x} + C = -e^{-x} (x^2 + 2x + 3) + C; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int (2x - 1) \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} F(x) = \ln x \\ G'(x) = 2x - 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 1/x \\ G(x) = x^2 - x \end{array} \right| = \\ &= (x^2 - x) \ln x - \int \frac{x^2 - x}{x} dx = (x^2 - x) \ln x + \int 1 - x dx = \\ &= (x^2 - x) \ln x + x - \frac{x^2}{2} + C; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{l} F(x) = \operatorname{arctg} x \\ G'(x) = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ G(x) = x \end{array} \right| = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C; \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} F(x) = e^x \\ G'(x) = \sin x \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = e^x \\ G(x) = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \quad \boxed{6.13} \\ &= \left| \begin{array}{l} F(x) = e^x \\ G'(x) = \cos x \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = e^x \\ G(x) = \sin x \end{array} \right| = \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx, \end{aligned}$$

odkud plyne

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

6.27. Metoda substituční. (viz 6.21)

$a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$:

$$\begin{aligned} \int a dx &= ax + C \\ \int ax^n dx &= \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C \\ \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} + C \\ \int \frac{a}{x} dx &= a \ln x + C \\ \int a \cos(bx) dx &= \frac{a}{b} \sin(bx) + C \\ \int a \sin(bx) dx &= -\frac{a}{b} \cos(bx) + C \\ \int a \cos(bx) \sin^n(bx) dx &= \frac{a}{b(n+1)} \sin^{n+1}(bx) + C \\ \int a \sin(bx) \cos^n(bx) dx &= -\frac{a}{b(n+1)} \cos^{n+1}(bx) + C \\ \int a \operatorname{tg}(bx) dx &= -\frac{a}{b} \ln(\cos(bx)) + C \\ \int \frac{a}{a^2 + x^2} dx &= \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ \int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \end{aligned}$$

Ve všech případech je zapotřebí dobře promyslet definiční obor, na kterém je neurčitý integrál dobře definován.

K takovýmto tabulkovým pravidlům pro integraci lze relativně snadno dodávat další pravidla jednoduchými pozorováními vhodné struktury integrovaných funkcí. Např.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$$

pro všechny spojitě diferencovatelné funkce f na intervalech, kde jsou nenulové. Samozřejmě také z pravidel pro derivaci součtu diferencovatelných funkcí a konstantních násobků diferencovatelných funkcí je zřejmé že obdobná pravidla platí neurčitý integrál také.

6.20. Integrace per partes. Výpočet integrálu pomocí antiderivace (neurčitého integrálu), spolu s pravidlem

$$(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$$

pro derivaci součinu funkcí, dává následující formuli pro neurčitý integrál

$$F(x) \cdot G(x) + C = \int F'(x)G(x) dx + \int F(x)G'(x) dx.$$

□

Tato formule se většinou používá v případech, že jeden z integrálů napravo máme počítat, zatímco druhý umíme počítat lépe.

Nejlépe je princip vidět na příkladu. Spočteme

$$I = \int x \sin x \, dx.$$

V tomto případě pomůže volba $F(x) = x$, $G'(x) = \sin x$. Odtud $G(x) = -\cos x$ a proto také

$$I = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Obvyklým trikem je také použít tento postup s $F'(x) = 1$:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - x + C.$$

6.13a

6.21. Integrace pomocí substituce. Další užitečný postup je odvozen z derivování složených funkcí. Jestliže

$$F'(y) = f(y), \quad y = \varphi(x),$$

pro diferencovatelnou funkci φ s nenulovou derivací, potom

$$\frac{dF(\varphi(x))}{dx} = F'(y) \cdot \varphi'(x)$$

a tedy $F(y) + C = \int f(y) \, dy$ lze spočíst jako

$$F(\varphi(x)) + C = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx.$$

Dosažením $x = \varphi^{-1}(y)$ pak dostaneme původně požadovanou antiderivaci. Častěji zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\int f(y) \, dy = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx$$

a hovoříme o substituci za proměnnou y . Přímou na úrovni diferenciálů je možné substituci porozumět snadno tak, že (linearizované) přírůstky v proměnné y a v x jsou vzájemně ve vztahu popsáném formálně

$$dy = \varphi'(x) \, dx,$$

což odpovídá vztahu mezi integrovanými veličinami

$$f(y) \, dy = f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx.$$

Jako příklad ověříme touto metodou předposlední integrál v seznamu v 6.20. Pro integrál

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

zvolíme substituci $x = \sin t$. Odtud $dx = \cos t \, dt$ a dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, dt = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t \, dt \\ &= \int dt = t + C. \end{aligned}$$

Zpětným dosažením $t = \arcsin x$ dopočítáme již známý vzorec $I = \arcsin x + C$.

Při substitucích je třeba dát pozor na skutečnou existenci inverzní funkce k $y = \varphi(x)$ a při výpočtu určitého integrálu je třeba řádně přepočítávat i meze. Problémům s definičními obory inverzních funkcí se lze někdy vyhnout rozdělením integrace na několik intervalů.

6.28. Vhodnou substitucí stanovte

- (a) $\int \sqrt{2x-5} \, dx$, $x > \frac{5}{2}$;
 (b) $\int \frac{(7+\ln x)^7}{x} \, dx$, $x > 0$;
 (c) $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, dx$, $x \neq \frac{(3+4k)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
 (d) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Platí

(a)
$$\int \sqrt{2x-5} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x-5 \\ dt = 2 \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-5)^3} + C;$$

(b)
$$\int \frac{(7+\ln x)^7}{x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 7 + \ln x \\ dt = \frac{1}{x} \, dx \end{array} \right| = \int t^7 \, dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(7+\ln x)^8}{8} + C;$$

(c)
$$\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{1+\sin x} + C;$$

(d)
$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \, dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t + \sqrt{1+t^2} > 0 \\ du = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) dt \\ \frac{du}{t + \sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \, dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{u} \, du = \ln u + C = \\ &= \ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) + C = \ln \left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x} \right) + C. \end{aligned}$$

□

6.29. Určete integrály

- a) $\int \frac{dx}{\sin^2(x) - \cos^2(x)}$,
 b) $\int x^2 \sqrt{2x+1} \, dx$.

Řešení. Pro výpočet prvního z integrálů zvolíme substituci $t = \operatorname{tg} x$, kterou lze často s výhodou uplatnit.

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\sin^2(x) - \cos^2(x)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce } t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \operatorname{tg}^2(x)) dx = (1 + t^2) dx \\ \sin^2(x) = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1 + \operatorname{tg}^2(x)} = \frac{t^2}{1 + t^2} \\ \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(x)} = \frac{1}{1 + t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{t^2 - 1} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\operatorname{tg}(x) - 1}{\operatorname{tg} + 1} \right) + C \end{aligned}$$

Nyní určíme druhý integrál:

6.15

$$\begin{aligned} & \int x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \\ & = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sqrt{2x+1} & v = \frac{1}{3}(2x+1) \end{array} \right| = \\ & = \frac{1}{3}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} \int x^2 \sqrt{2x+1} \, dx - \frac{2}{9}(2x+1)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

což můžeme chápat jako rovnici, kde neznámou je hledaný integrál.

Převedením na jednu stranu pak

$$\begin{aligned} & \int x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \\ & = \frac{1}{7}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} \int x\sqrt{2x+1} \, dx = \\ & \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sqrt{2x+1} & v = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} \end{array} \right| \\ & = \frac{1}{7}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{3}x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{3} \int (2x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx \right) = \\ & = \frac{1}{7}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{21}x\sqrt{2x+1} + \frac{2}{105}(2x+1)^{\frac{5}{2}} = \\ & = \frac{1}{7}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{35}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{105}(2x+1)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

6.30. Užitím základních vzorců vypočítejte

- (a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$, $x \neq 0$;
 (b) $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
 (c) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} \, dx$, $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
 (d) $\int 6 \sin 5x + \cos \frac{x}{2} + 2e^{\frac{2x}{3}} \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Příklad (a). Ihned určíme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-1/2} \, dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C,$$

přičemž zápisu, ve kterém přičítáme $C \in \mathbb{R}$, je třeba rozumět tak, že všechny antiderivace získáme právě pomocí konstantního posunutí libovolné antiderivace. To ovšem platí pouze na intervalu. Jinak řečeno, hodnota C je obecně různá pro $x < 0$ a pro $x > 0$. Měli bychom tedy uvažovat hodnoty C_1 a C_2 . Pro jednoduchost budeme ale používat zápis bez indexů a uvádění příslušných intervalů. Navíc si budeme pomáhat položením $aC = C$ pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $C+b = C$ pro $b \in \mathbb{R}$, která jsou založena na skutečnosti, že

$$\{C; C \in \mathbb{R}\} = \{aC; C \in \mathbb{R}\} = \{C+b; C \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Zcela korektní vyjádření bychom pak obdrželi např. substitucemi $\hat{C} = aC$, $\tilde{C} = C+b$. Tato zjednodušení prokáží svou užitečnost při počítání náročnějších příkladů. Činí totiž postupy a úpravy přehlednějšími.

Příklad (b). Postupné úpravy integrované funkce vedou na

6.22. Integrace převedením na rekurenci. Často vede použití substitucí a metody per partes k rekurentním vztahům, ze kterých teprve lze dopočítat hledané integrály. Budeme ilustrovat na příkladu. Metodou per partes počítáme



$$\begin{aligned} I_m &= \int \cos^m x \, dx = \int \cos^{m-1} x \cos x \, dx \\ &= \cos^{m-1} x \sin x - (m-1) \int \cos^{m-2} x (-\sin x) \sin x \, dx \\ &= \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Odtud díky vztahu $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ dostáváme

$$mI_m = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1)I_{m-2}$$

a počáteční hodnoty jsou

$$I_0 = x, \quad I_1 = \sin x.$$

K těmto typům integrálů se substitucí $x = \operatorname{tg} t$ často převádí integrály, kde integrovaná funkce závisí na výrazech tvaru (x^2+1) . Skutečně, např. pro

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2+1)^k}$$

□ dostáváme zmíněnou substitucí (povšimněme si, že $dx = \cos^{-2} t \, dt$)

$$J_k = \int \frac{dt}{\cos^2 t \left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 \right)^k} = \int \cos^{2k-2} t \, dt.$$

Pro $k=2$ je výsledkem

$$J_2 = \frac{1}{2}(\cos t \sin t + t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} + t \right)$$

a proto také po zpětné substituci $t = \operatorname{arctg} x$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \right) + C.$$

Při počítání určitých integrálů je možné celou rekurenci rovnou počítat po vyčíslení v zadaných mezích. Tak například je okamžitě vidět, že při integraci přes interval $[0, 2\pi]$ mají naše integrály hodnoty:

$$I_0 = \int_0^{2\pi} dx = [x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$$

$$I_m = \int_0^{2\pi} \cos^m x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{pro sudá } m \\ \frac{m-1}{m} I_{m-2} & \text{pro lichá } m \end{cases}$$

Pro sudé $m=2n$ tedy dostáváme přímo výsledek

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 2} 2\pi,$$

6.16

zatímco u lichých m je to vždy nula (jak bylo možné přímo uhádnout z grafu funkce $\cos x$).

6.23. Integrace racionálních funkcí lomených. U racionálních funkcí lomených si můžeme při integraci pomoci několika zjednodušeními. Zejména v případě, že je stupeň polynomu f v čitateli větší nebo roven stupni polynomu g ve jmenovateli, je rozumné hned z kraje dělením se zbytkem, viz odstavec 5.2, převést integraci na součet dvou integrálů. První pak bude integrací polynomu a druhý integrací výrazu f/g se stupněm g ostře větším, než je stupeň f .



Toho skutečně dosáhneme prostým vydělením polynomu:

$$f = q \cdot g + h, \quad \frac{f}{g} = q + \frac{h}{g}.$$

Můžeme tedy zrovna předpokládat, že stupeň g je ostře větší než stupeň f . Další postup si ukažme na jednoduchém příkladě. Zkusme si rozebrat, jak se dostaneme k výsledku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-2}{x + 1} + \frac{6}{x + 2},$$

který již umíme integrovat přímo:

$$\int \frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} dx = -2 \ln |x + 1| + 6 \ln |x + 2| + C.$$

Především převedením součtu zlomků na společného jmenovatele tuto rovnost snadno ověříme. Pokud naopak víme, že lze náš výraz rozepsat ve tvaru

$$\frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

a jde nám pouze o výpočet koeficientů A a B . Můžeme pro ně získat rovnice pomocí roznásobení obou stran polynomem $x^2 + 3x + 2$ ze jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x ve výsledných polynomech napravo i nalevo:

$$4x + 2 = A(x + 2) + B(x + 1) \implies 2A + B = 2, \quad A + B = 4.$$

Odtud již přímo vychází náš rozklad. Říká se mu *rozklad na parciální zlomky*.

Tento elementární postup lze snadno zobecnit. Jde o čistě algebraickou úvahu opírající se o vlastnosti polynomů, ke kterým se budeme vracet v kapitole ??.

Předpokládejme, že jmenovatel $g(x)$ a čítec $f(x)$ nedisí žádný reálný ani komplexní kořen a že $g(x)$ má právě n různých reálných kořenů a_1, \dots, a_n . Pak jsou body a_1, \dots, a_n právě všechny body nespojitosti funkce $f(x)/g(x)$.

Pro zjednodušení úvahy nejprve pišme $g(x)$ jako součin

$$g(x) = p(x)q(x)$$

dvou nesoudělných polynomů. Díky Bezoutově identitě (viz ??), která je důsledkem obyčejného dělení polynomů se zbytkem, existují polynomy $a(x)$ a $b(x)$ se stupni ostře menšími než je stupeň g takové, že

$$a(x)p(x) + b(x)q(x) = 1.$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C, \end{aligned}$$

kde jsme si pomohli znalostí derivace

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Případ (c). Stačí si uvědomit, že se jedná o speciální případ vzorce

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

jenž můžeme přímo ověřit derivováním

$$(\ln |f(x)| + C)' = (\ln [\pm f(x)])' + (C)' = \frac{[\pm f(x)]'}{\pm f(x)} = \frac{\pm f'(x)}{\pm f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Platí tudíž

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \ln (1 + \sin x) + C.$$

Případ (d). Protože integrál součtu je součtem integrálů (pokud mají jednotlivé integrály smysl) a nenulovou konstantu lze z integrálu vytknout kdykoli, je

$$\int 6 \sin 5x + \cos \frac{x}{2} + 2e^{\frac{2x}{3}} dx = -\frac{6}{5} \cos 5x + 2 \sin \frac{x}{2} + 3e^{\frac{2x}{3}} + C.$$

□

6.31. Určete

- $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\int \ln x \, dx$, $x > 0$;
- $\int x^2 e^{-3x} dx$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\int \cos^2 x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Případ (a). Metodou per partes dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \left| \begin{array}{l} F(x) = x \\ G'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 1 \\ G(x) = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= x \operatorname{tg} x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Případ (b). Zdá se, že nemáme zadán integrál ze součinu dvou funkcí. Když ovšem položíme $F(x) = \ln x$, $G'(x) = 1$ (tj. $F'(x) = 1/x$, $G(x) = x$), opět pomocí per partes snadno obdržíme

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Případ (c). Tentokrátě očividně integrujeme součin dvou funkcí. Aplikováním metody per partes integrál převádíme na jiný integrál tak, že jednu funkci derivujeme a druhou integrujeme. Integrovat umíme obě (derivovat umíme všechny elementární funkce). Musíme se proto rozhodnout, kterou ze dvou variant metody použijeme (zda budeme integrovat funkci $y = x^2$, nebo $y = e^{-3x}$). Uvědomme si, že per partes můžeme použít opakovaně a že n -tá derivace polynomu stupně $n \in \mathbb{N}$ je konstantní polynom. To nám dává způsob, jak lze spočítat

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-3x} dx &= \left| \begin{array}{l} F(x) = x^2 \\ G'(x) = e^{-3x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 2x \\ G(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx \end{aligned}$$

a dále

$$\int x e^{-3x} dx = \left| \begin{array}{l} F(x) = x \\ G'(x) = e^{-3x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 1 \\ G(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right| = \\ -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C.$$

Dohromady tak máme

$$\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + C = \\ -\frac{1}{3} e^{-3x} \left(x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} \right) + C.$$

Poznamenejme, že opakované použití per partes v rámci výpočtu jednoho integrálu je běžné (podobně jako při počítání limit l'Hospitalovým pravidlem).

Případ (d). Opět aplikujeme metodu per partes při vyjádření

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx = \\ \left| \begin{array}{l} F(x) = \cos x \\ G'(x) = \cos x \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = -\sin x \\ G(x) = \sin x \end{array} \right| = \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x dx = \\ \cos x \cdot \sin x + \int 1 - \cos^2 x dx = \\ \cos x \cdot \sin x + \int 1 dx - \int \cos^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x dx.$$

Přestože návrat k zadanému integrálu může vyvolat u čtenáře pochyby, ze vztahu

$$\int \cos^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x dx$$

je možné vyvodit

$$2 \int \cos^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + x + C,$$

tj.

$$(6.6) \quad \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cdot \cos x) + C.$$

Stačí si vzpomenout, že klademe $C/2 = C$ a že neurčitý integrál (jako nekonečnou množinou) lze reprezentovat jednou konkrétní funkcí a jejími posunutími.

Vyzdvihněme, že většinou vhodné úpravy či substituce vedou k výsledku rychleji než metoda per partes. Např. pomocí identity

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

jednodušeji dostaneme

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C = \\ \frac{x}{2} + \frac{2 \sin x \cos x}{4} + C = \frac{1}{2} (x + \sin x \cdot \cos x) + C.$$

6.32. Integrujte

- $\int \cos^5 x \cdot \sin x dx, x \in \mathbb{R};$
- $\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x dx, x \in \mathbb{R};$
- $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$
- $\frac{1-\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^5+x}} dx, x > 0.$

Vynásobením této rovnosti podílem $f(x)/g(x)$ dostáváme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a(x)}{q(x)} + \frac{b(x)}{p(x)}.$$

Předpokládejme nyní, že náš polynom $g(x)$ nemá jiné než reálné kořeny, má tedy jednoznačný rozklad na faktory $(x - a_i)^{n_i}$, kde n_i jsou násobnosti kořenů $a_i, i = 1, \dots, k$. Postupným použitím předchozího postupu s nesoudělnými polynomy $p(x)$ a $q(x)$ dostaneme vyjádření $f(x)/g(x)$ pomocí součtu zlomků ve tvaru

$$\frac{r_1(x)}{(x - a_1)^{n_1}} + \dots + \frac{r_k(x)}{(x - a_k)^{m_k}},$$

kde stupně polynomů $r_i(x)$ jsou ostře menší než stupně v jmenovateli. Každý z nich ale jde velmi snadno rozepsat jako součet

$$\frac{r(x)}{(x - a)^n} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n},$$

když začneme od nejvyšších mocnin v polynomu $r(x)$ a postupně počítáme A_1, A_2, \dots vhodným doplňováním a odebráním sčítanců v čitateli. Např.

$$\frac{5x - 16}{(x - 2)^2} = 5 \frac{x - 2}{(x - 2)^2} - 6 \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{5}{x - 2} + \frac{6}{(x - 2)^2}.$$

Zbývá ošetřit ještě případ, kdy reálných kořenů není dostatek. Vždycky ale existuje rozklad $g(x)$ na lineární faktory s případnými komplexními kořeny. Opakování předchozí úvahy pro komplexní polynomy nám dá tentýž výsledek, pokud ale předem víme, že koeficienty polynomů jsou reálné, budou komplexní kořeny v našich výrazech vystupovat vždy po dvojicích komplexně sdružených kořenů. Můžeme proto rovnou pracovat s kvadratickými faktory ve tvaru součtu čtverců $(x - a)^2 + b^2$ a jejich mocnin. Naše předchozí úvaha opět dobře funguje a zaručuje, že bude možné hledat příslušné sčítance ve tvaru

$$\frac{Bx + C}{((x - a)^2 + b^2)^n}.$$

Obdobně jako v případě reálných kořenů se tedy i v případě mocniny $((x - a)^2 + b^2)^n$ takového kvadratického (nerozložitelného) faktoru vždy podaří najít odpovídající rozklad na parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1 x + B_1}{(x - a)^2 + b^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{((x - a)^2 + b^2)^n}.$$

Konkrétní výsledky lze také snadno ozkoušet v Maplu pomocí volání procedury „convert(h, parfrac, x)“, které rozloží výraz h polynomiálně závislý na proměnné x na parciální zlomky. □

Všechny výše uvedené parciální zlomky už umíme integrovat. Připomeňme, že ty poslední zmíněné vedou mimo jiné na integrály diskutované v Příkladě 6.22.

Celkově můžeme shrnout, že racionální funkce $f(x)/g(x)$ lze poměrně snadno integrovat, pokud se podaří najít příslušný rozklad polynomu ve jmenovateli $g(x)$. Při výpočtu Newtonových integrálů jsou ale problematické body

nespojivosti racionálních funkcí lomených, v jejichž okolí jsou tyto funkce neohrazené. Tomuto problému se budeme obecně ještě věnovat později (viz odstavec 6.30 níže).

6.11

6.24. Riemannův integrál. Myšlenku počítat integrál jako



vyjádření plochy vymezené grafem funkce a osou x je třeba zpřesnit. To nyní učiníme a v zápleť dokážeme, že pro všechny spojité funkce tato definice dává stejné výsledky jako Newtonův integrál.

Uvažme reálnou funkci f definovanou na intervalu $[a, b]$ a zvolme dělení tohoto intervalu spolu s výběrem reprezentantů ξ_i jednotlivých částí, tj. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a zároveň $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Normou dělení nazýváme číslo $\min_i \{x_i - x_{i-1}\}$. Riemannův součet odpovídající zvolenému dělení s reprezentanty $\Xi = (x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ definujeme jako

$$S_{\Xi} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Řekneme, že Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a, b]$ existuje, jestliže pro každou posloupnost dělení s reprezentanty (Ξ_k) s normou dělení jdoucí k nule existuje limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\Xi_k} = S,$$

jejíž hodnota navíc nezávisí na volbě posloupnosti dělení a reprezentantů. Píšeme v takovém případě

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Tato definice nevypadá příliš prakticky, nicméně nám dovolí snadno sformulovat a dokázat některé jednoduché vlastnosti Riemannova integrálu:

Věta. (1) Je-li f omezená reálná funkce definovaná na reálném intervalu $[a, b]$ a $c \in [a, b]$ nějaký vnitřní bod, potom integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje tehdy a jen tehdy, když existují oba integrály $\int_a^c f(x) dx$ a $\int_c^b f(x) dx$. V takovém případě pak také platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(2) Jsou-li f a g dvě reálné funkce definované na intervalu $[a, b]$ a jestliže existují integrály $\int_a^b f(x) dx$ a $\int_a^b g(x) dx$, pak existuje také integrál jejich součtu a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(3) Je-li f reálná funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, $C \in \mathbb{R}$ je konstanta a jestliže existuje integrál $\int_a^b f(x) dx$, pak existuje také integrál $\int_a^b C \cdot f(x) dx$ a platí

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Řešení. Příklad (a). Jde o jednoduchý příklad na tzv. první substituční metodu, jejíž podstatou je zapsat integrál ve tvaru

$$(6.7) \quad \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

pro jisté funkce f a φ . Takový integrál lze totiž pomocí substituce $y = \varphi(x)$ (nahrazujeme rovněž $dy = \varphi'(x) dx$, což dostáváme diferencováním $y = \varphi(x)$) převést na integrál $\int f(y) dy$. Substitucí $y = \cos x$, kdy je $dy = -\sin x dx$, tak obdržíme

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \cdot \sin x dx &= -\int \cos^5 x (-\sin x) dx = -\int y^5 dy = \\ &= -\frac{y^6}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C. \end{aligned}$$

Příklad (b). Při vyjádření

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \cdot \sin^2 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 \sin^2 x \cdot \cos x dx = \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x \cdot \cos x dx \end{aligned}$$

se nabízí substituce $t = \sin x$, která dává

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \cdot \sin^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int (1 - t^2)^2 t^2 dt = \\ \int t^6 - 2t^4 + t^2 dt &= \frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Příklad (c). Neboť je sinus i kosinus v sudé mocnině, nelze postupovat jako v předchozím případě. Zkusme proto použít tzv. druhou substituční metodu znamenající přechod od $\int f(y) dy$ ke tvaru (6.7) pro $y = \varphi(x)$. Situace, kdy nahrazujeme jednodušší výraz za komplikovanější, může působit překvapivě. Nesmíme však zapomínat, že onen komplikovanější integrál může mít takovou podobu, že jej budeme schopni spočítat. Chceme určit antiderivace funkce $f(x) = \operatorname{tg}^4 x$. Má tedy smysl uvažovat substituci $u = \operatorname{tg} x$. Získáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} u \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{array} \right| = \int \frac{u^4}{1+u^2} du = \int u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1} du = \\ \frac{u^3}{3} - u + \operatorname{arctg} u + C &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

Příklad (d). Platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^5 + x}} dx &= \left| \begin{array}{l} z^6 = x \\ 6z^5 dz = dx \end{array} \right| = \int \frac{1 - z^2 + z^3}{z^5 + z^6} 6z^5 dz = \\ 6 \int \frac{1 - z^2 + z^3}{1+z} dz &= 6 \int z^2 - 2z + 2 - \frac{1}{z+1} dz = \\ 6 \left(\frac{z^3}{3} - z^2 + 2z - \ln|z+1| \right) + C &= \\ 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 12\sqrt{x} - 6 \ln(\sqrt{x} + 1) + C, \end{aligned}$$

kde jsme opět substitucí lehce určili

$$\int \frac{dz}{z+1} = \left| \begin{array}{l} v = z + 1 \\ dv = dz \end{array} \right| = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C = \ln|z + 1| + C, \quad z \neq -1.$$

□

6.33. Kombinací metody per partes a substituční metody určete

(a) $\int x^3 e^{-x^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\int x \arcsin x^2 dx$, $x \in (-1, 1)$.

Řešení. Případ (a). Substituční metoda vede na integrál

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t e^t dt,$$

který lze snadno vypočítat metodou per partes se ziskem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int t e^t dt &= \left| \begin{array}{l} F(t) = t \\ G'(t) = e^t \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(t) = 1 \\ G(t) = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{2} \int e^t dt = \\ &= \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

Případ (b). Podobně obdržíme

$$\begin{aligned} \int x \arcsin x^2 dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \arcsin t dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} F(t) = \arcsin t \\ G'(t) = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ G(t) = t \end{array} \right| = \frac{1}{2} t \arcsin t - \frac{1}{2} \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 1 - t^2 \\ du = -2t dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{2} \sqrt{u} + C = \\ &= \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{2} \sqrt{1-t^2} + C = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C. \end{aligned}$$

6.34. Dvěma různými způsoby vypočítejte integrál

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Řešení. Metoda per partes dává

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} F(x) = \sqrt{1-x^2} \\ G'(x) = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ G(x) = x \end{array} \right| = \quad \boxed{6.12} \\ &= x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \arcsin x, \end{aligned}$$

odkud plyne

$$2 \int \sqrt{1-x^2} dx = x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C,$$

tj.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C.$$

Substituční metodou pak s pomocí (6.6) dostáváme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin y \\ dx = \cos y dy \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cdot \cos y dy = \\ &= \int \cos^2 y dy = \frac{1}{2} (y + \sin y \cdot \cos y) + C = \\ &= \frac{1}{2} (\sin y \cdot \sqrt{1-\sin^2 y} + y) + C = \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C, \end{aligned}$$

kde $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ pro $x \in (-1, 1)$, a mj. tak je

$$0 < \cos y = |\cos y| = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1-\sin^2 y}.$$

DŮKAZ. (1) Předpokládejme nejprve, že existuje integrál přes celý interval. Jistě se lze při jeho výpočtu omezit na limity Riemannových součtů, jejichž dělení mají bod c mezi svými dělicími body. Každý takový součet dostaneme jako součet dvou dílčích Riemannových součtů. Pokud by tyto dílčí součty v limitě závisely na zvolených rozděleních a reprezentantech, pak by celkové součty nemohly být v limitě na volbách nezávislé (stačí ponechat jednu posloupnost dělení podintervalu stejnou a druhou měnit tak, aby se limita změnila).

Naopak, jestliže existují Riemannovy integrály na obou podintervalech, jsou libovolně přesně aproximovatelné Riemannovými součty a to navíc nezávisle na jejich volbě. Pokud do libovolné posloupnosti Riemannových součtů přes celý interval $[a, b]$ přidáme v jejich děleních jeden dělicí bod c navíc, změníme hodnotu celého součtu i částečných součtů přes intervaly patřící do $[a, c]$ a $[c, b]$ nejvýše o násobek normy dělení a možných rozdílů omezené funkce f na celém $[a, b]$. To je číslo jdoucí libovolně blízko k nule při zmenšující se normě dělení. Proto nutně i částečné Riemannovy součty naší funkce nutně konvergují k limitám, jejichž součtem je Riemannův integrál přes $[a, b]$.

(2) V každém Riemannově součtu se součet funkcí projevuje jako součet hodnot ve vybraných reprezentantech. Protože je násobení reálných čísel distributivní, vyplývá odtud právě dokazované tvrzení. \square

(3) Stejná úvaha jako v předchozím případě. \square

Následující výsledek je zcela zásadní pro pochopení vztahu mezi integrálem a derivací:

6.25. Věta (Základní věta diferenciálního počtu). *Pro každou spojitou funkci f na konečném intervalu $[a, b]$ existuje její Riemannův integrál $\int_a^b f(x) dx$. Navíc je funkce $F(t)$ zadaná na intervalu $[a, b]$ pomocí Riemannova integrálu*

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

antiderivací funkce f na tomto intervalu.

Celý důkaz tohoto významného tvrzení bude poněkud delší. V prvním kroku pro důkaz existence integrálu použijeme alternativní definici, ve které nahrazujeme výběr reprezentantů a příslušné hodnoty $f(\xi_i)$ pomocí suprem hodnot $f(x)$ v příslušném podintervalu, resp. pomocí infim $f(x)$ tamtéž. Hovoříme o horních Riemannových součtech, resp. dolních Riemannových součtech (někdy je v literatuře tento postup označován jako *Darbouxův integrál*).

6.26. Horní a dolní Riemannův integrál. Protože je naše funkce spojitá, je jistě i omezená na uzavřeném intervalu a proto jsou všechna výše uvažovaná suprema i infima konečná. Je tedy *horní Riemannův součet* příslušný dělení $\Xi = (x_0, \dots, x_n)$ zadán výrazem



$$S_{\Xi, \text{sup}} = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

zatímco dolní Riemannův součet je

$$S_{\Xi, \text{inf}} = \sum_{i=1}^n \left(\inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \right) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Protože pro každé dělení $\Xi = (x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ platí

$$(6.3) \quad S_{\Xi, \text{inf}} \leq S_{\Xi, \xi} \leq S_{\Xi, \text{sup}}$$

a infima i suprema lze libovolně přesně aproximovat skutečnými hodnotami, lze tušit, že bude Riemannův integrál existovat právě, když bude existovat pro libovolné posloupnosti dělení s normou jdoucí k nule limita horních i dolních součtů a tyto si budou rovny. Dokážeme, že tomu tak skutečně musí být pro všechny omezené funkce:

Věta. *Nechť je funkce f omezená na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak*

$$S_{\text{sup}} = \inf_{\Xi} S_{\Xi, \text{sup}}, \quad S_{\text{inf}} = \sup_{\Xi} S_{\Xi, \text{inf}}$$

jsou limity všech posloupností horních, resp. dolních, součtů s normou jdoucí k nule.

Riemannův integrál omezené funkce f přes interval $[a, b]$ existuje právě, když $S_{\text{sup}} = S_{\text{inf}}$.

DŮKAZ. Pokud zjermíme nějaké rozdělení Ξ_1 na Ξ_2 přidáním dalších bodů, zřejmě bude

$$S_{\Xi_1, \text{sup}} \geq S_{\Xi_2, \text{sup}}, \quad S_{\Xi_1, \text{inf}} \leq S_{\Xi_2, \text{inf}}.$$

Každá dvě dělení mají společné zjermění, jsou tedy hodnoty

$$S_{\text{sup}} = \inf_{\Xi} S_{\Xi, \text{sup}}, \quad S_{\text{inf}} = \sup_{\Xi} S_{\Xi, \text{inf}}$$

dobrymi kandidáty na limity horních a dolních součtů. Skutečně, pokud existuje společná limita horních součtů S nezávislá na zvolené posloupnosti dělení, musí to být právě S_{sup} , a podobně pro dolní součty.

Naopak, uvažme nějaké pevně zvolené dělení Ξ s n vnitřními dělicími body intervalu $[a, b]$, a jiné dělení Ξ_1 , jehož norma je hodně malé číslo δ . Ve společném zjermění Ξ_2 bude jen n intervalů, které budou do součtu $S_{\Xi_2, \text{sup}}$ přispívat případně menším příspěvkem než je tomu v Ξ_1 . Protože je f omezená funkce na $[a, b]$, bude každý z těchto příspěvků ohraničený univerzální konstantou krát norma dělení (tj. maximální velikost příslušného intervalu v dělení). Při zvolení dostatečně malého δ tedy nebude vzdálenost $S_{\Xi_1, \text{sup}}$ od S_{sup} více než dvakrát vzdálenost $S_{\Xi, \text{sup}}$ od S_{sup} .

Jestliže nyní zvolíme libovolnou posloupnost Ξ_k s horními součty, jejichž limitou je S_{sup} , pak pro pevně zvolené $\epsilon > 0$ najdeme vždy k takové, $S_{\Xi_k, \text{sup}}$, $k \geq N$ bude k S_{sup} blíže než o ϵ . Pro ale umíme podle předchozí úvahy najít δ tak, že pro všechna dělení s normou menší než δ budememe se součtem blíže než o 2ϵ . Právě jsme proto ukázali, že pro libovolné číslo $\epsilon > 0$ umíme najít takové $\delta > 0$, že pro všechna

6.35. Stanovte

$$\int e^{\sqrt{x}} dx, \quad x > 0.$$

Řešení. Touto úlohou lze ilustrovat možnosti kombinování substituční metody a metody per partes (v rámci jednoho příkladu). Nejprve použijeme substituci $y = \sqrt{x}$, abychom odstranili odmocninu z argumentu exponenciální funkce. Tím přejdeme k integrálu

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} y^2 = x \\ 2y dy = dx \end{array} \right| = 2 \int y e^y dy.$$

Nyní pomocí per partes určíme

$$\int y e^y dy = \left| \begin{array}{l} F(y) = y \\ G'(y) = e^y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(y) = 1 \\ G(y) = e^y \end{array} \right| = y e^y - \int e^y dy = y e^y - e^y + C.$$

Celkem tedy je

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2y e^y - 2e^y + C = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C.$$

□

6.36. Dokažte, že

$$\frac{1}{2} \sin^4 x = -\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{3}{16}.$$

Řešení. Snadnější, než porovnávat dané výrazy přímo, je ukázat, že funkce na pravé a levé straně rovnosti mají shodné derivace. Je totiž

$$L' = 2 \cos x \sin^3 x = \sin(2x) \sin^2 x,$$

$P' = \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \sin(4x) = \sin 2x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) = \sin(2x) \sin^2 x$. Levá a pravá strana se tedy liší o konstantu. Tuto konstantu určíme porovnáním funkčních hodnot v jednom bodě, například bodě 0. Hodnota obou funkcí je v nule nulová, jsou si tedy rovny. □

C. Integrace racionálních lomených funkcí

6.37. Integrujte

- $\int \frac{6}{x-2} dx$, $x \neq 2$;
- $\int \frac{6}{(x+4)^3} dx$, $x \neq -4$;
- $\int \frac{3x+7}{x^2-4x+15} dx$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\int \frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Případy (a), (b). Platí

$$\int \frac{6}{x-2} dx = \left| \begin{array}{l} y = x - 2 \\ dy = dx \end{array} \right| = \int \frac{6}{y} dy = 6 \ln |y| + C = 6 \ln |x - 2| + C$$

a podobně

$$\int \frac{6}{(x+4)^3} dx = \left| \begin{array}{l} y = x + 4 \\ dy = dx \end{array} \right| = \int \frac{6}{y^3} dy = \frac{6}{-2y^2} + C = -\frac{3}{(x+4)^2} + C.$$

Vidíme, že integrování typů parciálních zlomků, které odpovídají reálným kořenům jmenovatele racionální lomené funkce, je velmi snadné. Navíc zcela obecně lze obdržet

$$\int \frac{A}{x-x_0} dx = \left| \begin{array}{l} y = x - x_0 \\ dy = dx \end{array} \right| = \int \frac{A}{y} dy = A \ln |y| + C = A \ln |x - x_0| + C$$

a

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^n} dx = \left| \begin{array}{l} y = x - x_0 \\ dy = dx \end{array} \right| = \int \frac{A}{y^n} dy = \frac{Ay^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-x_0)^{n-1}} + C$$

pro každé $A, x_0 \in \mathbb{R}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Případ (c). Nyní máme integrovat parciální zlomek odpovídající dvojici komplexně sdružených kořenů. Ve jmenovateli je tedy **polynom** stupně 2 a v čitateli stupně nejvýše 1. Pokud je stupně 1, zapíšeme parciální zlomek tak, abychom v čitateli měli násobek derivace jmenovatele a k tomu přičítali zlomek, v jehož čitateli je již pouze konstanta. Takto dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+7}{x^2-4x+15} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+15} dx + 13 \int \frac{dx}{x^2-4x+15} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 15) + 13 \int \frac{dx}{(x-2)^2+11} = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 15) + \\ &+ \frac{13}{11} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{11}}\right)^2+1} = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-2}{\sqrt{11}} \\ dy = \frac{dx}{\sqrt{11}} \end{array} \right| = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 15) + \frac{13}{\sqrt{11}} \int \frac{dy}{y^2+1} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 15) + \frac{13}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} y + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 15) + \frac{13}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{11}} + C. \end{aligned}$$

Opět můžeme obecně vyjádřit

$$\int \frac{Ax+B}{(x-x_0)^2+a^2} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+a^2} dx + (B+Ax_0) \int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} dx$$

a spočítat

$$\int \frac{2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+a^2} dx = \left| \begin{array}{l} y = (x-x_0)^2+a^2 \\ dy = 2(x-x_0) dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C = \ln((x-x_0)^2+a^2) + C,$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+1} = \left| \begin{array}{l} z = \frac{x-x_0}{a} \\ dz = \frac{dx}{a} \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{a} + C,$$

tj.

$$\int \frac{Ax+B}{(x-x_0)^2+a^2} dx = \frac{A}{2} \ln((x-x_0)^2+a^2) + \frac{B+Ax_0}{a} \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{a} + C,$$

kde hodnoty $A, B, x_0 \in \mathbb{R}, a > 0$ jsou libovolné.

Případ (d). Zbývají parciální zlomky pro vícenásobné komplexní kořeny ve tvaru

$$\frac{Ax+B}{[(x-x_0)^2+a^2]^n}, \quad A, B, x_0 \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

které analogicky upravíme na

$$\frac{A}{2} \cdot \frac{2(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+a^2]^n} + (B+Ax_0) \cdot \frac{1}{[(x-x_0)^2+a^2]^n}.$$

Poté určíme

$$\int \frac{2(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+a^2]^n} dx = \left| \begin{array}{l} y = (x-x_0)^2+a^2 \\ dy = 2(x-x_0) dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y^n} = \frac{1}{(1-n)y^{n-1}} + C = \frac{1}{(1-n)[(x-x_0)^2+a^2]^{n-1}} + C$$

a

dělení s normou nejvýše δ bude $|S_{\Xi, \sup} - S_{\Xi}| < \epsilon$. To je přesné tvrzení, že číslo S_{\sup} je limitou všech posloupností horních součtů s normami dělení jdoucími k nule. Úplně stejně se dokáže i tvrzení pro součty dolní.

Pokud Riemannův integrál neexistuje, existují posloupnosti dělení a reprezentantů s různými limitami Riemannových součtů. Pak ovšem z již dokázaného tvrzení plyne, že budou různé i limity horních součtů a dolních součtů. Naopak, předpokládejme, že $S_{\sup} = S_{\inf}$, pak ovšem i všechny Riemannovy součty posloupností dělení musí mít tutéž limitu díky nerovnostem (6.3). \square

6.27. Stejněměrná spojitost. Prozatím jsme ze spojitosti naší funkce f využili pouze to, že každá taková funkce je na konečném uzavřeném intervalu omezená. Zbývá nám ale ukázat, že pro spojitou funkci je $S_{\sup} = S_{\inf}$.

Z definice spojitosti víme, že pro každý pevně zvolený bod $x \in [a, b]$ a každé okolí $\mathcal{O}_\epsilon(f(x))$ existuje okolí $\mathcal{O}_\delta(x)$ takové, že $f(\mathcal{O}_\delta(x)) \subset \mathcal{O}_\epsilon(f(x))$. Toto tvrzení lze přepsat takto: jsou-li $y, z \in \mathcal{O}_\delta(x)$, tzn. mimo jiné platí

$$|y - z| < 2\delta,$$

je také $f(y), f(z) \in \mathcal{O}_\epsilon(f(x))$, tzn. mimo jiné platí

$$|f(y) - f(z)| < 2\epsilon.$$

Budeme potřebovat globální variantu takové vlastnosti, říkáme jí *stejněměrná spojitost* funkce f :

Věta. *Nechť je f spojitá funkce na uzavřeném konečném intervalu $[a, b]$. Pak pro každé číslo $\epsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny $z, y \in [a, b]$ splňující $|y - z| < \delta$ platí $|f(y) - f(z)| < \epsilon$.*

DŮKAZ. Protože je každý konečný uzavřený interval kompaktní, umíme jej celý pokrýt konečně mnoha okolními $\mathcal{O}_{\delta(x)}(x)$ zmiňovanými v souvislosti se spojitostí výše, přičemž jejich poloměr $\delta(x)$ závisí na středu x zatímco čísla ϵ budeme uvažovat pořád stejná. Zvolíme konečně za δ minimum ze všech (konečně mnoha) $\delta(x)$. Naše spojitá funkce f tedy má požadovanou vlastnost (pouze zaměňujeme čísla ϵ a δ za jejich dvojnásobky). \square

6.28. Dokončení důkazu Věty 6.25. Nyní již snadno dokončíme celý důkaz existence Riemannova integrálu. Zvolme si ϵ a δ jako v předchozí větě o stejnoměrné spojitosti a uvažujme jakékoliv dělení Ξ s n intervaly a normou nejvýš δ . Pak

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sup_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \sup_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) - \inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \right| \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ & \leq \epsilon \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že se zmenšující se normou dělení jsou k sobě horní a dolní součty libovolně blízké. Proto infima a suprema splývají. To jsme potřebovali ukázat.

Pro úplný důkaz základní věty diferenciálního počtu ještě zbývá ověřit tvrzení o existenci antiderivace. Víme již, že pro spojitou funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje pro každé $t \in [a, b]$ integrál $\int_a^t f(x)dx$. Zvolme, stejně jako v tvrzení o stejnoměrné spojitosti, k pevnému malému $\epsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, aby

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$$

pro všechna $0 \leq \Delta x < \delta$ na celém intervalu $[a, b]$. Rozdíl derivace naší funkce $F(t)$ a integrované funkce $f(t)$ je vyjádřen pomocí limity výrazů

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_a^{t+\Delta t} f(x)dx - \int_a^t f(t)dt \right) - f(t)$$

pro Δt jdoucí k nule. Pokud však volíme $0 < \Delta t < \delta$, pak v absolutní hodnotě je tento výraz odhadnut

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \left(\int_a^{t+\Delta t} f(x)dx \right) - f(t) \right| < \epsilon,$$

protože ve výrazu nalevo můžeme libovolně přesně nahradit integrál jeho Riemannovým součtem a ve sčítancích $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ s $\xi_i \in [t, t + \Delta t]$ v jakémkoliv Riemannově součtu jsou $f(\xi)$ vzdáleny od $f(t)$ nejvýše o velikost ϵ a tedy nahrazením $f(t)$ za všechny $f(\xi_i)$ dostáváme nalevo nulový výraz a dopouštíme se chyby nejvýše ϵ .

To ovšem znamená, že existuje v bodě t derivace funkce $F(t)$ zprava a je rovna $f(t)$. Stejně dokážeme výsledek pro derivaci zleva a celá věta 6.25 je dokázána.

6.12a

6.29. Důležité poznámky. (1) Věty 6.25 a 6.24 nám říkají, že integrál je lineární zobrazení

$$\int : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

vektorového prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ do reálných čísel. Je to tedy lineární forma na prostoru $C[a, b]$.

(2) Dokázali jsme, že každá spojitá funkce je derivací nějaké funkce. Newtonův a Riemannův integrál tedy jako koncepty pro spojitou funkci splývají. Riemannův integrál spojitých funkcí lze proto spočítat pomocí rozdílu hodnot $F(b) - F(a)$ antiderivace F .

(3) V prvním kroku důkazu věty 6.25 jsme dokázali důležité tvrzení, že pro omezenou funkci f na intervalu $[a, b]$ vždy existují limity horních součtů i dolních součtů. Říká se jim také *horní Riemannův integrál* a *dolní Riemannův integrál*. Takto lze pro omezenou funkci ekvivalentně definovat i Riemannův integrál (jak jsme konečně v důkazu i činili).

(4) V dalším kroku v důkazu jsme odvodili důležitou vlastnost spojitých funkcí, které se říká *stejněměrná spojitost* na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Zjevně je každá stejnoměrně spojitá funkce také spojitá, naopak to ale na otevřených intervalech platit nemusí.

$$K_n(x_0, a) := \int \frac{1}{[(x-x_0)^2+a^2]^n} dx = \left| \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{[(x-x_0)^2+a^2]^n} \\ G'(x) = 1 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} F'(x) = \frac{-2n(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+a^2]^{n+1}} \\ G(x) = x - x_0 \end{array} \right| = \frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+a^2]^n} + 2n \int \frac{(x-x_0)^2+a^2}{[(x-x_0)^2+a^2]^{n+1}} - \frac{a^2}{[(x-x_0)^2+a^2]^{n+1}} dx = \frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+a^2]^n} + 2n (K_n(x_0, a) - a^2 K_{n+1}(x_0, a)),$$

odkud plyne

$$K_{n+1}(x_0, a) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2n-1}{2n} K_n(x_0, a) + \frac{1}{2n} \frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+a^2]^n} \right),$$

což zřejmě platí také pro $n = 1$. Poslední rekurentní formuli ještě doplníme o v případě (c) odvozený integrál

$$K_1(x_0, a) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{a} + C.$$

V zadaném příkladu je

$$\int \frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2} dx = 15 \int \frac{2x-6}{(x^2-6x+13)^2} dx + 13 \int \frac{1}{(x^2-6x+13)^2} dx$$

a dále

$$\int \frac{2x-6}{(x^2-6x+13)^2} dx = \left| \begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 13 \\ dy = (2x - 6) dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C = -\frac{1}{x^2-6x+13} + C,$$

$$\int \frac{1}{(x^2-6x+13)^2} dx = \int \frac{dx}{[(x-3)^2+2^2]^2} =$$

$$\frac{1}{2^2} \left(\frac{2-1}{2} K_1(3, 2) + \frac{1}{2} \frac{x-3}{(x-3)^2+2^2} \right) =$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C + \frac{1}{2} \frac{x-3}{x^2-6x+13} \right) = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + \frac{1}{8} \frac{x-3}{x^2-6x+13} + C.$$

Celkem tak máme

$$\int \frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2} dx = -\frac{15}{x^2-6x+13} + \frac{13}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + \frac{13}{8} \frac{x-3}{x^2-6x+13} + C = \frac{13}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + C.$$

□

6.38. Integrujte racionální lomené funkce

- $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx, x \neq 0, x \neq 1;$
- $\int \frac{x-4}{5x^2+6x+3} dx, x \in \mathbb{R};$
- $\int \frac{1}{(x-4)(x-2)(x^2+2x+2)} dx, x \neq 2, x \neq 4;$
- $\int \frac{x}{x^4-x^3-x+1} dx, x \neq 1;$
- $\int \frac{2x+1}{(x^2+4x+13)^2} dx, x \in \mathbb{R};$
- $\int \frac{5x^2-12}{x^4-12x^3+62x^2-156x+169} dx, x \in \mathbb{R}.$

Řešení. Všechny zadané integrály budeme počítat takovým způsobem, jakým lze postupovat při integrování racionálních lomených funkcí vždy. Nepoužijeme tedy žádnou specifickou úpravu či substituci. Dokonce rekurentní vzorec pro $K_{n+1}(x_0, a)$, který jsme odvodili v obecné podobě, použijeme pouze pro $x_0 = 0, a = 1$ (a to také tehdy, když bude $n = 0$). Dříve uvedenými postupy tak získáváme

(a)

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx = 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^3} - \int \frac{dx}{x} =$$

$$2 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \ln |x| + C;$$

(b)

$$\int \frac{x-4}{5x^2+6x+3} dx = \frac{1}{10} \int \frac{10x+6}{5x^2+6x+3} dx - \frac{23}{5} \int \frac{dx}{5x^2+6x+3} =$$

$$\frac{1}{10} \ln(5x^2+6x+3) - \frac{23}{25} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{6}{25}} =$$

$$\frac{1}{10} \ln(5x^2+6x+3) - \frac{23}{6} \int \frac{dx}{\left(\frac{5x+3}{\sqrt{6}}\right)^2+1} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{5x+3}{\sqrt{6}} \\ dt = \frac{5}{\sqrt{6}} dx \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{10} \ln(5x^2+6x+3) - \frac{23\sqrt{6}}{30} \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$\frac{1}{10} \ln(5x^2+6x+3) - \frac{23\sqrt{6}}{30} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$\frac{1}{10} \ln(5x^2+6x+3) - \frac{23\sqrt{6}}{30} \operatorname{arctg} \frac{5x+3}{\sqrt{6}} + C;$$

(c)

$$\frac{1}{52} \int \frac{dx}{x-4} - \frac{1}{20} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{130} \int \frac{4x+11}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{52} \ln|x-4| -$$

$$\frac{1}{20} \ln|x-2| + \frac{1}{130} \left(2 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + 7 \int \frac{dx}{x^2+2x+2} \right) =$$

$$\frac{1}{260} \ln \left| \frac{(x-4)^5}{(x-2)^{13}} \right| + \frac{2}{130} \ln(x^2+2x+2) + \frac{7}{130} \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$\left| \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{260} \ln \left| \frac{(x-4)^5(x^2+2x+2)^4}{(x-2)^{13}} \right| + \frac{7}{130} \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$\frac{1}{260} \ln \left| \frac{(x-4)^5(x^2+2x+2)^4}{(x-2)^{13}} \right| + \frac{7}{130} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$\frac{1}{260} \left[\ln \left| \frac{(x-4)^5(x^2+2x+2)^4}{(x-2)^{13}} \right| + 14 \operatorname{arctg}(x+1) \right] + C;$$

(d)

$$\int \frac{x}{x^4-x^3-x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$-\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \end{array} \right| = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$-\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t + C = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

(e)

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+4x+13)^2} dx = \int \frac{2x+4}{(x^2+4x+13)^2} dx - 3 \int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2} =$$

$$\left| \begin{array}{l} t = x^2+4x+13 \\ dt = (2x+4) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} - 3 \int \frac{dx}{[(x+2)^2+9]^2} =$$

$$-\frac{1}{t} - \frac{1}{27} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1\right]^2} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{x+2}{3} \\ du = \frac{1}{3} dx \end{array} \right| = -\frac{1}{x^2+4x+13} -$$

$$\frac{1}{9} \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = -\frac{1}{x^2+4x+13} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2} \frac{u}{u^2+1} \right) + C =$$

$$-\frac{1}{x^2+4x+13} - \frac{1}{18} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} - \frac{1}{18} \frac{\frac{x+2}{3}}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} + C =$$

$$-\frac{1}{18} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} - \frac{1}{6} \frac{x+8}{x^2+4x+13} + C;$$

(f)

$$\int \frac{5x^2-12}{x^4-12x^3+62x^2-156x+169} dx = \int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2} dx =$$

$$5 \int \frac{dx}{x^2-6x+13} + \int \frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2} dx =$$

$$5 \int \frac{dx}{(x-3)^2+4} + 15 \int \frac{2x-6}{(x^2-6x+13)^2} dx + 13 \int \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2} =$$

(5) Uvažme funkci f na intervalu $[a, b]$, která je pouze *po částech spojitá*. To znamená, že je spojitá ve všech bodech $c \in [a, b]$ kromě konečně mnoha bodů *nespojivosti* c_i , $a < c_i < b$. Vzhledem k aditivnosti integrálu vůči intervalu přes který se integruje, viz 6.24(1), existuje podle poslední věty v takovém případě integrál

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

pro všechna $t \in [a, b]$ a derivace funkce $F(t)$ existuje ve všech bodech t , ve kterých je f spojitá. Navíc se snadno ověří, že ve zbývajících bodech je funkce $F(t)$ spojitá, je to tedy spojitá funkce na celém intervalu $[a, b]$. Při výpočtu integrálu pomocí antiderivací je zapotřebí volit její jednotlivé části tak, aby na sebe navazovaly. Pak bude i celý integrál vyčíslen jako rozdíl funkce $F(t)$ v krajních hodnotách.

6.30. Nevlastní a nekonečné integrály. Např. při diskusi integrace racionálních lomených funkcí jsme viděli, že občas bychom rádi pracovali s určitými integrály přes intervaly, v nichž jsou i body, kde integrovaná funkce $f(x)$ má nevlastní (jednostranné) limity. V takovém případě není integrovaná funkce ani spojitá ani omezená a proto pro ni nemusí platit námi odvozené výsledky. Hovoříme o „nevlastním integrálu“.



Jednoduchým východiskem je diskutovat v takovém případě určité integrály na menších intervalech s hranicí blížící se problematickému bodu a zkoumat, zda existuje limitní hodnota takovýchto určitých integrálů. Pokud existuje, řekneme, že příslušný nevlastní integrál existuje a je roven této limitě. Uvedeme postup na jednoduchém příkladě:

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}}$$

je nevlastní integrál, protože uvedená integrovaná funkce $f(x) = (2-x)^{-1/4}$ má v bodě $b = 2$ limitu zleva rovnou ∞ . V ostatních bodech je integrovaná funkce spojitá. Zajímáme se proto o integrály

$$I_\delta = \int_0^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} = \int_\delta^2 y^{-1/4} dy$$

$$= \left[-\frac{4}{3} y^{3/4} \right]_\delta^2 = \frac{4}{3} 2^{3/4} - \frac{4}{3} \delta^{3/4}.$$

Všimněme si, že jsme ve výpočtu substitucí dostali integrál s přepočtenou horní mezí δ a dolní mezí 2. Otočením mezí do obvyklé polohy jsme do výrazu přidali jedno znaménko minus navíc.

Limita pro $\delta \rightarrow 0$ zprava zjevně existuje a spočítali jsme tedy nevlastní určitý integrál

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} = \frac{4}{3} 2^{3/4}.$$

Stejně budeme postupovat, pokud je zadáno integrování přes neohraničený interval. Hovoříme o *nekonečných integrálech*.

Obecně tedy např. pro $a \in \mathbb{R}$

$$I = \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

pokud limita vpravo existuje. Obdobně můžeme mít horní mez integrování konečnou a druhou nekonečnou. Pokud jsou nekonečné obě, počítáme integrál jako součet dvou integrálů s libovolně pevně zvolenou pevnou mezí uprostřed, tj.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx.$$

Existence ani hodnota nezávisí na volbě takové meze, protože její změnou pouze o stejnou konečnou hodnotu měníme oba sčítance, ovšem s opačným znaménkem. Naopak limita při které by stejně rychle šla horní i dolní mez do $\pm\infty$ může vést k odlišným výsledkům! Např.

$$\int_{-a}^a x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-a}^a = 0,$$

přestože hodnoty integrálů $\int_a^\infty x dx$ s jednou pevnou mezí utečou rychle k nekonečným hodnotám.

Při výpočtu určitého integrálu z racionální funkce lomené musíme pečlivě rozdělit zadaný interval podle bodů nespojitosti integrované funkce a spočítat jednotlivé nevlastní integrály každý zvlášť. Navíc je nutné rozdělit celý interval tak, abychom vždy integrovali funkci neohrazenou pouze v okolí jednoho z krajních bodů.

6.17a

6.31. Přírůstky do ZOO. Z počítaných příkladů se může zdát, že je obvyklé najít neurčitý integrál pomocí výrazů složených ze známých elementárních funkcí. To je úplně mylný dojem.



Naopak, drtivá většina spojitých funkcí vede na integrály, které tak vyjádřit neumíme. A to i když integrujeme funkce docela jednoduché. Protože se integrací získané funkce velice často v praxi vyskytují, mnohé mají jména a před nástupem počítačů byly pro potřeby inženýrů vydávány obsáhlé tabulky hodnot takových funkcí. V dalším textu se ještě budeme k metodám, jak numerické aproximace takových funkcí získávat.

Uvedeme si nyní aspoň nějaké příklady. Funkce Sinusintegrál je definovaná vztahem

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Důležité jsou také Fresnelovy sinové a cosinové integrály

$$\text{FresnelS}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

$$\text{FresnelC}(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

Na levém obrázku je průběh funkce $\text{Si}(x)$, na pravém vidíme obě Fresnelovy funkce.

$$\begin{aligned} & \frac{5}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1} + 15 \int \frac{2x-6}{(x^2-6x+13)^2} dx + 13 \int \frac{dx}{[(x-3)^2+4]^2} = \\ & \left| \begin{array}{l} t = \frac{x-3}{2} \\ dt = \frac{1}{2} dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 6x + 13 \\ du = (2x - 6) dx \end{array} \right| = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} + 15 \int \frac{du}{u^2} + \\ & \frac{13}{16} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{5}{2} \arctg t - \frac{15}{u} + \frac{13}{8} \int \frac{dt}{[t^2+1]^2} = \\ & \frac{5}{2} \arctg \frac{x-3}{2} - \frac{15}{x^2-6x+13} + \frac{13}{8} \left(\frac{1}{2} \arctg t + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} \right) + C = \\ & \frac{5}{2} \arctg \frac{x-3}{2} - \frac{15}{x^2-6x+13} + \frac{13}{16} \arctg \frac{x-3}{2} + \frac{13}{16} \frac{\frac{x-3}{2}}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} + C = \\ & \frac{5}{2} \arctg \frac{x-3}{2} + \frac{13}{16} \arctg \frac{x-3}{2} - \frac{15}{x^2-6x+13} + \frac{13}{8} \frac{x-3}{(x-3)^2+4} + C = \\ & \frac{53}{16} \arctg \frac{x-3}{2} + \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + C. \end{aligned}$$

□

6.39. Spočítejte

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} dx, \quad x \neq 1.$$

Řešení. Protože je stupeň polynomu v čitateli nižší než ve jmenovateli, tyto polynomy nemají společný kořen a je zadáno vyjádření jmenovatele ve tvaru součinu kořenových činitelů, známe tvar rozkladu integrované funkce na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

pro $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Pokud tuto rovnici vynásobíme jmenovatelem levé strany, dostaneme identitu

$$x =$$

$$A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)^2,$$

kteřá má platit pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Na obou jejích stranách jsou ale polynomy, a tak rovnost musí nastat rovněž pro $x = 1$. Dosazením této hodnoty ihned obdržíme, že $1 = B(1+2+2)$, tj. $B = 1/5$.

Mohli bychom volit další reálná (příp. komplexní) čísla a dosazovat je do uvedené rovnice. Nelze však již očekávat, že bychom tím přímo určili další z neznámých (pokud nedosadíme kořen jmenovatele). Raději proto budeme porovnávat koeficienty u stejných mocnin polynomů

$$x - \frac{1}{5}(x^2+2x+2) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5},$$

$$\begin{aligned} & A(x-1)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)^2 = \\ & (A+C)x^3 + (A-2C+D)x^2 + (C-2D)x - 2A + D, \end{aligned}$$

čímž získáme systém rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= A + C, \\ -1/5 &= A - 2C + D, \\ 3/5 &= C - 2D, \\ -2/5 &= -2A + D. \end{aligned}$$

Podotkněme, že tato soustava musí mít právě jedno řešení (které je jednoznačně určeno libovolnými třemi z uvedených rovnic). Hledané řešení potom je

$$A = \frac{1}{25}, \quad C = -\frac{1}{25}, \quad D = -\frac{8}{25}.$$

Platí tak

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} dx = \int \frac{dx}{25(x-1)} + \int \frac{dx}{5(x-1)^2} - \int \frac{x+8}{25(x^2+2x+2)} dx = \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \ln(x^2+2x+2) - \frac{7}{25} \operatorname{arctg}(x+1) + C,$$

kde jsme využili

$$\int \frac{x+8}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{7}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + 7 \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) + 7 \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

□

6.40. Určete

(a) $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1} dx, x \in \mathbb{R};$

(b) $\int \frac{x^8}{x^8-1} dx, x \neq \pm 1.$

Řešení. Případ (a). Nejdříve musíme provést dělení polynomů

$$(x^3 + 2x^2 + x - 1) : (x^2 - x + 1) = x + 3 + \frac{3x-4}{x^2-x+1},$$

abychom uvažovali ryze lomenou racionální funkci (stupeň čitatele byl nižší než jmenovatele). Nyní už spočítáme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1} dx &= \int x + 3 dx + \int \frac{3x-4}{x^2-x+1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \ln(x^2-x+1) - \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Případ (b). Platí

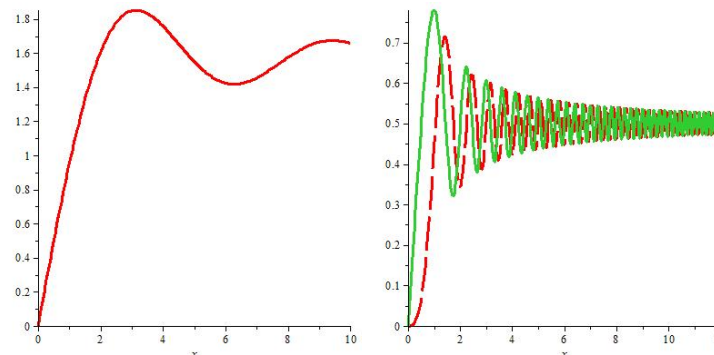
$$\begin{aligned} \int \frac{x^8}{x^8-1} dx &= \int 1 dx + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+1} + \\ &+ \frac{1}{8} \int \frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx - \frac{1}{8} \int \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx = \\ x + \frac{1}{8} \ln|x-1| - \frac{1}{8} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + \frac{\sqrt{2}}{16} \int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx - \\ \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} - \frac{\sqrt{2}}{16} \int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \\ x + \frac{1}{8} \ln|x-1| - \frac{1}{8} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + \\ \frac{\sqrt{2}}{16} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) - \\ \frac{\sqrt{2}}{16} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + C. \end{aligned}$$

6.18

6.41. Vypočítejte

$$\int \frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2-x+1)^2} dx, \quad x \neq 0.$$

Řešení. Platí



Nové typy funkcí dostáváme také, když do integrovaného výrazu povolíme volný parametr, na kterém pak výsledek závisí. Příkladem může být jedna z nejdůležitějších funkcí v matematice vůbec – tzv. Gamma funkce definovaná vztahem

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Lze ukázat, že tato funkce je analytická ve všech bodech $z \notin \mathbb{Z}$ a pro malá $z \in \mathbb{N}$ můžeme počítat:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^0 dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

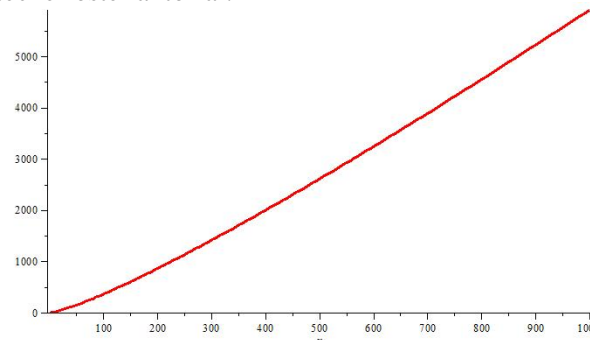
$$\Gamma(2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^1 dt = [-e^{-t} t]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 0 + 1 = 1$$

$$\Gamma(3) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^2 dt = 0 + 2 \int_0^{\infty} e^{-t} t dt = 0 + 2 = 2$$

a pomocí indukce snadno dovodíme, že pro všechna kladná celá čísla n dává tato funkce hodnotu faktoriálu:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Následující obrázek ukazuje průběh funkce $f(x) = \ln(\Gamma(x))$, vidíme z něj tedy v logaritmické škále, jak rychle skutečně roste faktoriál.



Než se pustíme do dalších témat matematické analýzy, uvedeme ještě několik přímých použití pro Riemannův integrál.

6.32. Riemannovsky měřitelné množiny. Sama definice



Riemanova integrálu byla odvozena od představy velikosti plochy v rovině se souřadnicemi x a y ohraničené osou x , hodnotami funkce $y = f(x)$ a hraničními přímkami $x = a$, $x = b$. Přitom je plocha nad osou x dána s kladným znaménkem zatímco hodnoty pod osou vedou ke znaménku zápornému.

Ve skutečnosti víme zatím pouze, co je to plocha rovnoběžnostěnu určeného dvěma vektory, obecněji ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n víme, co je to objem rovnoběžnostěnu. Plochy jiných podmnožin je teprve třeba definovat. Pro některé jednoduché objekty jako třeba mnohoúhelníky je definice dána přirozeně předpokládanými vlastnostmi.

Námi vybudovaný koncept Riemannova integrálu můžeme teď přímo použít k měření „objemu“ jednorozměrných podmnožin.

O podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ řekneme, že je (Riemannovsky) měřitelná, jestliže je funkce $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže je } x \in A \\ 0 & \text{jestliže je } x \notin A. \end{cases}$$

Riemannovsky integrovatelná, tj. existuje integrál (ať už s konečnou nebo nekonečnou hodnotou)

$$m(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x) dx.$$

Funkci χ_A říkáme *charakteristická funkce množiny A*, hodnotě $m(A)$ říkáme *Riemannovská míra množiny A*. Všimněme si, že pro interval $A = [a, b]$ jde vlastně o hodnotu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x) dx = \int_a^b dx = b - a,$$

přesně jak jsme očekávali.

Zároveň má takováto definice „velikosti“ očekávanou vlastnost, že míra sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných a po dvou disjunktních množin vyjde jako součet. Zejména každá konečná množina A má Riemannovskou míru nulovou.

Pokud ale vezmeme spočetné sjednocení, taková vlastnost již neplatí. Např. stačí vzít množinu \mathbb{Q} všech racionálních čísel jakožto sjednocení jednoprvkových podmnožin. Zatímco každá množina o konečně mnoha bodech má podle naší definice míru nulovou, charakteristická funkce $\chi_{\mathbb{Q}}$ není Riemannovsky integrovatelná.

Pro definici plochy (objemu) ve vícerozměrných prostorech budeme umět použít koncept Riemannova integrálu, až jej zobecníme do vícerozměrného případu. Nicméně je dobré si už teď povšimnout, že skutečně původní představa o ploše rovinného útvaru uzavřeného výše uvedeným způsobem grafem funkce bude bezezbytku naplněna.

6.33. Střední hodnota funkce. U konečné množiny hodnot jsme zvyklí uvažovat o jejich střední hodnotě a definujeme ji zpravidla jako aritmetický průměr.

Pro Riemannovsky integrovatelnou funkci $f(x)$ na intervalu (konečném nebo nekonečném) $[a, b]$ je definována její *střední hodnota* výrazem

$$m(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad \boxed{\text{vesuuec4h}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2-x+1)^2} dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+3}{x^2-x+1} dx + \int \frac{x-6}{(x^2-x+1)^2} dx = \\ \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx - \\ \frac{11}{2} \int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} &= \left. \begin{aligned} t &= x^2 - x + 1 \\ dt &= (2x - 1) dx \end{aligned} \right| = \ln|x| + \\ \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} - \frac{11}{2} \int \frac{dx}{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} &= \\ \ln\left|x \sqrt{x^2 - x + 1}\right| + \frac{14}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2t} - \frac{88}{9} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]^2} &= \\ \left. \begin{aligned} u &= \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ du &= \frac{2}{\sqrt{3}} dx \end{aligned} \right| = \ln\left|x \sqrt{x^2 - x + 1}\right| + \frac{7\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{u^2+1} - \frac{1}{2(x^2-x+1)} - \\ \frac{44\sqrt{3}}{9} \int \frac{du}{[u^2+1]^2} &= \ln\left|x \sqrt{x^2 - x + 1}\right| + \frac{7\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2(x^2-x+1)} - \\ \frac{44\sqrt{3}}{9} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2} \frac{u}{u^2+1}\right) + C &= \ln\left|x \sqrt{x^2 - x + 1}\right| + \\ \frac{7\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{22\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2(x^2-x+1)} - \frac{22\sqrt{3}}{9} \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} + C &= \\ \ln\left|x \sqrt{x^2 - x + 1}\right| - \frac{\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \frac{11x-4}{x^2-x+1} + C. \end{aligned}$$

□

6.42. Integrujte

- (a) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$, $x \in \mathbb{R}$;
 (b) $\int \frac{5 \ln x}{x \ln^3 x + x \ln^2 x - 2x} dx$, $x > 0$, $x \neq e$.

Řešení. Případ (a). Výhodou výše popsané metody integrování racionálních lomených funkcí je její univerzálnost (umíme díky ní najít antiderivace každé racionální lomené funkce). Někdy je však výhodnější použití substituční metody nebo per partes. Např. je

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \left. \begin{aligned} y &= x^2 \\ dy &= 2x dx \end{aligned} \right| = \int \frac{dy}{2(1+y^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y^2} = \\ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Případ (b). Pomocí substituce získáváme integrál racionální lomené funkce

$$\begin{aligned} \int \frac{5 \ln x}{x \ln^3 x + x \ln^2 x - 2x} dx &= \int \frac{5 \ln x}{\ln^3 x + \ln^2 x - 2} \cdot \frac{1}{x} dx = \left. \begin{aligned} y &= \ln x \\ dy &= \frac{1}{x} dx \end{aligned} \right| = \\ \int \frac{5y}{y^3+y^2-2} dy &= \int \frac{1}{y-1} + \frac{-y+2}{y^2+2y+2} dy = \\ \int \frac{1}{y-1} dy - \frac{1}{2} \int \frac{2y+2}{y^2+2y+2} dy + 3 \int \frac{1}{(y+1)^2+1} dy &= \\ \ln|y-1| - \frac{1}{2} \ln(y^2+2y+2) + 3 \operatorname{arctg}(y+1) + C &= \\ \ln|\ln x - 1| - \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + 3 \operatorname{arctg}(\ln x + 1) + C. \end{aligned}$$

□

Pro libovolnou funkci f spojitou a ohraničenou na ohraničeném intervalu (a, b) platí tzv. Newtonův-Leibnizův vzorec

$$(6.8) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b := \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x),$$

kde $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$. Zdůrazněme, že za uvedených podmínek vždy existuje antiderivace F a jako vlastní obě limity v (6.8). K výpočtu určitého integrálu nám tedy stačí najít antiderivaci a určit příslušné jednostranné limity (příp. jen funkční hodnoty, je-li antiderivace spojitá v krajních bodech uvažovaného intervalu).

6.43. Určete

- (a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x^7}}} dx$, $x > 0$;
 (b) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$, $x \neq -\frac{1}{3}$;
 (c) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$, $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$;
 (d) $\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}} dx$, $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$;
 (e) $\int \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} dx$, $x \in (-1, 2)$;
 (f) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} dx$, $x \neq 1$.

Řešení. V tomto příkladu budeme ilustrovat použití substituční metody při integrování výrazů s odmocninami.

Případ (a). Má-li počítaný integrál tvar

$$\int f\left(\sqrt[p(1)]{x}, \sqrt[p(2)]{x}, \dots, \sqrt[p(j)]{x}\right) dx$$

pro jistá čísla $p(1), p(2), \dots, p(j) \in \mathbb{N}$ a racionální lomenou funkcí f (více proměnných), doporučuje se substituce $t^n = x$, kde n je (nejmenší) společný násobek čísel $p(1), \dots, p(j)$. Touto substitucí lze totiž převést integrand (integrovanou funkci) na racionální lomenou funkci, kterou umíme integrovat vždy. Dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x^7}}} &= \int \frac{dx}{x(\sqrt{x + \sqrt{x^2}})} = \left| \begin{array}{l} t^{10} = x, \sqrt[10]{x} = t \\ 10t^9 dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{10t^9}{t^{10}(t^3 + t^4)} dt = \\ &= 10 \int \frac{t^9}{t^7 + t^9} dt = 10 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^5} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 10 \left[\ln t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} - \ln(1+t) \right] + C = \\ &= \ln \frac{x}{(1 + \sqrt[10]{x})^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt{x^2}} + C. \end{aligned}$$

Případ (b). Pro integrály

$$\int f\left(x, \sqrt[p(1)]{ax+b}, \sqrt[p(2)]{ax+b}, \dots, \sqrt[p(j)]{ax+b}\right) dx,$$

kde opět $p(1), \dots, p(j) \in \mathbb{N}$, f je racionální lomený výraz a $a, b \in \mathbb{R}$, volíme substituci $t^n = ax + b$ při zachování významu n . Takto obdržíme

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t^3 = 3x+1 \\ dx = t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^3-1}{3} + 1}{t} t^2 dt = \int \frac{t^3-1+3}{3} t dt = \\ &= \frac{1}{3} \int t^4 + 2t dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^5}{5} + t^2 \right) + C = \frac{t^2}{3} \left(\frac{t^3}{5} + 1 \right) + C = \\ &= \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{3} \left(\frac{3x+1}{5} + 1 \right) + C = \sqrt[3]{(3x+1)^2} \frac{x+2}{5} + C. \end{aligned}$$

Případ (c). Dalším zobecněním jsou integrály typu

$$\int f\left(x, \sqrt[p(1)]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[p(2)]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[p(j)]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

přičemž se navíc požaduje pouze to, aby hodnoty $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňovaly nabízející se podmínku $ad - bc \neq 0$. Při zachování významu uvedených symbolů nyní klademe $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$. Konkrétně je

Z definice je $m(f)$ výška obdélníka (s orientací podle znaménka) nad intervalem $[a, b]$, který má stejnou plochu jako je plocha mezi osou x a grafem funkce $f(x)$.

6.34. Délka prostorové křivky. Námi vybudovaný integrál jde také dobře použít pro výpočet *délky křivky* ve vícerozměrném vektorovém prostoru \mathbb{R}^n . Pro jednoduchost si to předvedeme na příkladu křivky v rovině \mathbb{R}^2 se souřadnicemi x, y . Mějme tedy parametrický popis křivky $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,



$$F(t) = [g(t), f(t)]$$

a představme si ji jako dráhu pohybu. Derivací tohoto zobrazení dostaneme hodnoty, které budou odpovídat rychlosti pohybu po takovéto dráze. Proto celková délka křivky (tj. dráha uražená za dobu mezi hodnotami $t = a, t = b$) bude dána integrálem přes interval $[a, b]$, kde integrovanou funkcí $h(t)$ budou právě velikosti vektorů $F'(t)$. Chceme tedy spočítat délku s rovnou

$$s = \int_a^b h(t) dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt.$$

Ve speciálním případě, kdy křivka je grafem funkce $y = f(x)$ mezi body $a < b$ obdržíme pro její délku

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Tentýž výsledek lze intuitivně vidět jako důsledek Pythagorovy věty: pro lineární přírůstek délky křivky Δs odpovídající přírůstku Δx proměnné x spočteme totiž právě

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

a to při pohledu přímo na naši definici integrálu znamená

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Naopak základní věta diferenciálního počtu (viz 6.25) ukazuje, že na úrovni diferenciálů takto definovaná veličina délky grafu funkce $y = y(x)$ splňuje

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

přesně dle očekávání.

Jako snadný příklad spočteme délku jednotkové kružnice jako dvojnásobek integrálu funkce $y = \sqrt{1-x^2}$ v mezích $[-1, 1]$. Víme již, že musí vyjít číslo 2π , protože jsme takto číslo π definovali.

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2[\arcsin x]_{-1}^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Jestliže v předchozím výpočtu budeme počítat s

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - (x/r)^2}$$

(e)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} &= \int \frac{dx}{1+\sqrt{-(x-2)(x+1)}} = \int \frac{dx}{1+(x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} \\ \left. \begin{aligned} t^2 &= \frac{2-x}{x+1} \\ x &= \frac{3}{t^2+1} - 1 \\ dx &= \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt \end{aligned} \right\} &= \int \frac{\frac{-6t}{(t^2+1)^2}}{1+\frac{3}{t^2+1}t} dt = \int \frac{-6t}{(t^2+1)^2} \frac{t^2+1}{t^2+3t+1} dt = \\ &= \int \frac{-6t}{(t^2+1)(t^2+3t+1)} dt = \\ &= \int \left(-\frac{4}{5} \frac{\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}} - \frac{2}{t^2+1} - \frac{4}{5} \frac{\sqrt{5}}{-2t-3+\sqrt{5}} \right) dt = \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| 2t+3+\sqrt{5} \right| - 2 \operatorname{arctg} t + \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| -2t-3+\sqrt{5} \right| + C = \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| 2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + 3 + \sqrt{5} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| -2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - 3 + \sqrt{5} \right| + C = \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \frac{2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}+3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}+3+\sqrt{5}}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + C; \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} &= \left. \begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1} &= x+t \\ x^2+x+1 &= x^2+2xt+t^2 \\ x &= -\frac{t^2+2t-2}{2t-1} + 1 \\ dx &= \frac{-2(t^2+t+1)}{(2t-1)^2} dt \end{aligned} \right\} = \\ &= \int \frac{\frac{-2(t^2+t+1)}{(2t-1)^2}}{-\frac{t^2+2t-2}{2t-1} \frac{t^2+t+1}{2t-1}} dt = \int \frac{2}{t^2+2t-2} dt = \\ &= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{t+1-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{t+1+\sqrt{3}} \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| t+1-\sqrt{3} \right| - \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| t+1+\sqrt{3} \right| + C = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}} \right| + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x+1-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1+\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

6.44. Pomocí vhodné substituce spočítejte

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}} dx, \quad x \in \left(-\infty, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right).$$

Řešení. Přestože kvadratický polynom pod odmocninou má reálné kořeny x_1, x_2 , nebudeme příklad řešit pomocí substituce $t^2 = \frac{x-x_2}{x-x_1}$. Sice bychom tak postupovat mohli, ale raději použijeme metodu, kterou jsme zavedli pro případ nereálných kořenů. Tato metoda totiž dává velmi jednoduchý integrál racionální lomené funkce, jak vidíme z výpočtu

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}} &= \left. \begin{aligned} \sqrt{x^2+x-1} &= x+t \\ x^2+x-1 &= x^2+2xt+t^2 \\ x &= \frac{t^2+1}{1-2t} \\ dx &= \frac{-2t^2+2t+2}{(1-2t)^2} dt \end{aligned} \right\} = \int \frac{-2t^2+2t+2}{(t+2)(1-2t)} dt = \\ &= \int \left(1 - \frac{2}{t+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{t-\frac{1}{2}} \right) dt = t - 2 \ln |t+2| - \frac{1}{2} \ln \left| t - \frac{1}{2} \right| + C = \end{aligned}$$

Objem stejného tělesa naroste při změně Δx o násobek tohoto přírůstku a plochy kružnice o poloměru $f(x)$. Proto je dán formulí

$$V(f) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Jako příklad užití vzorců pro obsah a objem odvodíme známé formule pro plochu sféry a objem koule o poloměru r .

$$\begin{aligned} A_r &= 2\pi \int_{-r}^r r \sqrt{1-(x/r)^2} \frac{1}{\sqrt{1-(x/r)^2}} dt \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r dt = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_r &= \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx \\ &= 2r\pi r^2 - \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Stejně jako u kružnice i koule je objektem, který má mezi všemi s daným objemem ten nejmenší povrch. To je důvod, proč jsou mýdlové bubliny vždy prakticky tohoto tvaru.

6.36. Integrální kritérium konvergence řad. Pomocí nevladního integrálu také umíme rozhodnout o konvergenci širší třídy nekonečných řad než doposud:

Věta. *Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ řada taková, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je kladná a nerostoucí na intervalu $(1, \infty)$. Pak tato řada konverguje právě tehdy, když konverguje integrál*

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

DŮKAZ. Pokud interpretujeme integrál, jako plochu pod křivkou, je kritérium zřejmé.

Pokud daná řada diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ máme pro k -tý částečný součet s'_k (řady bez prvního členu) nerovnost

$$s'_k = \sum_{n=2}^k f(n) < \int_1^k f(x) dx,$$

neboť s'_k je dolním součtem Riemannova integrálu $\int_1^k f(x) dx$. Pak ale je

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f(x) dx > \lim_{k \rightarrow \infty} s'_k = \infty$$

a uvažovaný integrál diverguje.

Předpokládáme nyní, že daný integrál konverguje a označme k -tý částečný součet dané řady jako s_k . Potom máme nerovnosti

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f(x) dx < \lim_{k \rightarrow \infty} s_k < \infty,$$

neboť s_k je horním součtem Riemannova integrálu $\int_1^k f(x) dx$ a předpokládáme, že daná řada konverguje. \square

3. Nekonečné řady

Již jsme se při budování našeho zvěřníku funkcí setkali s mocninnými řadami, které přirozeným způsobem rozšiřují skupinu všech polynomů, viz 5.43. Zároveň jsme si říkali, že takto získáme třídu analytických funkcí, ale nedokazovali jsme tehdy ani to, že jsou mocninné řady spojitými funkcemi. Snadno nyní ukážeme, že tomu tak je a že skutečně umíme mocninné řady i diferencovat a integrovat po jednotlivých sčítancích. Právě proto ale také uvidíme, že není možné pomocí mocninných řad získat dostatečně širokou třídu funkcí. Např. nikdy tak nedostaneme jen po částech spojitě periodické funkce, které jsou tak důležité pro modelování a zpracování audio a video signálů.

6.19

6.37. Jak ohočené máme řady funkcí? Vraťme se nyní k diskusi limit posloupností funkcí a součtu řad funkcí z pohledu uplatnění postupů diferenciálního a integrálního počtu. Uvažujme tedy konvergentní řadu funkcí



$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

na intervalu $[a, b]$. Přirozené dotazy jsou:

- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojitě v nějakém bodě $x_0 \in [a, b]$, je spojitá i funkce $S(x)$ v bodě x_0 ?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ diferencovatelné v nějakém bodě $a \in [a, b]$, je v něm diferencovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ Riemannovsky integrovatelné na intervalu $[a, b]$, je integrovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$?

Ukážeme si nejprve na příkladech, že odpovědi na všechny tři takto kladené otázky jsou „NE!“. Poté ale najdeme jednoduché dodatečné podmínky na konvergenci řady, které naopak platnosti všech tří tvrzení zajistí. Řady funkcí tedy obecně moc zvladatelné nejsou, nicméně si umíme vybrat velkou třídu takových, se kterými se už pracuje velmi dobře. Mezi ně našťestí budou patřit mocninné řady.

Pak se ale také zamyslíme nad alternativními koncepcemi integrování, které fungují více uspokojivě i větší třídy funkcí.

6.38. Příklady ošklivých posloupností. (1) Uvažme nejprve funkce

$$f_n(x) = (\sin x)^n$$

na intervalu $[0, \pi]$. Hodnoty těchto funkcí budou ve všech bodech $0 \leq x \leq \pi$ nezáporné a menší než jedna, kromě $x = \frac{\pi}{2}$, kde je hodnota 1. Proto na celém intervalu $[0, \pi]$ budou bod po bodu tyto funkce konvergovat k funkci

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro všechna } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 + x - 1} - x - 2 \ln \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - x + 2 \right) - \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{x^2 + x - 1} - x - \frac{1}{2} \right| + C.$$

Dodejme, že každou doporučenou substitucí (viz dříve uvedené příklady) lze ve většině konkrétních úloh nahradit jinou substitucí, která umožní dospět k výsledku výrazně snazším způsobem. Nespornou výhodou doporučených substitucí však je univerzálnost: jejich zavedením lze vypočítat všechny integrály příslušných typů. \square

6.45. Pro $x > 0$ stanovte

- (a) $\int \frac{(2+5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}} dx$;
 (b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$;
 (c) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx$.

Řešení. Všechny tři zadané integrály jsou tzv. binomické, tj. lze je zapsat jako

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad \text{pro jistá čísla } a, b \in \mathbb{R}, m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Binomické integrály se tradičně řeší aplikací substituční metody. Pokud $p \in \mathbb{Z}$ (nikoli nutně $p < 0$), volí se substituce $x = t^s$, kde s je společný jmenovatel čísel m a n ; pokud $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ a $p \notin \mathbb{Z}$, klade se $a + bx^n = t^s$, kde s je jmenovatel čísla p ; a pokud $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ ($p \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$), zavádí se $a + bx^n = t^s x^n$, kde s je jmenovatel p . V těchto třech případech je potom zaručen přechod k integrování racionální lomené funkce.

Snadno tak vypočítáme

(a)

$$\int \frac{(2+5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{4}} (2+5x)^3 dx = \left. \begin{array}{l} p \in \mathbb{Z} \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = 4 \int (2+5t^4)^3 dt = 4 \int (8 + 60t^4 + 150t^8 + 125t^{12}) dt = 4 \left(8t + 12t^5 + \frac{50}{3} t^9 + \frac{125}{13} t^{13} \right) + C = 4 \left(8\sqrt[4]{x} + 12\sqrt[4]{x^5} + \frac{50}{3} \sqrt[4]{x^9} + \frac{125}{13} \sqrt[4]{x^{13}} \right) + C;$$

(b)

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \left. \begin{array}{l} p \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \\ 1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3 \\ x = (t^3 - 1)^4 \\ dx = 12t^2 (t^3 - 1)^3 dt \end{array} \right| = 12 \int t^3 (t^3 - 1) dt = 12 \int t^6 - t^3 dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = 12 \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} \left(\frac{1 + \sqrt[4]{x}}{7} - \frac{1}{4} \right) + C;$$

(c)

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx =$$

$$\left. \begin{array}{l} p \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \\ 1+x^4 = t^4 x^4 \\ x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}} \\ dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt \end{array} \right\} = - \int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt =$$

$$- \int \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} dt = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1} \right) dt =$$

$$-\frac{1}{4} (\ln |t-1| - \ln |t+1| + 2 \operatorname{arctg} t) + C =$$

$$-\frac{1}{4} \left[\ln \frac{\sqrt[4]{x^4+1}-1}{\sqrt[4]{x^4+1}+1} + 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^4}+1} \right) \right] + C.$$

□

6.46. Pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ integrujte

- (a) $\int \frac{\sin^3 x}{1+4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} dx;$
 (b) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx;$
 (c) $\int \frac{1}{2-\cos x} dx.$

Řešení. Integrály ve tvaru $\int f(\sin x, \cos x) dx$ pro jistou racionální lomenou funkcí f se obvykle řeší substituční metodou. Je-li $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, volí se $t = \sin x$; je-li $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, volí se $t = \cos x$; a je-li $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$, pak $t = \operatorname{tg} x$. Jestliže neplatí žádný z uvedených vztahů, používá se substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Ukážeme si to na zadaných integrálech.

Případ (a). Ve jmenovateli je

$$1 + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 4 + \cos^2 x$$

a v čitateli pouze funkce sinus v liché mocnině, tj. substituce $t = \cos x$, kdy je $dt = -\sin x dx$, umožňuje nahradit všechny siny a kosiny, a tak obdržet

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x (1-\cos^2 x)}{4+\cos^2 x} dx = \int \frac{-(1-t^2)}{4+t^2} dt =$$

$$\int 1 - \frac{5}{4+t^2} dt = t - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \cos x - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2} + C.$$

Případ (b). Neboť je sinus (i kosinus) v sudé mocnině, v rámci substituce $t = \operatorname{tg} x$ provedeme nahrazení

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt,$$

čímž získáme

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{1+2t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} (\sqrt{2}t) + C =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

Případ (c). Nyní použijeme univerzální substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, kdy je

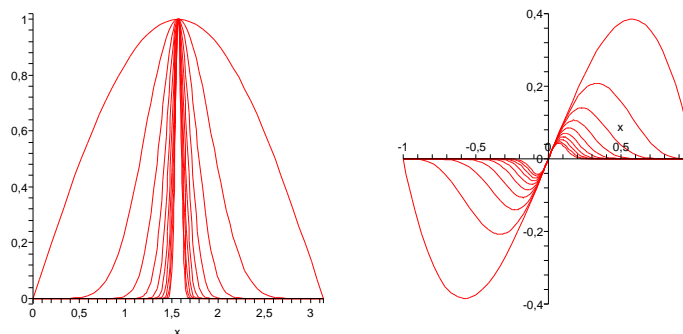
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

S její pomocí určíme

6.20

Zjevně tedy je limita posloupnosti funkcí f_n nespojitou funkcí, ačkoliv jsou všechny funkce $f_n(x)$ spojité. Problematický je přitom dokonce vnitřní bod intervalu.

Tentýž jev umíme najít i pro řady funkcí, protože součet je limitou částečných součtů. Stačí tedy v předchozím příkladě vyjádřit f_n jako n -tý částečný součet. Např. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = (\sin x)^2 - \sin x$, atd. Levý obrázek vykresluje funkce $f_{n^3}(x)$ pro $n = 1, \dots, 10$.



(2) Podívejme se nyní na druhou otázku, tj. na špatně se chovající derivace. Celkem přirozená je idea na podobném principu jako výše sestavit posloupnost funkcí, které budou mít v jednom bodě stále stejnou nenulovou derivaci, ale budou čím dál tím menší, takže bodově dokonvergují k funkci identicky nulové.

Předchozí obrázek napravo vykresluje funkce

$$f_n(x) = x(1-x^2)^n$$

na intervalu $[-1, 1]$ pro hodnoty $n = m^2$, $m = 1, \dots, 10$.

Na první pohled je zjevné, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

a všechny funkce $f_n(x)$ jsou hladké. V bodě $x = 0$ je jejich derivace

$$f'_n(0) = ((1-x^2)^n - 2nx^2(1-x^2)^{n-1})|_{x=0} = 1$$

nezávisle na n . Limitní funkce pro posloupnost f_n přitom má samozřejmě všude derivaci nulovou!

(3) Protipříklad k třetímu tvrzení jsme už viděli v 6.32. Charakteristickou funkci $\chi_{\mathbb{Q}}$ racionálních čísel můžeme vyjádřit jako součet spočetně mnoha funkcí, které budou očíslovány právě racionálními čísly a budou vždy všude nulové, kromě jediného bodu, podle které jsou pojmenovány, kde jsou rovny 1. Riemannovy integrály všech takových funkcí budou nulové, jejich součet ale není Riemannovsky integrovatelnou funkcí.

Právě tento příklad ukazuje na zásadní nedostatek Riemannova integrálu, ke kterému se ještě vrátíme.

6.39. Stejněměrná konvergence. Zjevným důvodem neuspěchu ve všech třech předchozích příkladech je skutečnost, že rychlost bodové konvergence hodnot $f_n(x) \rightarrow f(x)$ se bod od bodu velice liší. Přirozenou myšlenkou tedy je omezit se na takové případy, kdy bude naopak konvergence probíhat přibližně stejně rychle po celém intervalu.



Definice. Říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, b]$ k limitě $f(x)$, jestliže pro každé kladné (malé) číslo ϵ existuje (velké) přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ a všechna $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

O řadě funkcí řekneme, že konverguje stejnoměrně na intervalu, jestliže stejnoměrně konverguje posloupnost jejich částečných součtů.

Graficky si definici můžeme představit tak, že do pásu vzniklého posunutím limitní funkce $f(x)$ na $f(x) \pm \epsilon$ pro libovolně malé, ale pevně zvolené kladné ϵ , vždy padnou všechny funkce $f_n(x)$, až na konečně mnoho z nich. Tuto vlastnost zjevně neměl první a poslední z předchozích příkladů, u druhého ji postrádala posloupnost derivací f'_n .

Následující tři věty lze stručně shrnout tvrzením, že všechna tři obecně neplatná tvrzení v 6.37 platí pro stejnoměrnou konvergenci (pozor ale na jemnosti u derivování).

6.21

6.40. Věta. *Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$. Pak je také $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $[a, b]$.*

DŮKAZ. Chceme ukázat, že pro libovolný pevně zvolený bod $x_0 \in [a, b]$ a jakékoliv pevně zvolené malé $\epsilon > 0$ bude

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

pro všechna x dostatečně blízka k x_0 . Z definice stejnoměrné konvergence je pro nějaké $\epsilon > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in [a, b]$ a všechna dostatečně velká n . Zvolme si tedy nějaké takové n a uvažme $\delta > 0$ tak, aby také

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$$

pro všechna x z δ -okolí x_0 (to je možné, protože všechny $f_n(x)$ jsou spojitě). Pak

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon$$

pro všechna x z námi zvoleného δ -okolí bodu x_0 . \square

6.22

6.41. Věta. *Nechť $f_n(x)$ je posloupnost Riemannovsky integrovatelných funkcí na konečném intervalu $[a, b]$, které na tomto intervalu stejnoměrně konvergují k funkci $f(x)$. Pak také $f(x)$ je Riemannovsky integrovatelná a platí*

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int \frac{dt}{1+3t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C.$$

\square

D. Určité integrály

6.47. Vyčíslete určité integrály

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx.$$

Řešení. Pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x - x + C,$$

jak jsme vypočítali dříve. Odsud vyplývá, že

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = [\operatorname{tg} x - x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}.$$

Určité integrály lze pochopitelně počítat také přímo. Substituce $y = \operatorname{tg} x$ kupř. dává

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \left| \begin{array}{l} y = \operatorname{tg} x; \, dy = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1+y^2} \end{array} \right| = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+y^2} \, dy = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) \, dy = [y - \operatorname{arctg} y]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}.$$

Pouze je třeba nezapomenout změnit při substituci meze integrálu na hodnoty získané dosazením $\sqrt{3} = \operatorname{tg}(\pi/3)$, $1/\sqrt{3} = \operatorname{tg}(\pi/6)$.

Druhý integrál vyčíslíme metodou per partes pro určitý integrál. (Poznamenejme, že antiderivace funkce $y = x \cos^{-2} x$ jsme také stanovili již dříve.) Platí

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \left| \begin{array}{l} F(x) = x \\ G'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 1 \\ G(x) = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = [x \operatorname{tg} x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx = [x \operatorname{tg} x]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = [x \operatorname{tg} x]_0^{\pi/4} + [\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi-2\ln 2}{4}.$$

\square

6.48. Vyčíslete určité integrály

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)^5} \, dx;$
- $\int_{-2}^2 \ln|x| \, dx;$
- $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$
- $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx;$
- $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx;$
- $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} \, dx;$
- $\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{2x+3}} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \, dx;$

$$(h) \int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Řešení. Platí

(a)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^5} = -\frac{1}{4} [(x+2)^{-4}]_0^{\infty} =$$

$$-\frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)^{-4} - 2^{-4} \right) = -\frac{1}{4} \left(0 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{64};$$

(b)

$$\int_{-2}^2 \ln |x| dx = \int_{-2}^0 \ln |x| dx + \int_0^2 \ln |x| dx = 2 \int_0^2 \ln x dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} F(x) = \ln x \\ G'(x) = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = \frac{1}{x} \\ G(x) = x \end{array} \right| = 2 \left([x \ln x]_0^2 - \int_0^2 1 dx \right) =$$

$$2 \left([x \ln x]_0^2 - [x]_0^2 \right) = 2 \left(2 \ln 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) - 2 + 0 \right) =$$

$$4 \ln 2 - 4;$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} y = 1-x^2 \\ dy = -2x dx \end{array} \right| = -\int_1^0 \frac{y^{-1/2}}{2} dy =$$

$$\int_0^1 \frac{y^{-1/2}}{2} dy = [\sqrt{y}]_0^1 = 1;$$

(d)

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array} \right| = 2 \int_1^{\infty} e^{-t} dt = 2 [-e^{-t}]_1^{\infty} =$$

$$-2 \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} - e^{-1} \right) = \frac{2}{e};$$

(e)

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} z = x + \sqrt{x^2-1} \\ dz = \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}} dx \end{array} \right| = \int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{z} dz =$$

$$[\ln z]_1^{2+\sqrt{3}} = \ln(2+\sqrt{3});$$

(f)

$$\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} u = 1/x \\ du = -\frac{1}{x^2} dx \end{array} \right| = -\int_{-1}^{-\infty} u e^u du =$$

$$\int_{-\infty}^{-1} u e^u du = \left| \begin{array}{l} F(u) = u \\ G'(u) = e^u \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(u) = 1 \\ G(u) = e^u \end{array} \right| =$$

$$[u e^u]_{-\infty}^{-1} - \int_{-\infty}^{-1} e^u du = [u e^u]_{-\infty}^{-1} - [e^u]_{-\infty}^{-1} =$$

$$-\frac{1}{e} - \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u - \frac{1}{e} + \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = -\frac{2}{e};$$

(g)

$$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{2x+3}} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x+3}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} p = e^x \\ dp = e^x dx \end{array} \right| = \int_1^e \frac{1}{p^{2+3}} dp + [\operatorname{tg} x]_0^1 = \frac{1}{3} \int_1^e \frac{1}{\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dp +$$

$$\operatorname{tg} 1 = \left| \begin{array}{l} s = \frac{p}{\sqrt{3}} \\ ds = \frac{1}{\sqrt{3}} dp \end{array} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{1/\sqrt{3}}^{e/\sqrt{3}} \frac{1}{s^2+1} ds + \operatorname{tg} 1 =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} [\operatorname{arctg} s]_{1/\sqrt{3}}^{e/\sqrt{3}} + \operatorname{tg} 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{e\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \operatorname{tg} 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz této věty se opírá o zobecnění vlastností Cauchyovských posloupností čísel na stejnoměrnou konvergenci funkcí. Tímto způsobem umíme pracovat s existencí limity posloupnosti integrálů, aniž bychom ji potřebovali znát.

Definice. Řekneme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a, b]$ je *stejněměrně Cauchyovská*, jestliže pro každé (malé) kladné číslo ϵ existuje (velké) přirozené číslo N takové, že pro všechna $x \in [a, b]$ a všechna $n \geq N$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Zřejmě je každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$ také stejnoměrně Cauchyovská na témže intervalu, stačí si povšimnout obvyklého odhadu

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$$

založeného na trojúhelníkové nerovnosti.

Toto pozorování nám už stačí k důkazu naší věty, zastavíme se ale napřed u užitečného obráceného tvrzení:

Tvrzení. Každá stejnoměrně Cauchyovská posloupnost funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a, b]$ stejnoměrně konverguje k nějaké funkci f na tomto intervalu.

DŮKAZ. Z podmínky Cauchyovskosti posloupnosti funkcí vyplývá, že také pro každý bod $x \in [a, b]$ je posloupnost hodnot $f_n(x)$ Cauchyovskou posloupností reálných (případně komplexních) čísel. Bodově tedy nutně konverguje posloupnost funkcí $f_n(x)$ k nějaké funkci $f(x)$.

Ukážeme, že ve skutečnosti konverguje posloupnost $f_n(x)$ ke své limitě stejnoměrně. Zvolme N tak velké, aby

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

pro nějaké předem zvolené malé kladné ϵ a všechna $n \geq N$, $x \in [a, b]$. Nyní zvolíme pevně jedno takové n a odhadneme

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

pro všechna $x \in [a, b]$. \square

DŮKAZ VĚTY. Připomeňme, že každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí je také stejnoměrně Cauchyovská a že Riemannovy součty pro jednotlivé členy naší posloupnosti konvergují k $\int_a^b f_n(x) dx$ nezávisle na výběru dělení a reprezentantů. Proto jestliže platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in [a, b]$, pak také

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f_m(x) dx \right| \leq \epsilon |b - a|.$$

Je tedy posloupnost čísel $\int_a^b f_n(x) dx$ Cauchyovská a proto konvergentní. Současně ale také díky stejnoměrné konvergenci posloupnosti $f_n(x)$ platí pro limitní funkci $f(x)$ ze

stejného důvodu, že její Riemannovy součty jsou libovolně blízké Riemannovým součtům pro funkce f_n s dostatečně velkým n a limitní funkce $f(x)$ bude tedy opět integrovatelná. Zároveň

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \epsilon |b - a|$$

a musí proto jít o správnou limitní hodnotu. \square

Pro příslušný výsledek o derivacích je třeba zvýšené pozornosti ohledně předpokladů:

6.23

6.42. Věta. *Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí diferencovatelných na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k limitní funkci $f(x)$. Dále necht' jsou všechny derivace $g_n(x) = f'_n(x)$ spojité a necht' konvergují na témže intervalu stejnoměrně k funkci $g(x)$. Pak je také funkce $f(x)$ diferencovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí zde $f'(x) = g(x)$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny naše funkce splňují $f_n(a) = 0$ (v opačném případě je pozměníme o konstanty a na výsledku úvah se nic nezmění). Pak ovšem můžeme psát pro všechny $x \in [a, b]$

$$f_n(x) = \int_a^x g_n(t) dt.$$

Protože ale funkce g_n stejnoměrně konvergují k funkci g na celém $[a, b]$, tedy tím spíše na intervalech $[a, x]$, kde $a \leq x \leq b$, platí také

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Protože je funkce g coby stejnoměrná limita spojitých funkcí opět spojitou funkcí, dokázali jsme vše potřebné, viz Věta 6.24 o Riemannově integrálu a antiderivaci. \square

Pro nekonečné řady můžeme předchozí výsledky shrnout takto:

6.24

6.43. Důsledek. *Uvažme funkce $f_n(x)$ na intervalu $[a, b]$.*

(1) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na $[a, b]$ a řada*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$, je i funkce $S(x)$ spojitá na $[a, b]$.

(2) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojitě diferencovatelné na $[a, b]$, a obě řady*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

konvergují stejnoměrně, pak je také funkce $S(x)$ spojitě diferencovatelná na $[a, b]$ a platí $S'(x) = T(x)$, tj.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

(h)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{array}{l} r = \ln x \\ dr = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int_0^{\ln 2} \frac{dr}{r} = [\ln r]_0^{\ln 2} = \ln(\ln 2) - \lim_{r \rightarrow 0^+} \ln r = \ln(\ln 2) + \infty = +\infty.$$

\square

E. Nevlastní integrály

Vzorec (6.8) lze použít také tehdy, když je funkce f neohraničená nebo interval (a, b) je neohraničený. Mluvíme o tzv. nevlastních integrálech. Pro nevlastní integrály však limity na pravé straně mohou být nevlastní, příp. nemusejí vůbec existovat. Pokud jedna z limit neexistuje nebo obdržíme výraz $\infty - \infty$, znamená to, že integrál neexistuje ($\infty - \infty$ tedy v tomto případě nemá charakter neurčitého výrazu). Říkáme, že integrál osciluje. V každém jiném případě máme výsledek (připomeňme, že $\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\pm\infty + a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}$).

6.49. Určete

(a) $\int_1^{\infty} \sin x dx$;

(b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2}$;

(c) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(d) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Řešení. Případ (a). Ihned stanovíme

$$\int_1^{\infty} \sin x dx = [-\cos x]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\cos x + \cos 1.$$

Protože limita na pravé straně neexistuje, uvažovaný integrál osciluje.

Případy (b), (c). Stejně lehce vypočítáme

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} - \arctg x \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} - \arctg x \right) + \frac{1}{1} + \arctg 1 = 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

a ještě snazší pak je

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^4 = 4 - 0 = 4,$$

kde je antiderivace v počátku spojitá zprava (uvažovaná limita je tak rovna funkční hodnotě).

Případ (d). Kdybychom bezmyšlenkovitě vypočítali

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2,$$

obdrželi bychom zjevně chybný výsledek (zápornou hodnotu při integrování kladné funkce). Důvodem, proč Newtonův-Leibnizův vzorec nejde takto aplikovat, je nespojitost uvažované funkce v počátku. Využijeme-li však tzv. pravidla návaznosti

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

kteří platí vždy, když mají integrály na pravé straně smysl, nalezneme správný výsledek

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x}\right) - 1 - 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty - 2 + \infty = +\infty. \quad 6.25$$

Podotkneme, že ze sudosti funkce $y = x^{-2}$ také plyne

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = 2 \cdot \infty = +\infty.$$

6.50. Vypočítejte nevlastní integrály

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Řešení. Protože je nevlastní integrál speciálním případem určitého integrálu, máme k dispozici základní metody, jak jej můžeme počítat. Metodou per partes získáváme

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} F(x) = x^2 \\ G'(x) = e^{-x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 2x \\ G(x) = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= \left[-x^2 e^{-x} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} F(x) = x \\ G'(x) = e^{-x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(x) = 1 \\ G(x) = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} + 2 \left[-x e^{-x} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \\ &= 0 - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} + 2 \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = 0 + 2 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} + 1 \right) = 2. \end{aligned}$$

Substituční metoda potom dává

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \left| \begin{array}{l} y = e^x \\ dy = e^x dx \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \left[\arctg y \right]_0^{\infty} = \lim_{y \rightarrow \infty} \arctg y = \frac{\pi}{2},$$

kde nové meze integrálu plynou z limit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty.$$

6.51. Spočítejte

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Příklad řešíme nejprve substituční metodou a následně opakovaně aplikujeme per partes se ziskem

(3) Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ Riemannovsky integrovatelné na $[a, b]$ a řada

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$ na $[a, b]$, je tamtéž integrovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

6.44. Test stejnoměrné konvergence. Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti čísel. Říkává se tomu často



Weierstrassův test.

Předpokládejme tedy, že máme řadu funkcí $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$ a že navíc známe odhad

$$|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$$

pro vhodné reálné konstanty a_n a všechna $x \in [a, b]$. Okamžitě můžeme odhadnout rozdíly částečných součtů

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$$

pro různé indexy k . Pro $k > m$ dostáváme

$$|s_k(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{n=m+1}^k f_n(x) \right| \leq \sum_{n=m+1}^k |f_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^k a_n.$$

Pokud je řada (nezáporných) konstant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak bude samozřejmě posloupnost jejich částečných součtů Caychyovská. Právě jsme ale spočetli, že v takovém případě bude posloupnost částečných součtů $s_n(x)$ stejnoměrně Caychyovská.

Díky tvrzení dokázanému před chvílí v 6.41 jsme tedy právě dokázali následující

Věta (Weierstrassův test). *Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ a platí $|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$.*

Je-li řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně.

6.45. Důsledky pro mocninné řady. Weierstrassův test je velice užitečný pro diskusi mocninných řad

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

se středem v bodě x_0 .

Při našem prvním setkání s mocninnými řadami jsme ukázali v 5.46, že každá taková řada konverguje na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde tzv. poloměr konvergence $\delta \geq 0$ může být také nula nebo ∞ . (viz také 5.50). Zejména jsme v důkazu věty 5.46 pro ověření konvergence řady $S(x)$ používali srovnání s vhodnou



geometrickou posloupaností. Podle Weistrassova testu je proto řada $S(x)$ stejnoměrně konvergentní na každém kompaktním (tj. konečném) intervalu $[a,b]$ uvnitř intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dokázali jsme tedy

Věta. Každá mocninná řada $S(x)$ je ve všech bodech uvnitř svého intervalu konvergence spojitá a spojitě diferencovatelná. Funkce $S(x)$ je také integrovatelná a derivování i integrování lze provádět člen po členu.

Ve skutečnosti platí také tzv. Abelova věta, která říká, že mocninné řady jsou spojitě i v hraničních bodech svého definičního oboru (včetně případných nekonečných limit). Tu zde nedokazujeme.

Právě dokázané příjemné vlastnosti mocninných řad zároveň poukazují na hranice jejich použitelnosti při modelování závislostí nějakých praktických jevů nebo procesů. Zejména není možné pomocí mocninných řad dobře modelovat po částech spojitě funkce. Jak uvidíme v zápětí, je možné pro konkrétněji vymezené potřeby nacházet lepší sady funkcí $f_n(x)$ než jsou hodnoty $f_n(x) = x^n$. Nejznámějšími příklady jsou Fourierovy řady a tzv. wavelety, které přiblížíme v další kapitole.

6.26a

6.46. Laurentovy řady. V kontextu Taylorových rozvoji se ještě podívejme na hladkou funkci $f(x) = e^{-1/x^2}$ z odstavce 6.6. Viděli jsme, že není analytická v nule, protože tam má všechny derivace nulové. Takže zatímco ve všech ostatních bodech x_0 je tato funkce dán konvergentní Taylorovou řadou s poloměrem konvergence $r = |x_0|$, v počátku řada konverguje jen v jediném bodě.

Pokud ale do mocninné řady pro e^x dosadíme za x výraz $-1/x^2$, dostaneme řadu funkcí

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n x^{-2n} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{(-1)^{|n|}}{|n|!} x^{2n},$$

kteřá bude konvergovat ve všech bodech $x \neq 0$ a dává nám dobrý popis pro chování kolem výjimečného bodu $x = 0$. Podbízí se proto uvažovat následující obecnější řady docela podobné mocninným:

LAURANTOVY ŘADY

Řadu funkcí tvaru

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

nazýváme *Laurentova řada se středem* v x_0 . Řadu nazveme konvergentní, jestliže konvergují samostatně její části s kladnými a zápornými exponenty.

Smysl Laurentových řad je dobře viditelný u racionálních funkcí lomených. Uvažme takovou funkci $S(x) = f(x)/g(x)$ s nesoudělnými polynomy f a g a uvažme kořen

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^n e^{-y} dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} F(y) = y^n \\ G'(y) = e^{-y} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(y) = ny^{n-1} \\ G(y) = -e^{-y} \end{array} \right| = \\ \frac{1}{2} \left([-y^n e^{-y}]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy \right) &= \frac{n}{2} \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} F(y) = y^{n-1} \\ G'(y) = e^{-y} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(y) = (n-1)y^{n-2} \\ G(y) = -e^{-y} \end{array} \right| = \\ \frac{n}{2} \left([-y^{n-1} e^{-y}]_0^{\infty} + (n-1) \int_0^{\infty} y^{n-2} e^{-y} dy \right) &= \\ \frac{n(n-1)}{2} \int_0^{\infty} y^{n-2} e^{-y} dy = \dots = \frac{n(n-1)\dots 2}{2} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy &= \\ \left| \begin{array}{l} F(y) = y \\ G'(y) = e^{-y} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} F'(y) = 1 \\ G(y) = -e^{-y} \end{array} \right| = \frac{n!}{2} \left([-y e^{-y}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y} dy \right) &= \\ \frac{n!}{2} [-e^{-y}]_0^{\infty} = \frac{n!}{2}. \end{aligned}$$

□

F. Délky, obsahy, povrchy, objemy

6.52. Určete délku křivky dané parametricky

$$x = \sin^2(t), \quad y = \cos^2(t),$$

pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Řešení. Možno počítat i přímo (jedná se o část přímky $y = 1 - x$). $\sqrt{2}$. □

6.53. Určete délku křivky dané parametricky

$$x = t^2, \quad y = t^3$$

pro $t \in (0, \sqrt{5})$.

Řešení. $\frac{335}{27}$. □

6.54. Určete plochu ležící napravo od přímky $x = 3$ a dále ohraničenou grafem funkce $y = \frac{1}{x^3-1}$ a osou x .

Řešení. Plocha je dána nevlastním integrálem $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3-1} dx$. Vypočteme jej metodou rozkladu na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 - 1} &= \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{C}{x - 1} \\ 1 &= (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + x + 1) \\ x = 1 &\implies C = \frac{1}{3} \\ x^0: 1 = C - B &\implies B = -\frac{2}{3} \\ x^2: 0 = A + C &\implies A = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

a můžeme psát

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{(x - 1)} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} \right) dx$$

Nyní určíme zvlášť neurčitý integrál $\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx$:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \\ &= \int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \\ & \left. \begin{array}{l} \text{substituce u prvního integrálu} \\ t = x^2 + x + 1 \\ dt = 2(x + \frac{1}{2}) dx \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \left. \begin{array}{l} \text{substituce u prvního integrálu} \\ s = x + \frac{1}{2} \\ ds = dx \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2} \int \frac{1}{s^2+\frac{3}{4}} ds = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s\right)^2+1} ds = \\ & \left. \begin{array}{l} \text{substituce u druhého integrálu} \\ u = \frac{2}{\sqrt{3}}s \\ du = \frac{2}{\sqrt{3}}s ds \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan(u) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Celkem pak pro nevlastní integrál můžeme psát:

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \frac{1}{x^3-1} dx \\ &= \frac{1}{3} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left[\ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_3^\delta \\ &= \frac{1}{3} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \ln|\delta-1| - \frac{1}{2} \ln(\delta^2+\delta+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\delta+1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{3} \ln(2) + \frac{1}{6} \ln(13) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) = \quad \boxed{6.49} \\ &= \frac{1}{6} \ln(13) - \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) - \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} \right| - \frac{1}{3} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\delta+1}{\sqrt{3}}\right) = \\ &= \frac{1}{6} \ln(13) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \end{aligned}$$

6.55. Určete povrch a objem rotačního paraboloidu, který vznikne rotací části paraboly $y = 2x^2$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ kolem osy y .

x_0 polynomu $g(x)$. Je-li násobnost tohoto kořenu s , pak vynásobením dostaneme funkci $\tilde{S}(x) = S(x)(x-x_0)^s$, která už bude na nějakém okolí bodu x_0 analytická a proto můžeme psát

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_{-s}}{(x-x_0)^s} + \dots + \frac{a_{-1}}{x-x_0} + a_0 + a_1(x-x_0) + \dots \\ &= \sum_{n=-s}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní odděleně části

$$S(x) = S_- + S_+ = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Pro řadu S_+ víme z Věty 5.46, že její poloměr konvergence R je dán rovností

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Když však aplikujeme tutéž úvahu na řadu S_- s dosazenými hodnotami $1/x$ za x , zjistíme, že řada $S_-(x)$ konverguje pro $|x-x_0| > r$, kde

$$r^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

Tyto úvahy platí bezesbýtku i pro komplexní hodnoty x dosazované do našich výrazů.

Věta. Laurentova řada $S(x)$ se středem x_0 konverguje pro všechna $x \in \mathbb{C}$ splňující $r < |x-x_0| < R$ a diverguje pro všechna x splňující $|x-x_0| < r$ nebo $|x-x_0| > R$.

Vidíme tedy, že Laurentova řada nemusí konvergovat ve vůbec žádném bodě, protože klidně můžeme dospět k hodnotám $R < r$. Podíváme-li se ale např. na výše uvedený případ racionálních funkcí lomenných rozvíjených do Laurentovy řady v některém z kořenů jmenovatele, pak zjevně je $r = 0$ a tedy, dle očekávání, bude konvergovat skutečně na přestencovém okolí tohoto bodu x_0 , zatímco R bude v tomto případě dáno právě vzdáleností k dalšímu nejbližšímu kořenu jmenovatele. V případě našeho prvního příkladu, funkce e^{-1/x^2} je $r = 0$ a $R = \infty$.

6.47. Numerická přiblížení integrace. Podobně jako na



konci přechází části textu (viz odstavec 6.17), nyní využijeme Taylorova rozvoje k návrhu co nejlepších a zároveň jednoduchých aproximací integrace. Budeme pracovat s integrálem $I = \int_a^b f(x) dx$ analytické funkce $f(x)$ a rovnoměrným dělením intervalu $[a, b]$ pomocí bodů $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ se vzdálenostmi $x_i - x_{i-1} = h > 0$. Body uprostřed intervalů v děleních si označíme $x_{i+1/2}$, hodnoty naší funkce v bodech dělení budeme psát jako $f(x_i) = f_i$.

Příspěvek jednoho dílku dělení k integrálu spočteme pomocí Taylorova rozvoje a předchozí věty. Záměrně přitom integrujeme symetricky kolem středových hodnot, aby se nám

při procesu integrace vzájemně vyrušily derivace lichých stupňů:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} f(x_{i+1/2} + t) dt &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_{i+1/2}) t^n \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_{i+1/2}) t^k dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)!} f^{(2k)}(x_{i+1/2}). \end{aligned}$$

Velmi jednoduchým numerickým přiblížením integrace na jednom dílku dělení je tzv. *trapézové pravidlo*, které pro aproximaci využívá plochu lichoběžníka určeného body $[x_i, 0]$, $[x_i, f_i]$, $[0, x_{i+1}]$, $[x_{i+1}, f_{i+1}]$. Tato plocha je

$$P_i = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})h$$

a celkem tedy integrál I odhadujeme hodnotou

$$I_{\text{trap}} = \sum_{i=0}^{n-1} P_i = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n).$$

Srovnáme nyní I_{trap} s přesnou hodnotou I spočtenou pomocí příspěvků po jednotlivých dílcích dělení. Hodnoty f_i můžeme vyjádřit pomocí prostředních hodnot a derivací $f_{i+1/2}^{(k)}$ takto:

$$\begin{aligned} f_{i+1/2 \pm 1/2} &= f_{i+1/2} \pm \frac{h}{2} f'_{i+1/2} + \frac{h^2}{2!2^2} f''(i+1/2) \\ &\quad \pm \frac{h^3}{3!2^3} f^{(3)}(i+1/2) + \dots, \end{aligned}$$

takže pro příspěvek P_i do odhadu dostáváme

$$P_i = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})h = h(f_{i+1/2} + \frac{h^2}{2!2^2} f''(i+1/2)) + O(h^5).$$

Odtud dostáváme odhad chyby $I - I_{\text{trap}}$ na jednom dílku dělení

$$\begin{aligned} \Delta_i &= h(f_{i+1/2} + \frac{h^2}{24} f''_{i+1/2} - f_{i+1/2} - \frac{h^2}{8} f''_{i+1/2} + O(h^4)) \\ &= \frac{h^3}{12} f''_{i+1/2} + O(h^5). \end{aligned}$$

Celková chyba tedy je odhadnuta jako

$$I - I_{\text{trap}} = \frac{1}{12} n h^3 f'' + n O(h^5) = \frac{1}{12} (b-a) h^2 f'' + O(h^4)$$

kde f'' vyjadřuje odhad pro druhou derivaci f .

Pokud nám lineární aproximace funkce po jednotlivých dílcích nestačí, dalším pokusem může být aproximace kvadratickým polynomem. K tomu ale budeme potřebovat vždy tři body, takže budeme pracovat s dílky dělení po dvou. Předpokládejme tedy že $n = 2m$ a uvažujme x_i s lichými indexy. Budeme požadovat

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f(x_i + h) = f_i + \alpha h + \beta h^2 \\ f_{i-1} &= f(x_i - h) = f_i - \alpha h + \beta h^2 \end{aligned}$$

Řešení. Vzorce uvedené v textech platí pro rotaci křivek kolem osy x ! Je tedy nutno buď integrovat podle danou křivku neznámé y , nebo transformovat.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \pi \\ S &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{8x}} \right) dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{1}{16}} dx \\ &= \pi \frac{17\sqrt{17} - 1}{24} dx. \end{aligned}$$

□

6.56. Vypočítejte obsah S obrazce složeného ze dvou částí roviny vymezených přímkami $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$, osou x a grafem funkce

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomme, že

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} < 0, \quad x \in [0, 1), \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} > 0, \quad x \in (1, 4]$$

a že

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty.$$

První část obrazce (ležící pod osou x) je proto ohraničena křivkami

$$y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

s obsahem daným nevlastním integrálem

$$S_1 = - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx;$$

zatímco druhá část (nad osou x) vymezená křivkami

$$y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

má obsah

$$S_2 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

Neboť

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} + C,$$

jako součet $S_1 + S_2$ získáváme

$$\begin{aligned} S &= - \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} - \frac{3}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{9} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} \right) = \\ &= \frac{3}{2} (1 + \sqrt[3]{9}). \end{aligned}$$

Ukázali jsme mj. to, že uvedený obrazec má konečný obsah, přestože není (shora ani zdola) ohraničený. (Blížíme-li se k $x = 1$ zprava, příp. zleva, jeho výška roste nade všechny meze.) Připomeňme zde neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$. Obrazec je totiž ohraničený, když se omezíme na $x \in [0, 1 - \delta] \cup [1 + \delta, 4]$ při libovolně malém $\delta > 0$. □

6.57. Určete průměrnou rychlost v_p tělesa v časovém intervalu $[1, 2]$, pokud je jeho rychlost

$$v(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t \in [1, 2].$$

Jednotky neuvažujte.

Řešení. K vyřešení příkladu si stačí uvědomit, že hledaná průměrná rychlost je střední hodnota funkce v na intervalu $[1, 2]$. Platí tak

$$v_p = \frac{1}{2-1} \int_1^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_2^5 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{5} - \sqrt{2},$$

přičemž $1+t^2 = x$, $t dt = dx/2$. \square

6.58. Vypočítejte délku s části křivky označované jako traktrix dané parametrickým popisem

$$f(t) = r \cos t + r \ln(\operatorname{tg} \frac{t}{2}), \quad g(t) = r \sin t, \quad t \in [\pi/2, a],$$

kde $r > 0$, $a \in (\pi/2, \pi)$.

Řešení. Protože

$$f'(t) = -r \sin t + \frac{r}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} = -r \sin t + \frac{r}{\sin t} = \frac{r \cos^2 t}{\sin t}, \quad g'(t) = r \cos t$$

na intervalu $[\pi/2, a]$, pro délku s dostáváme

$$s = \int_{\pi/2}^a \sqrt{\frac{r^2 \cos^4 t}{\sin^2 t} + r^2 \cos^2 t} dt = \int_{\pi/2}^a \sqrt{\frac{r^2 \cos^2 t}{\sin^2 t}} dt = -r \int_{\pi/2}^a \frac{\cos t}{\sin t} dt = -r [\ln(\sin t)]_{\pi/2}^a = -r \ln(\sin a).$$

6.50

6.59. Spočítejte objem tělesa vzniklého otáčením omezené plochy, jejíž hranicí je křivka $x^4 - 9x^2 + y^4 = 0$, kolem osy x .

Řešení. Pokud je $[x, y]$ bodem křivky $x^4 - 9x^2 + y^4 = 0$, zřejmě tato křivka prochází rovněž body $[-x, y]$, $[x, -y]$, $[-x, -y]$. Je tedy souměrná vzhledem k oběma osám x , y . Pro $y = 0$ dostáváme $x^2(x-3)(x+3) = 0$, tj. osu x protíná hraniční křivka v bodech $[-3, 0]$, $[0, 0]$, $[3, 0]$. V prvním kvadrantu ji pak můžeme vyjádřit jako graf funkce

$$f(x) = \sqrt[4]{9x^2 - x^4}, \quad x \in [0, 3].$$

Hledaný objem je proto dvojnásobkem (zde uvažujeme $x > 0$) integrálu

$$\int_0^3 \pi f^2(x) dx = \pi \int_0^3 \sqrt{9x^2 - x^4} dx.$$

Pomocí substituce $t = \sqrt{9 - x^2}$ ($x dx = -tdt$) pak snadno spočítáme

$$\int_0^3 \sqrt{9x^2 - x^4} dx = \int_0^3 x \cdot \sqrt{9 - x^2} dx = -\int_3^0 t^2 dt = 9,$$

a tak obdržíme výsledek 18π . \square

což dává (viz podobnost s diferencí pro aproximaci druhé derivace)

$$\beta = \frac{1}{2h^2}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i).$$

Plocha přibližného vyjádření integrálu na dvou dílcích dělení mezi x_{i-1} a x_{i+1} je nyní odhadnuta výrazem

$$P_i = \int_{-h}^h f_i + \alpha t + \beta t^2 dt = 2hf_i + \frac{2}{3}\beta h^3 = 2hf_i + \frac{2h}{6}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i) = \frac{h}{3}(4f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i).$$

Tomuto postupu se říká *Simpsonovo pravidlo*. Celý integrál je nyní přiblížen výrazem

$$I_{\text{Simp}} = \frac{1}{3}h(f_0 + f_{2n} + 4 \sum_{\text{liché } k} f_k + 2 \sum_{\text{sudé } k} f_k).$$

Obdobným postupem jako výše odvodíme, že celková chyba je odhadnuta výrazem

$$I - I_{\text{Simp}} = \frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)} + O(h^5),$$

kde $f^{(4)}$ představuje odhad pro čtvrtou derivaci funkce f .

Závěrem této kapitoly se zastavíme u dalších konceptů integrace. Jako první uvedeme modifikaci Riemannova integrálu, která bude později užitečná v úvahách o pravděpodobnosti a statistice. Ve výkladu vesměs už ale zůstaneme spíše v rovině poznámek a postřehů, zájemce o podrobný výklad bude muset vyhledat jiné zdroje.

6.48. Riemann–Stieltjesův integrál. Při naší představě o integraci jakožto sčítání nekonečně mnoha linearizovaných (nekonečně) malých přírůstků do plochy zadané funkcí $f(x)$ jsme pominuli možnost, že bychom pro různé hodnoty x brali přírůstky různě vážně. To by jistě mohlo být na infinitesimální úrovni zajištěno záměnou diferenciálu dx za $\varphi(x)dx$ pro nějakou vhodnou funkci φ . Takové chování jsme viděli např. při výpočtu délky parametrizované křivky v prostoru.

Jistě si ale také umíme představit, že v některém bodě x_0 je přírůstek do integrované veličiny dán jako $\alpha f(x_0)$ nezávisle na velikosti přírůstku x . Třeba můžeme sledovat pravděpodobnost, že množství promile alkoholu v krvi řidiče při kontrole bude nejvýše x . S docela velkou pravděpodobností získáme hodnotu 0, tedy pro jakýkoliv integrální součet musí dílek obsahující nulu přispět i konstantním nenulovým příspěvkem, nezávisle na normě dělení. Takové chování neumíme namodelovat vynásobením diferenciálu dx nějakou reálnou funkcí. Místo toho můžeme zobecnit Riemannův integrál následovně:

Zvolme na konečném intervalu $[a, b]$ reálnou funkci g . Pro každé dělení Ξ s reprezentanty ξ_i a dělicími body

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$$

definujeme *Riemann–Stieltjesův integrální součet* pro funkci $f(x)$ takto:

$$S_{\Xi} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Řekneme pak, že Riemannův–Stieltjesův integrál

$$I = \int_a^b f(x)dg(x)$$

existuje a má hodnotu I , jestliže pro každé reálné $\epsilon > 0$ existuje norma dělení $\delta > 0$ taková, že pro všechna dělení Ξ s normou menší než δ platí

$$|S_{\Xi} - I| < \epsilon.$$

Např., jestliže zvolíme na intervalu $[0, 1]$ za $g(x)$ po částech konstantní funkci s konečně mnoha body nespojitosti c_1, \dots, c_k a „skoky“

$$\alpha_i = \lim_{x \rightarrow c_i+} - \lim_{x \rightarrow c_i-}$$

pak Riemann–Stieltjesův integrál existuje pro každou spojitou $f(x)$ a je roven

$$I = \int_0^1 f(x)dg(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(c_i).$$

Stejnou technikou, jako jsme používali u Riemannova integrálu, lze i nyní zavést horní a dolní součty a horní a dolní Riemann–Stieltjesův integrál, které mají tu výhodu, že pro omezené funkce vždy existují a jejich hodnoty splývají právě, když existuje Riemann–Stieltjesův integrál ve výše uvedeném smyslu.

Již u Riemannova integrálu jsme měli problém s integrovatelností funkcí, které byly „příliš rozskákané“. Technicky pro funkci $g(x)$ na konečném intervalu $[a, b]$ zavádíme její *variaci* vztahem

$$\text{var}_a^b g = \sup_{\Xi} \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

kde supremum bereme přes všechna dělení Ξ intervalu $[a, b]$. Pokud je supremum nekonečné, říkáme, že $g(x)$ má neomezenou variaci na $[a, b]$, v opačném případě říkáme, že je g funkce s omezenou variací na intervalu $[a, b]$.

Podobně, jak jsme postupovali u Riemannova integrálu, můžeme docela snadno odvodit následující:

Věta. *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou reálné funkce na konečném intervalu $[a, b]$.*

(1) *Pokud je $g(x)$ spojitě diferencovatelné, pak Riemannův integrál nalevo a Riemann–Stieltjesův integrál napravo existují současně a jejich hodnoty jsou si rovny*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b f(x)dg(x)$$

(2) *Pokud je $f(x)$ spojitá a $g(x)$ má konečnou variaci, pak integrál $\int_a^b f(x)dg(x)$ existuje.*

6.60. Torricelliho trychtýř, 1641. Nechť část větve hyperboly $xy = 1$ pro $x \geq a$, kde $a > 0$, rotuje kolem osy x . Ukažte, že obdržené rotační těleso má konečný objem V a současně nekonečný povrch S .

Řešení. Víme, že platí

$$V = \pi \int_a^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{a}\right) \right) = \frac{\pi}{a}$$

a

$$S = 2\pi \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \int_a^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx \geq 2\pi \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \ln a \right) = +\infty.$$

Skutečnost, že uvažované těleso (tzv. Torricelliho trychtýř) nelze natřít za pomoci konečného množství barvy, ale lze jej naplnit konečným množstvím kapaliny, se nazývá Torricelliho paradox. Uvědomme si však, že reálný nátěr barvou má nenulovou tloušťku, což jsme při výpočtu nijak nezohlednili. Kdybychom jej kupř. natírali zevnitř, jediná kapka barvy by nepochybně trychtýř nekonečné délky „ucpala“. \square

Další příklady na výpočet délek křivek, obsahů rovinných útvarů a objemů částí prostoru naleznete na straně 373

6.61. Aplikace integrálního kritéria konvergence. Nyní se opět vraťme k (číselným) řadám. Díky intergrálnímu kritériu konvergence (viz ??) umíme rozhodnout o konvergenci širší třídy řad: Rozhodněte, zda následující sumy konvergují či divergují:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$,
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Řešení. Všimněme si nejprve, že ani u jedné z uvažovaných řad neumíme o její konvergenci rozhodnout na základě podílového či odmocninového kritéria (všechny limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ jsou rovny 1). Pomocí integrálního kritéria pro konvergenci řad pak dostáváme:

a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{\delta \rightarrow \infty} [\ln(t)]_0^{\delta} = \infty,$$

daná řada tedy diverguje.

b)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\delta} = 1,$$

a daná řada tedy konverguje. \square

6.62. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady 51

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

Řešení. Funkce

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln^2(x+1)}, \quad x \in [1, +\infty)$$

je zjevně na svém definičním oboru kladná a nerostoucí, a proto řada v zadání konverguje, právě když konverguje integrál $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. Užitím substituce $y = \ln(x+1)$ (kdy je $dy = dx/(x+1)$) můžeme vyčíslit

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1) \ln^2(x+1)} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{\ln 2}.$$

Řada tedy konverguje. □

G. Stejnomořná konvergence

6.63. Konverguje posloupnost funkcí

$$y_n = e^{\frac{x^4}{4n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

stejnomořně na \mathbb{R} ?

Řešení. Posloupnost $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bodově konverguje ke konstantní funkci $y = 1$ na \mathbb{R} , neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4}{4n^2}} = e^0 = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Z vyčíslení

$$y_n(\sqrt{2n}) = e > 2 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

však vyplývá, že se nejedná o stejnořmnou konvergenci. (V definici stejnořmné konvergence postačuje uvážit $\varepsilon \in (0, 1)$.) □

6.64. Určete, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot n}{n^4 + x^2}$$

stejnomořně konverguje na intervalu $(0, +\infty)$.

Řešení. Při označení

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot n}{n^4 + x^2}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

je

$$f'_n(x) = \frac{n(n^4 - 3x^2)}{2\sqrt{x}(n^4 + x^2)^2}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je nadále libovolné. Nerovnosti $f'_n(x) > 0$ pro $x \in (0, n^2/\sqrt{3})$ a $f'_n(x) < 0$ pro $x \in (n^2/\sqrt{3}, +\infty)$ implikují, že maximum funkce f_n nastává právě v bodě $x = n^2/\sqrt{3}$. Protože

$$f_n\left(\frac{n^2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2} = \frac{\sqrt[4]{27}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

podle Weierstrassova kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnořmně na intervalu $(0, +\infty)$. □

6.49. Kurzweilův integrál. Posledním zastavením bude modifikace Riemannova integrálu, která napravuje nešťastné chování ve třetím bodu v odstavci 6.37, tj. limity neklesajících posloupností integrovatelných funkcí budou opět integrovatelné. Pak budeme moci i v těchto případech měnit pořadí limitního procesu a integrace, jak tomu bylo u stejnořmné konvergence.



Všimněme si napřed v čem je jádro problému. Intuitivně bychom měli předpokládat, že hodně malé množiny musí mít velikost nulovou, a tudíž by změny hodnot funkcí na takových množinách neměly ovlivnit integraci. Navíc, spočetné sjednocení takových „pro integraci zanedbatelných“ množin by mělo mít opět velikost nulovou. Z toho bychom tedy očekali, např. množina racionálních čísel uvnitř konečného intervalu bude mít takovou vlastnost a tedy její charakteristická funkce by měla být integrovatelná a hodnota takového integrálu má být nulová.

Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ má nulovou míru, když pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme najít pokrytí množiny A spočetným systémem otevřených intervalů J_i , $i = 1, 2, \dots$, takových, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) < \varepsilon.$$

V dalším budeme vždy výrokem „funkce f má na množině B danou vlastnost skoro všude“ myslet skutečnost, že má f tuto vlastnost ve všech bodech, až na podmnožinu $A \subset B$ míry nula. Např. tedy charakteristická funkce racionálních čísel je skoro všude nulová, po částech spojitá funkce je skoro všude spojitá atd.

Chtěli bychom nyní modifikovat definici Riemannova integrálu tak, abychom uměli při volbě dělení a příslušných Riemannových součtů eliminovat neblahý vliv hodnot integrované funkce na předem známé množině míry nula. Nabízí se zkusit zajistit, aby dílky v uvažovaných děleních s reprezentanty měly tu vlastnost, že kolem bodů takovéto množiny budou kontrolovatelně malé.

Kladnou reálnou funkci δ na konečném intervalu $[a, b]$ nazýváme kalibr. Dělení Ξ intervalu $[a, b]$ s reprezentanty ξ_i nazýváme δ -kalibrované, jestliže pro všechna i platí

$$\xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i).$$

Pro další postup je podstatné ověřit, že ke každému kalibru δ lze najít nějaké δ -kalibrované dělení s reprezentanty. Tomuto tvrzení se říká Cousinovo lemma a lze jej dokázat např. obvyklým postupem opřeným o vlastnosti suprem. Pro daný kalibr δ na $[a, b]$ si označíme M množinu všech bodů $x \in [a, b]$ takových, že na $[a, x]$ lze δ -kalibrované dělení s reprezentanty najít. Jistě je M neprázdná a ohraničená a má tedy supremum s . Kdyby $s \neq b$, pak bychom uměli najít kalibrované dělení s reprezentantem v s a to vede na spor.

Nyní již můžeme zavést zobecnění Riemannova integrálu takto:

Definice. Funkce f definovaná na konečném intervalu $[a, b]$ má Kurzweilův integrál

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje kalibr δ takový, že pro každé δ -kalibrované dělení s reprezentanty Ξ platí pro příslušný Riemannův součet S_Ξ odhad $|S_\Xi - I| < \epsilon$.

6.52

6.50. Vlastnosti Kurzweilova integrálu. Předně si povšimněme, že jsme při definici Kurzweilova integrálu jen omezili množinu všech dělení, pro které Riemannovy součty bereme v úvahu. Pokud tedy bude naše funkce Riemannovsky integrovatelná, musí mít nutně i Kurzweilův integrál a tyto dva integrály jsou si rovny.

Ze stejného důvodu můžeme zopakovat argumentaci ve Větě 6.24 o jednoduchých vlastnostech Riemannova integrálu a opět ověřit, že se stejně chová i integrál Kurzweilův. Tj., lineární kombinace integrovatelných funkcí $cf(x) + dg(x)$ je opět integrovatelná a její integrál je $c \int_a^b f(x)dx + d \int_a^b g(x)dx$ atd. Při důkazu je potřeba jen promyslet drobné modifikace při diskusi zjemněných dělení, která navíc mají být δ -kalibrovaná.

Podobně lze rozšířit pro případ monotóních posloupností bodově konvergentních funkcí argumentaci ověřující, že limity stejnoměrně konvergující posloupnosti integrovatelných funkcí f_n jsou opět integrovatelné a integrálem limity je limita hodnot integrálů f_n .

Věta. Uvažme funkci f na intervalu $[a, b]$, která je skoro všude nulová. Pak Kurzweilův integrál $\int_a^b f(x)d(x)$ existuje a je roven nule.

DŮKAZ. Jde o pěknou ilustraci myšlenky, že se můžeme zbavit vlivu hodnot na malé množině pomocí chytré volby kalibru. Označme si M příslušnou množinu míry nula, vně které je $f(x) = 0$ a pišme $M_k \subset [a, b]$, $k = 1, \dots$, pro podmnožinu bodů, pro které je $k - 1 < |f(x)| \leq k$. Protože má každá s množin M_k nulovou míru, můžeme ji pokrýt spočetným systémem v součtu libovolně malých a po dvou disjunktních otevřených intervalů $J_{k,i}$. Definujme si nyní kalibr $\delta(x)$ pro $x \in J_{k,i}$ tak, aby celé intervaly $(x - \delta(x), x + \delta(x))$ byly stále obsaženy v $J_{k,i}$. Mimo množinu M pak δ dodefinujeme libovolně.

Pro δ -kalibrované dělení Ξ intervalu $[a, b]$ pak můžeme odhadnout příslušný Riemannův součet

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \right| &= \left| \sum_{\substack{j=0 \\ \xi_j \in M}}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ \xi_j \in M_k}}^{n-1} |f(\xi_j)|(x_{j+1} - x_j) \end{aligned}$$

6.65. Součet řady. Pomocí věty 6.41 „o záměně limity a integrálu posloupnosti stejnoměrně konvergentních funkcí“ nyní sečteme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Využijeme toho, že $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n}$.

Řešení. Na intervalu $(2, \infty)$ konverguje řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$ stejnoměrně. To plyne například z Weierstrasova kriteria: každá z funkcí $\frac{1}{x^{n+1}}$ je klesající na intervalu $(2, \infty)$, její hodnota tedy nepřevyšuje $\frac{1}{2^{n+1}}$; řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ je ovšem konvergentní (jedná se o geometrickou řadu s koeficientem $\frac{1}{2}$). Podle Weierstrasova kriteria tedy řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$ tedy konverguje stejnoměrně. Dokonce umíme výslednou funkci explicitně vyjádřit. Její hodnota v libovolném $x \in (2, \infty)$ je hodnotou geometrické řady s koeficientem $\frac{1}{x}$, označíme-li tedy limitu jako $f(x)$, je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x(x-1)}$$

Použitím (6.43) (3) dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} \\ &= \int_2^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \right) dx \\ &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_2^{\delta} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} [(\ln(\delta-1) - \ln(\delta)) - \ln(1) + \ln(2)] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left[\ln\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right) \right] + \ln(2) = \ln\left(\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\delta-1}{\delta}\right) + \ln(2) = \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

□

6.66. Uvažme funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. Určete

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx.$$

Řešení. Obdobně jako v předchozím případě z Weierstrasova kriteria pro stejnoměrnou konvergenci vypývá, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $(\ln 2, \ln 3)$, neboť každá z funkcí ne^{-nx} je menší než $\frac{n}{2^n}$ na $(\ln 2, \ln 3)$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konverguje, což

plyne třeba z podílového kritéria pro konvergenci řad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^{-(n+1)}}{n2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Celkem podle (6.43) (3) platí

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} n e^{-nx} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [-e^{-nx}]_{\ln 2}^{\ln 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6.53

6.67. Určete následující limitu (postup výpočtu zdůvodněte):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} dx.$$

Řešení. Určeme nejprve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$. Posloupnost těchto funkcí limituje bodově a máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \stackrel{??}{=} \frac{1}{e^x}$$

Předpokládejme, že daná posloupnost konverguje stejnoměrně.

Potom podle (6.41)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} dx &= \int_0^{\infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \right] dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx = 1 \end{aligned}$$

Ověření stejnoměrné konvergence dané posloupnosti necháváme na čtenáři (podotýkáme jenom, že diskuze je složitější než v předchozích příkladech).

□

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\sum_{\substack{j=0 \\ \xi_j \in M_k}}^{n-1} m(J_{k,j}) \right)$$

Pokud tedy pro předem známé ϵ chceme dosáhnout, aby tento odhad byl menší než ϵ , stačí volit pokrytí intervaly $J_{k,j}$ tak, aby

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(J_{k,j}) = \frac{\epsilon}{k2^k}.$$

Pak totiž v posledním výrazu v našem odhadu můžeme dosadit za vnitřní sumu, sečíst geometrickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$ a dostaneme právě požadované ϵ . □

Důsledek. Kurzweilovskou integrovatelnost dané funkce $f(x)$ ani hodnotu jejího integrálu nezměníme, pozměníme-li hodnoty $f(x)$ na množině míry nula.

6.51. Vztah Kurzweilova, Newtonova a Lebesgueova integrálu. K dokončení ...

absolutně spojitě funkce,
vztah neurčitého integrálu a antiderivace
intergrace v absolutní hodnotě
Lebesgueův integrál

H. Doplnující příklady k celé kapitole

6.68. Vyšetřete průběh funkce $\frac{\ln(x)}{x}$ (tj. **mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty) a načrtněte její graf.

Řešení. Def. obor \mathbb{R}^+ , globální maximum $x = e$, infl. bod $x = \sqrt{e^3}$, rostoucí na int $(0, e)$, klesající na (e, ∞) , konkávní $(0, \sqrt{e^3})$, konvexní $(\sqrt{e^3}, \infty)$, asymptoty $x = 0$ a $y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. \square

6.69. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty).

$$\ln(x^2 - 3x + 2) + x.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle 1, 2 \rangle$. Lokální maximum $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, na celém def. oboru konkávní, asymptoty $x = 1, x = 2$. \square

6.70. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty).

$$\ln(x^2 - 3x + 2) + x.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle 1, 2 \rangle$. Lokální maximum $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, na celém def. oboru konkávní, asymptoty $x = 1, x = 2$. \square

6.71. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$(x^2 - 2)e^{x^2-1}.$$

Řešení. Def. obor \mathbb{R} . Lokální minima v $-1, 1$, maximum v 0 . Funkce sudá. Inflexní body $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, bez asymptot. \square

6.72. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$\ln(2x^2 - x - 1).$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle$. Glob. extrémy nemá. Bez inflexních bodů, asymptoty $x = -\frac{1}{2}, x = 1$. \square

6.73. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$\frac{x^2 - 2}{x - 1}.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Bez extrémů. Bez infl. bodů, na int. $(-\infty, 1)$ konvexní, $(1, \infty)$ konkávní, Asymptota bez směrnice $x = 1$. Asymptota se směrnicí $y = x + 1$. \square

Integrovaní

6.74. Spočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2} dx.$$

6.75. 6.76. Vypočtěte integrál

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1 - \cos^2 x} dt.$$

6.77. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}.$$

6.78. Vypočtěte:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x dx$

ii) $\int \sin^2 x \sin 2x dx$

Řešení.

i) $\frac{2}{3}$

ii) $\frac{1}{2} \sin^4 x$

linne rady

□

6.79. Vyčíslíte $\cos \frac{\pi}{10}$ s chybou menší než 10^{-5} .

6.80. Pro konvergentní řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+100}}$$

odhadněte chybu aproximace jejího součtu částečným součtem s_{999} .

6.81. Bez počítání derivací uveďte Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \cos x - 2 \sin x - \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1).$$

Poté rozhodněte, zda je graf funkce f v okolí bodu $[0, 1]$ nad tečnou, pod tečnou.

6.82. Rozviňte funkci

$$y = \frac{1}{3-2x}, \quad x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

v Taylorovu řadu se středem v počátku.

6.83. Funkci $y = e^x$ definovanou na celé reálné přímce vyjádřete jako nekonečný polynom se členy

tvaru $a_n(x-1)^n$ a funkci $y = 2^x$ definovanou na \mathbb{R} vyjádřete jako nekonečný polynom se členy $a_n x^n$.

6.84. Nalezněte funkci f , k níž pro $x \in \mathbb{R}$ konverguje posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^3}{n^2 x^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je tato konvergence stejnoměrná na \mathbb{R} ?

6.85. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x}{n^4 + x^2}, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R},$$

stejně na celé reálné ose?

6.86. Z Taylorova rozvoje se středem v počátku funkce $y = \sin x$ získejte pomocí derivace Taylorův rozvoj funkce $y = \cos x$.

6.87. Odhadněte

- (a) kosinus deseti stupňů s přesností alespoň 10^{-5} ;
 (b) určitý integrál $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4+1}$ s přesností alespoň 10^{-3} .

6.88. Určete mocninný rozvoj se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6.89. Najděte analytickou funkci, jejíž Taylorova řada je

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots,$$

přičemž $x \in [-1, 1]$.

6.90. Ze znalosti součtu geometrické řady odvoďte Taylorovu řadu funkce

$$y = \frac{1}{5+2x}$$

se středem v počátku. Poté určete její poloměr konvergence.

6.91. Nechť je pohyb tělesa (dráha hmotného bodu) popsán(a) funkcí

$$s(t) = -(t-3)^2 + 16, \quad t \in [0, 7]$$

v jednotkách m, s. Stanovte

- (a) počáteční (tj. v čase $t = 0$ s) rychlost tělesa;
 (b) čas a polohu, ve kterých má těleso nulovou rychlost;
 (c) rychlost a zrychlení tělesa v čase $t = 4$ s.

Doplňte, že rychlost je derivace dráhy a zrychlení je derivace rychlosti.

6.92. Zvolte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu 32 m^3 tak, aby na natření jeho stěn a dna bylo potřeba nejmenší množství barvy.

6.93. Číslo 28 rozložte na 2 nezáporné sčítance tak, aby součet druhé mocniny prvního sčítance a třetí mocniny druhého sčítance byl minimální.

6.94. Pomocí první derivace nalezněte reálné číslo $a > 0$, pro které je součet $a + 1/a$ minimální. Poté tuto úlohu řešte bez použití diferenciálního počtu.

6.95. Vepište do půlkruhu o poloměru r obdélník s největším možným obvodem. Uvedte jeho obvod.

6.96. Existuje-li mezi obdélníky o obvodu $4c$ obdélník s maximálním obsahem, stanovte délky jeho stran.

6.97. Zjistěte výšku v a poloměr podstavy r nejobjemnějšího kužele, který se vejde do koule o poloměru R .

6.98. Ze všech trojúhelníků s konstantním obvodem $o > 0$ vyberte ten, jenž má největší obsah.

6.99. Na parabole $2x^2 - 2y = 9$ najděte body s minimální vzdáleností od počátku soustavy souřadnic.

6.100. Vaším úkolem je vyrobit jednolitrovou plechovou konzervu „obvyklého“ tvaru rotačního válce tak, aby na její výrobu bylo potřeba co nejméně plechu. Určete správný poměr mezi její výškou v a poloměrem podstavy r .

6.101. Stanovte obsah rovinného obrazce vymezeného grafem funkce

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

a přímkami

$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

6.102. Zjistěte, jaký obsah má omezený obrazec s hranicí tvořenou parabolou $y = x^2 + 2x - 3$ a osou x .

6.103. Určete obsah S oblasti ohraničené křivkami

$$y = e^{-2x} - 1, \quad y = e^{-x} + 1, \quad x = 0.$$

6.104. Vypočtěte obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného křivkami $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6 - x)^3$.

6.105. V jakém poměru jsou obsahy 2 částí kruhu $x^2 + y^2 \leq 8$ oddělené parabolou $y^2 = 2x$?

6.106. Hmotný bod se pohybuje po přímce v jednom směru, a to rychlostí

$$v(t) = \frac{1+t^2}{1+t^4}, \quad t \in [-1, 1].$$

Jakou dráhu urazí mezi časovými okamžiky $t_1 = -1$, $t_2 = 1$?

6.107. Nechť je dána válcová nádrž na dešťovou vodu s průměrem podstavy 1 m a výškou 2 m, která je naplněna po okraj. Vznikne-li v jejím dně kruhový otvor o průměru 1 cm, přibližně určete, za jak dlouho z ní veškerá voda vyteče. Je znám vztah pro rychlost vytékání $v = c\sqrt{h}$, kde h je výška hladiny kapaliny a c je konstantní s experimentálně zjištěným rozsahem hodnot $2,65 < c < 2,7$.

6.108. Stanovte obsah S neomezené oblasti s hranicí tvořenou grafem funkce

$$y = \frac{1}{x^2+x-2}, \quad x \in [2, +\infty)$$

a přímkami $x = 2$, $y = 0$.

6.109. Spočítejte délku jedné větve prosté cykloidy při poloměru zadávající kružnice $r > 0$, tj. délku křivky

$$f(t) = r(t - \sin t), \quad g(t) = r(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

6.110. Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln(\cos x)$ na intervalu $[0, a]$, přičemž $0 < a < \pi/2$.

6.111. Vypočtěte délku grafu funkce

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

na intervalu $[-1, 2]$.

6.112. Spočtěte délku s grafu funkce $y = \ln(1 - x^2)$ pro $x \in [0, 1/2]$.

6.113. Stanovte objem V tělesa vzniklého otáčením plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a $g(x) = 0$ kolem osy x .

6.114. Vypočítejte objem tělesa vymezeného eliptickým paraboloidem

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

a rovinou $z = 1$.

6.115. Určete objem tělesa ohraničeného plochou, která vznikne rotací křivky $xy + 1 = x^2 + y^2$ okolo x -ové osy.

6.116. Pomocí určitého integrálu odvodte vzorce pro objem V a obsah pláště S rotačního komolého kužele s podstavami o poloměrech r_1 a r_2 a výškou v .

6.117. Vypočtěte obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy ohraničené grafem funkce $y = \frac{x^3}{6}$, osou x a přímkou $x = 2$.

6.118. Stanovte obsah plochy, která vznikne otáčením části křivky $y^2 = 2x$ vyřazené přímkou $2x = 3$ okolo x -ové osy.

6.119. Stanovte obsah rovinného obrazce vymezeného grafem funkce

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

a přímkami

$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

6.120. Zjistěte, jaký obsah má omezený obrazec s hranicí tvořenou parabolou $y = x^2 + 2x - 3$ a osou x .

6.121. Určete obsah S oblasti ohraničené křivkami

$$y = e^{-2x} - 1, \quad y = e^{-x} + 1, \quad x = 0.$$

6.122. Vypočtěte obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného křivkami $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6 - x)^3$.

6.123. V jakém poměru jsou obsahy 2 částí kruhu $x^2 + y^2 \leq 8$ oddělené parabolou $y^2 = 2x$?

6.124. Hmotný bod se pohybuje po přímce v jednom směru, a to rychlostí

$$v(t) = \frac{1+t^2}{1+t^4}, \quad t \in [-1, 1].$$

Jakou dráhu urazí mezi časovými okamžiky $t_1 = -1$, $t_2 = 1$?

6.125. Nechť je dána válcová nádrž na dešťovou vodu s průměrem podstavy 1 m a výškou 2 m, která je naplněna po okraj. Vznikne-li v jejím dně kruhový otvor o průměru 1 cm, přibližně určete, za jak dlouho z ní veškerá voda vyteče. Je znám vztah pro rychlost vytékání $v = c\sqrt{h}$, kde h je výška hladiny kapaliny a c je konstantní s experimentálně zjištěným rozsahem hodnot $2, 65 < c < 2, 7$.

6.126. Stanovte obsah S neomezené oblasti s hranicí tvořenou grafem funkce

$$y = \frac{1}{x^2+x-2}, \quad x \in [2, +\infty)$$

a přímkami $x = 2$, $y = 0$.

6.127. Spočítejte délku jedné větve prosté cykloidy při poloměru zadávající kružnice $r > 0$, tj. délku křivky

$$f(t) = r(t - \sin t), \quad g(t) = r(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

6.128. Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln(\cos x)$ na intervalu $[0, a]$, přičemž $0 < a < \pi/2$.

6.129. Vypočtěte délku grafu funkce

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

na intervalu $[-1, 2]$.

6.130. Spočtěte délku s grafu funkce $y = \ln(1 - x^2)$ pro $x \in [0, 1/2]$.

6.131. Stanovte objem V tělesa vzniklého otáčením plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a $g(x) = 0$ kolem osy x .

6.132. Vypočítejte objem tělesa vymezeného eliptickým paraboloidem

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

a rovinou $z = 1$.

6.133. Určete objem tělesa ohraničeného plochou, která vznikne rotací křivky $xy + 1 = x^2 + y^2$ okolo x -ové osy.

6.134. Pomocí určitého integrálu odvodte vzorce pro objem V a obsah pláště S rotačního komolého kužele s podstavami o poloměrech r_1 a r_2 a výškou v .

6.135. Vypočtete obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy ohraničené grafem funkce $y = \frac{x^3}{6}$, osou x a přímkou $x = 2$.

6.136. Stanovte obsah plochy, která vznikne otáčením části křivky $y^2 = 2x$ vyřazené přímkou $2x = 3$ okolo x -ové osy.

6.137. Nechť je pohyb tělesa (dráha hmotného bodu) popsán(a) funkcí

$$s(t) = -(t - 3)^2 + 16, \quad t \in [0, 7]$$

v jednotkách m, s. Stanovte

- (a) počáteční (tj. v čase $t = 0$ s) rychlost tělesa;
- (b) čas a polohu, ve kterých má těleso nulovou rychlost;
- (c) rychlost a zrychlení tělesa v čase $t = 4$ s.

Doplňme, že rychlost je derivace dráhy a zrychlení je derivace rychlosti.

6.138. Stanovte obsah rovinného obrazce vymezeného grafem funkce

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

a přímkami

$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

6.139. Zjistěte, jaký obsah má omezený obrazec s hranicí tvořenou parabolou $y = x^2 + 2x - 3$ a osou x .

6.140. Určete obsah S oblasti ohraničené křivkami

$$y = e^{-2x} - 1, \quad y = e^{-x} + 1, \quad x = 0.$$

6.141. Vypočtete obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného křivkami $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6 - x)^3$.

6.142. V jakém poměru jsou obsahy 2 částí kruhu $x^2 + y^2 \leq 8$ oddělené parabolou $y^2 = 2x$?

6.143. Hmotný bod se pohybuje po přímce v jednom směru, a to rychlostí

$$v(t) = \frac{1+t^2}{1+t^4}, \quad t \in [-1, 1].$$

Jakou dráhu urazí mezi časovými okamžiky $t_1 = -1$, $t_2 = 1$?

6.144. Nechť je dána válcová nádrž na dešťovou vodu s průměrem podstavy 1 m a výškou 2 m, která je naplněna po okraj. Vznikne-li v jejím dně kruhový otvor o průměru 1 cm, přibližně určete, za jak dlouho z ní veškerá voda vyteče. Je znám vztah pro rychlost vytékání $v = c\sqrt{h}$, kde h je výška hladiny kapaliny a c je konstantní s experimentálně zjištěným rozsahem hodnot $2,65 < c < 2,7$.

6.145. Stanovte obsah S neomezené oblasti s hranicí tvořenou grafem funkce

$$y = \frac{1}{x^2 + x - 2}, \quad x \in [2, +\infty)$$

a přímkami $x = 2$, $y = 0$.

6.146. Spočítejte délku jedné větve prosté cykloidy při poloměru zadávající kružnice $r > 0$, tj. délku křivky

$$f(t) = r(t - \sin t), \quad g(t) = r(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

6.147. Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln(\cos x)$ na intervalu $[0, a]$, přičemž $0 < a < \pi/2$.

6.148. Vypočtete délku grafu funkce

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

na intervalu $[-1, 2]$.

6.149. Spočtete délku s grafu funkce $y = \ln(1 - x^2)$ pro $x \in [0, 1/2]$.

6.150. Stanovte objem V tělesa vzniklého otáčením plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a $g(x) = 0$ kolem osy x .

6.151. Vypočítejte objem tělesa vymezeného eliptickým paraboloidem

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

a rovinou $z = 1$.

6.152. Určete objem tělesa ohraničeného plochou, která vznikne rotací křivky $xy + 1 = x^2 + y^2$ okolo x -ové osy.

6.153. Pomocí určitého integrálu odvodte vzorce pro objem V a obsah pláště S rotačního komolého kužele s podstavami o poloměrech r_1 a r_2 a výškou v .

6.154. Vypočtete obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy ohraničené grafem funkce $y = \frac{x^3}{6}$, osou x a přímkou $x = 2$.

6.155. Stanovte obsah plochy, která vznikne otáčením části křivky $y^2 = 2x$ vyřezané přímkou $2x = 3$ okolo x -ové osy.

Řešení cvičení

6.11.

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n},$$

konverguje pro libovolné reálné x .

6.12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n},$$

konverguje pro libovolné reálné x .

6.13.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

konverguje pro $x \in (-1, 1)$.

$$6.74. \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}\right) + C.$$

$$6.76. \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2+\ln(2)}{2-\ln(2)}\right).$$

$$6.77. -\frac{1}{6} - \frac{2}{9} \ln(2).$$

$$6.79. 1 - \frac{\pi^2}{10^2 \cdot 2} + \frac{\pi^4}{10^4 \cdot 4!}.$$

6.80. Chyba náleží do intervalu $(0, 1/200)$.

$$6.81. 1 - 3x + \frac{7}{24} x^4; \text{ nad tečnou.}$$

$$6.82. \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} x^n.$$

$$6.83. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^2 2}{n!} x^n.$$

6.84. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; ano.

6.85. Nikoli.

$$6.86. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$6.87. (a) 1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!}; (b) \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5}.$$

$$6.88. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} x^{2n+1}.$$

6.89. $y = \operatorname{arctg} x$.6.90. Právě pro $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ je

$$\frac{1}{5+2x} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n x^n.$$

6.91. (a) $v(0) = 6 \text{ m/s}$; (b) $t = 3 \text{ s}$, $s(3) = 16 \text{ m}$; (c) $v(4) = -2 \text{ m/s}$, $a(4) = -2 \text{ m/s}^2$.6.92. $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$.6.93. $28 = 24 + 4$.6.94. $a = 1$.6.95. $2\sqrt{5} r$.6.96. Jedná se o čtverec (s délkou strany c).

$$6.97. v = \frac{4}{3} R, r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R.$$

6.98. Největší obsah $\sqrt{3} o^2/36$ má rovnostranný trojúhelník.6.99. $[2, -1/2]$, $[-2, -1/2]$.6.100. $v = 2r$.6.101. $4(e - e^{-1})$.6.102. $32/3$.6.103. $S = \ln 4 - 1/2$.

- 6.104. $192/5$.
- 6.105. $(\pi + 2/3)$ ku $(3\pi - 2/3)$.
- 6.106. $\pi/2$.
- 6.107. Přibližně za 3 hodiny.
- 6.108. $S = \frac{2}{3} \ln 2$.
- 6.109. $8r$.
- 6.110. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin a}{1-\sin a} = \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.
- 6.111. $(e^2 + e - e^{-2} - e^{-1})/2$.
- 6.112. $s = \ln 3 - 1/2$.
- 6.113. $V = 16\pi/15$.
- 6.114. 2π .
- 6.115. $8\pi/3$.
- 6.116. $V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$; $S = \pi(r_1 + r_2) \sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}$.
- 6.117. $2\pi(\sqrt{5^3} - 1)/9$.
- 6.118. $14\pi/3$.
- 6.119. $4(e - e^{-1})$.
- 6.120. $32/3$.
- 6.121. $S = \ln 4 - 1/2$.
- 6.122. $192/5$.
- 6.123. $(\pi + 2/3)$ ku $(3\pi - 2/3)$.
- 6.124. $\pi/2$.
- 6.125. Přibližně za 3 hodiny.
- 6.126. $S = \frac{2}{3} \ln 2$.
- 6.127. $8r$.
- 6.128. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin a}{1-\sin a} = \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.
- 6.129. $(e^2 + e - e^{-2} - e^{-1})/2$.
- 6.130. $s = \ln 3 - 1/2$.
- 6.131. $V = 16\pi/15$.
- 6.132. 2π .
- 6.133. $8\pi/3$.
- 6.134. $V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$; $S = \pi(r_1 + r_2) \sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}$.
- 6.135. $2\pi(\sqrt{5^3} - 1)/9$.
- 6.136. $14\pi/3$.
- 6.137. (a) $v(0) = 6 \text{ m/s}$; (b) $t = 3 \text{ s}$, $s(3) = 16 \text{ m}$; (c) $v(4) = -2 \text{ m/s}$, $a(4) = -2 \text{ m/s}^2$.
- 6.138. $4(e - e^{-1})$.
- 6.139. $32/3$.
- 6.140. $S = \ln 4 - 1/2$.
- 6.141. $192/5$.
- 6.142. $(\pi + 2/3)$ ku $(3\pi - 2/3)$.
- 6.143. $\pi/2$.
- 6.144. Přibližně za 3 hodiny.
- 6.145. $S = \frac{2}{3} \ln 2$.
- 6.146. $8r$.
- 6.147. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin a}{1-\sin a} = \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.
- 6.148. $(e^2 + e - e^{-2} - e^{-1})/2$.

$$6.149. s = \ln 3 - 1/2.$$

$$6.150. V = 16\pi/15.$$

$$6.151. 2\pi.$$

$$6.152. 8\pi/3.$$

$$6.153. V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2); S = \pi(r_1 + r_2) \sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}.$$

$$6.154. 2\pi(\sqrt{5^3} - 1)/9.$$

$$6.155. 14\pi/3.$$

Spojité modely

*Jak zvládneme nelineární objekty?
– zase lineárními a kvadratickými nástroji ...*

V této kapitole ukážeme využití nástrojů diferenciálního a integrálního počtu ve vybraných problémech, ve kterých si vystačíme s funkcemi jedné reálné nezávislé proměnné.

Půjde o postupy a nástroje docela podobné těm z kapitoly třetí, tj. manipulace s lineárními kombinacemi vybraných generátorů a lineárními transformacemi (např. hledání jejich jader nebo vzorů předepsaných obrazů). Jen místo konečně rozměrných vektorů budeme pracovat s prostory funkcí, tzn. uvažované vektorové prostory často nebudou mít konečnou dimenzi. K těmto i dalším praktickým oblastem se vrátíme v příští kapitole v kontextu funkcí více proměnných, diferenciálních rovnic i variačního počtu.

Nejprve budeme aproximovat funkce pomocí lineárních kombinací z předem pevně zvolených sad generátorů. Po cestě si ale budeme muset ujasnit, jak vlastně pracovat s pojmy jako je vzdálenost. Půjde o náznaky teorie tzv. metrických prostorů a tato část je zároveň přípravou na analýzu v euklidovských prostorech \mathbb{R}^n . V zásadě přitom budeme pokračovat v postupech, které již z euklidovských vektorových prostorů dobře známe. Zjistíme, že naše intuice z euklidovských prostorů nízké dimenze se docela dobře hodí i obecně.

Pak se budeme stručně zabývat integrálními operátory, tj. lineárními zobrazeními na funkcích, které jsou definovány pomocí integrování. Půjde zejména o tzv. Fourierovu analýzu. Při našich úvahách se přitom budeme jako obvykle zamýšlet i nad diskretními variantami dříve diskutovaných spojitých operací.

V celé kapitole budeme pracovat s funkcemi jedné reálné proměnné, které ale budou mít buď reálné nebo (velmi často) komplexní hodnoty.

1. Fourierovy řady

7.1. Prostory funkcí. Jako obvykle začneme výběrem vhodné množiny funkcí, se kterými chceme pracovat. Chceme přitom mít dost funkcí na praktickou použitelnost našich modelů, ale také musí být dostatečně „pěkné“, abychom je uměli integrovat a derivovat tak, jak bude třeba.

Budeme vesměs pracovat s funkcemi definovanými na nějakém intervalu $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, konečném nebo nekonečném (tj. krajní hodnoty a i b mohou také nabývat hodnot $\pm\infty$).

A. Ortogonální systémy funkcí

7.1. V prostoru reálných funkcí na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$, je dán vektorový podprostor $\langle x^2, 1/x \rangle$. Doplňte funkci $1/x$ na jeho ortogonální bázi a určete kolmou projekci funkce x na tento podprostor.

Řešení. Nejprve doplníme funkci $1/x$ na ortogonální bázi. Jedním z vektorů báze tedy bude funkce $1/x$. Uvažovaný vektorový prostor je generován dvěma lineárně nezávislými funkcemi, bude tedy mít dimenzi 2 (a všechny vektory v něm jsou tvaru $a \cdot \frac{1}{x} + b \cdot x^2$, kde $a, b \in \mathbb{R}$). Zbývá nám tedy najít pouze ještě jeden vektor báze, který bude kolmý na funkci $f_1 = 1/x$. Podle Grammova-Schidtova ortogonalizačního procesu (viz 2.42) ho hledáme ve tvaru $f_2 = x^2 + k \cdot \frac{1}{x}$, $k \in \mathbb{R}$. Reálnou konstantu k určíme z podmínky kolmosti:

$$\left\langle \frac{1}{x}, x^2 + k \cdot \frac{1}{x} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{x}, x^2 \right\rangle + k \left\langle \frac{1}{x}, \frac{1}{x} \right\rangle,$$

tedy

$$k = -\frac{\langle \frac{1}{x}, x^2 \rangle}{\langle \frac{1}{x}, \frac{1}{x} \rangle} = -\frac{\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x^2 dx}{\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = -3.$$

Hledaná ortogonální báze tedy je $(\frac{1}{x}, x^2 - \frac{3}{x})$. Nyní spočítáme projekci p_x funkce x na tento podprostor (viz (2.3)):

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\langle x, \frac{1}{x} \rangle}{\langle \frac{1}{x}, \frac{1}{x} \rangle} \cdot \frac{1}{x} + \\ &+ \frac{\langle x, x^2 - \frac{3}{x} \rangle}{\langle x^2 - \frac{3}{x}, x^2 - \frac{3}{x} \rangle \cdot \langle x^2 - \frac{3}{x}, x^2 - \frac{3}{x} \rangle} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{15}{34} \left(x^2 - \frac{3}{x} \right). \end{aligned}$$

7.1



7.2. Uvažujme reálný vektorový prostor funkcí na intervalu $[1, 2]$ generovaný funkcemi $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$. Doplňte funkci $\frac{1}{x}$ na ortogonální bázi tohoto prostoru.

Řešení. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem s daným skalárním součinem: $f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4x}, f_3(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{2x^2} + \frac{13}{24x}$.

7.3. Určete projekce funkcí $\frac{1}{x^4}$ a x na vektorový prostor z příkladu 3. Určete vzdálenosti od tohoto vektorového prostoru.



Řešení. Projekce $\frac{1}{x^4} : \frac{15}{32}f_1 + \frac{69}{40}f_2 + \frac{9}{4}f_3$, vzdálenost $\frac{\sqrt{14}}{2240}$. Projekce $x : 2f_1 + (-\frac{3}{4} + \ln(2))f_2 + (-\frac{3}{2}\ln(2) + \frac{25}{24})f_3$, vzdálenost cca 0,03496029493. Vidíme, že vzdálenost funkce, která má podobný průběh jako generátory, je menší.

7.4. Určete konvoluci $f_1 * f_2$ funkcí

$$f_1 = \begin{cases} 1-x & \text{pro } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

7.5. Nalezněte Fourierovu transformaci $\mathcal{F}(f) = \tilde{f}$ funkce

$f(t) = \text{sgn } t, t \in (-1, 1); f(t) = 0, t \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, tj. $f(0) = 0, f(t) = 1$ pro $t \in (0, 1)$ a $f(t) = -1$ pro $t \in (-1, 0)$.

Řešení. Fourierova transformace uvedené funkce je

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \text{sgn } t (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) dt.$$

Protože součin dvou lichých funkcí je sudá funkce, součin sudé a liché je lichá funkce a protože integrál liché funkce přes interval $[-1, 1]$ je 0 (pokud tento integrál existuje) a integrál sudé funkce přes interval $[-1, 1]$ je roven dvojnásobku integrálu přes $[0, 1]$, dostáváme dále

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 -i \sin(\omega t) dt = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \omega - 1}{\omega}.$$

Kdybychom přímo využili známé vyjádření Fourierovy transformace liché funkce f , snadněji bychom obdrželi

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \sin(\omega t) dt = \dots = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \omega - 1}{\omega}.$$

PROSTORY PO ČÁSTECH HLADKÝCH FUNKCÍ

Množina funkcí $\mathcal{S}^0 = \mathcal{S}^0[a, b]$ obsahuje právě všechny po částech spojitě reálné nebo komplexní funkce na $I = [a, b]$, tj. předpokládáme, že v každém bodě intervalu má funkce $f \in \mathcal{S}^0$ příslušné konečné jednostranné limity zprava či zleva, přičemž bodů nespojitosti je nejvýše konečně mnoho na každém konečném intervalu. Zejména jsou tedy všechny takové funkce na omezených intervalech omezené.

Pro každé přirozené číslo $k \geq 1$ budeme také uvažovat množinu všech po částech spojitých funkcí f jejichž všechny derivace až do řádu k včetně patří do \mathcal{S}^0 (tj. nemusí existovat ve všech bodech, ale existují jejich jednostranné limity ve všech bodech). Budeme pro ni používat značení \mathcal{S}^k .

V případě neomezeného intervalu I budeme také pracovat často s podmnožinou \mathcal{S}_c^k funkcí v \mathcal{S}^k všech funkcí s kompaktním nosičem (tzn. že funkce jsou identicky nulové vně nějakého konečného uzavřeného intervalu).

Na ohraničených intervalech samozřejmě mají všechny funkce kompaktní nosič v tomto smyslu. Proto když nás nebude zajímat, na jakém intervalu pracujeme, budeme psát jen \mathcal{S}_c^k ve všech případech. V případě konečného intervalu $[a, b]$ nebo za předpokladu kompaktního nosiče jsou naše funkce z \mathcal{S}^0 vždy Riemannovsky integrovatelné na zvoleném intervalu I jak v absolutní hodnotě, tak v kvadrátu, tzn.

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty, \quad \int_a^b (f(x))^2 dx < \infty.$$

Naše úvahy lze rozšiřovat na podstatně větší definiční obory funkcí, často ale za cenu značné technické námahy. Budeme občas zmiňovat prostory Kurweilovsky (nebo Lebesgueovské) integrovatelných funkcí, pro které jsou výsledky daleko ucelenější a pěknější. Zájemce odkazujeme na rozsáhlou specializovanou literaturu. Ve skutečnosti se budeme držet stejné strategie jako u racionálních a reálných čísel – počítáme jen s pěknými funkcemi a máme „nějak zvládnuto“, jak vypadají limity Cauchyovských posloupností ve zvolených metrikách (které většinou potřebujeme jen formálně).

7.2. Vzdálenost funkcí. Z námi již dokázaných vlastností limit a derivování je okamžitě vidět, že \mathcal{S}^k , resp. \mathcal{S}_c^k , jsou vektorové prostory. Podbízí se uvažovat na nich jako vzdálenost následující období absolutní hodnoty a z ní odvozené vzdálenosti reálných nebo komplexních čísel (resp. euklidovské vzdálenosti):



VZDÁLENOST FUNKCÍ

Definice. Pro funkce f a g z \mathcal{S}_c^0 je jejich L_1 -vzdálenost definována vztahem

$$\|f - g\|_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Obdobně je L_2 -vzdálenost funkcí f a g definována vztahem

$$\|f - g\|_2 = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Velikostí funkce $\|f\|_1$ nebo $\|f\|_2$ rozumíme její vzdálenost od funkce nulové.

V prvním případě L_1 -vzdálenost funkcí f a g s pouze reálnými hodnotami vyjadřuje plochu uzavřenou mezi grafy těchto funkcí, nezávisle na tom, která funkce má větší či menší hodnoty. Protože uvažujeme po částech spojité funkce f a g , může být jejich vzdálenost rovna nule pouze když se od sebe liší nanejvýš svými hodnotami v bodech nespojitosti, tj. v nejvýše spočetně mnoha bodech na ohraničených intervalech. Skutečně, jestliže se dvě naše funkce liší v jednom bodě x_0 , ve kterém jsou spojité, liší se i na nějakém dostatečně malém okolí tohoto bodu a toto okolí přispěje do vzdálenosti nenulovou hodnotou integrálu.

Máme-li tři funkce f , g a h , pak samozřejmě

$$\begin{aligned} \int_a^b |h(x) - f(x)| dx &= \int_a^b |h(x) - g(x) + g(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |h(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - f(x)| dx \end{aligned}$$

a platí tedy obvyklá trojúhelníková nerovnost. Všimněme si, že odvození této nerovnosti využívá pouze trojúhelníkovou nerovnost platnou pro velikost skalárů, platí tedy i pro funkce $f, g \in \mathcal{S}_c^0$ s komplexními hodnotami.

Podobné je to pro druhou definici. Kvadrát velikosti $\|f\|_2$ funkce f je

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

a je odvozen z dobře definovaného symetrického bilineárního zobrazení reálných funkcí do skalárů:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

dosazením f za obě funkce. U komplexních hodnot ale obdržíme podobně tuto velikost ze skalárního součinu s použitím komplexní konjugace, jak jsme viděli u unitárních prostorů v kapitole třetí:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Určitě tedy bude platit i trojúhelníková nerovnost, protože celou diskusi můžeme odehrát v maximálně třírozměrném prostoru se skalárním součinem generovaném danými funkcemi f, g a h .

7.3

7.3. (Ne)konečnost dimenze a ortogonalita. Zůstaňme na chvíli u naší definice L_2 -velikosti $\| \cdot \|_2$ na vektorovém prostoru \mathcal{S}_c^0 .



7.6. Popište Fourierovu transformaci $\mathcal{F}(f)$ funkce

$$f(t) = e^{-at^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $a > 0$.

Řešení. Naším úkolem je vypočítat

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt.$$

Derivování (podle ω) a poté užití metody per partes (pro $F' = -it e^{-at^2}$, $G = e^{-i\omega t}$) dává

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f)(\omega))' &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -it e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i}{2a} e^{-at^2 - i\omega t} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{i}{2a} e^{-at^2 - i\omega t} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(-i\omega)}{2a} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{2a} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at^2} - \frac{i}{2a} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-at^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2a} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= -\frac{\omega}{2a} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt \right) = -\frac{\omega}{2a} \mathcal{F}(f)(\omega). \end{aligned}$$

Hledejme proto funkce $y(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)$, které vyhovují diferenciální rovnici

$$(7.1) \quad y' = -\frac{\omega}{2a} y.$$

Při zápisu $y' = dy/d\omega$ je

$$\frac{dy}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a} y, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{y} dy = -\frac{\omega}{2a} d\omega,$$

není-li funkce y rovna nule (zjevně $y \equiv 0$ je řešením (7.1)). Integrovaním dostáváme

$$\ln |y| = -\frac{\omega^2}{4a} - \ln |C|, \quad \text{tj.} \quad y = \pm \frac{1}{C} e^{-\frac{\omega^2}{4a}},$$

přičemž $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zahrnutím nulového řešení tak můžeme vyjádřit všechna řešení diferenciální rovnice (7.1) jako funkce

$$y(\omega) = K e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Doplňme určení konstanty K , pro niž získáváme právě $\mathcal{F}(f)(\omega)$. Později (v souvislosti s tzv. normálním rozdělením ve statistických metodách) se dozvíme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

z čehož plyne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Platí proto

$$\mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad \text{a současně} \quad \mathcal{F}(f)(0) = K e^0 = K.$$

Celkem máme

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

□

7.7. Stanovte funkci f , jejíž Fourierovou transformací je funkce

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}, \quad \omega \neq 0.$$

Řešení. Inverzní Fourierova transformace dává

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \right).$$

Jestliže použijeme substituci, kdy nahradíme $-\omega$ za ω v integrálu přes interval $(-\infty, 0]$, získáme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t) + \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos(\omega t) d\omega.$$

Poznamenejme, že předchozí vyjádření lze obdržet už z toho, že funkce $y = \frac{\sin \omega}{\omega}$ s maximálním definičním oborem je sudá.

Pomocí identity

$$\sin x \cdot \cos(xy) = \frac{1}{2} (\sin[x(1+y)] + \sin[x(1-y)]), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

která mj. vyplývá ze součtových vzorců (pro sinus), dostáváme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin[\omega(1+t)]}{\omega} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{\sin[\omega(1-t)]}{\omega} d\omega \right).$$

Substituce $u = \omega(1+t)$, $v = \omega(1-t)$ potom dávají

e7.1

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv \right) = 0, \quad t > 1;$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du + \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du, \quad t \in (-1, 1);$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left(-\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du + \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv \right) = 0, \quad t < -1.$$

Dokázali jsme tak, že funkce f je nulová pro $|t| > 1$ a konstantní (nutně nenulová) pro $|t| < 1$. (Po celou dobu předpokládáme, že inverzní Fourierova transformace existuje.)

Určeme funkční hodnotu $f(0)$. Pro funkci

$$g(t) = 1, \quad |t| < 1; \quad g(t) = 0, \quad |t| > 1$$

platí

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

Odtud plyne, že $f(0) = g(0)/2 = 1/2$. Ještě vyzdvihneme vyčíslení integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2},$$

které jsme rovněž obdrželi. □

Z vlastností skalárního součinu je splněna v operacích na konci předchozího odstavce jak linearita v prvním argumentu, tak symetričnost (tj. v komplexním případě zahrnující komplexní konjugaci). Zároveň je pro spojité funkce splněna i podmínka nenulovosti velikosti pro nenulové funkce, zatímco pro naše po částech spojitě funkce znamená nulovost velikosti nulovost funkce až na nejvýše spočetnou množinu bodů. Vrátime se k této drobné nepřijemnosti později.

V konečněrozměrném případě reálných nebo komplexních vektorových prostorů jsme uvažovali skalární součiny a velikost vektorů již ve druhé a třetí kapitole. Všimněme si přitom, že při dovozování vlastností jsme vesměs vždy pracovali s dvojicemi nebo konečnými množinami vektorů.

Nyní to ale můžeme dělat s funkcemi naprosto stejně a pokud zůžeme naši definici skalárního součinu na vektorový prostor generovaný (nad reálnými nebo komplexními čísly) jen konečně mnoha funkcemi f_1, \dots, f_k . Dostaneme opět dobře definovaný skalární součin na tomto konečněrozměrném vektorovém podprostoru.

Jako příklad uvažme funkce $f_i = x^i$, $i = 0, \dots, k$. Jimi je v \mathcal{S}^0 generován $(k+1)$ -rozměrný vektorový podprostor $\mathbb{R}_k[x]$ všech polynomů stupně nejvýše k . Skalární součin dvou takových polynomů je dán integrálem. Každý polynom stupně nejvýše k je vyjádřen jednoznačným způsobem jako lineární kombinace generátorů f_0, \dots, f_k . Pokud by navíc naše generátory měly tu vlastnost, že

$$(7.1) \quad \langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

jde o tzv. *ortonormální bázi*. Připomeňme si v této souvislosti proceduru Grammovy–Schmidty ortogonalizace, viz 2.42, která z libovolného systému generátorů f_i vytvoří nové ortogonální generátory g_i téhož prostoru, tj. $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ pro všechny $i \neq j$. Spočteme je přitom postupně jako $g_1 = f_1$ a vzorci

$$g_{\ell+1} = f_{\ell+1} + a_1 g_1 + \dots + a_{\ell} g_{\ell}, \quad a_i = -\frac{\langle f_{\ell+1}, g_i \rangle}{\|g_i\|^2}$$

pro $\ell \geq 1$.

Aplikujme tuto proceduru rpo ilustraci na tři polynomy $1, x, x^2$ na intervalu $[-1, 1]$. Dostaneme $g_1 = 1$,

$$g_2 = x - \frac{1}{\|g_1\|^2} \int_{-1}^1 x \cdot 1 dx \cdot 1 = x - 0 = x$$

$$g_3 = x^2 - \frac{1}{\|g_1\|^2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx \cdot 1 - \frac{1}{\|g_2\|^2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Příslušná ortogonální báze prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ všech polynomů stupně nejvýše tři na intervalu $[-1, 1]$ je tedy $1, x, x^2 - 3$. Normalizací, tj. vhodným násobením skalárem tak, aby prvky v bázi měly velikost jedna dostaneme ortonormální

bázi

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

Takovým ortonormálním generátorům $\mathbb{R}_k[x]$ se říká *Legendreovy polynomy*.

7.4

7.4. Ortonormální systémy funkcí. Právě jsme si připomněli výhody, které ortonormální báze podprostorů mají pro konečněrozměrné vektorové prostory. V předchozím příkladu Legendreových polynomů generujících $V = \mathbb{R}_k[x]$ pro libovolné $k > 2$, bude pro libovolnou funkci $h \in V$ funkce

$$H = \langle h, h_1 \rangle h_1 + \langle h, h_2 \rangle h_2 + \langle h, h_3 \rangle h_3$$

jednoznačně určenou funkcí, která minimalizuje naši L_2 -vzdálenost $\|h - H\|$ mezi všemi funkcemi v $\mathbb{R}_k[x]$, viz. 3.25.

Koeficienty pro nejlepší aproximaci zadané funkce pomocí funkce z vybraného podprostoru je možné tedy získat prostě integrací v definici skalárního součinu.

Uvedený příklad podbízí následující zobecnění: Když provedeme proceduru Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace pro všechny monomy $1, x, x^2, \dots$, tj. pro spočetný systém generátorů, co z toho vznikne?

ORTOGONÁLNÍ SYSTÉMY FUNKCÍ

Libovolný konečný nebo spočetný systém lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{S}_c^0[a, b]$ takový, že každé dvě různé z nich mají nulový skalární součin se nazývá *ortonormální systém funkcí*. Jestliže jsou všechny funkce f_n v posloupnosti po dvou ortonormální a zároveň je pro všechna n velikost $\|f_n\|_2 = 1$, hovoříme o *ortonormálním systému funkcí*.

Uvažme tedy jakýkoliv ortonormální systém funkcí $f_n \in \mathcal{S}^0[a, b]$ a předpokládejme, že pro konstanty c_n konverguje řada

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

stejněměrně na konečném intervalu $[a, b]$. Pak snadno vyjádříme skalární součin $\langle F, f_n \rangle$ po jednotlivých sčítancích (viz Důsledek 6.43) a dostaneme

$$\langle F, f_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b f_m(x) \overline{f_n(x)} dx = c_n \|f_n\|^2,$$

kde normou myslíme (stejně jako v dalších odstavcích) naši L_2 -velikost.

Máme tedy tušení, v jakém smyslu lze případně rozšiřovat postupy z konečněrozměrných prostorů — místo konečných lineárních kombinací bázevých vektorů budeme pracovat s nekonečnými řadami po dvou ortonormálních funkcí. Následující věta nám přitom dává přehlednou a velmi obecnou odpověď na otázku, jak dobře se konečnými součty takové řady umíme k dané funkci přiblížit:



7.8. Vyřešte integrální rovnici

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin(xt) dt = e^{-x}, \quad x > 0$$

pro neznámou funkcí f .

Řešení. Pokud obě strany rovnice vynásobíme číslem $\sqrt{2/\pi}$, obdržíme na levé straně právě sinovou Fourierovu transformaci. Stačí tedy aplikovat na rovnici inverzní transformaci. Takto dostaneme

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(xt) dx, \quad t > 0.$$

Dvojnásobným použitím metody per partes pak lze spočítat

$$\int e^{-x} \sin(xt) dx = \frac{e^{-x}}{1+t^2} [-\sin(xt) - t \cos(xt)] + C,$$

a tudíž je

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(xt) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-x}}{1+t^2} [-\sin(xt) - t \cos(xt)] \right) - \frac{e^0}{1+t^2} (-t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

Řešením rovnice je proto funkce

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{1+t^2}, \quad t > 0.$$

□

7.9. Nalezněte řešení tzv. rovnice vedení tepla (rovnice difuze)

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

splňující počáteční podmínku $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$.

Poznámky: Symbolem $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ zde rozumíme parciální derivaci funkce u podle t (tj. derivujeme podle t , přičemž x považujeme za konstantní) a podobně $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ označuje druhou parciální derivaci podle x (kdy dvakrát derivujeme podle x a na t nahlížíme při derivování jako na konstantu). Fyzikální interpretací úlohy je, že se snažíme určit teplotu $u(x, t)$ v tepelně izolované a homogenní tyči nekonečné délky (rozsah proměnné x), je-li dána počáteční teplota tyče funkcí f . Tyč má konstantní průřez a teplo se v ní může šířit pouze vedením. Koeficient a^2 je pak roven podílu $\frac{\alpha}{c\rho}$, kde α je koeficient tepelné vodivosti, c je specifické teplo a ρ je hustota. Zvláště se tedy předpokládá, že $a^2 > 0$.

Řešení. Na rovnici vedení tepla aplikujeme Fourierovu transformaci vzhledem k proměnné x . Platí ovšem

$$\mathcal{F}(u_t)(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-i\omega x} dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \right)',$$

kde je derivováno podle t , tj. je

$$\mathcal{F}(u_t)(\omega, t) = (\mathcal{F}(u)(\omega, t))' = (\mathcal{F}(u))_t(\omega, t).$$

Současně víme, že

$$\mathcal{F}(a^2 u_{xx})(\omega, t) = a^2 \mathcal{F}(u_{xx})(\omega, t) = -a^2 \omega^2 \mathcal{F}(u)(\omega, t). \quad \boxed{7.5}$$

Při označení $y(\omega, t) = \mathcal{F}(u)(\omega, t)$ tak přecházíme k rovnici

$$y_t = -a^2 \omega^2 y.$$

Podobnou diferenciální rovnici jsme již při počítání Fourierových transformací řešili, a tudíž pro nás není obtížné stanovit všechna její řešení

$$y(\omega, t) = K(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t}, \quad K(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Zbývá určit $K(\omega)$. Transformace počáteční podmínky dává

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(u)(\omega, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(\omega, t) = K(\omega) e^0 = K(\omega),$$

a proto je

$$y(\omega, t) = \mathcal{F}(f)(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t}, \quad K(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Nyní se pomocí inverzní Fourierovy transformace vraťme k původní diferenciální rovnici s řešením

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) e^{-a^2 \omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} e^{-i\omega(s-x)} d\omega \right) ds. \end{aligned}$$

Vypočítáním Fourierovy transformace $\mathcal{F}(f)$ funkce $f(t) = e^{-at^2}$ pro $a > 0$ jsme při přeznačení proměnných obdrželi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cp^2} e^{-irp} dp = \frac{1}{\sqrt{2c}} e^{-\frac{r^2}{4c}}, \quad c > 0.$$

Dle tohoto vztahu (uvažte $c = a^2 t > 0$, $p = \omega$, $r = s - x$) platí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} e^{-i\omega(s-x)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2a^2 t}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}},$$

a tedy

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}} ds.$$

7.10. Stanovte Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}(f)(s)$ funkce

- $f(t) = e^{at}$;
- $f(t) = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t}$;
- $f(t) = \cos(bt)$;
- $f(t) = \sin(bt)$;
- $f(t) = \cosh(bt)$;
- $f(t) = \sinh(bt)$,

přičemž hodnoty $b \in \mathbb{R}$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ jsou libovolné a kladné $s \in \mathbb{R}$ je větší než reálné části čísel $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ a rovněž je větší než b ve variantách (e) a (f).

7.5. Věta. Necht' f_n , $n = 1, 2, \dots$, je ortogonální posloupnost (reálných nebo komplexních) funkcí v $\mathcal{S}^0[a, b]$, necht' $g \in \mathcal{S}^0[a, b]$ je libovolná a označme

$$c_n = \|f_n\|^{-2} \int_a^b g(x) \overline{f_n(x)} dx.$$

(1) Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ má ze všech lineárních kombinací funkcí f_1, \dots, f_n nejmenší L_2 -vzdálenost od g výraz

$$h_n = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x).$$

(2) Řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|f_n\|^2$ vždy konverguje a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

(3) L_2 -vzdálenost g od částečných součtů $s_k = \sum_{n=1}^k c_n f_n$ jde v limitě k nule, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - s_k\| = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2.$$

Ještě než se pustíme do důkazu, zkusme lépe porozumět významu jednotlivých tvrzení této věty. Protože pracujeme s úplně libovolně zvoleným ortogonálním systémem funkcí, nemůžeme očekávat, že lze dobře aproximovat jakoukoliv funkci pomocí lineárních kombinací funkcí f_i .

Např. když se omezíme u Legendreových ortogonálních polynomů na intervalu $[-1, 1]$ pouze na sudé stupně, určitě budeme dobře aproximovat pouze nanejvýš sudé funkce. Nicméně hned první tvrzení věty nám říká, že vždycky budeme dosahovat nejlepší možné aproximace částečnými součty (v L_2 -vzdálenosti).

Druhé a třetí tvrzení pak můžeme vnímat jako analogii ke kolmým průmětům do podprostorů vyjádřeným pomocí kartézských souřadnic. Skutečně, pokud pro danou funkci g bodově konverguje řada $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, pak je funkce $F(x)$ v jistém smyslu kolmým průmětem g do vektorového podprostoru všech takovýchto řad.

Druhému tvrzení se říká *Besselova nerovnost* a je obdobou konečněrozměrného tvrzení, že kolmý průmět vektoru nemůže být větší než původní vektor. Rovnost ze třetího tvrzení se nazývá *Parsevalova rovnost* a říká, že jestliže se vektor kolmým průmětem do podprostoru ostře nezmenší, pak do tohoto podprostoru jistě sám patří.

Na druhé straně ale naše věta neříká, že by částečné součty uvažované řady musely bodově konvergovat k nějaké funkci, což se v konečněrozměrném světě stát nemůže. Tj. řada $F(x)$ by obecně nemusela být konvergentní (tj. pokud bychom uvažovali obecnější funkce než je náš prostor $\mathcal{S}^0[a, b]$) ani v případě, kdy nastane rovnost v (3). Pokud ale např. existuje konečná hodnota $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ a všechny funkce

f_n jsou stejnoměrně omezené na I , pak zřejmě řada $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ konverguje v každém x , nemusí ale přitom konvergovat všude k funkci g . K těmto úvahám se brzy vrátíme.

Důkaz všech třech tvrzení věty je velmi podobný jako u konečněrozměrných euklidovských prostorů. Není divu, protože odhady vzdálenosti g od částečného součtu f se vlastně dělají jen v konečněrozměrném lineárním obalu dotčených funkcí:

DŮKAZ VĚTY 7.5. Zvolme libovolnou lineární kombinaci $f = \sum_{n=1}^k a_n f_n$ a spočtěme její vzdálenost od g . Dostáváme

$$\begin{aligned} \|g - \sum_{n=1}^k a_n f_n\|^2 &= \int_a^b \left| g(x) - \sum_{n=1}^k a_n f_n(x) \right|^2 dx \\ &= \int_a^b |g(x)|^2 dx - \int_a^b \sum_{n=1}^k g(x) \overline{a_n f_n(x)} dx - \\ &\quad - \int_a^b \sum_{n=1}^k a_n f_n(x) \overline{g(x)} dx + \int_a^b \left| \sum_{n=1}^k a_n f_n(x) \right|^2 dx \\ &= \|g\|^2 - \sum_{n=1}^k \overline{a_n} c_n \|f_n\|^2 - \sum_{n=1}^k a_n \overline{c_n} \|f_n\|^2 + \sum_{n=1}^k a_n^2 \|f_n\|^2 \\ &= \|g\|^2 + \sum_{n=1}^k \|f_n\|^2 ((c_n - a_n) \overline{(c_n - a_n)} - |c_n|^2). \end{aligned}$$

Evidentně lze poslední výraz minimalizovat právě volbou $a_n = c_n$ a tím je první tvrzení dokázáno.

Dosažením této volby dostáváme tzv. *Besselovu identitu*

$$\|g - \sum_{n=1}^k c_n f_n\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{n=1}^k |c_n|^2 \|f_n\|^2,$$

ze které okamžitě díky nezápornosti levé strany vyplývá dokazovaná Besselova nerovnost ves223ock

$$\sum_{n=1}^k c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

Tím je dokázáno i celé druhé tvrzení, protože každá neklesající a shora omezená posloupnost reálných čísel má limitu (a je jí supremum celé množiny hodnot prvků posloupnosti).

Jestliže v Besselově nerovnosti nastane rovnost, pak přímo z definic a výše dokázané Besselovy identity vyplývá tvrzení (3). \square

Ortonogonální systém funkcí nazveme *úplný ortonogonální systém* na intervalu $I = [a, b]$ pro nějaký prostor funkcí na I , jetliže platí Parsevalova rovnost pro každou funkci g z tohoto prostoru.

7.6

7.6. Fourierovy řady. Předchozí věta naznačuje, že umíme se spočetnými ortonogonálními systémy f_n funkcí pracovat velice podobně jako s konečnými ortonogonálními bazemi vektorových prostorů, jsou tu ale zásadní rozdíly:



Řešení. Případ (a). Bezprostředně z definice Laplaceovy transformace plyne

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right) - \frac{e^0}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a}.$$

Případ (b). Pomocí výsledku varianty (a) a linearitý nevlastního integrálu dostáváme

$$\mathcal{L}(f)(s) = c_1 \int_0^{\infty} e^{a_1 t} e^{-st} dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{a_2 t} e^{-st} dt = \frac{c_1}{s-a_1} + \frac{c_2}{s-a_2}.$$

Případ (c). Protože

$$\cos(bt) = \frac{1}{2} (e^{ibt} + e^{-ibt}),$$

volba $c_1 = 1/2 = c_2$, $a_1 = ib$, $a_2 = -ib$ v předchozí variantě již dává

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{ibt} + \frac{1}{2} e^{-ibt} \right) e^{-st} dt = \frac{1}{2(s-ib)} + \frac{1}{2(s+ib)} = \frac{s}{s^2+b^2}.$$

Případy (d), (e), (f). Analogicky volby

(d) $c_1 = -i/2$, $c_2 = i/2$, $a_1 = ib$, $a_2 = -ib$;

(e) $c_1 = 1/2 = c_2$, $a_1 = b$, $a_2 = -b$;

(f) $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$, $a_1 = b$, $a_2 = -b$

vedou na

(d) $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$;

(e) $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{s^2-b^2}$;

(f) $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{b}{s^2-b^2}$.

\square

7.11. Pomocí vzorce

$$(7.2) \quad \mathcal{L}(f')(s) = s \mathcal{L}(f)(s) - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$$

odvoďte Laplaceovy transformace funkcí $y = \cos t$ a $y = \sin t$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že z (7.2) plyne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'')(s) &= s \mathcal{L}(f')(s) - \lim_{t \rightarrow 0+} f'(t) = \\ &= s \left(s \mathcal{L}(f)(s) - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \right) - \lim_{t \rightarrow 0+} f'(t) = \\ &= s^2 \mathcal{L}(f)(s) - s \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0+} f'(t). \end{aligned}$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(\sin t)(s) &= \mathcal{L}(-\sin t)(s) = \mathcal{L}((\sin t)'')(s) = \\ &= s^2 \mathcal{L}(\sin t)(s) - s \lim_{t \rightarrow 0+} \sin t - \lim_{t \rightarrow 0+} \cos t = s^2 \mathcal{L}(\sin t)(s) - 1, \end{aligned}$$

odkud dostáváme

$$-\mathcal{L}(\sin t)(s) = s^2 \mathcal{L}(\sin t)(s) - 1, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Nyní užitím vzorce (7.2) snadno určíme

$$\mathcal{L}(\cos t)(s) = \mathcal{L}((\sin t)')(s) = s \frac{1}{s^2+1} - \lim_{t \rightarrow 0+} \sin t = \frac{s}{s^2+1}.$$

7.12. Pro $s > -1$ spočítejte Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}(g)(s)$ funkce

$$g(t) = t e^{-t}$$

a pro $s > 1$ Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}(h)(s)$ funkce

$$h(t) = t \sinh t.$$

Řešení. Užitím metody per partes získáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g)(s) &= \int_0^\infty t e^{-t} e^{-st} dt = \int_0^\infty t e^{-(s+1)t} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \right) - 0 - \\ &\int_0^\infty \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} dt = - \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s+1)t}}{(s+1)^2} - \frac{e^0}{(s+1)^2} \right) = \frac{1}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Derivování Laplaceovy transformace obecné funkce $-f$ (tj. nevlastního integrálu) podle parametru s dává

$$\left(\int_0^\infty -f(t) e^{-st} dt \right)' = \int_0^\infty -f(t) (e^{-st})' dt = \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt.$$

To znamená, že derivace Laplaceovy transformace $\mathcal{L}(-f)(s)$ je Laplaceova transformace funkce $t f(t)$. Laplaceovu transformaci funkce $y = \sinh t$ jsme ale dříve určili jako funkci $y = \frac{1}{s^2-1}$. Proto platí

$$\mathcal{L}(h)(s) = \left(-\frac{1}{s^2-1} \right)' = \frac{2s}{(s^2-1)^2}.$$

Povšimněme si, že tímto způsobem jsme rovněž mohli určit $\mathcal{L}(g)(s)$. □

7.13. Najděte funkci y , která vyhovuje diferenciální rovnici

$$y''(t) = \cos(\pi t) - y(t), \quad t \in (0, +\infty)$$

a počátečním podmínkám $y(0) = c_1, y'(0) = c_2$.

Řešení. Nejdříve podotkněme, že z teorie obyčejných diferenciálních rovnic vyplývá, že úloha má právě jedno řešení. Dále připomeňme

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2 \mathcal{L}(f)(s) - s \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t)$$

a

$$\mathcal{L}(\cos(bt))(s) = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Aplikování Laplaceovy transformace na zadanou diferenciální rovnici proto dává

$$s^2 \mathcal{L}(y)(s) - sc_1 - c_2 = \frac{s}{s^2+\pi^2} - \mathcal{L}(y)(s),$$

tj.

$$(7.3) \quad \mathcal{L}(y)(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+\pi^2)} + \frac{c_1 s}{s^2+1} + \frac{c_2}{s^2+1}.$$

Stačí tudíž najít funkci y splňující (7.3). Rozkladem na parciální zlomky získáváme

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+\pi^2)} = \frac{1}{\pi^2-1} \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+\pi^2} \right).$$

Z výše uvedeného vyjádření $\mathcal{L}(\cos(bt))(s)$ a dříve dokázaného

$$\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

- Není snadné říci, jak vypadá celý prostor konvergentních nebo stejnoměrně konvergentních řad

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n.$$

- Pro danou integrovatelnou funkci umíme najít jen „nejlepší možné přiblížení“ takovou řadou $F(x)$ ve smyslu L_2 -vzdálenosti.

V případě, že místo ortogonálního systému f_n máme systém ortonormální, jsou formulky ve větě o něco jednodušší, žádné další zlepšení ale nenastane.

Výběr ortogonálního systému funkcí musí pro praktické použití sledovat účel, pro který chceme aproximace a další nástroje použít. Samotný název „Fourierovy řady“ odkazuje na následující volbu systému reálných funkcí:

FOURIERŮV ORTOGONÁLNÍ SYSTÉM

1, $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$

Jako elementární cvičení na integraci per partes si můžeme spočítat, že skutečně jde o ortogonální systém funkcí na intervalu $[-\pi, \pi]$. Ukážeme si v zápětí i jiné ověření této skutečnosti.

Jde o tzv. periodické funkce se společnou periodou 2π (viz definice níže) a tzv. „Fourierova analýza“ opřená o tento ortogonální systém nám umožní mimořádně účinně pracovat se všemi (po částech spojitými) periodickými funkcemi. Vzhledem k tomu, že mnoho fyzikálních, chemických i biologických dat vnímáme, přijímáme nebo měříme ve skutečnosti prostřednictvím frekvencí tzv. signálů (tj. měřených veličin), jde o skutečně základní matematický nástroj. Biologové a inženýři dokonce často používají slovo „signál“ v našem smyslu „funkce“.

PERIODICKÉ FUNKCE

Funkce f s reálnými nebo komplexními hodnotami, definovaná na celém \mathbb{R} se nazývá *periodická funkce* s periodou $T > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x+T) = f(x)$.

Je zřejmé, že součty a skalární násobky periodických funkcí se stejnými periodami jsou opět periodické funkce s touž periodou.

Integrál $\int_a^{a+T} f(x) dx$ periodické funkce f přes interval délky periody T nezávisí na volbě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Poslední tvrzení se dokáže snadno:

Zvolme si dva takové levé hraniční body integrace x_0 a y_0 . Pomocí substice $t = x + kT$ s vhodným k převedeme $\int_{y_0}^{y_0+T} f(x) dx$ na případ, kdy $y_0 \in [x_0, x_0 + T]$. Nyní rozdělením intervalu integrace na tři části dokončíme důkaz.

Ortogonalitu Fourierova systému funkcí si spočteme zcela snadno pomocí výletu do komplexních čísel, který se nám bude velice hodit později:



Připomeňme, že $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ a přímým derivováním součinu reálných funkcí ověříme, že pro reálné funkce $z(x)$ a $\varphi(x)$ s reálnými hodnotami platí

$$(z(x) e^{i\varphi(x)})' = z'(x) e^{i\varphi(x)} + i z(x) \varphi'(x) e^{i\varphi(x)}.$$

Primitivní funkce ke komplexní funkci f samořejmě dostaneme pomocí primitivních funkcí k reálné a imaginární komponentě funkce f .

Můžeme si tedy velmi snadno spočítat integrál (předpokládáme $m \neq n$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \frac{1}{m-n} [e^{i(m-n)x}]_{-\pi}^{\pi},$$

což je vždy nula, protože je jedno jestli o násobky π obíháme po jednotkové kružnici v jednom nebo druhém směru.

Právě spočtený integrál vyjadřuje skalární součin $\langle e^{imx}, e^{inx} \rangle$. Vidíme tedy, že skutečně všechny dvojice našich funkcí e^{inx} (s komplexními hodnotami) jsou na sebe kolmé.

Můžeme ale tento skalární součin rozepsat:

$$\begin{aligned} \langle e^{imx}, e^{inx} \rangle &= \langle \cos(mx) + i \sin(mx), \cos(nx) + i \sin(nx) \rangle \\ &= (\langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle + \langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle) \\ &\quad + i(\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle - \langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle). \end{aligned}$$

Všimněme si, že v imaginární části tohoto výrazu budeme integrovat liché funkce přes interval $[-\pi, \pi]$ a tedy dostaneme zaručeně nulu.

Funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ se liší jen o fázový posun, tj. $\cos(mx - \pi/2) = \sin(mx)$. Proto jsou oba sčítance v reálné části našeho výrazu stejné. Musí tedy být nulové oba dva a tím jsme ověřili ortogonalitu našeho systému funkcí.

Zároveň vidíme, že pro $m = n$ je výsledkem reálné číslo $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$ a přitom zjevně musí opět být velikosti jak $\sin(nx)$ tak $\cos(nx)$ stejné. Nutně proto pro kladná n dostáváme velikosti

$$\|\cos(nx)\|^2 = \pi, \quad \|\sin(nx)\|^2 = \pi,$$

jen pro $n = 0$ dostáváme $\|1\|^2 = 2\pi$.

FOURIEROVY ŘADY

Řadu funkcí

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

z Věty 7.5, s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} g(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} g(x) \sin(nx) dx,$$

nazýváme *Fourierova řada* funkce g na intervalu $[x_0, x_0 + 2\pi]$.

tak již dostáváme hledané řešení

$$y(t) = \frac{1}{\pi^2 - 1} (\cos t - \cos(\pi t)) + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

□

7.14. Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic

$$x''(t) + x'(t) = y(t) - y''(t) + e^t, \quad x'(t) + 2x(t) = -y(t) + y'(t) + e^{-t}$$

při počátečních podmínkách $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Řešení. Opět aplikujeme Laplaceovu transformaci. Tím s využitím

$$\mathcal{L}(e^{\pm t})(s) = \frac{1}{s \mp 1}$$

převědeme první rovnici na

$$\begin{aligned} s^2 \mathcal{L}(x)(s) - s \lim_{t \rightarrow 0+} x(t) - \lim_{t \rightarrow 0+} x'(t) + s \mathcal{L}(x)(s) - \lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = \\ \mathcal{L}(y)(s) - \left(s^2 \mathcal{L}(y)(s) - s \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) - \lim_{t \rightarrow 0+} y'(t) \right) + \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

a druhou potom na

$$\begin{aligned} s \mathcal{L}(x)(s) - \lim_{t \rightarrow 0+} x(t) + 2 \mathcal{L}(x)(s) = \\ - \mathcal{L}(y)(s) + s \mathcal{L}(y)(s) - \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) + \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Vyčíslíme-li limity (dle počátečních podmínek), obdržíme lineární rovnice

$$s^2 \mathcal{L}(x)(s) - 1 + s \mathcal{L}(x)(s) = \mathcal{L}(y)(s) - s^2 \mathcal{L}(y)(s) + \frac{1}{s-1}$$

a

$$s \mathcal{L}(x)(s) + 2 \mathcal{L}(x)(s) = - \mathcal{L}(y)(s) + s \mathcal{L}(y)(s) + \frac{1}{s+1}$$

s právě jedním řešením

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{2s-1}{2(s-1)(s+1)^2}, \quad \mathcal{L}(y)(s) = \frac{3s}{2(s^2-1)^2}.$$

Opět si pomůžeme rozkladem na parciální zlomky se získkem

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{1}{8} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{s+1} = \frac{3}{4} \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s^2-1}.$$

Neboť již dříve jsme vypočítali

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t e^{-t})(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad \mathcal{L}(\sinh t)(s) = \frac{1}{s^2-1}, \\ \mathcal{L}(t \sinh t)(s) = \frac{2s}{(s^2-1)^2}, \end{aligned}$$

dostáváme

$$x(t) = \frac{3}{4} t e^{-t} + \frac{1}{4} \sinh t, \quad y(t) = \frac{3}{4} t \sinh t.$$

Čtenář může sám ověřit, že tyto funkce x a y jsou skutečně hledaným řešením. Ověření však důrazně doporučujeme provést (např. z toho důvodu, že Laplaceovy transformace funkcí $y = e^t$, $y = \sinh t$ a $y = t \sinh t$ jsme získali pouze pro $s > 1$). □

7.15. Diskrétní kosinová transformace. Základem JPEG komprese dat je tzv. diskrétní kosinová transformace. Ta je dána ortogonální maticí C definovanou následovně

$$c_{kl} = \alpha_{kl} \cos\left(\frac{(2k-1)(l-1)\pi}{2n}\right)$$

kde $\alpha_{kl} = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_{kl} = \sqrt{\frac{2}{n}}$ pro $l > 1$. Vektor reprezentující data pak ortogonálně rozložíme a některé báze vektory (sloupce matice C) vypustíme. Tím je provedena redukce dat s rozumnou aproximací původních dat. Zpětná transformace je jednoduchá. Protože je C ortogonální, je dána násobením transponovanou maticí.

Ukažte, že pro $n = 2$ je matice C rovna $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a že je ortogonální. Spočítejte ortogonální rozklad vektoru $(3, 4)$ vzhledem k bázi tvořené sloupci matice a určete vlastní čísla a vlastní vektory.

Počítejme

$$CC^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I. \quad \boxed{7.7}$$

Matice C je tedy ortogonální a její sloupce tvoří ortonormální bázi $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Koeficienty ortogonálního rozkladu vektoru $u = (3, 4)$ dostaneme jednoduše použitím transponované matice

$$C^T u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ortogonální rozklad má tedy následující tvar

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{7}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom matice C je $(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}})(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{2} = 0$ a vlastní čísla jsou tedy $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (jiná ani ortogonální matice nemůže mít). Příslušné vlastní vektory jsou určeny po řadě rovnicemi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$$

a jsou to tedy například vektory $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ (které jsou automaticky ortogonální). Pozn. nakreslete si obrázek, jak působí na vektor v rovině zobrazení určené maticí A .

7.16. Diskrétní kosinová transformace 2. Ukažte, že symetrická

matice $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní hodnoty $\lambda_l = \cos \varphi_l$, kde

$\varphi_l = \frac{l\pi}{n+1}$ s $1 \leq l \leq n$ a že příslušné vlastní vektory $\sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin \varphi_l \\ \sin 2\varphi_l \\ \vdots \\ \sin n\varphi_l \end{pmatrix}$

tvoří ortonormální bázi.

Koeficienty a_n a b_n se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce* g .

V praktickém použití chceme pracovat s Fourierovými řadami s libovolnou délkou periody funkcí T místo hodnoty 2π . Stačí k tomu jen přejít k funkcím $\cos(\frac{2\pi}{T}nx)$, $\sin(\frac{2\pi}{T}nx)$. Jednoduchou substitucí proměnných $t = \omega x$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ověříme ortogonalitu našeho nového systému funkcí a přepočítáme koeficienty ve Fourierově řadě $F(x)$ funkce g na intervalu $[x_0, x_0 + T]$:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} g(x) \cos(n\omega x) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} g(x) \sin(n\omega x) dx,$$

7.7. Vyjádření s exponenciálou. Už při ověřování ortogonalit funkcí $\cos nx$, $\sin nx$ jsme vyšli ze základního vztahu pro parametrizaci jednotkové kružnice v komplexní rovině. Zavedeme-li rychlost obíhání kružnice $\omega = 2\pi/T$, kde T je čas jednoho oběhu, dostáváme:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Pro (reálnou nebo komplexní) funkci $f(t)$ budeme potřebovat také její tzv. komplexní Fourierovy koeficienty, které jsou definovány jako komplexní čísla

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt.$$

Přímo z definice jsou přitom jasné vztahy mezi koeficienty a_n a b_n Fourierových řad (po přepočtu formulí pro tyto koeficienty pro funkce s obecnou periodou délky T) a těmito komplexními koeficienty c_n

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

a při výhradně reálných hodnotách funkce f jsou samozřejmě c_n a c_{-n} komplexně konjugované hodnoty.

Vyjádřili jsme tedy Fourierovu řadu $F(t)$ pro funkci $f(t)$ ve tvaru

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}.$$

K tomuto vyjádření se vrátíme, až budeme diskutovat prakticky mimořádně užitečnou Fourierovu transformaci.

Všimněme si ještě, že při pevně zvoleném T vyjadřuje výraz $2\pi/T$ právě změnu ve frekvenci způsobenou nárůstem n o jedničku. Je to tedy právě diskrétní krok, se kterým při výpočtu koeficientů Fourierovy řady měníme frekvence.

V pozdější části této kapitoly ukážeme, že Fourierovy řady pracují s úplným ortogonálním systémem na \mathcal{S}^0 , budeme se na to ale muset napřed důkladně připravit. Proto zde teď zformulujeme užitečné výsledky předem a hned uvedeme

několik praktičtěji orientovaných poznámek. K důkazům se vrátíme později.

7.8

7.8. Věta. Uvažujme konečný interval délky $[a, b]$ s délkou $T = b - a$. Dále nechť f je funkce s reálnými nebo komplexními hodnotami v $S^1[a, b]$ (tj. po částech spojitá funkce s po částech spojitou první derivací), periodicky rozšířená na celé \mathbb{R} . Potom platí:

(1) Částečné součty s_N její Fourierovy řady konvergují bodově k funkci

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x+} f(y) + \lim_{y \rightarrow x-} f(y) \right).$$

(2) Je-li navíc f spojitá periodická funkce s po částech spojitou derivací, pak je bodová konvergence její Fourierovy řady stejnoměrná.

(3) L_2 -vzdálenost $\|s_N - f\|_2$ částečných součtů Fourierovy řady funkce f vždy konverguje k nule při $N \rightarrow \infty$.

7.9

7.9. Rozvoj periodických funkcí. Konvergentní Fourierova řada bude samozřejmě konvergovat i mimo původní interval $[-T/2, T/2]$ a bude periodickou funkcí na celém \mathbb{R} . (Hodnotou v nule se nemusíme zabývat, protože stejně na koeficienty Fourierovy řady nebude mít žádný vliv.)

Jako příklad uveďme Fourierovu řadu pro periodickou funkci vzniklou z Heavisideovy funkce $g(x)$ zúžením na jednu periodu. Tj. naše funkce g bude na intervalu $[-\pi, 0]$ rovna -1 a na intervalu $(0, \pi]$ bude rovna 1 . Jejímu periodickému rozšíření na celé \mathbb{R} se říká „hraná vlnová funkce“.

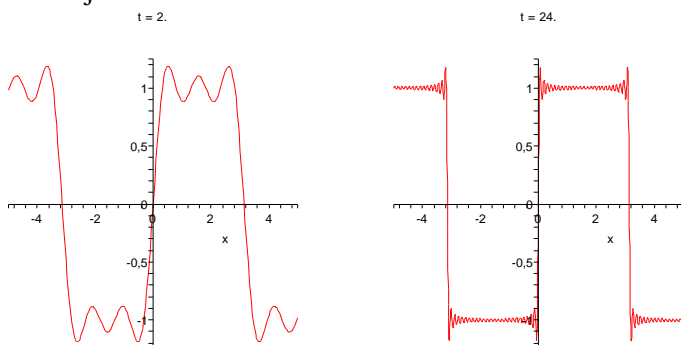
Protože jde o funkci lichou, jistě budou všechny koeficienty u funkcí $\cos(nx)$ nulové, a pro koeficienty u funkcí $\sin(nx)$ spočteme

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Výsledná Fourierova řada je tedy tvaru

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

a součet jejích prvních pěti a prvních padesáti členů je na následujících dvou obrázcích.



Nejprve spočítáme, čemu je rovna k -tá složka vektoru

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi_l \\ \sin 2\varphi_l \\ \vdots \\ \sin n\varphi_l \end{pmatrix}$$

Použitím součtového vzorce pro sinus dostáváme

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} (\sin(k-1)\varphi_l + \sin(k+1)\varphi_l) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin k\varphi_l \cos \varphi_l,$$

takže daný vektor je opravdu vlastní vektor s vlastní hodnotou $\cos \varphi_l$.

Protože máme n různých vlastních čísel (což je dimenze), tvoří tyto vlastní vektory bázi. Nyní zbývá ověřit, že vlastní vektory jsou ortogonální a normované.

Pokud za základní periodu pro takovou hranatou vlnovou funkci zvolíme interval $[-T/2, T/2]$, tj. chceme pracovat s periodickým rošířením Heavisideovy funkce s periodou T , jednoduše přepočítáme, že výsledná Fourierova řada je tvaru

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega x) + \frac{1}{3} \sin(3\omega x) + \frac{1}{5} \sin(5\omega x) + \dots \right),$$

kde číslu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se říká „fázová frekvence“ vlny (vyjadřuje poměr skutečné základní periody k frekvenci jednotkové, tj. délce jednotkové kružnice 2π).

Všimněme si, že se zvyšujícím se počtem členů řady se výrazně zpřesňuje aproximace s výjimkou stále se zmenšujícího okolí bodu nespojitosti, na němž je ale maximum odchylky stále zhruba stejné. Je to obecná vlastnost Fourierových řad, které se říká *Gibbsův jev*.

Povšimněme si také, že v samotném bodě nespojitosti je hodnota aproximující funkce právě v polovině mezi limitami zprava a zleva pro Heavisideovu funkci, přesně jak říká 7.7(1).

Samořejmě nelze očekávat, že by konvergence Fourierových řad pro funkci g s body nespojitosti mohla být stejnoměrná (to by totiž g musela být coby stejnoměrná limita spojitých funkcí sama spojitá!).

7.10

7.10. Dopady symetrie funkcí. Zamysleme se, jak bychom



mohli co nejlépe aproximovat Fourierovou řadou funkci $g(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$. Kdybychom prostě periodicky rozšířili tuto funkci z daného intervalu $[0, 1]$, nebude spojitá a tedy i konvergence v celých číslech by byla podobně podivná jako u Heavisidovy funkce. Můžeme ale snadno pracovat s Fourierovou řadou na základním intervalu $[-1, 1]$. Jde o sudou funkci, a tedy nenulové mohou být pouze koeficienty a_n .

Pro $n > 0$ dvojnásobným využitím metody „per partes“ dostáváme:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 x^2 \cos\left(\frac{2\pi n x}{2}\right) dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos(\pi n x) dx \\ &= \frac{4}{\pi^2 n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Zbývající koeficient je

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Celá řada dávající periodické rozšíření x^2 z intervalu $[-1, 1]$ je tedy

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(\pi n x).$$

Z Weistrassova kritéria je přímo zřejmé, že tato řada konverguje stejnoměrně a tedy bude $f(x)$ spojitá. Z věty 7.7 ale už víme, že ve skutečnosti je $f(x) = x^2$ na celém intervalu $[-1, 1]$, protože aproximujeme spojitou funkci na celém \mathbb{R} a konvergence musí být stejnoměrná. Aproximuje tedy naše

řada funkci x^2 na intervalu $[0, 1]$ výrazně lépe, než bychom uměli s periodickým rošířením dané funkce jen z tohoto intervalu.

Pojďme ale v našich ilustracích dále. Díky stejnoměrné konvergenci můžeme využít věty o derivování a integrování řad člen po členu a spočítat Fourierovy řady pro funkce x a x^3 . Jednodušší bude derivování:

$$\frac{1}{2}(x^2)' = x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(\pi n x).$$

Tato řada už evidentně nemůže konvergovat stejnoměrně, protože periodické rozšíření funkce x není spojitou funkcí. Docela snadno lze ale i přímo dovést, že bodově konvergovat bude (viz. naše úvahy o alternujících řadách v ??), proto jsme skutečně dostali rovnost (viz. Věta ??).

Obdobně můžeme člen po členu integrovat a dostaneme

$$\frac{1}{3}x^3 = \frac{2}{3}x + \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(\pi n x)$$

a výslednou Fourierovu řadu dostaneme dosazením za x z předchozí rovnosti.

7.11

7.11. Obecné Fourierovy řady a wavelety. V případě obecného ortogonálního systému funkcí f_n a z něj vytvářených řad se často hovoří o *obecných Fourierových řadách* vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí f_n .

Fourierovy řady a další z nich vycházející nástroje jsou využívány ke zpracování různých signálů, obrázků apod. Povahou použitých periodických goniometrických funkcí v klasických Fourierových řadách a jejich prosté škálování pomocí zvětšující se frekvence zároveň omezují jejich použitelnost. V mnoha oblastech aplikací proto vyvstala přirozená potřeba nalézt šikovnější úplné ortogonální systémy funkcí, které budou vycházet z předpokládané povahy dat a které bude možné efektivněji zpracovávat.

Obvyklým požadavkem pro rychlá numerická zpracování bývá rychlá škálovatelnost měřítek a možnost snadného posuvu o konstantní hodnoty. V takový systém lze například doufat, jestliže zvolíme vhodnou spojitou funkci ψ s kompaktním nosičem, ze které sestrojíme spočetně mnoho funkcí ψ_{ij} , $j, k \in \mathbb{Z}$, pomocí translací a dilatací:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Pokud vyhovíme zároveň dvěma podmínkám:

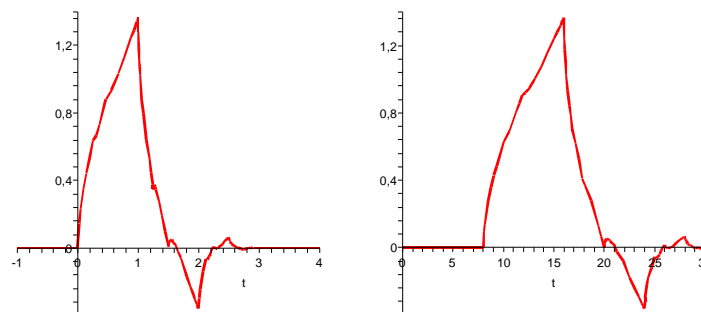
- tvar *mateřské funkce* ψ dobře vystihuje možné chování dat,
- její potomci ψ_{jk} tvoří úplný ortogonální systém,

pak se nejspíš bude dobře dařit konkrétní zpracovávaný signál aproximovat pomocí jen několika málo funkcí. Hovoříme o tzv. *waveletech*.

Nemáme zde prostor pro podrobnosti, jde o mimořádně živý směr výzkumu i základ komerčních aplikací. Zájemce snadno najde spoustu literatury.

Poznamenejme však, že ve skutečnosti se velmi často používají pouze diskrétní verze našich objektů, tzn. hodnoty všech funkcí ψ_{jk} jsou pouze tabelovány v diskrétní (hodně velké) množině bodů a jsou v tomto smyslu i ortogonální. Dobrým příkladem jsou standardy JPEG2000, které tuto techniku používají a jsou nástrojem pro profesionální komprimaci obrazových dat ve filmovém průmyslu.

Jedny z prvních waveletů sestrojila Ingrid Debauchies. Na obrázku níže je tzv. Daubechies mateřská wavelet $D4(x)$ a její dcera $D4(2^{-3}x - 1)$.



Průběh funkce $D4$ není popsán analytickým způsobem. Je zvolen tak, aby měl ve svých různých částech vlastnosti, které jsou třeba pro grafická data potřebné — pomalý i rychlý růst, ostrý zlom v obou extrémech apod. Složitost konstrukce spočívá samozřejmě v tom, abychom skutečně dostali ortogonální systém!

2. Metrické prostory

7.12

7.12. Metriky a normy. Při odvozování techniky Fourierových řad jsme volně hovořili o vzdálenosti na prostoru funkcí. Nyní se u tohoto pojmu zastavíme pořádněji.



Euklidovská vzdálenost ve vektorových prostorech \mathbb{R}^n splňuje, stejně jako naše L_1 -vzdálenost $d(f, g) = \|f - g\|_1$, následující tři abstraktní požadavky. Mějme v dalších odstavcích pořádkem v paměti tyto dva příklady.

AXIOMY METRIKY A NORMY

Množina X spolu se zobrazením $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechny $x, y, z \in X$

$$(7.2) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ a } d(x, y) = 0, \text{ právě když } x = y,$$

$$(7.3) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(7.4) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

se nazývá *metrický prostor*, zobrazení d je *metrika* na X .

Je-li X vektorový prostor nad \mathbb{R} a $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce splňující

$$(7.5) \quad \|x\| \geq 0, \text{ přičemž } \|x\| = 0, \text{ právě když } x = 0,$$

$$(7.6) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \text{ pro všechny skaláry } \lambda,$$

$$(7.7) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

pak funkci $\|\cdot\|$ nazýváme *norma* na X a prostor X je *normovaný vektorový prostor*.

Norma vždy zadává metriku $d(x, y) = \|x - y\|$.

Na začátku předchozí části této kapitoly jsme tedy ve skutečnosti definovali vzdálenost funkcí pomocí tzv. L_1 -normy. V euklidovských vektorových prostorech pak šlo také o normu $\|x\|$, která je indukována z bilineárního skalárního součinu vztahem $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Úplně stejně jsme obdrželi na po částech spojitých funkcích L_2 -normu.

7.13

7.13. Konvergence. Na zcela abstraktních metrických prostorech lze zavést pojem (blízkých) okolí jednotlivých prvků, konvergence posloupností prvků a související „topologické“ pojmy prakticky úplně stejně, jako jsme to udělali pro reálná a komplexní čísla a jejich posloupnosti na začátku páté kapitoly, viz. 5.12–5.16.

Můžeme tyto odstavce skoro zkopírovat, jen u věty 5.16 narazíme na výrazně složitější důkazy. Začneme konceptem konvergentních posloupností v metrickém prostoru X s metrikou d :

CAUCHYOVSKÉ POSLOUPNOSTI

Uvažme libovolnou posloupnost prvků x_0, x_1, \dots v X takovou, že pro libovolné pevně zvolené kladné reálné číslo $\epsilon > 0$ platí pro všechny dvojice prvků x_i, x_j posloupnosti, až na konečně mnoho výjimek (které závisí na volbě ϵ),

$$d(x_i, x_j) < \epsilon.$$

Jinak řečeno, pro každé pevné $\epsilon > 0$ existuje index N takový, že předcházející nerovnost platí pro všechna $i, j > N$. Takové posloupnosti prvků se říká *Cauchyovská posloupnost*.

Stejně jako u reálných či komplexních čísel bychom rádi, aby každá Cauchyovská posloupnost prvků $x_i \in X$ konvergovala k nějaké hodnotě x v následujícím smyslu:

KONVERGENTNÍ POSLOUPNOSTI

Jestliže pro posloupnost prvků $x_0, x_1, \dots \in X$, pevně zvolený prvek $x \in X$ a pro libovolné kladné reálné číslo ϵ platí pro všechna i , až na konečně mnoho výjimek (záviselých na volbě ϵ),

$$d(x_i, x) < \epsilon,$$

říkáme, že posloupnost $x_i, i = 0, 1, \dots$, *konverguje* k prvku x , kterému říkáme *limita* posloupnosti $x_i, i = 0, 1, \dots$ v metrickém prostoru X .

Díky trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro každou dvojici prvků x_i, x_j z konvergentní posloupnosti, s dostatečně velikými indexy (značení jako v definici výše)

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_N) + d(x_N, x_j) < 2\epsilon,$$

a proto je každá konvergentní posloupnost také Cauchyovská. Metrické prostory, kde platí i obrácené tvrzení, tj. že každá Cauchyovská posloupnost je konvergentní nazýváme úplné metrické prostory.

7.11

7.14. Topologie a konvergence. Stejně jako v případě reálných čísel můžeme zformulovat konvergenci pomocí „otevřených okolí“.

—————| OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY |—————

Otevřené ϵ -okolí prvku x v metrickém prostoru X je množina

$$\mathcal{O}_\epsilon(x) = \{y \in X; d(x, y) < \epsilon\}.$$

Podmnožina $U \subset X$ je *otevřená*, jestliže obsahuje s každým svým bodem i nějaké jeho ϵ -okolí. Podmnožina $W \subset X$ je *uzavřená*, jestliže je její doplněk $X \setminus W$ otevřenou množinou.

Namísto ϵ -okolí hovoříme také o (otevřené) ϵ -kouli se středem v x . V případě normovaného prostoru si vystačíme s ϵ -koulí se středem v nule, jejichž přičtením k danému prvku x dostaneme právě jeho ϵ -okolí.

Hromadné body podmnožiny $A \subset X$ opět definujeme jako takové prvky $x \in X$, ke kterým konverguje nějaká posloupnost bodů z A neobsahující samotný bod x . Snadno uvidíme, že množina je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.

Skutečně, přímo z definice platí, že množina A je uzavřená, právě když pro každý bod $x \notin A$ existuje nějaké $\epsilon > 0$ takové, že celé ϵ -okolí $\mathcal{O}_\epsilon(x)$ má s A prázdný průnik. Pokud by tedy A byla uzavřená a x byl hromadný bod množiny A , pak jistě nekonečně mnoho bodů množiny A leží v libovolném takovém ϵ -okolí, což je spor.

Naopak, předpokládejme, že A obsahuje všechny své hromadné body a uvažme $x \in X \setminus A$. Pokud by v každém ϵ -okolí bodu x existoval bod $x_\epsilon \in A$, pak postupně volbami $\epsilon = 1/n$ dostaneme posloupnost bodů $x_n \in A$ konvergující x . Pak by ovšem x musel být hromadným bodem a tedy v A , takže opět máme spor.

Snadno jako u reálných čísel ověříme, že libovolný průnik a libovolné konečné sjednocení uzavřených podmnožin metrického prostoru je opět uzavřená množina.

U otevřených množin je to opět naopak: libovolné sjednocení otevřených množin je opět otevřená množina, ale jen konečný průnik otevřených je obecně otevřený. Dokažte si obě tvrzení podrobně sami!

7.15

7.15. L_p normy. SNyní máme k dispozici obecné nástroje, se kterými se můžeme podívat na příklady metrických prostorů tvořených konečněrozměrnými vektory nebo funkcemi. Omezíme se na obzvlášť užitečnou třídu norem.



Začneme na konečněrozměrných prostorech \mathbb{R}^n nebo \mathbb{C}^n a definujeme pro pevné reálné číslo $p \geq 1$ a libovolný vektor $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$\|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^p \right)^{1/p}.$$

Dokážeme, že takto je definována norma. První dvě vlastnosti z definice jsou zřejmé, zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Vyjdeme přitom z tzv. *Hölderovy nerovnosti*:

Lemma. Pro pevné reálné číslo $p > 1$ a každé dvě n -tice nezáporných reálných čísel x_i a y_i platí

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q},$$

kde $1/q = 1 - 1/p$.

DŮKAZ. Označme si X a Y výrazy v součinu na pravé straně nerovnosti. Pokud jsou všechna čísla x_i nebo všechna y_i nulová, pak tvrzení platí. Předpokládejme, tedy $X \neq 0$ a $Y \neq 0$.

Hölderova nerovnost je užitečným přímým důsledkem konvexity exponenciální funkce. Definujme čísla v_k a w_k tak, aby platilo

$$x_k = X e^{v_k/p}, \quad y_k = Y e^{w_k/q}.$$

Protože $1/p + 1/q = 1$, můžeme uvažovat afinní kombinaci hodnot $\frac{1}{p}v_k + \frac{1}{q}w_k$ a díky konvexitě exponenciály dostáváme

$$e^{v_k/p + w_k/q} \leq \frac{1}{p} e^{v_k} + \frac{1}{q} e^{w_k}.$$

Odtud již přímo dopočítáme

$$\frac{1}{XY} x_k y_k \leq \frac{1}{p} \left(\frac{x_k}{X} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{y_k}{Y} \right)$$

a sečtením přes $k = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{XY} \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{pX^p} \sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{qY^q} \sum_{i=1}^n y_i^q.$$

Na pravé straně ovšem jednotlivé sumy dávají právě X^p a Y^q a celý výraz je tedy roven $1/p + 1/q = 1$. Vynásobením této nerovnosti číslem XY dostáváme právě dokazovanou nerovnost. \square

Teď už budeme umět dovést, že $\|\cdot\|_p$ je skutečně norma:

MINKOWSKÉHO NEROVNOST

Pro každé $p > 1$ a všechny n -tice nezáporných reálných čísel (x_1, \dots, x_n) a (y_1, \dots, y_n) platí

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}.$$

K ověření této praktické nerovnosti vede následující trik využívající Hölderovu nerovnost. Jistě platí (všimněme si, že $p > 1$)

$$\sum_{i=1}^n x_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

a stejně tak

$$\sum_{i=1}^n y_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)q} \right)^{1/q}.$$

Nyní sečtením posledních dvou nerovností (s využitím skutečnosti, že $p + q = pq$ a tedy $(p-1)q = pq - q = p$) dostaneme

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p},$$

ale $1 - 1/q = 1/p$, takže jde právě o dokazovanou Minkowského nerovnost.

Ověřili jsme si tedy, že na každém konečněrozměrném reálném nebo komplexním vektorovém prostoru máme třídu norem $\| \cdot \|_p$ pro všechna $p > 0$. Kromě toho ještě klademe

$$\|z\|_\infty = \max\{|z|_i, i = 1, \dots, n\},$$

což je zjevně také norma.

7.16

7.16. L_p -normy pro posloupnosti a funkce. Nyní docela snadno zavedeme normy i na vhodných nekonečněrozměrných vektorových prostorech. Začneme posloupnostmi. Vektorový prostor ℓ_p , $p > 1$, je množina všech posloupností reálných nebo komplexních posloupností x_0, x_1, \dots takových, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Všechny posloupnosti s omezenými absolutními hodnotami členů tvoří prostor ℓ_∞ . Limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$ okamžitě z Minkowského nerovnosti vidíme, že výraz

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

je norma na ℓ_p . Obdobně klademe na ℓ_∞

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|, i = 0, 1, \dots\}$$

a opět dostáváme normu.

Konečně, vraťme se k prostorům funkcí $\mathcal{S}^0[a, b]$ na konečném intervalu $[a, b]$ nebo $\mathcal{S}_c[a, b]$ na neohraničeném intervalu. Zjevně pro každé $p \geq 1$ a pro všechny funkce v takovém prostoru funkcí existují Riemannovy integrály

$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

a můžeme tedy definovat

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Riemannův integrál jsme definovali pomocí limitního přechodu vycházejícího z tzv. Riemannových součtů odpovídajícím dělením Ξ s reprezentanty ξ_i . V našem případě tedy jde o konečné součty

$$S_{\Xi, \xi} = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|^{1/p} (x_i - x_{i-1}).$$

Hölderova nerovnost použitá na Riemannovy součty součinu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ dá

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| |g(\xi_i)| (x_i - x_{i-1}) = \\ & = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| (x_i - x_{i-1})^{1/p} |g(\xi_i)| (x_i - x_{i-1})^{1/q} \\ & \leq \left(\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|^p (x_i - x_{i-1}) \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |g(\xi_i)|^q (x_i - x_{i-1}) \right)^{1/q} \end{aligned}$$

přičemž napravo máme zjevně právě součin Riemannových součtů pro integrály $\|f\|_p$ a $\|g\|_q$.

Limitním přechodem tak ověřujeme tzv. *Hölderovu nerovnost pro integrály* platnou pro všechny nezáporné reálné funkce f a g v našem prostoru po částech spojitých funkcí s kompaktním nosičem:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left(\int_a^b f(x)^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b g(x)^q dx \right)^{1/q}.$$

Přesně stejným postupem jako v předchozím odstavci odvodíme z Hölderovy nerovnosti nerovnost Minkowského v její integrální formě:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

a tedy $\|\cdot\|_p$ je skutečně norma na našem vektorovém prostoru funkcí pro všechna $p > 1$ (a pro $p = 1$ jsme tuto skutečnost ověřili už dávno).

Mezi těmito normami je výjimečný případ $p = 2$, který jsme již dříve realizovali pomocí skalárního součinu. V tomto případě jsme mohli odvodit trojúhelníkovou nerovnost daleko jednodušeji pomocí Schwarzovy nerovnosti.

Pro funkce z $\mathcal{S}^0[a, b]$ můžeme definovat i obdobu L_∞ -normy na n -rozměrných vektorech. Protože jsou naše funkce

po částech spojitě, budou pro ně na konečném uzavřeném intervalu vždy maximum existovat maximum a klademe tedy pro takovou funkci f

$$\|f\|_{\infty} = \max\{f(x), x \in [a, b]\},$$

kde za hodnoty $f(x)$ v bodech nespojitosti považujeme jak jednostranné limity (které podle naší definice vždy existují), tak samotnou hodnotu funkce. Opět je zřejmé, že jde o normu.

7.17

7.17. Úplnost vůči L_p -normám. Ve všech případech z předchozího odstavce nám definované normy zadávají metriky. Podívejme se nyní, jak je to s jejich úplností a vzájemnými vztahy.

7.18

7.18. Ohraničené a kompaktní množiny. Uzavřené a otevřené množiny představují základní pojmy tzv. *topologie*. Aniž bychom zacházeli do hlubších podrobností a souvislostí, seznámili jsme se právě s *topologií metrických prostorů*.

Pro reálná čísla se nám osvědčily ještě následující pojmy, které nám ulehčovaly vyjadřování:

Vnitřním bodem podmnožiny A v metrickém prostoru je takový prvek, který do A patří i s nějakým svým ϵ -okolím.

Hraniční bod množiny A je takový prvek $x \in X$, jehož každé okolí má neprázdný průnik jak s A tak s doplňkem $X \setminus A$. Hraniční bod tedy může, ale nemusí patřit do samotné množiny A .

Otevřené pokrytí množiny A je takový systém otevřených množin $U_i \subset X$, $i \in I$, že jejich sjednocení obsahuje celé A .

Izolovaným bodem množiny A rozumíme prvek $a \in A$, který má v metrickém prostoru X ϵ -okolí, jehož průnik s A je právě jednobodová množina $\{a\}$.

Množina A prvků metrického prostoru se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje kladné reálné číslo r takové, že $d(x, y) \leq r$ pro všechny prvky $x, y \in A$. V opačném případě je *neohraničená*.

Metrický prostor X se nazývá *kompaktní*, jestliže v něm má každá posloupnost $x_i \in X$ podposloupnost konvergující k nějakému bodu $x \in M$.

7.16

7.19. Věta. *Metrický prostor je kompaktní, právě když každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.*

Metrický prostor je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.

DOMYSLET, CO VLASTNĚ VŠECHNO CHCI ŘÍCI A JAK S DŮKAZY. DOCELA BY SE HODILA JEŠTĚ BANACHOVA VĚTA O KONTRAKCI

Samořejmě metriky zadané normou mají velmi specifické vlastnosti, protože jejich chování lze na celém prostoru X odvodit z vlastností v libovolně malém okolí nulového prvku $x = 0 \in X$.

Nyní se můžeme vrátit k důkazu věty, ve které jsme dali částečný obrázek o bodové i jiné konvergenci Fourierových

řad. Nejde nám přitom o nutné podmínky konvergence a v literatuře lze najít mnoho jiných formulací. Naše Věta 7.8 ale byla docela jednoduchá a postihla velké množství užitečných případů.

Věta. *Nechť g je po částech spojitá a po částech monotónní funkce na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada $F(x)$ konverguje na $[-\pi, \pi]$ a její součet je*

- roven hodnotě $g(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in [-\pi, \pi]$, ve kterém je funkce $g(x)$ spojitá,
- v každém bodě nespojitosti x_0 funkce $g(x)$ roven

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \right),$$

- v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$ je roven

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\pi^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) \right).$$

Pokud navíc je funkce $g(x)$ spojitá, periodická s periodou 2π a všude existuje její po částech spojitá derivace, pak konverguje její Fourierova řada stejnoměrně.

3. Integrální operátory

7.12

7.20. Integrální operátory. V případě konečněrozměrných vektorových prostorů jsme mohli vnímat vektory jako zobrazení z konečné množiny pevně zvolených generátorů do prostoru souřadnic. Nejjednodušší lineární zobrazení zobrazovala vektory do skalárů (tzv. lineární formy) a byla definována pomocí jednořádkových matic jako součet součinů těchto souřadnic s pevně zvolenými hodnotami na generátorech. Složitější zobrazení s hodnotami opět v tom samém prostoru pak byla obdobně zadána maticemi. Velice podobně umíme přistoupit k lineárním operacím na prostorech funkcí.

V případě vektorového prostoru \mathcal{S} všech po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$ se lineární zobrazení $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývají (reálné) *lineární funkcionály*. Jednoduše je můžeme zadat dvěma způsoby – pomocí vyčíslení funkce (případně jejích derivací) v jednotlivých bodech nebo pomocí integrování. Příkladem funkcionálu L tedy může být vyčíslení v jediném pevném bodě $x_0 \in I$

$$L(f) = f(x_0)$$

integrální funkcionál pak je zadán pomocí pevně zvolené funkce $g(x)$

$$L(f) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Funkce $g(x)$ zde hraje roli váhy, se kterou při definici Riemannova integrálu bereme jednotlivé hodnoty reprezentující funkci $f(x)$. Nejjednodušším příkladem takového funkcionálu je samozřejmě Riemannův integrál samotný, tj. případ s $g(x) = 1$ pro všechny body x . Dobrou představu dává také volba

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2} + \frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

To je funkce hladká na celém \mathbb{R} s kompaktním nosičem v intervalu $(-a, a)$, viz 6.6. V bodě $x = 0$ má přitom hodnotu jedna. Integrální funkcionál

$$L_y(f) = \int_a^b f(x)g(y-x) dx$$

je možné vnímat jako „rozmlžené zprůměrování“ hodnot funkce f kolem bodu $x = y$ (obrázek funkce g je v 6.6 – ve svém středu má hodnotu jedna a hladkým monotonním způsobem se plynule přimkne k nule ve vzdálenosti a na obě strany). Ještě lepší volbou je z tohoto pohledu libovolná funkce g jejíž integrál přes celou reálnou osu je jednička.

7.13

7.21. Konvoluce funkcí. Pohled na integrální funkcionál L_y jako na zprůměrované chování funkce f v okolí daného bodu je názornější pro případ nevlastních mezí integrálu $a = -\infty, b = \infty$. Místo prostoru \mathcal{S} všech po částech spojitých funkcí na \mathbb{R} budeme uvažovat po částech spojitě a v absolutní hodnotě integrovatelné funkce f v roli argumentu pro náš funkcionál. Volný parametr y může být vnímán jako nová nezávislá proměnná a naše operace tedy ve skutečnosti zobrazuje funkce opět na funkce $f \mapsto \tilde{f}$:

$$\tilde{f}(y) = L_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x) dx.$$

Této operaci se říká *konvoluce funkcí* f a g , značíme ji $f * g$. Většinou se konvoluce definuje pro reálné nebo komplexní funkce s kompaktním nosičem na celém \mathbb{R} . Pomocí transformace $t = z - x$ se snadno spočte

$$(f * g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x) dx = - \int_{\infty}^{-\infty} f(z-t)g(t) dt = (g * f)(z),$$

je tedy konvoluce coby binární operace na dvojicích funkcí s kompaktními nosiči komutativní.

Konvoluce je mimořádně užitečný nástroj pro modelování způsobu, jak můžeme pozorovat experiment nebo jak se projevuje prostředí při přenosu informací (např. analogový audio nebo video signál ovlivňovaný šumy apod.). Argument f je přenášenou informací, funkce g je volena tak, aby co nejlépe vystihovala vlivy prostředí či zvoleného technického postupu.

Konvoluce jsou jedním z mnoha případů obecných integrálních operátorů na prostorech funkcí

$$K(f)(y) = \int_a^b f(x)k(y, x) dx$$

s jádrem daným funkcí dvou proměnných $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definiční obor takových funkcionálů je nutné vždy volit s ohledem na vlastnosti jádra tak, aby vždy existoval použitý integrál.

7.14

7.22. Fourierova transformace. Teorie integrálních operátorů s jádry a rovnic, které je obsahují je velice užitečná a zajímavá zároveň, bohužel pro ni zde teď ale nemáme dost prostoru. Zaměříme teď alespoň na jeden mimořádně důležitý případ, tzv. *Fourierovu transformaci* \mathcal{F} , která úzce

souvisí s Fourierovými řadami. Připomeňme si základní formuli pro parametrizaci jednotkové kružnice v komplexní rovině s rychlostí obíhání $\omega = 2\pi/T$, kde T je čas jednoho oběhu:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Pro (reálnou nebo komplexní) funkci $f(t)$ můžeme spočítat její tzv. komplexní Fourierovy koeficienty jako komplexní čísla

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt.$$

Přitom platí vztahy mezi koeficienty a_n a b_n Fourierových řad (po přepočtu formulí pro tyto koeficienty pro funkce s obecnou periodou délky T) a těmito čísly c_n

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

a při reálném f jsou samozřejmě c_n a c_{-n} komplexně konjugované. Označíme-li $\omega_n = \omega n$, bude tedy původní funkce $f(t)$ s konvergující Fourierovou řadou rovna

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Při pevně zvoleném T vyjadřuje výraz $\Delta\omega = 2\pi/T$ právě změnu ve frekvenci způsobenou nárůstem n o jedničku. Je to tedy právě diskrétní krok, se kterým při výpočtu koeficientů Fourierovy řady měníme frekvence. Koeficient $1/T$ u formule pro c_n je pak roven $\Delta\omega/2\pi$, takže můžeme řadu pro $f(t)$ přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx e^{i\omega_n t} \right).$$

Představme si nyní hodnoty ω_n pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ jako vybrané reprezentanty pro malé intervaly $[\omega_n, \omega_{n+1}]$ o délce $\Delta\omega$. Pak náš výraz ve vnitřní velké závorce v poslední formuli pro $f(t)$ ve skutečnosti vyjadřuje sčítance Riemannových součtů pro nevlastní integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

kde $g(\omega)$ je funkce nabývající v bodech ω_n hodnoty

$$g(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Předpokládejme, že naše funkce f je integrovatelná v absolutní hodnotě přes celé \mathbb{R} . Pak můžeme limitně přejít $T \rightarrow \infty$ a dojde ke zjemňování normy $\Delta\omega$ našich intervalů. Zároveň se dostaneme v posledním výrazu k integrálu

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Můžeme tedy položit pro (každou v absolutní hodnotě Riemannovsky integrovatelnou) funkci f na \mathbb{R}

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Této funkci \tilde{f} říkáme Fourierova transformace funkce f . Přechodí úvahy pak ukazují, že pro „rozumné“ funkce $f(t)$ bude také platit

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Tím říkáme, že existuje k právě definované *Fourierově transformaci* \mathcal{F} inverzní operace \mathcal{F}^{-1} , které říkáme *inverzní Fourierova transformace*.

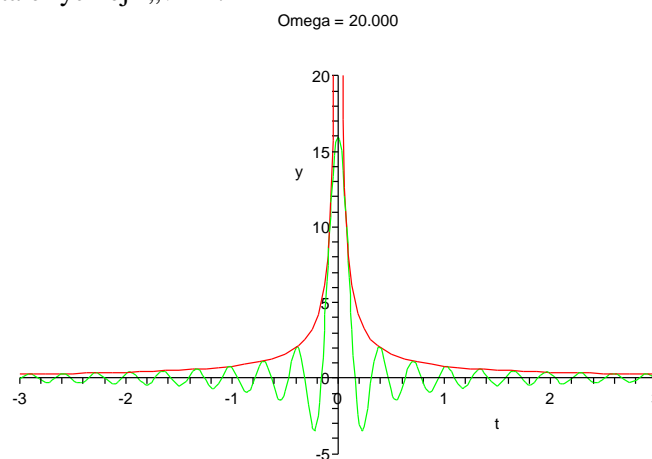
Všimněme si, že Fourierova transformace a její inverze jsou integrální operátory se skoro shodným jádrem $k(\omega, t) = e^{\pm i\omega t}$.

7.15

7.23. Vlastnosti Fourierovy transformace. Fourierova transformace zajímavým způsobem převrací lokální a globální chování funkcí. Začneme jednoduchým příkladem, ve kterém najdeme funkci $f(t)$, která se ztransformuje na charakteristickou funkci intervalu $[-\Omega, \Omega]$, tj. $\tilde{f}(\omega) = 0$ pro $|\omega| > \Omega$ a $\tilde{f} = 1$ pro $|\omega| \leq \Omega$. Inverzní transformace \mathcal{F}^{-1} nám dává

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{it} e^{i\omega t} \right]_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}t} \frac{1}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}t} \sin(\Omega t). \end{aligned}$$

Přímým výpočtem limity v nule (L'Hospitalovo pravidlo) spočteme, že $f(0) = 2\Omega(2\pi)^{-1/2}$, nejbližší nulové body jsou v $t = \pm\pi/\Omega$ a funkce poměrně rychle klesá k nule mimo počátek $x = 0$. Na obrázku je tato funkce znázorněná zelenou křivkou pro $\Omega = 20$. Zároveň je vynesena červenou křivkou oblast, ve které se s rostoucím Ω naše funkce $f(t)$ stále rychleji „vlní“.



V dalším příkladu spočteme Fourierovu transformaci derivace $f'(t)$ pro nějakou funkci f . Pro jednoduchost předpokládejme, že f má kompaktní nosič, tj. zejména $\mathcal{F}(f')$ i

$\mathcal{F}(f)$ skutečně existují a počítejme metodou per partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-i\omega t} f(t)]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega)\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že Fourierova transformace převádí (infinitesimální) operaci derivování na (algebraickou) operaci prostého násobení proměnnou. Samozřejmě můžeme tento vzorec iterovat, tj.

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}(f), \dots, \mathcal{F}(f^{(n)}) = i^n \omega^n \mathcal{F}(f).$$

Další mimořádně důležitou vlastností je vztah mezi konvolucemi a Fourierovou transformací. Spočtěme, jak dopadne transformace konvoluce $h = f * g$, kde opět pro jednoduchost předpokládáme, že funkce mají kompaktní nosiče. Při výpočtu prohodíme pořadí integrování, což je krok, který ověříme teprve v diferenciálním a integrálním počtu později, viz ???. V dalším krůčku pak zavedeme substituci $t - x = u$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\omega t} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega(u+x)} du \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \right) \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)\end{aligned}$$

Podobný výpočet ukazuje i obrácené tvrzení, že Fourierova transformace součinu je, až na konstantu, konvoluce transformací.

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Jak jsme si uváděli výše, konvoluce $f * g$ velice často modeluje proces našeho pozorování nějaké sledované veličiny f . Pomocí Fourierovy transformace a její inverze nyní můžeme snadno rozpoznat původní hodnoty této veličiny, pokud známe konvoluční jádro g . Prostě spočteme $\mathcal{F}(f * g)$ a podělíme obrazem $\mathcal{F}(g)$. Hovoříme o *dekonvoluci*.

Vraťme se nyní ještě k prvnímu příkladu s inverzní transformací k charakteristické funkci f_{Ω} intervalu $[-\Omega, \Omega]$. Zkusme provést limitní přechod pro Ω jdoucí k nekonečnu a označme $\sqrt{2\pi} \delta(t)$ kýženou limitní „funkcí“ pro $\mathcal{F}^{-1}(f_{\Omega})(t)$. Pro součin s libovolným obrazem $\mathcal{F}(g)$ platí

$$\mathcal{F}^{-1}(f_{\Omega} \cdot \mathcal{F}(g))(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathcal{F}^{-1}(f_{\Omega})(z-t) dt.$$

Při $\Omega \rightarrow \infty$ přejde výraz nalevo k $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(z) = g(z)$, zatímco napravo dostáváme

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(z-t) dt.$$

Naše hledaná $\delta(t)$ tedy vypadá na „funkci“, která je všude nulová, kromě jediného bodu $t = 0$, kde je tak „nekonečná“, že integrováním jejího součinu s libovolnou integrovatelnou funkcí g dostaneme právě hodnotu g v bodě $t = 0$. Není to samozřejmě funkce v našem smyslu, nicméně jde o objekt často používaný. Říká se jí *Diracova funkce* δ a korektně ji lze popsat jako tzv. distribuci. Z nedostatku času nebudeme distribuce podrobněji rozebírat a omezíme se na konstatování, že si lze dobře Diracovo δ představit jako jednotkový impulz v jediném bodě. Fourierova transformace jej pak přetransformuje na konstantní funkci $\mathcal{F}(\delta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Naopak mnohé funkce, které nejsou integrovatelné v absolutní hodnotě na \mathbb{R} transformuje Fourierova transformace na výrazy s Diracovým δ . Např.

$$\mathcal{F}(\cos(nt))(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(n-\omega) + \delta(n+\omega)).$$

7.16

7.24. Poznámky o dalších transformacích. Pokud použijeme Fourierovu transformaci na lichou funkci $f(t)$, tj. $f(-t) = -f(t)$, příspěvek integrace součinu $f(t)$ a funkce $\cos t$ se pro kladná a záporná t vyruší. Dostaneme proto přímým výpočtem

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Výsledná funkce je opět lichá, proto ze stejného důvodu i inverzní transformaci lze spočítat obdobně. Vynecháním imaginární jednotky i dostáváme vzájemně inverzní transformace, kterým se říká *Fourierova sinusová transformace* pro liché funkce:

$$\tilde{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(\omega) \sin \omega t dt.$$

Obdobně se definuje *Fourierova cosinová transformace* pro sudé funkce.

Fourierovu transformaci nelze dobře využít pro funkce, které nejsou integrovatelné v absolutní hodnotě přes celé \mathbb{R} (minimálně nedostáváme opravdové funkce). *Laplaceova transformace* se chová docela podobně jako Fourierova a tuto vadu nemá:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Integrální operátor \mathcal{L} má velice rychle se zmenšující jádro, proto bude existovat $\mathcal{L}(p(t))$ například pro každý polynom p a všechna kladná s . Obdobně jako pro Fourierovu transformaci dostaneme prostým výpočtem per partes vztah pro

Laplaceovu transformaci derivované funkce při $s > 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(s) &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = [f(t) e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s).\end{aligned}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace a řadu dalších zejména v technické praxi používaných transformací je možné snadno dohledat v literatuře.

Řešení cvičení

7.4.

$$f_1 * f_2(t) = \begin{cases} t - \frac{t^2}{2} + 4 & \text{pro } t \in \langle -2, -1 \rangle \\ 1 - t + \frac{1}{2} & \text{pro } t \in \langle -1, 1 \rangle \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2 & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$