



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Cvičení předmětu M5444 Markovské řetězce

Zadání příkladů na 1. cvičení

Příklad 1.: Na přímce jsou vyznačeny body $-1, 0, 1$. V bodě 0 se nachází kulička. Náhodně házíme mincí. Jestliže padne líc, posuneme kuličku do bodu 1 , jestliže padne rub, posuneme ji do bodu -1 . Je-li kulička v bodě 1 a padne-li líc, ponecháme ji v bodě 1 , padne-li rub, posuneme ji do bodu 0 . Je-li kulička v bodě -1 a padne-li rub, ponecháme ji v bodě -1 , padne-li líc, posuneme ji do bodu 0 .

Modelujte tuto situaci vhodným SP.

Pro posloupnost 10 hodů mincí $\{L, L, L, R, R, L, R, L, R, R\}$ graficky znázorněte odpovídající realizace SP.

Příklad 2.: Necht' náhodná veličina $X \sim \text{Ex}(\lambda)$, tj.

hustota: $\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$, distribuční funkce: $\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$. Zavedeme

SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$, $t > 0$.

a) Najděte jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.

b) K distribuční funkci $\Phi_t(x)$ najděte hustotu $\varphi_t(x)$.

Příklad 3.: Náhodná veličina X má distribuční funkci $\Phi(x)$. Necht' $c, t \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX + c$.

a) Najděte jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.

b) Najděte dvourozměrnou distribuční funkci $\Phi_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$.

Příklad 4.: Náhodná veličina X má distribuční funkci $\Phi(x)$. Necht' $t > 0$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX^2$. Určete jednorozměrnou distribuční funkci $\Phi_t(x)$ tohoto SP.

Příklad 5.: Necht' X_1, X_2, X_3, \dots jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$. Necht' $T = \{1, 2, 3, \dots\}$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$.

Určete pravděpodobnostní rozložení tohoto SP.

Příklad 6.: Necht' náhodná veličina $X \sim \text{Ex}(\lambda)$, tj. $E(X) = 1/\lambda$, $D(X) = 1/\lambda^2$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = tX$. Najděte střední hodnotu, rozptyl, autokovarianční a autokorelační funkci tohoto SP.

Příklad 7.: Necht' Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny, které jsou nekorelované. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = t + Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t$, $\omega > 0$ konstanta. Zjistěte, zda daný SP je slabě stacionární.

Příklad 8.: Uvažme SP z příkladu 7. Zavedeme standardizovaný SP $\{U_t; t \in T\}$, kde

$U_t = \frac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}$. Zjistěte, zda tento standardizovaný SP je slabě stacionární.

Příklad 9.: Necht' Y, Z jsou náhodné veličiny se středními hodnotami $E(Y) = \mu_1$, $E(Z) = \mu_2$ a rozptyly $D(Y) = \sigma_1^2$, $D(Z) = \sigma_2^2$. Jejich koeficient korelace je $R(Y, Z) = 0,7$. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = 2tY + Z$. Najděte střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci tohoto SP.

Příklad 10.: Necht' $\gamma_X(t_1, t_2)$ je autokovarianční funkce SP $\{X_t; t \in T\}$. Necht' $f(t), g(t)$ jsou reálné funkce definované na T . Zavedeme SP $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = f(t)X_t + g(t)$. Najděte autokovarianční funkci tohoto SP.

Příklad 11.: Necht' SP $\{X_t; t \in T\}$ má střední hodnotu $\mu_X(t) = t^2 - 1$ a autokovarianční funkci $\gamma_X(t_1, t_2) = 2e^{-\alpha(t_1 - t_2)^2}$. Zavedeme SP $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = tX_t + t^2 + 1$. Najděte jeho střední hodnotu a autokovarianční funkci.

Zadání příkladů na 2. cvičení

Příklad 1.: Necht' X_1, X_2, \dots jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které nabývají hodnot z množiny $J = \{0, 1, 2, \dots\}$. Dokažte, že stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec.

Příklad 2.: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0, 1\}$.

Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Jaká je

pravděpodobnost, že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1), jestliže jeho počáteční stav zvolíme

- podle výsledku hodu mincí
- podle výsledku náhodného pokusu, v němž je stavu 0 dosaženo s pravděpodobností $1/3$ a stavu 1 s pravděpodobností $2/3$.

Příklad 3.: Model dvoustavového systému

Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0, 1\}$. Pravděpodobnosti

přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, vektor počátečních

pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (\gamma, 1-\gamma)$. Pro $n = 2$ najděte simultánní pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru (X_1, X_2, X_3) .

Příklad 4.: Uvažme markovský řetězec z příkladu 2 b). Vypočtete pravděpodobnost jevu, že $X_1 \neq X_2$.

Příklad 5.: (Model mužských zaměstnání) Předpokládáme rozdělení mužských zaměstnání do tří tříd: vědecktí pracovníci, kvalifikovaní pracovníci, nekvalifikovaní pracovníci. Je známo, že 80% synů vědeckých pracovníků se stane vědeckými pracovníky, 10% kvalifikovanými a 10% nekvalifikovanými pracovníky. Ze synů kvalifikovaných pracovníků 60% bude kvalifikovanými pracovníky, 20% vědeckými a 20% nekvalifikovanými pracovníky. Konečně v případě nekvalifikovaných pracovníků 50% synů bude nekvalifikovanými pracovníky, 25% kvalifikovanými a 25% vědeckými pracovníky. Předpokládejme, že každý muž má syna. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Příklad 6.: V příkladu 5 nyní předpokládejme, že muž má syna jen s pravděpodobností 0,8. Zaveďte nyní homogenní markovský řetězec se čtyřmi stavy – první tři jsou stejné jako v předešlé úloze a čtvrtý odpovídá případu, kdy muž nemá syna a proces končí. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Příklad 7.: (Klasifikace roků podle úrody jablek) V severní Nové Anglii můžeme klasifikovat roky podle úrody jablek jako úrodné, průměrné a neúrodné. Pravděpodobnost, že po úrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,4; 0,4; 0,2.

Pravděpodobnost, že po průměrném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,6; 0,2. Pravděpodobnost, že po neúrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,4; 0,4. Rok 1965 byl úrodný. Vypočtete vektor absolutních pravděpodobností pro rok 1967.

Příklad 8.: V příkladu 7 předpokládejme, že pravděpodobnost, že rok bude úrodný, je $1/4$ průměrný $1/2$ a neúrodný $1/4$. Jaký je vektor absolutních pravděpodobností pro příští rok?

Návod na 1. cvičení v počítačové učebně, Markovské řetězce, PS 2011

Věta o vlastnostech homogenního markovského řetězce: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$ a maticí přechodu \mathbf{P} . Pak pro $\forall n, m \in N_0, n \geq 1$ platí:

- a) $\mathbf{P}(n, n+m) = \mathbf{P}(m) = \mathbf{P}^m$.
b) $\mathbf{p}(n, n+m) = \mathbf{p}(m) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^m$.

Příklad 1.: (Klasifikace roků podle úrody jablek) V severní Nové Anglii můžeme klasifikovat roky podle úrody jablek jako úrodné, průměrné a neúrodné. Pravděpodobnost, že po úrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,4; 0,4; 0,2. Pravděpodobnost, že po průměrném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,6; 0,2. Pravděpodobnost, že po neúrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,4; 0,4. Rok 1965 byl úrodný. Vypočtěte vektor absolutních pravděpodobností pro rok 1967.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2\}$, kde stav 0 znamená úrodný rok, stav 1 průměrný rok a stav 2 neúrodný rok. Náhodná veličina X_n nabývá hodnoty j , když n -tý rok odpovídá stavu j . Sestavíme matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}. \text{ Vektor počátečních pravděpodobností je } \mathbf{p}(0) = (1, 0, 0). \text{ Hledáme}$$

$$\text{vektor } \mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2 = (0,28, 0,48, 0,24).$$

Návod na řešení v MATLABu:

```
P=[0.4 0.4 0.2;0.2 0.6 0.2;0.2 0.4 0.4];  
p0=[1 0 0];  
p2= p0*P^2
```

Příklad 2.: V příkladu 1 předpokládejme, že pravděpodobnost, že rok bude úrodný, je 0,25, průměrný 0,5 a neúrodný 0,25. Jaký je vektor absolutních pravděpodobností pro příští rok?

Řešení: Vektor počátečních pravděpodobností nyní bude $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Vypočteme

$$\text{vektor absolutních pravděpodobností } \mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Návod na řešení v MATLABu:

```
P=[0.4 0.4 0.2;0.2 0.6 0.2;0.2 0.4 0.4];  
p0=[1/4 1/2 1/4];  
p1= p0*P
```

Příklad 3. – k samostatnému řešení: Půjčovna aut, která vlastní 1000 automobilů, působí ve třech pobočkách A, B, C. Zákazník si může vybrat auto v některé z poboček a vrátit ho v kterékoliv jiné pobočce. Dlouhodobým sledováním v týdenním intervalu byly zjištěny tyto skutečnosti: Pravděpodobnost vrácení auta do stejné pobočky, z níž bylo vypůjčeno, je pro pobočky A, B, C postupně 0,6; 0,6; 0,5. Pravděpodobnost, že auto vypůjčené v A bude vráceno v B, je 0,3 a naopak, pravděpodobnost, že auto vypůjčené v B bude vráceno v A, je 0,2. Pravděpodobnost, že auto vypůjčené v B bude vráceno v C, je 0,2 a naopak, pravděpodobnost, že auto vypůjčené v C bude vráceno v B, je 0,4. Zjednodušeně předpokládáme, že žádné auto není ukradeno ani nehavaruje.

- a) Modelujte provoz půjčovny aut pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- b) Předpokládejme, že na počátku sledování je 500 aut v pobočce A, 300 v B a 200 v C. Určete, kolik aut bude v jednotlivých pobočkách po uplynutí 1 týdne.

Výsledek: Po týdnu sledování bude v pobočce A 380 aut, v pobočce B 410 aut a v pobočce C 210 aut.

Příklad 4. – k samostatnému řešení: Uvažme podnik, v němž jsou tři oddělené provozy – provoz 1, provoz 2 a provoz 3. V těchto provozech pracují dělníci vykonávající jednostranné úkony. Aby nedocházelo k otupění zaměstnanců, tak se dělníci na konci měsíce v jednotlivých provozech náhodně střídají. Existuje samozřejmě i jistá šance, že si dělník najde jiné zaměstnání a podnik opustí. Předpokládáme, že v takovém případě už se do podniku nevrátí. Dlouhodobým pozorováním pohybu zaměstnanců v tomto podniku byly zjištěny následující skutečnosti:

Dělníci z provozu 1 na konci měsíce s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ zůstávají v provozu 1, s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ přecházejí do provozu 2 a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ přecházejí do provozu 3.

Dělníci v provozu 2 na konci měsíce s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ zůstávají v provozu 2, s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ přecházejí do provozu 1 a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ přecházejí do provozu 3.

Jelikož práce v provozu 3 je velmi namáhavá, tak po měsíci dělníci z tohoto provozu odcházejí se stejnou pravděpodobností buď do provozu 1 nebo do provozu 2.

Dále bylo zjištěno, že zaměstnanci z tohoto podniku odcházejí pouze z provozu 3, a to s pravděpodobností $\frac{1}{9}$.

- a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- b) Vypočtete pravděpodobnost, že zaměstnanec, který na počátku sledování pracoval v provozu 1, ve čtvrtém měsíci sledování již v podniku pracovat nebude.

Výsledek: Pravděpodobnost, že ve 4. měsíci už zaměstnanec nebude v podniku pracovat, je

$$\frac{1}{12} = 0,08\bar{3}.$$

Definice stacionárního vektoru stochastické matice: Necht' \mathbf{a} je stochastický vektor a \mathbf{P} stochastická matice odpovídající dimenze. Jestliže platí $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, pak vektor \mathbf{a} se nazývá stacionární vektor matice \mathbf{P} .

Definice stacionárního rozložení HMR: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Stochastický vektor \mathbf{a} , který je stacionárním vektorem matice \mathbf{P} , se nazývá stacionární rozložení daného řetězce.

Definice limitního rozložení HMR: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$. Jestliže existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \bar{\mathbf{p}}$, pak vektor $\bar{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení daného řetězce. Jestliže vektor $\bar{\mathbf{p}}$ nezávisí na vektoru počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$, pak řekneme, že daný řetězec je ergodický (regulární).

Věta o vztahu mezi stacionárním a limitním rozložením HMR: Jestliže $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický homogenní markovský řetězec a existuje jeho stacionární rozložení \mathbf{a} , pak limitní rozložení $\bar{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení \mathbf{a} .

Markovova věta: Necht' $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu \mathbf{P} . Jestliže existuje takové číslo $n \in N_0$, že matice \mathbf{P}^n má všechny prvky kladné, pak

- existuje stacionární rozložení daného řetězce a je jediné,
- řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický,
- posloupnost matic \mathbf{P}^n konverguje k limitní matici \mathbf{A} , jejíž řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru \mathbf{a} .

Návod na hledání stacionárního vektoru stochastické matice pomocí MATLABu

```
function [a]=sv(P)
%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru
%syntaxe: a=sv(P)
% vstupni parametr ... stochasticka matice P
% vystupni parametr ... stacionarni vektor a
% zjistime rad matice P:
n=size(P,1);
% vytvorime pomocnou jednotkovou matici:
I=eye(n);
% sestavime matici soustavy:
A=[[I-P]';ones(1,n)];
% vytvorime vektor pravých stran:
f=[zeros(n,1);1];
% vypocteme stacionární vektor
a=(A\f)';
```

Příklad 5.: Předpokládejme, že v nějaké oblasti může být počasí pouze ve třech stavech, a to déšť, jasno, sníh. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že nikdy nebývají dva jasné dny za sebou. Jestliže je v jistém dni jasno, pak další den bude buď déšť nebo sníh, a to se stejnou pravděpodobností. Jestliže je v jistém dni sníh nebo déšť, pak následující den se počasí buď nezmění, a to s pravděpodobností 0,5 nebo se změní, a pak v polovině případů bude jasno. Popište stav počasí homogenním markovským řetězcem a vypočtěte jeho stacionární rozložení.

Řešení: Homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ má množinu stavů $J = \{1,2,3\}$, kde stav 1 znamená déšť, stav 2 jasno a stav 3 sníh. Matice přechodu \mathbf{P} má tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Návod na řešení v MATLABu:

$\mathbf{P}=[0.5 \ 0.25 \ 0.25;0.5 \ 0 \ 0.5;0.25 \ 0.25 \ 0.5];$
 $\mathbf{a}=\text{sv}(\mathbf{P})$

Výsledek: $\mathbf{a} = (0,4 \ 0,2 \ 0,4)$

Znamená to, že po 40 % dnů prší, po 20 % dnů je jasno a po 40 % dnů sněží.

Příklad 6. – k samostatnému řešení: Obchodník prodává tři druhy pracích prášků, které označíme A, B, C. Aby zjistil, jak se vyvíjí poptávka po těchto prášcích, provedl v 1. měsíci prodeje průzkum, v němž se zjišťovalo, který druh prášku zákazníci kupují. Při tomto průzkumu bylo zjištěno, že prášek A kupuje 50% zákazníků, prášek B 20% a prášek C 30% zákazníků. Za měsíc byl proveden další průzkum, který zjišťoval, ke kterému druhu prášků

zákazníci přešli. Výsledky průzkumu zachycuje matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$

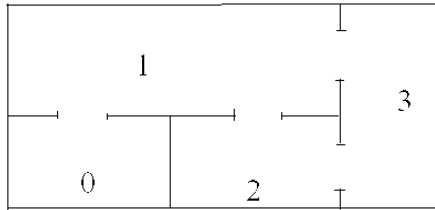
a) Určete absolutní pravděpodobnosti po dvou měsících a interpretujte je. (Po dvou měsících bude prášek A nakupovat 80,6% zákazníků, prášek B 12,8% a C 6,6% zákazníků.

b) Najděte vektor limitních pravděpodobností a limitní matici přechodu.

$$(\bar{\mathbf{p}} = (0,8281 \ 0,125 \ 0,0469), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \\ 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \\ 0,8281 & 0,125 & 0,0469 \end{pmatrix})$$

Zadání příkladů na 4. cvičení

Příklad 1.: Myš je vložena do bludiště tvaru



V každém okamžiku si myš vybere náhodně jednu z dveří, které vedou z přihrádky, v níž se právě nachází a přejde do příslušné přihrádky.

- Modelujte proces pomocí HMR, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram
- Ukažte, že všechny stavy jsou trvalé nenulové.
- Jestliže myš byla na počátku vložena do nulté přihrádky, po kolika krocích se v průměru poprvé vrátí do této přihrádky?
- Jestliže myš byla na počátku vložena do nulté přihrádky a sýr do třetí přihrádky, s jakou pravděpodobností myš dospěje k potravě právě třemi přechody?

Příklad 2.: Výskyt sledované vlastnosti u jedinců určitého typu je dán dvojicí alel A, a . Každý jedinec může mít dvojici alel AA (dominantní jedinec), aa (recesivní jedinec), $aA=Aa$ (hybridní jedinec). Základním předpokladem genetiky je, že při křížení dostává potomek jednu alelu od každého z rodičů, že tyto alely se vybírají náhodně a nezávisle na sobě. Z populace náhodně vybereme jedince, zkřížíme ho s hybridním jedincem, v příštím kroku náhodně vybíráme jedince z populace tvořené jejich potomky, opět ho zkřížíme s hybridem atd.

- Modelujte tento proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici P .
- Jestliže proces probíhá dostatečně dlouho, jaká je pravděpodobnost výskytu dominantního (resp. recesivního resp. hybridního) jedince?
- Nechť proces probíhá již dlouhou dobu. Křížíme dominantního jedince s hybridem. Po kolika krocích se v průměru objeví další dominantní jedinec?

Návod na 2. cvičení v počítačové učebně, Markovské řetězce, PS 2011

Odhady absolutních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu v HMŘ

Zadání: Dva přátelé, Karel a Jiří, se každý týden pravidelně scházejí na kondičním tenisovém utkání. Karel si poslední dva roky zaznamenává svou úspěšnost. Ze 106 utkání vyhrál 65, přičemž ve 43 případech výhře předcházela výhra a v 16 případech prohře předcházela prohra.

- Modelujte popsanou situaci pomocí homogenního markovského řetězce.
- Najděte bodové odhady počátečních pravděpodobností a 95% intervaly spolehlivosti pro počáteční pravděpodobnosti
- Najděte bodové odhady pravděpodobností přechodu a 95% intervaly spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu.

Upozornění: Před výpočtem intervalů spolehlivosti nezapomeňte ověřit splnění podmínek dobré aproximace.

Vzorce:

Údaje obsažené v textu úlohy se uspořádají do tabulky tvaru:

	1	2	Σ
1	c_{11}	c_{12}	d_1
2	c_{21}	c_{22}	d_2
			d

Bodový odhad počáteční pravděpodobnosti $p_i(0)$:

$$\hat{p}_i(0) = \frac{d_i}{d}, i = 1, 2, \dots, k$$

Podmínky dobré aproximace: $\hat{p}_i(0)[1 - \hat{p}_i(0)]d \geq 5$.

Meze 100(1- α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro $p_i(0)$:

$$\hat{p}_i(0) \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)[1 - \hat{p}_i(0)]}{d}} u_{1-\alpha/2}$$

Bodový odhad pravděpodobnosti přechodu p_{ij} :

$$\hat{p}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}, i, j = 1, \dots, k$$

Podmínky dobré aproximace $\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})c_i \geq 5$.

Meze 100(1- α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro p_{ij} :

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})}{c_i}} u_{1-\alpha/2}$$

V našem případě:

	Výhra v minulém týdnu	Prohra v minulém týdnu	Σ
Výhra v tomto týdnu	$c_{11} = 43$	$c_{12} = 22$	$c_1 = d_1 = 65$
Prohra v tomto týdnu	$c_{21} = 25$	$c_{22} = 16$	$c_2 = d_2 = 41$
			$d = 106$

Výsledky:

Ad a) Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s množinou stavů $J = \{1,2\}$, přičemž $X_n = 1$, když v n-tém týdnu Karel vyhrál nad Jiřím a $X_n = 2$, když v n-tém týdnu Karel s Jiřím prohrál.

Ad b) Odhad vektoru počátečních pravděpodobností: $\hat{p}(0) = (0,61;0,39)$.

Meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro $p_1(0)$, $p_2(0)$, $p_3(0)$:

$p_1(0) \in (0,52;0,706)$, $p_2(0) \in (0,294;0,48)$ vždy s pravděpodobností 95 %.

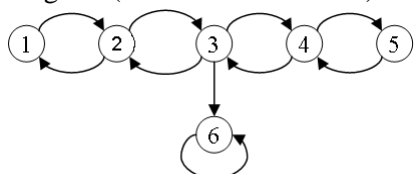
Ad c) Odhadnutá matice přechodu: $\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,34 \\ 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.

Meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu:

$p_{11} \in (0,5465;0,7766)$, $p_{12} \in (0,2234;0,4535)$, $p_{21} \in (0,46;0,759)$, $p_{22} \in (0,241;0,54)$ vždy s pravděpodobností 95 %.

Zadání příkladů na 5. cvičení

Příklad 1.: Je dán HMŘ $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jeho přechodový diagram (bez ohodnocení hran) má tvar:



Sestrojte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů. Najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Příklad 2.: Necht' $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je HMŘ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2\}$ a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Ukažte, že tento řetězec je nerozložitelný. Najděte střední hodnoty dob prvních}$$

návratů do stavů 0, 1, 2.

Příklad 3.: Necht' $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je HMŘ s množinou stavů $J = \{0, \dots, 5\}$ a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}. \text{ Najděte kanonický tvar } P.$$

Příklad 4.: Necht' $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je HMŘ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, 3\}$ a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný nebo ne. Pokud ano, najděte}$$

třídy trvalých a přechodných stavů.

Příklad k samostatnému řešení (pomocí MATLABu): Při analýze situace na trhu práce jednotliví pracovníci mohou: „pracovat ve své profesi“ (stav 1), „pracovat v jiné profesi“ (stav 2), „být nezaměstnaní“ (stav 3). Při sledování velkého souboru pracovníků se ukázalo, že během jednotlivých měsíců došlo ke změnám mezi uvedenými stavy následovně:

ve své profesi pracovalo i v následujícím měsíci 80% pracovníků, 10% přešlo k jiné profesi a 10% se stalo nezaměstnanými. Z pracovníků pracujících mimo svou profesi 10% přešlo v následujícím měsíci ke své profesi, 70% zůstalo nadále pracovat mimo svou profesi a 20% se stalo nezaměstnanými.

Z nezaměstnaných našlo práci ve své profesi 5% osob, 30% nezaměstnaných získalo práci mimo svou profesi a 65% osob zůstalo i v dalším měsíci nezaměstnanými.

Najděte matici přechodu P , limitní matici A , fundamentální matici Z a matici M středních hodnot dob prvního vstupu do stavů 1, 2, 3.

Výsledek:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,05 & 0,3 & 0,65 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2,8496 & -1,127 & -0,7227 \\ -0,5879 & 1,6855 & -0,09766 \\ 0,9004 & 0,125 & 1,7773 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3,6 & 6,9 & 8 \\ 12,2 & 2,5 & 6 \\ 13,3 & 3,8 & 3,2 \end{pmatrix}.$$

Návod na 3. cvičení v počítačové učebně, Markovské řetězce, PS 2011

Definice absorpčního stavu a absorpčního řetězce:

Stav $j \in J$ je absorpční stav, jestliže $p_{jj} = 1$.

Homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů se nazývá absorpční, jestliže každý jeho trvalý stav je absorpční.

Definice fundamentální matice absorpčního řetězce:

Matice $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice řádu s a \mathbf{Q} je matice řádu s obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy, se nazývá fundamentální matice absorpčního řetězce.

Věta o součtu prvků v řádcích fundamentální matice:

Střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech, když vychází z neabsorpčního stavu i a skončí v absorpčním stavu, vypočítáme jako součet prvků v i -tém řádku fundamentální matice \mathbf{M} . Maticový zápis: $\mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{e}$, kde \mathbf{e} je sloupcový vektor typu $s \times 1$ ze samých jedniček.

Definice matice přechodu do absorpčních stavů:

Matice $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{R}$, kde \mathbf{M} je fundamentální matice a \mathbf{R} je matice typu $r \times s$ obsahující pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů, se nazývá matice přechodu do absorpčních stavů.

Upozornění: Následující příklady lze řešit s využitím funkce `absorb.m`

Příklad 1.: (Soustruh v kovoobráběčské firmě)

Jistá malá kovoobráběčská firma vlastní soustruh. Soustruh se může nacházet v následujících stavech, které jsou sledovány s časovým krokem jeden týden: stav 1 – bude v provozu, stav 2 – bude v opravě, stav 3 – dá se k prodeji, stav 4 – dá se do šrotu.

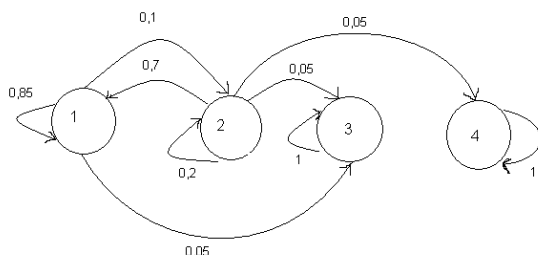
Situace je vyjádřena pomocí homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2, 3, 4\}$, přičemž $X_n = j$, je-li soustruh v n -tém týdnu ve stavu j .

Máme dānu matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 & 0,05 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Nakreslete přechodový diagram.

Řešení:



b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.

Řešení:

Trvalé stavy jsou 3 a 4, oba jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční. Stav 1 a 2 jsou neabsorpční.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,85 & 0,1 \\ 0,05 & 0,05 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) Vypočtete fundamentální matici a interpretujte její prvky.

Řešení:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Interpretace prvků matice \mathbf{M} : je-li v daném týdnu soustruh v provozu, pak můžeme očekávat, že než se prodá nebo dá do šrotu, bude v průměru 16 týdnů v provozu a 2 týdny v opravě. Je-li soustruh v daném týdnu v opravě, pak můžeme očekávat, že než se prodá nebo dá do šrotu, bude v průměru 14 týdnů v provozu a 3 týdny v opravě.

d) Vypočtete matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

Řešení:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$$

Interpretace prvků matice \mathbf{B} : je-li soustruh v daném týdnu v provozu, pak s pravděpodobností 0,9 půjde do prodeje a s pravděpodobností 0,1 půjde do šrotu. Je-li soustruh v daném týdnu v opravě, pak s pravděpodobností 0,85 půjde do prodeje a s pravděpodobností 0,15 půjde do šrotu.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Znamená to, že když je soustruh v daném týdnu v provozu resp. v opravě, tak bude v průměru trvat 18 resp. 17 týdnů, než půjde do prodeje nebo do šrotu.

Příklad 2.: (Pracovníci ve firmě)

Jistá firma provedla dlouhodobý průzkum pohybu pracovníků v jednom odboru společnosti. V průzkumu byly specifikovány 4 stavy, a to stav 1 - propuštění ze zaměstnání, stav 2 - odchod z osobních důvodů, stav 3 - práce ve funkci referenta a stav 4 - práce v řídicí funkci. Jednotkovým časovým obdobím bylo jedno čtvrtletí. Známe matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,07 & 0,8 & 0,1 \\ 0,08 & 0,01 & 0,03 & 0,88 \end{pmatrix}$$

Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

Částečné výsledky:

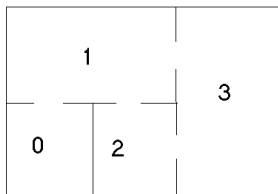
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5,71 & 4,76 \\ 1,43 & 9,52 \end{pmatrix}$$

Interpretace 2. řádku matice **M**: pracovník, který nastoupil do vedoucí funkce společnosti, bude pro společnost pracovat asi 2 roky a 9 měsíců, z toho 2 roky a 4,5 měsíce v řídicí funkci a 4,5 měsíce jako referent.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Interpretace 2. řádku matice **B**: pracovník, který pracuje ve vedoucí funkci společnosti, s pravděpodobností 0,8 bude propuštěn a s pravděpodobností 0,2 odejde sám.

Příklad 3.: Myš je vložena do bludiště tvaru:



V každém okamžiku si myš vybere náhodně jedny z dveří přihrádky, v níž se právě nachází a přejde do příslušné přihrádky. Předpokládáme, že v přihrádce 3 je potrava a myš tuto přihrádku neopustí, jakmile do ní jednou vstoupí. Pohyb myši v bludišti lze modelovat pomocí HMR $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, 3\}$, přičemž $X_n = j$, když v okamžiku n je myš v j -té přihrádce.

Matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

Částečné výsledky:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1,67 & 2 & 0,67 \\ 0,67 & 2 & 0,67 \\ 0,33 & 1 & 1,33 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku matice **M**: Myš, která vychází z přihrádky 0, stráví v průměru 1,67 kroku v přihrádce 0 resp. 2 kroky v přihrádce 1 resp. 0,67 kroku v přihrádce 2 než dospěje k potravě.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Znamená to, že když myš vychází z kterékoli přihrádky, tak s pravděpodobností 1 dospěje k potravě.

Návod na 4. cvičení v počítačové učebně, Markovské řetězce, PS 2011

Definice markovského řetězce s oceněním přechodů

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J , v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění r_{ij} (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j \in J}$, která se nazývá matice výnosů. Řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ se pak nazývá markovský řetězec s oceněním přechodů.

Rekurentní metoda výpočtu středních hodnot celkových výnosů

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu \mathbf{P} a matici ocenění \mathbf{R} . Označme

$v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i ,

$q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i .

Pak pro $\forall i \in J$ a $n = 1, 2, 3, \dots$ platí rekurentní vztah:

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_j(n-1), \text{ přičemž } v_i(0) = 0.$$

V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$, $n = 1, 2, \dots$

Aproximační vzorec pro výpočet středních hodnot celkových výnosů

$\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$, kde \mathbf{A} je limitní matice přechodu.

Příklad 1.: Řidič taxi dlouhodobým pozorováním zjistil, že když se v daném okamžiku nachází ve městě A, pak s pravděpodobností 0,3 poveze příštího zákazníka do města B a s pravděpodobností 0,7 bude zákazník žádat jízdu uvnitř A. Jestliže se řidič taxi nachází ve městě B, pak se stejnou pravděpodobností buď poveze příštího zákazníka do A nebo bude jezdit uvnitř B. Průměrná tržba za jízdu (v obou směrech) mezi A a B činí 1000 Kč a uvnitř měst A a B 100 Kč. Vypočítejte střední hodnotu tržby za první dvě jízdy, vyjede-li řidič z města A resp. B.

Řešení:

Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1\}$, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když

v okamžiku n je řidič ve městě A (resp. B). Matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 100 & 1000 \\ 1000 & 100 \end{pmatrix}$.

$$q_0 = 0,7 \cdot 100 + 0,3 \cdot 1000 = 370, \quad q_1 = 0,5 \cdot 1000 + 0,5 \cdot 100 = 550$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 794 \\ 1010 \end{pmatrix}$$

Vyjede-li řidič z města A, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 794 Kč. Vyjede-li řidič z města B, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 1010 Kč.

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice \mathbf{P} , \mathbf{R} a vektor \mathbf{v}_0 :

$\mathbf{P}=[0.7 \ 0.3;0.5 \ 0.5]$; $\mathbf{R}=[100 \ 1000;1000 \ 100]$; $\mathbf{v}_0=[0 \ 0]^T$;

Vypočteme vektor $\mathbf{q} = \text{diag}(\mathbf{P}^*\mathbf{R}')$;

Vypočteme vektor $\mathbf{v}_1=\mathbf{q}+\mathbf{P}^*\mathbf{v}_0$

Vypočteme vektor $\mathbf{v}_2=\mathbf{q}+\mathbf{P}^*\mathbf{v}_1$

Upozornění: Ve Studijních materiálech v ISu je uložena funkce vynos.m, která počítá:

- vektory středních hodnot celkových výnosů po jednom období až po n období,
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

Příklad 2.: Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jako úspěšný (stav 0) nebo jako neúspěšný (stav 1), přičemž lze předpokládat, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném období je ovlivněna jen tím, jak se výrobek prodával v předchozím období. Dlouhodobým sledováním prodeje byly zjištěny tyto poznatky: pokud byl výrobek v jednom období úspěšný, pak v následujícím období bude úspěšný s pravděpodobností 0,8. Jestliže byl výrobek v jednom období neúspěšný, tak v následujícím období zůstane neúspěšný s pravděpodobností 0,7. Zůstává-li výrobek úspěšný, je výnos 10 jednotek. Změní-li se z úspěšného na neúspěšný, klesne výnos na 5 jednotek. Při změně z neúspěšného na úspěšný je výnos 10 jednotek a zůstává-li výrobek neúspěšný, dojde ke ztrátě 20 jednotek.

a) Modelujte proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a matici výnosů.

b) Pomocí rekurentního vzorce $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1)$ vypočtěte pro oba stavy střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n období, $n = 1, 2, \dots, 6$.

c) Pomocí aproximačního vzorce $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ najděte přibližné vyjádření pro vektor středních hodnot celkových výnosů $\mathbf{v}(n)$. Pro $n = 1, 2, \dots, 6$ porovnejte výsledky s přesným vyjádřením získaným v bodě (b).

Řešení:

ad a) Zavedeme HMR $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1\}$, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v n-tém období je výrobek úspěšný (resp. neúspěšný). Matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

ad b) Výpočet pomocí rekurentního vzorce:

$$q_0 = 0,8 \cdot 10 + 0,2 \cdot 5 = 9, \quad q_1 = 0,3 \cdot 10 + 0,7 \cdot (-20) = -11$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(4) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -18,5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20,5 \\ -18,25 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(6) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21,75 \\ -17,625 \end{pmatrix}$$

ad c) Výpočet pomocí aproximačního vzorce:

Nejprve najdeme stacionární vektor \mathbf{a} matice \mathbf{P} (viz Příklady na druhé cvičení v počítačové učebně) a sestavíme limitní matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$. Po dosazení do aproximačního vzorce

získáme výsledky:

$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 18 \\ -22 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -21 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21 \\ -19 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že aproximační vzorec je pro malá n nevhodný.

Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$ oceněn číslem $\beta^n r_{ij}$, kde číslo β ($0 < \beta < 1$) je tzv. diskontní faktor. (Může např. vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat.) Uvedený řetězec se pak nazývá markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů.

Rekurentní metoda výpočtu středních hodnot celkových výnosů

Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{přičemž } \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$$

Příklad 3.: Výrobce nealkoholických nápojů hodlá nabídnout síti potravinových obchodů nápoj D s novou příchutí. Je si vědom konkurence tří současných oblíbených typů nealkoholických nápojů A, B, C, ale věří, že zákazníci ocení příznivé složení a dobrou chuť nápoje D a budou jej preferovat, jakmile ho ochutnají. Na základě zkušeností s obdobnými produkty byla sestavena matice přechodu (časovým krokem je 1 týden):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,10 & 0,15 & 0,10 \\ 0,10 & 0,75 & 0,05 & 0,10 \\ 0,05 & 0,05 & 0,60 & 0,30 \\ 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Výnos nebo ztráta, které plynou z jednotlivých přechodů, jsou uvedeny v matici výnosů:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diskontní faktor je 0,5. Pro prvních 10 týdnů vypočtěte vektor středních hodnot celkových výnosů. Zjistěte také limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů.

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice **P**, **R**, vektor **v0** a diskontní faktor **beta**:

$P=[0.65 \ 0.1 \ 0.15 \ 0.1; 0.1 \ 0.75 \ 0.05 \ 0.1; 0.05 \ 0.05 \ 0.6 \ 0.3; 0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.85];$

$R=[-2 \ -1 \ -1 \ 5; -1 \ -2 \ -1 \ 5; -1 \ -1 \ -2 \ 3; -3 \ -3 \ -3 \ 4];$

$v0=[0 \ 0 \ 0 \ 0]'$; $beta=0.5;$

Vypočteme vektor $q = \text{diag}(P \cdot R')$;

vektor $v1=q+beta \cdot P \cdot v0$

vektor $v2=q+beta \cdot P \cdot v1$

atd. až

vektor $v10=q+beta \cdot P \cdot v9$

Výsledek:

	v(0)	v(1)	v(2)	v(3)	v(4)	...	v(9)	v(10)
A	0	-1,050	-1,331	-1,360	-1,331	...	-1,255	-1,253
B	0	-1,150	-1,496	-1,574	-1,574	...	-1,525	-1,523
C	0	-0,400	-0,133	0,110	0,255	...	0,402	0,405
D	0	2,950	4,139	4,635	4,849	...	5,023	5,025

Výpočet limitního vektoru **v(n)**:

Zadáme jednotkovou matici $I = \text{eye}(4);$

$\text{limitni_v}=(I-\text{beta} \cdot P)^{-1} \cdot q$

$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = (-1,2506, -1,5216, 0,4069, 5,0276)$

Upozornění: Ve Studijních materiálech v ISu je uložena funkce `diskont.m`, která počítá:

- vektory středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom období až po n obdobích,
- limitní vektor středních hodnot diskontovaných výnosů,
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

Dobrovolný samostatný úkol: Upravte funkci `vynos.m` tak, aby poskytovala ještě zisk řetězce,

$$\text{tj } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_i(n+1) - v_i(n)) = \sum_{j=0}^m a_j q_j = g.$$

Zadání příkladů na 8. cvičení

Příklad 1.: Částice se pohybuje po třech drahách 1, 2, 3, které jsou umístěny mezi odrazujícími stěnami. Na počátku sledování je částice na 2. dráze. Částice může změnit svoji dráhu v libovolném okamžiku. Je známo, že během krátkého časového intervalu o délce h (přitom $0 < h < 0,5$) částice může buď zůstat na dráze, na níž se právě nachází nebo může přeskóčit na sousední dráhu s pravděpodobností $2h$. Pravděpodobnosti přeskoků na další dráhy jsou zanedbatelně malé.

- Popište polohu částice na jednotlivých drahách pomocí HMŘ se spojitým časem.
- Najděte matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.

Výsledek: $\mathbf{a} = (1/3 \ 1/3 \ 1/3)$

Příklad 2.: Uvažme provoz malé půjčovny aut, která má 4 auta. Doba mezi dvěma požadavky na zapůjčení auta je náhodná veličina, která má exponenciální rozložení se střední hodnotou polovina dne a doba výpůjčky je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou třetina dne.

- Popište počet vypůjčených aut pomocí HMŘ se spojitým časem.
- Najděte matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.
- Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce a interpretujte ho.

Nápověda: Pravděpodobnost, že počet zapůjčených aut se během intervalu $(t, t + h)$ zvětší o 1, je stále λh ($\lambda = 2$) a pravděpodobnost, že počet zapůjčených aut se v intervalu $(t, t + h)$ zmenší o 1, je úměrná počtu zapůjčených aut s koeficientem úměrnosti μ ($\mu = 3$).

Výsledek: $\mathbf{a} = (0,5137 \ 0,3425 \ 0,1142 \ 0,0254 \ 0,0042)$

Příklad 3.: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem a množinou stavů

$J = \{0, 1, \dots, n, \dots, m\}$, kde pro čísla m a n platí $1 \leq n \leq m$. Intenzity přechodu jsou dány vztahy:

$$q_{j,j-1} = \begin{cases} j\mu & \text{pro } 0 < j < n \\ n\mu & \text{pro } n \leq j \leq m \end{cases}, \quad q_{j,j+1} = (m-j)\lambda \quad \text{pro } 0 \leq j \leq m.$$

Vypočtete stacionární rozložení tohoto řetězce pro $n = 2$, $m = 5$, $\lambda = 4$, $\mu = 12$.

Výsledek: $\mathbf{a} = (0,2198 \ 0,3664 \ 0,2442 \ 0,1221 \ 0,0407 \ 0,0068)$

Zadání příkladů na 10. cvičení

Příklad 1.: Proud zákazníků směřujících do banky tvoří Poissonův proces s parametrem λ . Je známo, že během jedné hodiny přijdou do banky v průměru 2 zákazníci. Jaká je pravděpodobnost, že

- přijdou právě 2 zákazníci během prvních 20 minut, kdy má banka otevřeno,
- přijde aspoň jeden zákazník během prvních 20 minut?

Řešení: Zavedeme Poissonův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde náhodná veličina X_t udává počet

zákazníků, kteří přijdou do banky v intervalu $(0, t)$. Přitom $P(X_t = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$. Intenzita

procesu $\lambda = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$.

$$\text{ad a) } P(X_{20} = 2) = \frac{\left(\frac{1}{30} \cdot 20\right)^2}{2!} e^{-\frac{1}{30} \cdot 20} = \frac{2}{9} e^{-\frac{2}{3}} = 0,1141$$

Řešení pomocí MATLABu: `poisspdf(2,2/3)`

(Funkce `poisspdf(x, lambda)` počítá hodnotu v bodě x pravděpodobnostní funkce Poissonova rozložení s parametrem λ .)

$$\text{ad b) } P(X_{20} \geq 1) = 1 - P(X_{20} = 0) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} = 0,4866$$

Řešení pomocí MATLABu: `1 - poisscdf(0,2/3)`

(Funkce `poisscdf(x, lambda)` počítá hodnotu v bodě x distribuční funkce Poissonova rozložení s parametrem λ .)

Příklad 2.: Předpokládáme, že poruchy určité součástky tvoří Poissonův proces. V průměru připadá jedna porucha na 200 hodin provozu, tj. na 25 osmihodinových směn. Na skladě jsou dvě náhradní součástky. Po době odpovídající 60 směnám budou dodány další. Jaká je pravděpodobnost, že stroj nebude pro nedostatek náhradních součástek vyřazen z provozu do dodávky dalších náhradních součástek?

Řešení: Zavedeme Poissonův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde náhodná veličina X_t udává počet poruch

stroje v intervalu $(0, t)$. Přitom $P(X_t = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$, kde intenzita $\lambda = \frac{1}{200} = 0,005$. Zajímá

nás pravděpodobnost, že v časovém okamžiku $t = 60 \cdot 8 = 480$ bude náhodná veličina X_t nabývat hodnoty nejvýše 2

(přitom $\lambda t = \frac{480}{200} = 2,4$), tj. počítáme $P(X_{480} \leq 2) = \sum_{k=0}^2 \frac{(2,4)^k}{k!} e^{-2,4} = 0,5697$.

Řešení pomocí MATLABu: `poisscdf(2,2.4)`

Příklad 3.: Předpokládáme, že na telefonní ústřednu přicházejí v určité denní době hovory s neměnnou intenzitou 3 hovory za 1 minutu.

- Jaká je pravděpodobnost, že za 1 minutu dojde na ústřednu méně než 5 hovorů?
- Určete střední hodnotu délky intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů.
- Jaká je pravděpodobnost, že délka intervalu mezi dvěma po sobě následujícími příchody hovorů je delší než 1 minuta?

Řešení: Zavedeme Poissonův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde náhodná veličina X_t udává počet

hovorů, které přijdou do ústředny v intervalu $(0, t)$. Přitom $P(X_t = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$. Intenzita procesu $\lambda = 3$.

ad a) $P(X_1 \leq 4) = \sum_{k=0}^4 \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 0,8153$

Řešení pomocí MATLABu: poisscdf(4,3)

ad b) Podle věty 14.6. se délka S tohoto intervalu řídí exponenciálním rozložením s parametrem $\lambda = 3$, tedy střední hodnota délky tohoto intervalu je $\frac{1}{3} \text{ min} = 20 \text{ s}$.

ad c) Zajímá nás $P(S > 1) = 1 - P(S \leq 1) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3} = 0,0498$

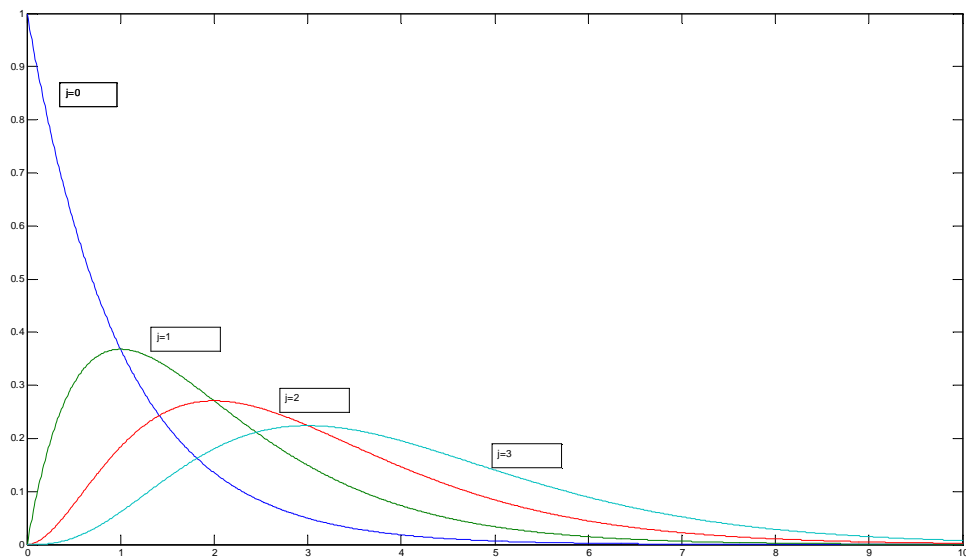
Řešení pomocí MATLABu: 1-expcdf(1,1/3)

Příklad 4.: Uvažme Poissonův proces s intenzitou λ , který popisuje náhodné a navzájem nezávislé příchody zákazníků do fronty. Již bylo odvozeno, že počet zákazníků ve frontě v okamžiku t se řídí rozložením $Po(\lambda t)$.

Předpokládejme, že $\lambda = 1$. Pro časový interval $(0,10)$ nakreslete do jednoho obrázku průběh pravděpodobností, že v okamžiku t bude ve frontě právě j zákazníků, $j = 0, 1, 2, 3$.

Řešení pomocí MATLABu:

```
lambda=1;t=[0:0.1:10]';  
p0=exp(-lambda*t);  
p1=(lambda*t).*exp(-lambda*t);  
p2=(1/2)*(lambda*t).^2.*exp(-lambda*t);  
p3=(1/6)*(lambda*t).^3.*exp(-lambda*t);  
plot(t,p0,t,p1,t,p2,t,p3)
```



Simulace Poissonova procesu

Zadání:

V sobotu v době od 8 do 20 h sledujeme provoz v klidné ulici ve vilové čtvrti města. V tomto období vjíždějí auta do této ulice v průměru každých 8 minut. Předpokládejme, že intervaly mezi příjezdy aut se řídí exponenciálním rozložením. Pomocí MATLABu simulujte vjezd 20 aut do této ulice.

- a) Zjistěte celkovou dobu simulace.
- b) Vypočtěte průměrnou, maximální a minimální délku intervalu mezi vjezdy dvou aut.
- c) Vypočtěte směrodatnou odchylku délek intervalů.
- d) Porovnejte tvar histogramu délek intervalů (volte 5 třídicích intervalů) s tvarem hustoty exponenciálního rozložení s patřičným parametrem.
- e) Znázorněte nasimulovaný Poissonův proces graficky.

Návod:

Zavedeme Poissonův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = j$, když v intervalu $(0, t)$ vjede do ulice právě j aut,

$j = 0, 1, 2, \dots$ Parametr $\lambda = \frac{1}{8}$.

Pomocí funkce `exprnd` vygenerujeme 20 náhodných čísel z exponenciálního rozložení s parametrem 1/8:

```
x=exprnd(8,20,1);
```

Upozornění: Pokud bychom neměli k dispozici statistický toolbox MATLABu, postupujeme takto:

```
r = unifrnd(0,1,20,1);
```

Proměnnou r transformujeme vztahem $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-r)$:

```
x = -8*log(1-r);
```

V proměnné x jsou nyní uloženy délky intervalů mezi vjezdy aut.

Celková doba simulace:

`doba = sum(x)`

Průměrná délka intervalu:

`prumer = mean(x)`

Maximální délka intervalu:

`maximum = max(x)`

Minimální délka intervalu:

`minimum = min(x)`

Směrodatná odchylka délek intervalů:

`so = std(x)`

(Teoretická celková doba simulace by měla být $20.8 = 160$ min, průměr = 8 min, směrodatná odchylka = 8 min.)

Histogram délek intervalů s pěti třídicími intervaly znázorníme příkazem `hist(x,5)`.

Znázornění hustoty exponenciálního rozložení s parametrem 1/8:

`plot([0:0.01:maximum],exp-pdf([0:0.01:maximum],8))`

Znázornění nasimulovaného Poissonova procesu:

Do proměnné `pocet` uložíme celkový počet aut:

`pocet = [1:20]'`;

Do proměnné `t` uložíme kumulované délky intervalů:

`t = cumsum(x)`;

Pomocí funkce `stairs` znázorníme Poissonův proces:

`stairs(t,pocet)`

Celý postup můžeme zopakovat s větším počtem aut a sledovat, jak se zvyšujícím se počtem simulací se empirické charakteristiky procesu blíží teoretickým.

Zadání příkladů na 11. cvičení

Ilustrace vlastností lineárního procesu vzniku a zániku

```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% funkce lpvz ilustruje vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku
% [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% Vstupní parametry:
% lambda je intenzita vzniku
% mi je intenzita zániku
% tau je konečný čas
% k0 je rozsah souboru v čase t=0
% Vstupní parametry:
% M je vektor středních hodnot rozsahu souboru v čase t=0 až tau
% S je vektor směrodatných odchylek rozsahu souboru v čase t=0 až tau
% P je pravděpodobnost zániku souboru v čase t=0 až tau
t=[0:tau]';
M=k0*exp((lambda-mi).*t);
S=sqrt(k0*((lambda+mi)/(lambda-mi))*exp((lambda-mi).*t).*(exp((lambda-mi).*t)-1));
P=mi*(1-exp((lambda-mi).*t))./(mi-lambda*exp((lambda-mi).*t));
plot(t,M)
figure
plot(t,S)
figure
plot(t,P)
```

Funkce lpvz.m graficky znázorňuje závislost střední hodnoty a směrodatné odchylky rozsahu souboru objektů na čase $t = 0$ až τ a závislost zániku souboru na čase $t = 0$ až τ .

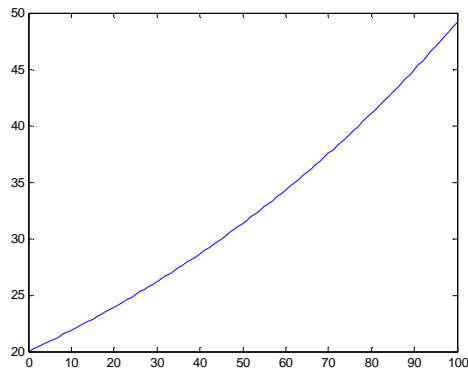
Příklad: Necht' $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s množinou stavů $J = \{0,1,2\}$ a intenzitou vzniku $\lambda = 0,01$ a zániku $\mu = 0,001$. Předpokládáme, že v čase $t = 0$ soubor obsahoval 20 objektů. Vypočtete a graficky znázorněte

- střední hodnotu rozsahu souboru v čase 0 až 100
- směrodatnou odchylku rozsahu souboru v čase 0 až 100
- pravděpodobnost vyhynutí v čase 0 až 100

Řešení: Použijeme funkci lpvz.

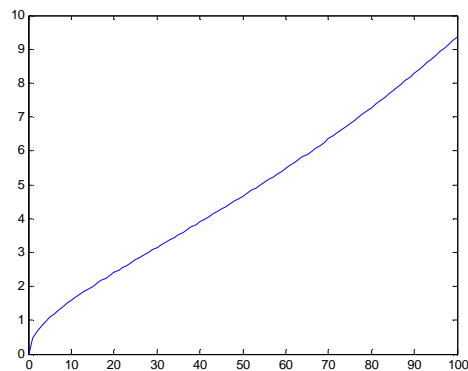
```
lambda=0.01;mi=0.001;tau=100;k0=20;
[M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
```

Graf závislosti střední hodnoty rozsahu souboru na čase:



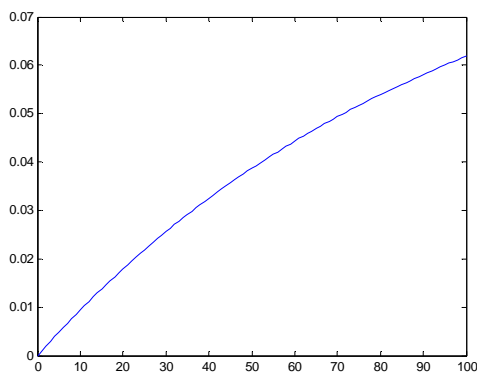
S rostoucím časem roste střední hodnota rozsahu souboru, v čase 100 činí 49,19.

Graf závislosti směrodatné odchylky rozsahu souboru na čase:



S rostoucím časem roste směrodatná odchylka rozsahu souboru, v čase 100 činí 9,37.

Graf závislosti pravděpodobnosti vyhynutí na čase:



S rostoucím časem roste pravděpodobnost zániku souboru, v čase 100 činí 0,0619. (Jaká je limitní pravděpodobnost zániku?)

Samostatný úkol: vyzkoušejte funkci $lpvz$ pro různé hodnoty vstupních parametrů.

Stacionární rozložení Erlangova procesu

```
function [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% funkce na vypocet stacionarniho rozlozeni Erlangova procesu
% syntaxe: [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% vstupni parametry:
% m ... nejvyssi poradove cislo v mnozine stavu
% lambda ... intenzita vzniku
% lambda ... intenzita zaniku
% vystupni parametr
% a ... vektor stacionarnich pravdepodobnosti
a0=1/sum(((lambda/mi).^^(0:m)).*(1./(factorial(0:m))));
a=((lambda/mi).^^(1:m)).*(1./(factorial(1:m)))*a0;
a=[a0 a];
```

Příklad: Je dán Erlangův proces s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a parametry $\lambda = 2$, $\mu = 3$.
a) Napište matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Najděte stacionární rozložení a interpretujte ho.

Výsledek: ad b) $\mathbf{a} = \frac{1}{473}(243,162,54,12,2)$

Po odeznění vlivu počátečních podmínek bude proces asi 51,37 % celkové doby bude proces ve stavu 0, 34,25 % doby ve stavu 1, 11,42 % doby ve stavu 2, 2,54 % doby ve stavu 3 a 0,42 % doby ve stavu 4.

Příklad: Benzínová stanice má dvě čerpadla. U každého čerpadla může čerpat benzín jen jedno auto. Když jsou obě čerpadla obsazena, další příjezdějíci auta nečekají a odjíždějí. Průměrná doba čerpání benzínu je 2 min a průměrně přijíždí 40 aut za 1 h.

- Kolik procent doby bude benzínová stanice nevyužitá?
- S jakou pravděpodobností nebude příjezdějící auto obslouženo?
- Jaká je střední hodnota počtu obsazených čerpadel?

Výsledek:

Ad a) Benzínová stanice je nevyužitá asi po 31 % celkové doby.

Ad b) Příjezdějící auta nebudou obsloužena s pravděpodobností asi 0,28.

Ad c) Střední hodnota počtu obsazených čerpadel je asi 0,97.

Příklad: Při sledování provozu telefonní ústředny bylo zjištěno, že za 1 min se vyskytne průměrně 5 požadavků na spojení a jeden hovor trvá průměrně 2 min. Kolik linek by minimálně měla mít tato TÚ, aby pravděpodobnost, že volající zastihne všechny linky obsazené, byla nanejvýš 0,5?

Výsledek: Minimální počet linek je 6.