INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přednášky

předmětu M5444 Markovské řetězce

1. Úvod do studia stochastických procesů

1.1. Motivace: V této kapitole

zavedeme pojem stochastického procesu,

naučíme se rozlišovat stochastický proces

s diskrétním časem a spojitým časem

a stochastický proces

s diskrétními stavy a spojitými stavy,

budeme definovat pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu,

poznáme vlastnosti pravděpodobnostního rozložení stochastického procesu,

naučíme se klasifikovat stochastické procesy podle různých kritérií.

1.2. Definice: Definice stochastického procesu (SP)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, R množina reálných čísel, $T \neq \emptyset$ neprázdná množina (nejčastěji jí přisuzujeme význam času). Nechť zobrazení $X : \Omega \times T \to R$ má tyto dvě vlastnosti:

a) $\forall t \in T$ je X(.,t) náhodná veličina vzhledem k jevovému poli A. Značí se X_t.

b) $\forall \omega \in \Omega$ je X(ω,.) prvkem množiny všech reálných funkcí definovaných na T.

Zobrazení X s těmito dvěma vlastnostmi se nazývá stochastický proces definovaný na T. Značí se $\{X_t; t \in T\}$.

1.3. Definice: Definice složky SP, realizace SP a realizace složky SP příslušné možnému výsledku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Pro libovolné, ale pevně dané $t \in T$ se náhodná veličina X(.,t) = X_t nazývá t-tá složka stochastického procesu.

b) Pro libovolné, ale pevně dané $\omega \in \Omega$ se reálná funkce X(ω,.) nazývá realizace stochastického procesu příslušná k možnému výsledku ω.

c) Pro libovolná, ale pevně daná $t \in T$ a $\omega \in \Omega$ se číslo X(ω,t) nazývá realizace t-té složky stochastického procesu příslušná k možnému výsledku ω.

1.4. Příklad: Vývoj hmotnosti novorozených dětí

Nechť Ω je množina novorozenců, ω novorozenec, $T = \langle 0, \infty)$ časový interval počítaný od narození novorozence, t je časový okamžik. Zavedeme stochastický proces $\{X_t ; t \in T\}$, který popisuje průběh hmotnosti kteréhokoliv náhodně vybraného novorozence.

a) $X_t =$ X(.,t) je náhodná veličina udávající hmotnost kteréhokoliv náhodně vybraného novorozence v okamžiku t (fixovaný okamžik, libovolný novorozenec).

b) X(ω,.) je reálná funkce popisující průběh hmotnosti daného novorozence ω (libovolný okamžik, fixovaný novorozenec).

c) X(ω,t) je číselná realizace náhodné veličiny X_t příslušná k možnému výsledku ω, tj. konkrétní hmotnost daného novorozence v daný časový okamžik (fixovaný okamžik, fixovaný novorozenec).

1.5. Definice: Definice časové řady a náhodné funkce

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Je-li množina T spočetná a lineárně uspořádaná, tj. $t_0 < t_1 < \ldots$, jde o stochastický proces s diskrétním časem (tj. o časovou řadu).

b) Je-li množina T interval, jde o stochastický proces se spojitým časem (tj. o náhodnou funkci).

1.6. Definice: Definice SP s diskrétními stavy a spojitými stavy

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Jestliže pro $\forall t \in T$ je náhodná veličina X_t diskrétní, jde o stochastický proces s diskrétními stavy.

b) Jestliže pro $\forall t \in T$ je náhodná veličina X_t spojitá, jde o stochastický proces se spojitými stavy.

Množina všech hodnot, jichž může náhodná veličina X_t nabývat, se nazývá množina stavů a značí se J.

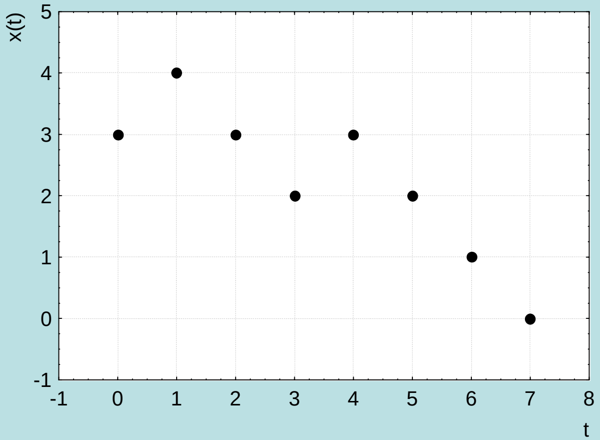
1.7. Příklad: Příklad stochastického procesu s diskrétním časem a diskrétními stavy:

Dva hráči, označme je A a B, dali do hry dohromady vklad 5 Kč, z toho hráč A 3 Kč a hráč B 2 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhraje 1 Kč, když rub, prohraje 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů ruinován. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde t = 1, 2, ... je pořadové číslo hodu mincí a $X_t = j$, když hráč A má po t-tém hodu j Kč, tedy J = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Např. pro posloupnost hodů {L, R, R, L, R , R, R} je odpovídající realizace stochastického procesu

x(t) = {4, 3, 2, 3, 2, 1, 0}.

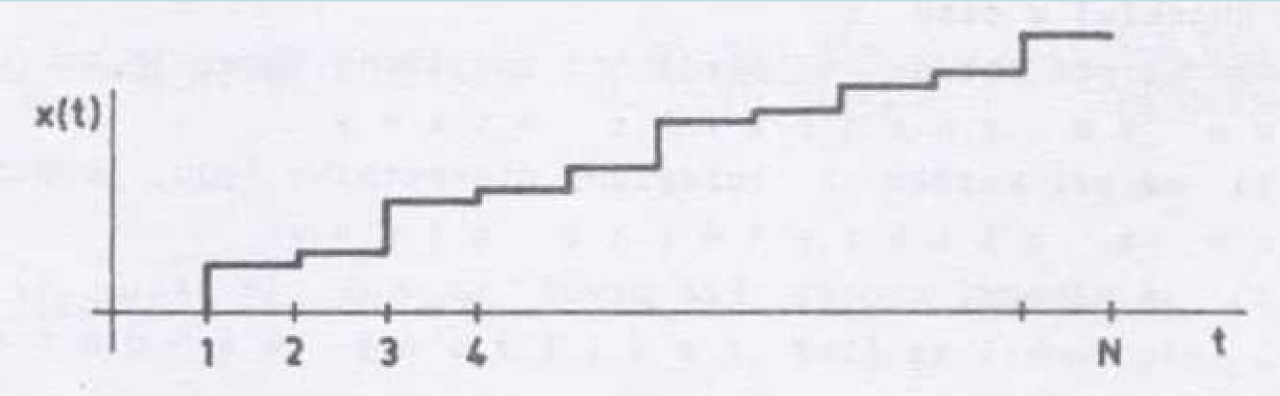
Grafické znázornění:



1.8. Příklad: Příklad stochastického procesu s diskrétním časem a spojitými stavy:

Po určité výrobní operaci měříme velikost opotřebení obráběcího nože. Nůž se po N výrobních operacích vymění. Stochastický proces nabývá hodnot, které odpovídají opotřebení nože. Máme tedy stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde T = {1, 2, ..., N} (t je pořadové číslo výrobní operace), $X_t \in J$, kde $J = \{x \in R; 0 \le x \le a\}$, přičemž a je maximální opotřebení obráběcího nože.

Grafické znázornění:

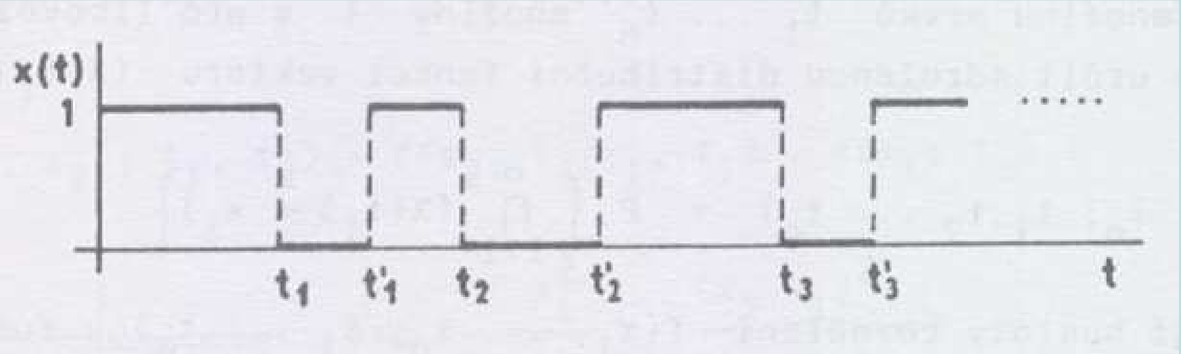


1.9. Příklad: Příklad stochastického procesu se spojitým časem a diskrétními stavy:

Sledujeme určité zařízení, které může být v každém okamžiku buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 0).

Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{t; t \geq 0\}$, $X_t \in J$, $J = \{0, 1\}$.

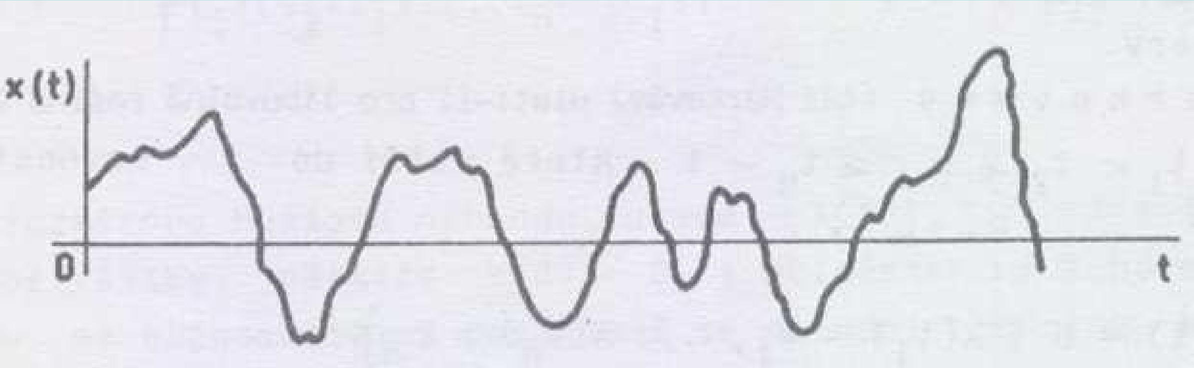
Grafické znázornění: Označme t_1, t_2, … okamžiky poruch, t_1', t_2', … okamžiky oprav.



1.10. Příklad: Příklad stochastického procesu se spojitým časem a spojitými stavy:

Sledujeme šumové napětí na výstupu nějakého elektrického přístroje. Stochastický proces nabývá hodnot, které odpovídají tomuto šumovému napětí. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{t; t \geq 0\}$, $X_t \in J$, kde $J = \{x; -\infty < x < \infty\}$.

Grafické znázornění:



1.11. Definice: Definice pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces. Pro $\forall t \in T$ lze pravděpodobnostní rozložení náhodné veličiny X_t popsat distribuční funkcí: $\forall x \in R : \Phi_t(x) = P(X_t \leq x).$

(Tato distribuční funkce je obecně funkcí dvou proměnných t a x a popisuje jednorozměrné rozložení stochastického procesu. Nepodává však úplný popis pravděpodobnostního chování stochastického procesu, protože neobsahuje informace o závislostech náhodných veličin X_t při různých hodnotách t. Úplný popis pravděpodobnostního chování stochastického procesu podává teprve systém distribučních funkcí.)

Nechť $(t_1, \ldots, t_n) \in T$ je uspořádaná n-tice indexů, $\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right)$ je marginální vektor daného stochastického procesu. Pro $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ označme $\Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(X_{t_1} \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_{t_n} \leq x_n\right)$ marginální distribuční funkci náhodného vektoru $\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right)$.

Systém $F_T = \{\Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n); n = 1, 2, \ldots, t_1, \ldots, t_n \in T\}$ se nazývá pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu $\{X_t; t \in T\}$.

1.12. Věta: Věta o vlastnostech pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť F_T je pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu $\{X_t; t \in T\}$. Pak systém F_T má tyto vlastnosti:

a) F_T je symetrický systém distribučních funkcí, tj.

$$\forall n \in N\ \forall t_1, \dots, t_n \in T\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n : \Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}),\ \text{kde } \{i_1, \dots, i_n\}$$

je libovolná permutace množiny indexů $\{1, \dots, n\}$.

b) F_T je konzistentní systém distribučních funkcí, tj. je-li $\{i, \dots, j\} \cup \{k, \dots, l\} = \{1, \dots, n\}$ disjunktní rozklad množiny indexů $\{1, \dots, n\}$, pak

$$\Phi_{t_i \dots t_j}(x_i, \dots, x_j) = \lim_{\substack{x_k \to \infty \\ \vdots \\ x_l \to \infty}} \Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Důkaz: plyne z vlastností distribuční funkce.

1.13. Věta: Kolmogorovova věta

Každý systém distribučních funkcí, který je symetrický a konzistentní, je pravděpodobnostním rozložením nějakého stochastického procesu.

1.14. Definice: Definice stochasticky ekvivalentních SP

Řekneme, že dva stochastické procesy jsou stochasticky ekvivalentní, mají-li stejné pravděpodobnostní rozložení.

1.15. Příklad: Odvození pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $\Psi(x)$ a f(t) je reálná funkce taková, že

a) $f(t) > 0$ pro $\forall t \in T$

b) $f(t) < 0$ pro $\forall t \in T$.

Pro $\forall t \in T$ položme $X_t = f(t)X$. Odvoďte pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu $\{X_t; t \in T\}$.

Řešení:

ad a)

$$\Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1,\dots,x_n) = P\left(X_{t_1} \le x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \le x_n\right) = P\left(f(t_1)X \le x_1 \wedge \dots \wedge f(t_n)X \le x_n\right) =$$

$$= P\left(X \le \frac{x_1}{f(t_1)} \wedge \dots \wedge X \le \frac{x_n}{f(t_n)}\right) = P\left(X \le \min_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = \Psi\left(\min_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right).$$

ad b)

$$\Phi_{t_1 \dots t_n}(x_1,\dots,x_n) = P\left(X_{t_1} \le x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \le x_n\right) = P\left(f(t_1)X \le x_1 \wedge \dots \wedge f(t_n)X \le x_n\right) =$$

$$= P\left(X \ge \frac{x_1}{f(t_1)} \wedge \dots \wedge X \ge \frac{x_n}{f(t_n)}\right) = P\left(X \ge \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = 1 - P\left(X \le \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) + P\left(X = \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) =$$

$$= 1 - \Psi\left(\max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) + P\left(X = \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right).$$

Je-li X spojitá náhodná veličina, pak $P\left(X = \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = 0$.

1.16. Poznámka: Dělení SP podle různých kritérií

a) Rozdělení stochastických procesů podle závislosti jejich pravděpodobnostního rozložení na čase

– striktně stacionární procesy (je pro ně charakteristická určitá stálost v čase): $\Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_{t_1+h \ldots t_n+h}(x_1, \ldots, x_n)$, kde h > 0

– evoluční procesy (mají výrazný časový trend)

b) Rozdělení stochastických procesů podle toho, zda k určení jejich pravděpodobnostního rozložení stačí znát pouze dvourozměrné distribuční funkce či nikoliv:

– definitní procesy

– hereditní procesy

c) Rozdělení definitních procesů podle toho, zda jejich pravděpodobnostní rozložení závisí pouze na rozdílu časových okamžiků, nikoliv na jejich umístění na časové ose

– homogenní procesy

– nehomogenní procesy.

2. Funkcionální charakteristiky stochastických procesů

2.1. Motivace: V této kapitole

zavedeme trend, rozptyl a směrodatnou odchylku stochastického procesu,

autokovarianční a autokorelační funkci stochastického procesu,

poznáme vlastnosti těchto funkcionálních charakteristik,

budeme definovat centrovaný a standardizovaný stochastický proces

slabě stacionární stochastický proces.

2.2. Definice: Definice střední hodnoty a rozptylu SP, definice centrovaného a standardizovaného SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Jestliže pro $\forall t \in T$ existuje střední hodnota $E(X_t)$, pak zavedeme reálnou funkci $\mu(t)$ vztahem:

$$\forall t \in T : \mu(t) = E(X_t).$$

Tato funkce se nazývá střední hodnota (trend) SP. ($\mu(t)$ charakterizuje polohu realizací SP na časové ose.)

b) Jestliže pro $\forall t \in T$ existuje rozptyl $D(X_t)$, pak zavedeme reálnou funkci $\sigma^2(t)$ vztahem:

$$\forall t \in T : \sigma^2(t) = D(X_t).$$

Tato funkce se nazývá rozptyl SP. Funkce $\sigma(t) = \sqrt{\sigma^2(t)}$ se nazývá směrodatná odchylka SP.

($\sigma^2(t)$ charakterizuje variabilitu realizací stochastického procesu kolem trendu.)

c) Nechť stochastický proces má střední hodnotu $\mu(t)$ a rozptyl $\sigma^2(t)$, který je konečný a nenulový.

Transformovaný stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = X_t - \mu(t)$, se nazývá centrovaný SP.

Transformovaný stochastický proces $\{Z_t; t \in T\}$, kde $Z_t = \dfrac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}$, se nazývá standardizovaný SP.

(Lze snadno ukázat, že centrovaný SP má nulovou střední hodnotu a rozptyl stejný jako původní SP. Standardizovaný SP má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.)

2.3. Příklad:

Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu E(X) = 2 a rozptyl D(X) = 9.

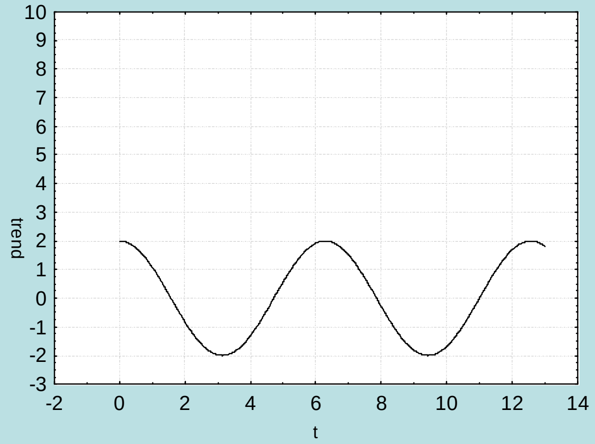
Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t = X.cos ωt, ω > 0 je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP.

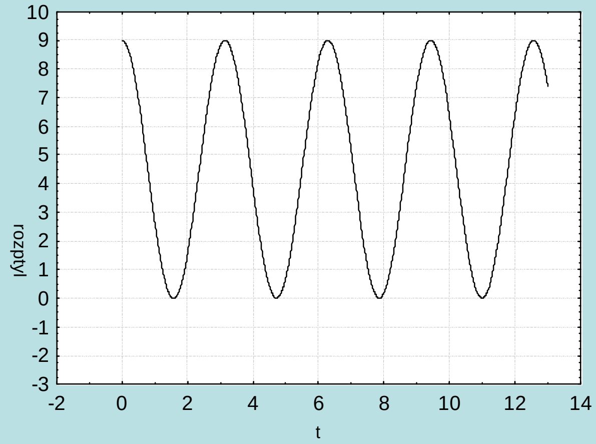
Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(X \cdot \cos \omega t) = \cos \omega t \cdot E(X) = 2 \cos \omega t$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(X \cdot \cos \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(X) = 9 \cos^2 \omega t$$

Např. pro ω = 1 dostaneme:





2.4. Poznámka: Další funkcionální charakteristiky stochastického procesu

Podobně jako u náhodných veličin lze pro stochastický proces zavést další momentové charakteristiky, např. šikmost a špičatost. Všechny tyto charakteristiky, které vycházejí ze znalosti jednorozměrného rozložení stochastického procesu, však nepostačují k popisu pravděpodobnostního chování stochastického procesu, protože neobsahují informace o závislostech mezi složkami stochastického procesu.

2.5. Definice: Definice autokovarianční a autokorelační funkce SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces. Předpokládáme, že pro $\forall t \in T$ existuje střední hodnota $E(X_t)$ a $E(X_t^2) < \infty$.

a) Reálnou funkci $\gamma(t_1, t_2)$ dvou proměnných danou vztahem

$\forall t_1, t_2 \in T : \gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = E([X_{t_1} - \mu(t_1)][X_{t_2} - \mu(t_2)])$ nazveme autokovarianční funkcí stochastického procesu.

b) Reálnou funkci $\rho(t_1, t_2)$ dvou proměnných danou vztahem

$\forall t_1, t_2 \in T : \rho(t_1, t_2) = R(X_{t_1}, X_{t_2}) = \dfrac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$ nazveme autokorelační funkcí stochastického procesu.

(Autokovarianční funkce je zobecněním varianční matice náhodného vektoru a autokorelační funkce je zobecněním korelační matice náhodného vektoru. Tyto funkce obsahují informace o lineárních závislostech mezi složkami SP.)

2.6. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce SP

Pro autokovarianční funkci stochastického procesu platí:

a) $\forall t \in T : \gamma(t,t) = \sigma^2(t)$

b) $\forall t_1, t_2 \in T : \gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_2, t_1)$

c) $\forall t_1, t_2 \in T : |\gamma(t_1, t_2)| \leq \sigma(t_1)\sigma(t_2)$ (zobecněná Cauchyho – Schwarzova – Buňakovského nerovnost)

Důkaz: Plyne z vlastností kovariance.

2.7. Příklad:

Najděte autokovarianční a autokorelační funkci SP z příkladu 2.3. V tomto příkladu byl SP zaveden vztahem $X_t = X.\cos\omega t$, přičemž $E(X) = 2$, $D(X) = 9$

Řešení:

$$\gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = C(X \cdot \cos\omega t_1, X \cdot \cos\omega t_2) = \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 \cdot C(X, X) =$$
$$= \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 \cdot D(X) = 9\cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2$$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{9\cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2}{\sqrt{9\cos^2\omega t_1}\sqrt{9\cos^2\omega t_2}} = 1$$

2.8. Věta: Věta o střední hodnotě a autokovarianční funkci transformovaného SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces se střední hodnotou $\mu_X(t)$ a autokovarianční funkcí $\gamma_X(t_1, t_2)$. Nechť f(t) je reálná funkce definovaná na T.

a) Zavedeme stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = X_t + f(t)$. Pak platí:

$$\forall t \in T: \mu_Y(t) = \mu_X(t) + f(t)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T: \gamma_Y(t_1, t_2) = \gamma_X(t_1, t_2)$$

b) Zavedeme stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = f(t)\, X_t$. Pak platí:

$$\forall t \in T: \mu_Y(t) = f(t)\mu_X(t)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T: \gamma_Y(t_1, t_2) = f(t_1) f(t_2) \gamma_X(t_1, t_2)$$

Důkaz: Plyne z vlastností střední hodnoty a kovariance.

2.9. Definice: Definice slabě stacionárního SP

Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ se nazývá slabě stacionární, jestliže platí:

a) $\forall t \in T: \mu(t) = c$ (trend je konstantní)

b) $\forall t \in T: \sigma^2(t) < \infty$ (rozptyl je konečný)

c) $\forall t_1, t_2 \in T, \forall h > 0: \gamma(t_1 + h, t_2 + h) = \gamma(t_1, t_2)$ (kovariance libovolných dvou složek SP závisí pouze na jejich vzdálenosti na časové ose a nikoliv na jejich umístění na časové ose)

2.10. Poznámka: Vztah mezi striktní a slabou stacionaritou SP, zavedení autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

a) Je-li stochastický proces striktně stacionární, je i slabě stacionární.

b) Je-li stochastický proces slabě stacionární, pak pro $\forall t_1, t_2 \in T: \gamma(t_1, t_2) = \gamma(0, t_2 - t_1)$. Znamená to, že autokovarianční funkce závisí pouze na rozdílu argumentů $t_2 - t_1 =: h$. V tomto případě zavádíme funkci jedné proměnné, kterou značíme rovněž symbolem γ, vztahem $\forall h \in T: \gamma(h) = \gamma(0, h)$. Je to autokovarianční funkce slabě stacionárního SP.

2.11. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

Autokovarianční funkce slabě stacionárního stochastického procesu má tyto vlastnosti:

a) $\forall t \in T : \sigma^2(t) = \gamma(0) = \sigma^2$ (všechny složky SP mají týž rozptyl)

b) $\forall h > 0 : \gamma(h) = \gamma(-h)$ (autokovarianční funkce je sudá)

c) $\forall h > 0 : |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

Důkaz: Důkaz vlastností a) , b) je triviální.

Ad c) Uvažme centrovaný slabě stacionární SP $\{X_t; t \in T\}$ (tj. pro $\forall t \in T : \mu(t) = 0$). Pak

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = E(X_t^{\,2}) - [E(X_t)]^2 = E(X_t^{\,2}).$$

Dále $\gamma(h) = \gamma(t, t+h) = C(X_t, X_{t+h}) = E(X_t \cdot X_{t+h})$.

Počítáme

$$E([X_t \pm X_{t+h}]^2) = E(X_t^{\,2}) \pm 2E(X_t X_{t+h}) + E(X_{t+h}^{\,2}) = \sigma^2(t) \pm 2\gamma(h) + \sigma^2(t+h) = 2[\gamma(0) \pm \gamma(h)].$$

Protože $E([X_t \pm X_{t+h}]^2) \geq 0$, plyne odtud, že $\forall h > 0 : |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$.

2.12. Příklad:

Nechť Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny (tj. E(Y) = 0, E(Z) = 0, D(Y) = 1, D(Z) = 1), které jsou stochasticky nezávislé. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde $X_t = Y.\cos \omega t + Z.\sin \omega t$, $\omega > 0$ je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP a ukažte, že je slabě stacionární.

Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos \omega t \cdot E(Y) + \sin \omega t \cdot E(Z) = 0$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(Y) + \sin^2 \omega t \cdot D(Z) = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1.$$

Aby byl SP slabě stacionární, musí mít konstantní střední hodnotu, konečný rozptyl a pro jeho autokovarianční funkci musí platit $\gamma(h) = \gamma(t, t+h)$. První dvě podmínky jsou splněny, ověříme třetí:

$$\begin{aligned}
\gamma(t, t+h) &= C(X_t, X_{t+h}) = C(Y \cdot \cos t + Z \cdot \sin t, Y \cdot \cos(t+h) + Z \cdot \sin(t+h)) = \\
&= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Y, Y) + \sin t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Z, Y) + \cos t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Y, Z) + \\
&+ \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Z, Z) = \\
&= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot D(Y) + \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot D(Z) = \cos t \cdot \cos(t+h) + \sin t \cdot \sin(t+h) = \\
&= \cos(t - (t+h)) = \cos(-h) = \cos(h) = \gamma(h)
\end{aligned}$$

2.13. Věta: Věta o vlastnostech autokorelační funkce slabě stacionárního SP

Pro autokorelační funkci slabě stacionárního SP platí:

$$\forall h \in T : \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Důkaz:

$\forall t_1, t_2 \in T : \rho(t_1, t_2) = \dfrac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$. Je-li SP slabě stacionární, pak $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(h), \sigma^2(t_1) = \sigma^2(t_2) = \gamma(0)$, tedy $\rho(h) = \dfrac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$.

2.14. Příklad:

Nechť je dán SP $\{X_t; t \in T\}$, kde náhodné veličiny $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots$ jsou stochasticky nezávislé a mají všechny stejnou distribuční funkci Φ(x). Určete střední hodnotu, rozptyl a autokorelační funkci tohoto SP.

Řešení: Protože náhodné veličiny X_t, $t \in T$ mají všechny stejnou distribuční funkci Φ(x), mají i stejnou střední hodnotu $E(X_t) = \mu$ a stejný rozptyl $D(X_t) = \sigma^2$. Dále počítáme autokovarianční funkci $\gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = \begin{cases} \sigma^2 \text{ pro } t_1 = t_2 \\ 0 \text{ pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$. Jedná se tedy o slabě stacionární SP. Nyní spočteme autokorelační funkci $\rho(t_1, t_2) = \dfrac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \begin{cases} 1 \text{ pro } t_1 = t_2 \\ 0 \text{ pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$. Znamená to, že neexistuje žádná závislost mezi realizacemi SP ve dvou různých okamžicích.

3. Markovské řetězce s diskrétním časem

3.1. Definice: Definice markovského řetězce s diskrétním časem

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, N_0 = {0, 1, 2, ...} je indexová množina, jejíž prvky nazveme okamžiky a J = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} je nejvýše spočetná množina stavů (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že J = {0, 1, 2, ...} nebo J = {0,1, ..., n}). Stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ definovaný na měřitelném prostoru (Ω, A), jehož složky nabývají hodnot z množiny stavů J, se nazývá markovský řetězec (s diskrétním časem), jsou-li splněny následující podmínky:

a) $\forall j \in J\ \exists n \in N_0 : P(X_n = j) > 0$ (vyloučení nepotřebných stavů)

b) $\forall n \in N_0 \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J : P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = j_0) = P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$ za předpokladu, že $P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = j_0) > 0$.

(markovská vlastnost – budoucí chování markovského řetězce závisí pouze na přítomném stavu a nikoliv na stavech minulých)

Vysvětlení: Nejčastější interpretací markovských řetězců je nějaká soustava, která se může nacházet ve stavech a_0, a_1, … V průběhu času soustava mění svoje stavy. Tyto stavy pozorujeme v diskrétních časových okamžicích n = 0, 1, … Náhodná veličina X_n nabývá hodnoty j, když v okamžiku n je soustava ve stavu a_j. Markovská vlastnost znamená, že všechny dosavadní stavy soustavy mají vliv na budoucí stav pouze prostřednictvím stavu přítomného.

3.2. Věta: Věta o simultánní pravděpodobnostní funkci markovského řetězce s diskrétním časem

Je-li $\{X_n; n \in N_0\}$ markovský řetězec, pak platí:

$$P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \ldots \wedge X_n = j_n) = P(X_0 = j_0) P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot \ldots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$$

pokud $P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} = j_{n-1}) > 0$, = 0 jinak.

Důkaz:

Podle věty o násobení pravděpodobností a podle markovské vlastnosti dostáváme:

$$P(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \ldots \wedge X_n = j_n) =$$
$$= P(X_0 = j_0) \cdot P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot P(X_2 = j_2 / X_1 = j_1 \wedge X_0 = j_0) \cdot \ldots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = j_0) =$$
$$= P(X_0 = j_0) \cdot P(X_1 = j_1 / X_0 = j_0) \cdot P(X_2 = j_2 / X_1 = j_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$$

Věta o násobení pravděpodobností:
Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takové jevy, že $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Pak $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$.

Markovská vlastnost:

$$P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = j_0) = P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1})$$

3.3. Příklad: Nechť Y_1, Y_2, ... jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které nabývají hodnot z množiny {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} (jde o tzv. celočíselné náhodné veličiny). Položme $X_0 = 0, X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, n \geq 1$. Dokažte, že stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec.

Řešení: Dokážeme, že levá strana v markovské vlastnosti se rovná pravé straně.

Levá strana: $P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0) = \left| P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right| = \frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}$.

Jevy zapsané pomocí náhodných veličin X_0, X_1, ..., X_n se budeme snažit zapsat pomocí náhodných veličin Y_1, Y_2, ..., Y_n, které jsou stochasticky nezávislé.

$X_0 = 0$, $X_1 = X_0 + Y_1 \Rightarrow Y_1 = X_1 - X_0$, $X_2 = X_1 + Y_2 \Rightarrow Y_2 = X_2 - X_1$, ..., $X_n = X_{n-1} + Y_n \Rightarrow Y_n = X_n - X_{n-1}$, tedy

$\{X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_1 = j_1 \wedge X_0 = 0\} = \{Y_n = j_n - j_{n-1} \wedge Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2} \wedge \ldots \wedge Y_1 = j_1\}$

Dále $\{X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_1 = j_1 \wedge X_0 = 0\} = \{Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2} \wedge \ldots \wedge Y_1 = j_1\}$.

Po dosazení do levé strany:

$$\frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = j_{n-1} \wedge X_{n-2} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)} = \frac{P(Y_n = j_n - j_{n-1})P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(Y_1 = j_1)}{P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(Y_1 = j_1)} = P(Y_n = j_n - j_{n-1})$$

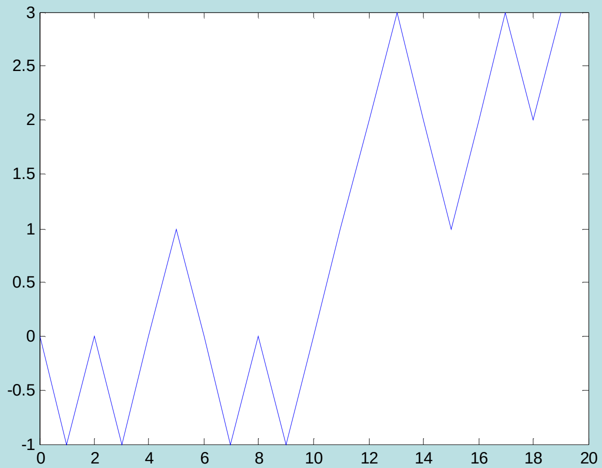
Pravá strana: $P(X_n = j_n / X_{n-1} = j_{n-1}) = \frac{P(X_n = j_n \wedge X_{n-1} = j_{n-1})}{P(X_{n-1} = j_{n-1})} = \frac{P(Y_n = j_n - j_{n-1})P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2})}{P(Y_{n-1} = j_{n-1} - j_{n-2})} = P(Y_n = j_n - j_{n-1})$

Protože levá strana se rovná pravé straně, je daný stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ markovský řetězec.

3.4. Příklad: Nechť Y_1, Y_2, … jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které mají rovnoměrné diskrétní rozložení na množině G = {-1, 1} (tj. nabývají hodnot ±1 s pravděpodobností 1/2). Položme $X_0 = 0$ a zavedeme náhodnou veličinu $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Tato náhodná veličina udává polohu částice na přímce, kterou částice zaujme po n krocích, když na počátku je v bodě 0 a pohybuje se v obou možných směrech se stejnou pravděpodobností. Markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ se nazývá symetrická náhodná procházka na přímce.

Náhodnou procházku lze simulovat v MATLABu pomocí funkce np:

```
function [poloha]=np(N)
%funkce na simulaci symetricke nahodne prochazky po primce
%syntaxe: poloha=np(N)
%vstupni parametry: N ... delka nahodne prochazky
%vystupni parametr: poloha ... vektor souradnic bodu, v nichz se castice nachazi  v jednotlivych krocich
%funkce nakresli trajektorii nahodne prochazky
%funkce poskytne tabulku rozlozeni cetnosti souradnic castice na primce, v nichz se nahodna prochazka
nachazi
NC=unidrnd(2,N,1);poloha(1)=0;
for i=2:N
   if NC(i)==1 poloha(i)=poloha(i-1)-1;
   else poloha(i)=poloha(i-1)+1;
   end
end
t=[0:N-1];
plot(t,poloha)
tabulate(poloha)
```



3.5. Označení

Jev $\{X_n = j\}$ – markovský řetězec je v okamžiku n ve stavu j.

$P(X_n = j) = p_j(n)$ – absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku n.

$\mathbf{p}(n) = (\ldots., p_j(n), \ldots)$ – vektor absolutních pravděpodobností.

$P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}(n,n+1)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku n do stavu j v okamžiku n+1 (pravděpodobnost přechodu 1. řádu).

$$\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(n, n+1) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$ - matice pravděpodobností přechodu 1. řádu.

$P(X_{n+m} = j / X_n = i) = p_{ij}(n,n+m)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku n do stavu j v okamžiku n+m (pravděpodobnost přechodu m-tého řádu).

$$\mathbf{P}(n, n+m) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(n, n+m) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$ - matice pravděpodobností přechodu m-tého řádu.

$P(X_0 = j) = p_j(0)$ – počáteční pravděpodobnost stavu j.

$\mathbf{p}(0) = (\ldots., p_j(0), \ldots)$ – vektor počátečních pravděpodobností.

3.6. Věta: Věta o vlastnostech markovského řetězce s diskrétním časem

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec. Pokud dále uvedené podmíněné pravděpodobnosti existují, platí pro

$\forall n, m, m_1, m_2 \in N_0 \forall i, j \in J:$

a) $P(X_{n+m} = j / X_n = i) \geq 0$, tj. $p_{ij}(n,n+m) \geq 0$

$$P(X_n = j / X_n = i) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}, \text{ tj. } p_{ij}(n,n) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}.$$

b) $\sum_{j \in J} P(X_{n+m} = j / X_n = i) = 1$, tj. $\sum_{j \in J} p_{ij}(n, n+m) = 1$.

(Přechod ze stavu i v okamžiku n do nějakého stavu j v okamžiku n+m je jev s pravděpodobností 1.)

c) $P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_n = i) = \sum_{k \in J} P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k)$, tj.

$$p_{ij}(n, n+m_1+m_2) = \sum_{k \in J} p_{ik}(n, n+m_1) p_{kj}(n+m_1, n+m_1+m_2)$$

(Chapmanovy – Kolmogorovovy rovnice)

d) $P(X_{n+m} = j) = \sum_{k \in J} P(X_n = k) P(X_{n+m} = j / X_n = k)$, tj. $p_j(n+m) = \sum_{k \in J} p_k(n) p_{kj}(n, n+m)$

(Zákon evoluce)

Důkaz:

ad a) $P(X_n = j / X_n = i) = \dfrac{P(X_n = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} \geq 0$, protože $P(X_n = j \wedge X_n = i) \geq 0$ a $P(X_n = i) > 0$ podle (a) z definice 3.1.

$$P(X_n = j / X_n = i) = \frac{P(X_n = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}$$

ad b) $\sum_{j \in J} P(X_{n+m} = j / X_n = i) = P\left(\bigcup_{j \in J} \{X_{n+m} = j\} / X_n = i\right) = \dfrac{P(\Omega \cap \{X_n = i\})}{P(X_n = i)} = 1$

ad c)

$$P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_n = i) = \frac{P(X_{n+m_1+m_2} = j \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \frac{P(\{X_{n+m_1+m_2} = j\} \cap \Omega \cap \{X_n = i\})}{P(X_n = i)} =$$

$$= \frac{P\left(\{X_{n+m_1+m_2} = j\} \cap \bigcup_{k \in J} \{X_{n+m_1} = k\} \cap \{X_n = i\}\right)}{P(X_n = i)} = \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i \wedge X_{n+m_1} = k \wedge X_{n+m_1+m_2} = j)}{P(X_n = i)} =$$

$$= \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i) P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k \wedge X_n = i)}{P(X_n = i)} = \frac{\sum_{k \in J} P(X_n = i) P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k)}{P(X_n = i)}$$

$$= \sum_{k \in J} P(X_{n+m_1} = k / X_n = i) P(X_{n+m_1+m_2} = j / X_{n+m_1} = k)$$

ad d)

$$P(X_{n+m} = j) = P(\Omega \cap \{X_{n+m} = j\}) = P\left(\bigcup_{k \in J} \{X_n = k\} \cap \{X_{n+m} = j\}\right) = \sum_{k \in J} P(X_n = k \wedge X_{n+m} = j) = \sum_{k \in J} P(X_n = k) P(X_{n+m} = j / X_n = k)$$

3.7. Poznámka: Zápis vlastností markovského řetězce s diskrétním časem v maticovém tvaru

a) **P**(n,n+m) ≥ **0**, kde **0** je nulová matice, **P**(n,n) = **I**, kde **I** je jednotková matice.

b) **P**(n,n+m)**e** = **e**, kde **e** je sloupcový vektor ze samých jedniček.

c) **P**$(n,n+m_1+m_2)$ = **P**$(n,n+m_1)$ **P**$(n+m_1,n+ m_1+m_2)$.

d) **p**(n+m) = **p**(n) **P**(n,n+m).

3.8. Příklad:

Nechť je dán markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}. Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Vektor absolutních pravděpodobností v okamžiku n je **p**(n) = $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Jaká je pravděpodobnost, že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1)?

Řešení: Podle zákona evoluce máme: **p**(n+1) = **p**(n) **P**(n,n+1) =

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}, \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{11}{24}, \frac{13}{24}\right) = (0{,}4583; 0{,}5417)$$

Po jednom kroku tedy bude řetězec ve stavu 0 s pravděpodobností 0,4583 a ve stavu 1 s pravděpodobností 0,5417.

3.9. Definice: Definice stochastického vektoru a stochastické matice

a) Řádkový vektor s nejvýše spočetným počtem nezáporných složek, jejichž součet je roven 1, se nazývá stochastický vektor.

b) Čtvercová matice, jejímž každým řádkem je stochastický vektor, se nazývá stochastická matice.

c) Řekneme, že markovský řetězec, stochastický vektor a stochastická matice jsou odpovídající dimenze, když počet stavů markovského řetězce, počet složek stochastického vektoru a řád stochastické matice jsou stejné.

4. Homogenní markovské řetězce s diskrétním časem

4.1. Definice: Definice homogenního markovského řetězce (s diskrétním časem)

Řekneme, že markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J je homogenní, jestliže jeho pravděpodobnosti přechodu 1. řádu $p_{ij}(n,n+1)$ nezávisí na okamžiku n, tj. pro $\forall n \in N_0 \forall j \in J : P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}$. Matice pravděpodobností přechodu 1. řádu je pak rovna **P**(1) a značí se **P**. Matice **P** se nazývá matice přechodu homogenního markovského řetězce.

Vysvětlení homogenity: Pravděpodobnostní chování HMŘ se sice může s časem měnit, ale náhodný mechanismus, který tyto změny způsobuje – matice přechodu **P** – je sám časově neproměnný.

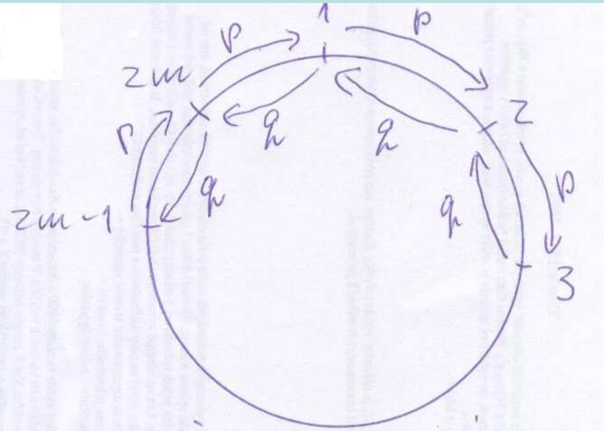
4.2. Příklad:

Na okružní trase je umístěno 2m bodů. Mezi nimi převáží auto náklady. Náklad se z každého bodu převáží do následujícího s pravděpodobností p nebo do předchozího s pravděpodobností q = 1 – p. Zavedeme stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$, kde X_n = j, když v okamžiku n je auto v bodě j, j = 0, 1, ..., 2m. Ukažte, že tento stochastický proces je homogenní markovský řetězec a najděte jeho matici přechodu.

Řešení:

Daný stochastický proces je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Je to homogenní markovský řetězec, protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku n.

Grafické znázornění situace:



Matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3. Věta:

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je stochastický proces s množinou stavů J, **p** je stochastický vektor odpovídající dimenze a **P** stochastická matice odpovídající dimenze. Pak $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = **p** a maticí přechodu **P**, právě když všechny marginální pravděpodobnostní funkce tohoto procesu jsou tvaru:

$$\forall n \in N_0 \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J : P\left(X_0 = j_0 \wedge X_1 = j_1 \wedge \ldots \wedge X_n = j_n\right) = p_{j_0}(0) p_{j_0 j_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1} j_n} .$$

Důkaz: Plyne z věty 3.2. a markovské vlastnosti.

4.4. Věta: Vlastnosti homogenního markovského řetězce v maticovém tvaru

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) a maticí přechodu **P**. Pak pro $\forall n, m \in N_0, n \geq 1$ platí:

a) $\mathbf{P}(n,n+m) = \mathbf{P}(m) = \mathbf{P}^m$.

b) $\mathbf{p}(n,n+m) = \mathbf{p}(m) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^m$.

Důkaz:

ad a) Z Ch – K rovnice plyne: $\mathbf{P}(m) = \mathbf{P}(m-1+1) = \mathbf{P}(m-1)\mathbf{P} = \mathbf{P}(m-2+1)\mathbf{P} = \mathbf{P}(m-2)\mathbf{P}^2 = \ldots = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^m$.

ad b) Ze zákona evoluce plyne: $\mathbf{p}(m) = \mathbf{p}(m-1+1) = \mathbf{p}(m-1)\mathbf{P} = \mathbf{p}(m-2+1)\mathbf{P} = \mathbf{p}(m-2)\mathbf{P}^2 = \ldots = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^m$.

4.5. Poznámka: Z věty 4.4. plyne, že k určení pravděpodobnostního chování homogenního markovského řetězce stačí znát vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) a matici přechodu **P**.

4.6. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1,2}, vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1/2, 1/6, 1/3) a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Určete vektor absolutních pravděpodobností po čtyřech krocích.

Řešení: $\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^4 = \left(\frac{31}{96}, \frac{31}{96}, \frac{34}{96}\right)$

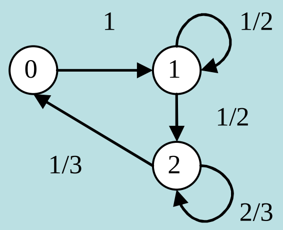
4.7. Poznámka: Přechodový diagram v rozvinutém a nerozvinutém tvaru.

Homogenní markovský řetězec lze graficky znázornit pomocí přechodového diagramu, a to buď v rozvinutém nebo nerozvinutém tvaru. Je to ohodnocený orientovaný graf, kde vrcholy jsou stavy, orientované hrany se zakreslují pro kladné pravděpodobnosti přechodu za jeden krok a ohodnocení hran (váhy) jsou dána kladnými pravděpodobnostmi přechodu.

4.8. Příklad: Nechť $\{X_n ; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0,1,2} a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$. Nakreslete přechodový diagram.

Řešení:

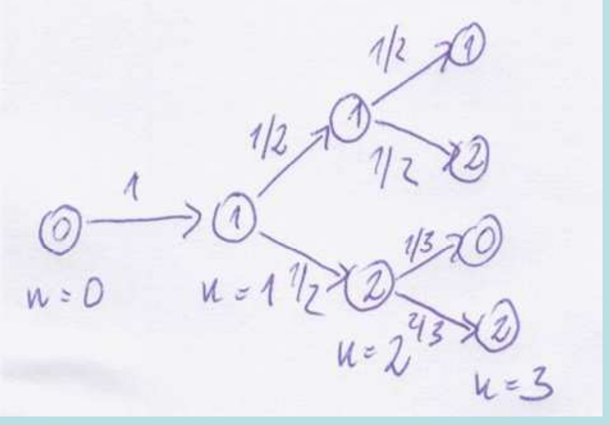


4.9. Poznámka: Pomocí přechodového diagramu v rozvinutém tvaru lze získat vektor absolutních pravděpodobností v okamžiku n. Postupuje se tak, že se pro každý možný stav v okamžiku n sečtou součiny vah těch hran, které v okamžiku n v daném stavu končí.

4.10. Příklad: Pro HMŘ z př. 4.8. vypočtěte pomocí přechodového diagramu v rozvinuté podobě vektor absolutních pravděpodobností pro n = 3.

Řešení:

Přechodový diagram v rozvinutém tvaru pro první tři kroky:



$$p_0(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$p_1(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$p_2(3) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12} \right)$$

4.11. Příklad: Model havarijního pojištění

Počet výskytů pojistné události v n-tém pojistném období je náhodná veličina Y_n, n = 1, 2, …. Předpokládáme, že náhodné veličiny Y_n jsou stochasticky nezávislé a všechny se řídí rozložením Po(λ). Existují tři kategorie pojistného: 0 … základní pojistné, 1 … pojistné s bonusem 30%, 2 … pojistné s bonusem 50%. V prvním pojistném období platí klient základní pojistné. Jestliže pojistné období má bezeškodní průběh, je klient v dalším pojistném období zařazen o kategorii výše. Pokud uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím období zařazen o kategorii níže. Při uplatnění dvou a více pojistných událostí je zařazen o dvě kategorie níže. Nechť náhodná veličina X_n značí kategorii pojistného v n-tém pojistném období. Lze snadno odvodit, že platí

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min\{X_{n+1}, 2\} \text{pro } Y_n = 0 \\ \max\{X_{n-1}, 0\} \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 \text{ pro } Y_n \geq 2 \end{cases}$$

Stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2} je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku n, jde o homogenní markovský řetězec.

a) Najděte vektor počátečních pravděpodobností a matici přechodu. (Návod: využijte toho, že matice přechodu je stochastická matice.

b) Nakreslete přechodový diagram.

Řešení:

Ad a) Vektor počátečních pravděpodobností: **p**(0) = (1, 0, 0).

Stanovíme jednotlivé prvky matice přechodu.

$$p_{00} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 0) = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$p_{01} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 0) = P(Y_n = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$p_{02} = 1 - (p_{00} + p_{01}) = 0$$

$$p_{10} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 1) = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$p_{11} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 1) = 0$$

$$p_{12} = P(X_{n+1} = 2 / X_n = 1) = P(Y_n = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

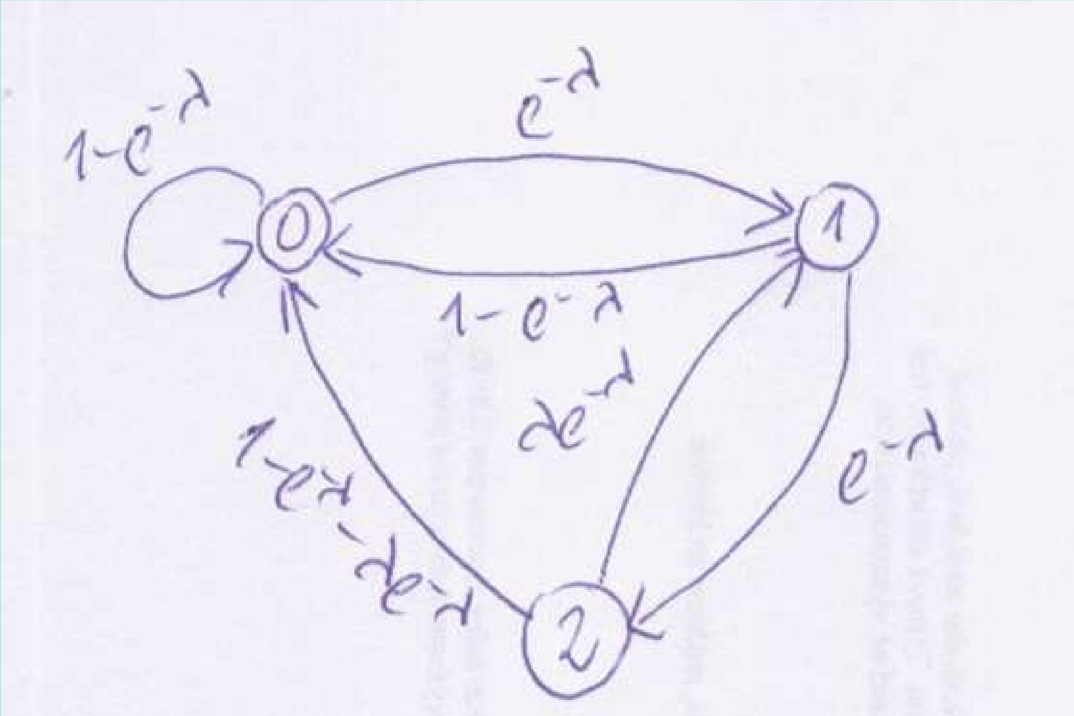
$$p_{20} = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 2) = P(Y_n \geq 2) = 1 - P(Y_n = 0) - P(Y_n = 1) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$

$$p_{21} = P(X_{n+1} = 1 / X_n = 2) = P(Y_n = 1) = \lambda e^{-\lambda}$$

$$p_{22} = P(X_{n+1} = 2 / X_n = 2) = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



4.12. Příklad: Je dán je homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1} a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$. Jaký je tvar této matice po n krocích?

Řešení: V teorii matice se dokazuje Perronův vzorec: $\mathbf{P}^n = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{\,n} \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou vlastní čísla matice **P** (protože **P** je stochastická matice, je aspoň jedno vlastní číslo rovno 1), $\mathbf{w}_i$ je sloupcový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i ($\mathbf{P}\,\mathbf{w}_i = \lambda_i\,\mathbf{w}_i$) a $\mathbf{v}_i$ je řádkový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i ($\mathbf{v}_i\mathbf{P} = \lambda_i\mathbf{v}_i'$). Přitom vektory $\mathbf{w}_i$ a $\mathbf{v}_i$ jsou ortogonální.

Nejdříve vypočítáme vlastní čísla matice **P**: $0 = |\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0,7-\lambda & 0,3 \\ 0,4 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,3\lambda + 0,3 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0,3 \end{matrix} \right.$

Stanovíme sloupcové vlastní vektory: $\mathbf{P}\,\mathbf{w}_i = \lambda_i\,\mathbf{w}_i$

i = 1: $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, i = 2: $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \end{pmatrix} = 0,3 \cdot \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -4/7 \end{pmatrix}$

Stanovíme řádkové vlastní vektory:

$\mathbf{v}_i\mathbf{P} = \lambda_i\mathbf{v}_i'$

i = 1: $(v_{11}, v_{12})\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (4/7, 3/7)$, i = 2: $(v_{21}, v_{22})\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = 0,3 \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1, -1)$

Celkem: $\mathbf{P}^n = 1^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (4/7, 3/7) + 0,3^n \cdot \begin{pmatrix} 3/7 \\ -4/7 \end{pmatrix} \cdot (1, -1) = \ldots = \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix} + 0,3^n \cdot \begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 \\ -4/7 & 4/7 \end{pmatrix}$

4.13. Poznámka: Uvažme homogenní markovský řetězec, který má množinu stavů J = {0, 1, 2}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1/2, 1/3, 1/6) a matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Ukážeme si, jak lze simulovat realizace tohoto řetězce pomocí MATLABu.

Nejprve získáme počáteční stav řetězce:

Vygenerujeme náhodné číslo u z intervalu (0,1). Interval (0,1) rozdělíme na tři podintervaly podle kumulativních součtů vektoru počátečních pravděpodobností.

Je-li $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pak X(0)=0. Je-li $u \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$, pak X(0)=1. Je-li $u \in \left\langle \frac{5}{6}, 1\right)$, pak X(0)=2.

Při simulaci dalších realizací i = 1, 2, …, n postupujeme podle kumulativních součtů v jednotlivých řádcích matice **P**:

Vždy vygenerujeme náhodné číslo u z intervalu (0,1).

Je-li X(i-1)=0 $\wedge\ u \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, pak X(i)=0. Je-li X(i-1)=0 $\wedge\ u \in \left\langle \frac{1}{3}, 1\right)$, pak X(i)=1.

Je-li X(i-1)=1 $\wedge\ u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pak X(i)=0. Je-li X(i-1)=1 a $\wedge\ u \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, pak X(i)=1. Je-li X(i-1)=1 a $\wedge\ u \in \left\langle \frac{3}{4}, 1\right)$, pak X(i)=2.

Je-li X(i-1)=2 $\wedge\ u \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$, pak X(i)=1. Je-li X(i-1)=0 $\wedge\ u \in \left\langle \frac{3}{4}, 1\right)$, pak X(i)=2.

```
function realizace = simulovani_MR(P,p0,n)
% funkce generuje prvnich n realizaci MR
% syntaxe: [realizace]=simulace_MR(P,p0,n)
% vstupni parametry:
% P ... matice prechodu
% p0 ... vektor pocatecnich pravdepodobnosti (radkovy)
% n ... pocet kroku simulace
% vystupni parametr: realizace ... vektor realizaci MR

    realizace = zeros(n, 1);
    realizace(1) = randomQ(p0);

    for i=2:n
        realizace(i) = randomQ(P(realizace(i-1), :));
    end
    plot(realizace, 'o');
    axis([-1 n+2 0.8 size(p0,2)+0.2]);
end

function q = randomQ(prob)
% funkce vygeneruje nahodny stav q dle vektoru pravdepobnosti
% syntaxe: q=randomQ(prob)
% vstupni parametr:
% prob ... radkovy vektor pravdepodobnosti (napr. [0.5 0.4 0.1])
% vystupni parametr:
% q: nahodny index vstupniho vektoru
%napr. 1 s pravd. 0.5, 2 s pravd. 0.4, 3 s pravd. 0.1

    r = random('unif', 0, 1);

    leng = size(prob, 2);
    sum = 0;
    for q = 1:leng
        sum = sum+prob(q);
        if(r <= sum)
            break;
        end
    end
end
```

5. Stacionární a limitní rozložení homogenních markovských řetězců

5.1. Definice: Definice stacionárního vektoru

Nechť **a** je stochastický vektor a **P** stochastická matice odpovídající dimenze. Jestliže platí **a** = **aP**, pak vektor **a** se nazývá stacionární vektor matice **P**.

5.2. Příklad: Najděte stacionární vektor stochastické matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Řešení: **a** = **aP**, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, tj. $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$a_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}$$
$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{3}$$
$$a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{2a_3}{3}$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$6a_1 = 3a_1 + 2a_2$$
$$6a_2 = 3a_1 + a_2 + 2a_3$$
$$6a_3 = 3a_2 + 4a_3$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{4}{19}, \frac{6}{19}, \frac{9}{19}\right) = (0{,}211;\ 0{,}316;\ 0{,}474)$$

5.3. Poznámka: Stacionární vektor lze v MATLABu získat pomocí funkce sv.m:

```
function [a]=sv(P)
%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru
%syntaxe: a=sv(P)
%vstupni parametr ... stochasticka matice P
%vystupni parametr ... stacionarni vektor a
%zjistime rad matice P:
n=size(P,1);
%vytvorime pomocnou jednotkovou matici:
I=eye(n);
%sestavime matici soustavy:
A=[[I-P]';ones(1,n)];
%vytvorime vektor pravých stran:
f=[zeros(n,1);1];
%vypocteme stacionární vektor
a=(A\f)';
```

5.4. Definice: Definice stacionárního rozložení homogenního markovského řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Stochastický vektor **a**, který je stacionárním vektorem matice **P**, se nazývá stacionární rozložení daného řetězce.

Vysvětlení: Stacionární rozložení popisuje chování HMŘ po dostatečně dlouhé době sledování, kdy již odezněl vliv počátečních podmínek. Složka a_j stacionárního rozložení udává podíl celkové doby, kterou řetězec stráví ve stavu j.

5.5. Věta: Věta o existenci limity vektoru absolutních pravděpodobností

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Jestliže pro $\forall i, j \in J$ existuje $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = a_j$, pak existuje též $\lim_{n\to\infty} p_j(n) = a_j$.

Důkaz: Ze zákona evoluce plyne: $\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J} p_i(0) p_{ij}(n) = \sum_{i\in J} p_i(0) \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \sum_{i\in J} p_i(0) a_j = a_j \sum_{i\in J} p_i(0) = a_j$.

5.6. Příklad:

Máme černou a bílou urnu a pět koulí. Na počátku pokusu jsou všechny koule v černé urně. V každém kroku pokusu náhodně vybereme jednu kouli, přičemž výběr každé koule je stejně pravděpodobný a přemístíme ji do druhé urny. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., 5}, kde $X_n = j$, když po n-tém kroku bude v černé urně právě j koulí.

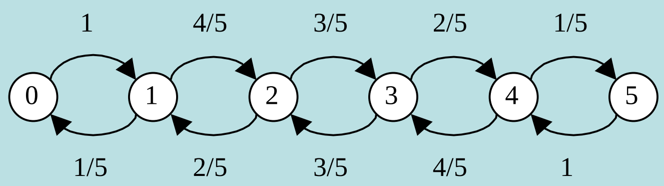
a) Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.

c) Vypočtěte střední hodnotu počtu koulí v černé urně po stabilizaci pokusu.

Řešení:

ad a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



ad b) $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$a_0 = \frac{1}{5}a_1,\ a_1 = a_0 + \frac{2}{5}a_2,\ a_2 = \frac{4}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_3,\ a_3 = \frac{3}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_4,\ a_4 = \frac{2}{5}a_3 + a_5,\ a_5 = \frac{1}{5}a_4$

$a_1 = 5a_0$, $a_2 = 10a_0$, $a_3 = 10a_0$, $a_4 = 5a_0$, $a_5 = a_0$

Protože $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$, dostáváme $a_0 + 5a_0 + 10a_0 + 10a_0 + 5a_0 + a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{32}$

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}\right)$

ad c) $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5$

Výsledek je ve shodě s očekáváním, že po dostatečně velkém počtu pokusů bude v obou urnách v průměru stejný počet koulí.

5.7. Poznámka: Pro daný homogenní markovský řetězec příslušné stacionární rozložení nemusí existovat.

5.8. Definice: Definice limitního rozložení a ergodického řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0). Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \overline{\mathbf{p}}$, pak vektor $\overline{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení daného řetězce. Jestliže vektor $\overline{\mathrm{p}}$ nezávisí na vektoru počátečních pravděpodobností **p**(0), pak řekneme, že daný řetězec je ergodický (regulární).

5.9. Poznámka: Interpretace ergodického řetězce

Ergodický řetězec lze interpretovat takto: podíl případů, kdy je řetězec ve stavu j, se blíží číslu a_j bez ohledu na to, jak proces začal.

5.10. Věta: Věta o vztahu mezi limitním a stacionárním rozložením u ergodického řetězce

Jestliže $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický homogenní markovský řetězec a existuje jeho stacionární rozložení **a**, pak limitní rozložení $\overline{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení **a**.

Důkaz: $\overline{\mathbf{p}} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P} = \overline{\mathbf{p}}\mathbf{P}$, tedy $\overline{\mathbf{p}}$ je stacionární vektor matice **P** a ten značíme **a**.

5.11. Věta: Markovova věta

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Jestliže existuje takové číslo $n \in N_0$, že matice $\mathbf{P}^n$ má všechny prvky kladné (říkáme, že je regulární) , pak

a) existuje stacionární rozložení daného řetězce a je jediné

b) řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ je ergodický

c) matice $\mathbf{P}^n$ konverguje k limitní matici **A**, jejíž řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a**.

Důkaz: Nebudeme provádět.

5.12. Poznámka:

Matice **P** je regulární, jestliže není rozložitelná na tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \text{ nebo } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P_1} \\ \mathbf{P_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

5.13. Příklad: Uvažme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech: v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním provozu výrobní linky se dospělo k následujícím závěrům: pokud se výrobní linka v jednom období nacházela v provozu, tak v následujícím období v 50% případů zůstala v provozu a v 50% případů se nacházela v opravě. Pokud se výrobní linka nacházela v jednom období v opravě, pak v dalším období zůstala v 75% případů v opravě a v 25% případů se vrátila do provozu.

a) Modelujte tuto situaci pomocí homogenního markovského řetězce.

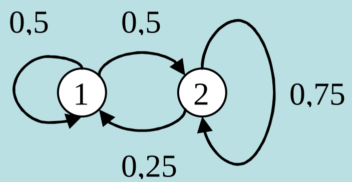
b) Najděte matici přechodu **P** a nakreslete přechodový diagram.

c) Najděte limitní rozložení daného homogenního řetězce a interpretujte ho.

Řešení:

ad a) $\{X_n ; n \in N_0\}$, $X_n = j$, když v n-tém období je linka ve stavu j, j = 1, 2.

ad b) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$



ad c) $(a_1, a_2) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$, $a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{1}{3}$, tedy $a = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Znamená to, že po dostatečně dlouhé době bude linka v provozu s pravděpodobností 1/3 a v opravě s pravděpodobností 2/3.

5.14. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$,

kde p + q = 1. (Tento HMŘ se nazývá náhodná procházka s odrážejícími stěnami.) Určete stacionární rozložení tohoto HMŘ.

Řešení: $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots) \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$

$$a_0 = qa_0 + qa_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1-q}{q} a_0 = \frac{p}{q} a_0$$

$$a_1 = pa_0 + qa_2 \Rightarrow a_2 = \frac{\frac{p}{q} a_0 - pa_0}{q} = \frac{p(1-q)}{q^2} a_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 a_0$$

Obecně: $a_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j a_0, j = 1,2,\dots$

a) Nechť p < q. Pak $1=\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^j a_0 = \frac{a_0}{1-\frac{p}{q}} \Rightarrow a_0 = 1-\frac{p}{q}$. Stacionární rozložení existuje a má tvar:

$a_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j\left(1-\frac{p}{q}\right), j = 0,1,2,\dots$ Jedná se o geometrické rozložení s parametrem $\vartheta = 1-\frac{p}{q}$.

(Připomenutí geometrického rozložení:

Náhodná veličina X udává počet neúspěchů v posloupnosti opakovaných nezávislých pokusů předcházejících prvnímu úspěchu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ. Píšeme $X \sim \mathrm{Ge}(\vartheta)$. Pravděpodobnostní funkce:

$\pi(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)^x \vartheta \text{ pro } x = 0, 1, \dots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$)

b) Nechť $p \geq q$. Pak $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \infty$ a stacionární rozložení neexistuje.

5.15. Příklad: Na malém městě jsou dva obchody, označme je A a B. Zajímáme se o nákupy zákazníků v těchto obchodech. Uvažujeme přitom týdenní období a sledujeme, kde zákazníci v jednotlivých týdnech nakupovali a jak tyto obchody střídali. Pro jednoduchost předpokládejme, že v průběhu jednoho týdne navštěvovali buď pouze obchod A nebo obchod B. Jako součást marketingového výzkumu byla shromážděna data od 1000 zákazníku v časovém horizontu 10 týdnů. Na základě tohoto výzkumu bylo zjištěno, že 90% zákazníků nakupujících v obchodě A tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 10% přejde do obchodu B. Dále 80% zákazníků nakupujících v obchodě B tam bude nakupovat i v následujícím týdnu a 20% přejde do obchodu A.

a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ a najděte matici přechodu.

b) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě A, kolik jich bude po šesti týdnech?

c) Jestliže na začátku nakupovalo 1000 zákazníků v obchodě B, kolik jich bude po šesti týdnech?

d) Jak velký je tržní podíl těchto dvou obchodů za předpokladu dostatečně velkého počtu období?

e) Obchod B provede reklamní kampaň, aby přilákal zákazníky nakupující v obchodě A. Došlo k určitému přesunu zájmu nakupovat v obchodě B. Dle nového průzkumu byla stanovena matice přechodu $\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}$. Jak se nyní změnil tržní podíl obchodů A a B za předpokladu dostatečně velkého počtu období?

Řešení:

Ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2}, přičemž $X_n = 1$, když zákazník v n-tém týdnu nakupuje v obchodě A a $X_n = 2$, když zákazník v n-tém týdnu nakupuje v obchodě B.

Podle textu úlohy sestavíme matici přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Ad b) Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (1{,}0)$, vektor absolutních pravděpodobností po 6 týdnech bude $\mathbf{p}(6) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^6 = (0{,}7059; 0{,}2941)$, tedy v obchodě A bude nakupovat 706 zákazníků.

Ad c) Vektor počátečních pravděpodobností je $\mathbf{p}(0) = (0{,}1)$, vektor absolutních pravděpodobností po 6 týdnech bude $\mathbf{p}(6) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^6 = (0{,}5882; 0{,}4118)$, tedy v obchodě B bude nakupovat 412 zákazníků.

Ad d) Hledáme stacionární rozložení daného HMŘ. Toto rozložení bude existovat, protože již matice **P** má všechny prvky kladné. Řešíme systém rovnic

$(a_0, a_1) = (a_0, a_1)\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, a_0 + a_1 = 1$. Dostaneme složky stacionárního vektoru: $a_0 = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{1}{3}$. Tržní podíl obchodu A tedy činí 66,7%, obchodu B 33,3%.

Ad e) V tomto případě hledáme stacionární rozložení pro HMŘ s maticí přechodu $\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}$.

Získáme vektor **a** = (0,5714; 0,4286), tedy tržní podíl obchodu A činí 57,1%, obchodu B 42,9%.

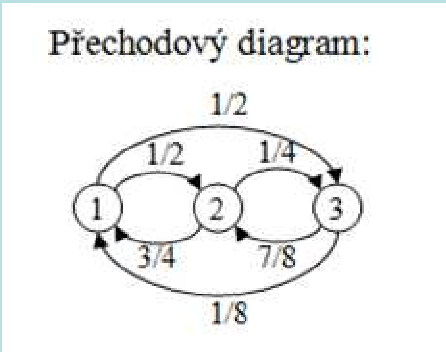
5.16. Příklad: Profesor má tři oblíbené otázky, z nichž jedna se objeví v každém testu, který profesor zadá. Studenti znají jeho zvyklosti dobře. Profesor nikdy nepoužívá téže otázky dvakrát po sobě. Když naposled užil otázky 1, hodí mincí a v případě, že padne líc, užije otázky 2. Jestliže užil otázky 2, hází dvěma mincemi a přejde k otázce 3, když na obou mincích padne líc. Jestliže užil otázky 3, hází třemi mincemi a přejde k otázce 1, když na všech třech padl líc.

a) Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Za předpokladu, že uplynulo již dosti dlouhé období, zjistěte, kterou otázku použil profesor nejčastěji a v kolika procentech případů ji užil.

Řešení:

Ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2,3\}$, přičemž $X_n = j$, když v okamžiku n zadá profesor otázku číslo j, j = 1,2,3.

Matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$



Ad b) Hledáme stacionární vektor daného HMŘ.

$(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 7/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Řešením získáme stacionární vektor $\mathbf{a} = (5/15, 6/15, 4/15)$, tedy profesor zadává nejčastěji otázku číslo 2 a užil ji ve 40% případů.

5.17. Příklad: V příkladu 4.11. „Model havarijního pojištění“ jsme zjistili, že matice přechodu má tvar

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

a) Odvoďte stacionární rozložení daného HMŘ.

b) Za předpokladu, že základní výše pojistného je w Kč, vypočtěte střední hodnotu výše pojistného, kterou pojištěnec zaplatí v dlouhodobém časovém horizontu.

Řešení:

Ad a) Pro zjednodušení zavedeme označení $c_0 = e^{-\lambda}$, $c_1 = \lambda e^{-\lambda}$. Matice **P** má pak tvar: $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-c_0 & c_0 & 0 \\ 1-c_0 & 0 & c_0 \\ 1-c_0-c_1 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$. Stacionární rozložení existuje, protože již matice $\mathbf{P}^2$ má všechny prvky kladné. Řešíme systém rovnic

$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2)\begin{pmatrix} 1-c_0 & c_0 & 0 \\ 1-c_0 & 0 & c_0 \\ 1-c_0-c_1 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}, a_0 + a_1 + a_2 = 1$. Dostaneme složky stacionárního vektoru:

$$a_0 = \frac{1-c_0-c_0c_1}{1-c_0c_1} = \frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}, a_1 = \frac{c_0(1-c_0)}{1-c_0c_1} = \frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{1-\lambda e^{-2\lambda}}, a_2 = \frac{c_0^{\,2}}{1-c_0c_1} = \frac{e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}$$

Ad b) Připomeneme, že stavy 0, 1, 2 znamenají, že 0 je základní pojistné, 1 je pojistné s bonusem 30%, 2 je pojistné s bonusem 50%.

Střední hodnota výše pojistného tedy bude $w(a_0 + 0{,}7a_1 + 0{,}5a_2) = w\left[\frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}} + 0{,}7\frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{1-\lambda e^{-2\lambda}} + 0{,}5\frac{e^{-2\lambda}}{1-\lambda e^{-2\lambda}}\right]$.

6. Odhady absolutních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu v HMŘ

6.1. Poznámka: Předpokládejme, že HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s konečným počtem stavů k má vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_k(0))$ a matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$. Tyto pravděpodobnosti však neznáme, můžeme je pouze odhadnout na základě dlouhodobého pozorování systému.

Podívejme se nejprve na odhad pravděpodobností přechodu. Pro i,j = 1, …, k označme:

c_{ij} … počet pozorování přechodu systému ze stavu i do stavu j

$c_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}$ … celkový počet přechodů, které začínaly ve stavu i (je-li i absorpční stav, $c_i = 0$)

Bodové odhady pravděpodobností přechodu získáme takto:

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{c_{ij}}{c_i} \text{ pro } c_i \neq 0 \\ 0 \text{ pro } c_i = 0 \end{cases}.$$

Je-li splněna podmínka $\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})c_i \geq 5$ (tzv. podmínka dobré aproximace), můžeme spočítat též 100(1-α)% asymptotický interval spolehlivosti pro p_{ij}. Jeho meze jsou:

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})}{c_i}}\, u_{1-\alpha/2}.$$

Odhad počátečních pravděpodobností lze získat na základě náhodného výběru. Nechť d je rozsah náhodného výběru a d_i je počet těch složek náhodného výběru, které se na počátku pozorování nacházely ve stavu i, i = 1, 2, …, k. Přitom $d = \sum_{i=1}^{k} d_i$.

Bodový odhad $p_i(0)$: $\hat{p}_i(0) = \frac{d_i}{d}, i = 1, 2, \ldots, k$.

Za splnění podmínky $\hat{p}_i(0)[1 - \hat{p}_i(0)]d \geq 5$ lze sestrojit 100(1-α)% asymptotický interval spolehlivosti pro $p_i(0)$. Jeho meze jsou:

$$\hat{p}_i(0) \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)[1 - \hat{p}_i(0)]}{d}} u_{1-\alpha/2} .$$

6.2. Příklad: V jistém regionu bylo náhodně vybráno 2501 domácností. Bylo zjištěno, že k určitému datu 629 domácností nepředplácelo žádný deník, 750 předplácelo regionální deník a zbytek celostátní deník. Z těch domácností, které neměly žádné předplatné, hodlá v příštím měsíci 126 předplácet regionální a 63 celostátní deník.Z domácností, které předplácejí regionální deník, u něj v příštím měsíci zůstane 525 domácností a 75 začne předplácet celostátní deník. A nakonec z těch domácností, které předplácejí celostátní deník, 673 nezmění předplatné a 112 přejde na předplatné regionálního deníku. Modelujte situaci pomocí homogenního markovského řetězce a najděte bodové a intervalové odhady (se spolehlivostí 95 %) počátečních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, 3}, kde $X_n = 1$, když v n-tém měsíci náhodně vybraná domácnost nemá žádné předplatné, $X_n = 2$, když má předplatné na regionální deník a $X_n = 3$, když má předplatné na celostátní deník. Údaje obsažené v textu úlohy uspořádáme do tabulky:

	1	2	3	Σ
1	440	126	63	629
2	150	525	75	750
3	337	112	673	1122
Σ				2501

Nejprve odhadneme počáteční pravděpodobnosti podle vzorce $\hat{p}_i(0) = \frac{d_i}{d}, i = 1,2,\ldots,k$. V našem případě k = 3, $d_1 = 629$, $d_2 = 750$, $d_3 = 1122$, d = 2501.

$$\hat{p}_1(0) = \frac{629}{2501} = 0{,}2515, \hat{p}_2(0) = \frac{750}{2501} = 0{,}2999, \hat{p}_1(0) = \frac{1122}{2501} = 0{,}4486$$

Odhad vektoru počátečních pravděpodobností: $\hat{p}(0) = (0{,}25; 0{,}3; 0{,}45)$.

Znamená to, že na počátku sledování 25 % domácností v daném regionu nemělo žádné předplatné, 30 % předplácelo regionální deník a 45 % celostátní deník.

Před výpočtem intervalů spolehlivosti ověříme, zda jsou splněny podmínky dobré aproximace $\hat{p}_i(0)[1-\hat{p}_i(0)]d \geq 5$. Přitom

$\hat{p}_1(0) = \frac{629}{2501}, \hat{p}_2(0) = \frac{750}{2501}, \hat{p}_3(0) = \frac{1122}{2501}, d = 2501$. Tedy

i = 1: $\frac{629}{2501}\left(1 - \frac{629}{2501}\right)2501 = 469$,

i = 2: $\frac{750}{2501}\left(1 - \frac{750}{2501}\right)2501 = 525$,

i = 3: $\frac{1122}{2501}\left(1 - \frac{1122}{2501}\right)2501 = 619$.

Vidíme, že podmínky jsou splněny. Pro i = 1, 2, 3 a $\alpha = 0{,}05$ dosadíme do vzorce $\hat{p}_i(0) \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)[1-\hat{p}_i(0)]}{d}}\,u_{1-\alpha/2}$.

Dostaneme meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro $p_1(0)$, $p_2(0)$, $p_3(0)$.

$p_1(0) \in (0{,}2345; 0{,}2685)$, $p_2(0) \in (0{,}2819; 0{,}3178)$, $p_3(0) \in (0{,}4291; 0{,}4681)$ vždy s pravděpodobností 95 %.

Interpretujeme např. 1. interval spolehlivosti: Ve sledovaném regionu je k danému datu s pravděpodobností 95 % 23,45 % až 26,85 % domácností, které nepředplácejí žádný deník.

Nyní se budeme věnovat odhadům pravděpodobností přechodu. Použijeme vzorec $\hat{p}_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{c_i}, i, j = 1, \dots, k$.

Znovu uvedeme tabulku se zadanými údaji:

	1	2	3	Σ
1	440	126	63	629
2	150	525	75	750
3	337	112	673	1122
Σ				2501

V našem případě k = 3,
$c_{11} = 440$, $c_{12} = 126$, $c_{13} = 63$, $c_1 = 629$,

$c_{21} = 150$, $c_{22} = 525$, $c_{23} = 75$, $c_2 = 750$,

$c_{31} = 337$, $c_{32} = 112$, $c_{33} = 673$, $c_3 = 1122$.

$$\hat{p}_{11} = \frac{440}{629} = 0{,}6995, \hat{p}_{12} = \frac{126}{629} = 0{,}2003, \hat{p}_{13} = \frac{63}{629} = 0{,}1002$$

$$\hat{p}_{21} = \frac{150}{750} = 0{,}2, \hat{p}_{22} = \frac{525}{750} = 0{,}7, \hat{p}_{13} = \frac{75}{750} = 0{,}1$$

$$\hat{p}_{31} = \frac{337}{1122} = 0{,}3004, \hat{p}_{32} = \frac{112}{1122} = 0{,}0998, \hat{p}_{33} = \frac{673}{1122} = 0{,}5998$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Interpretujeme např. 1. řádek odhadnuté matice přechodu: Pokud v jednom měsíci náhodně vybraná domácnost neodebírala žádný deník, tak v příštím měsíci s pravděpodobností 0,7 opět nebude mít žádné předplatné, s pravděpodobností 0,2 si předplatí regionální deník a s pravděpodobností 0,1 celostátní deník.

Před výpočtem intervalů spolehlivosti ověříme splnění podmínek dobré aproximace $\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})c_i \geq 5$. Připomínáme, že

$c_{11} = 440$, $c_{12} = 126$, $c_{13} = 63$, $c_1 = 629$,
$c_{21} = 150$, $c_{22} = 525$, $c_{23} = 75$, $c_2 = 750$,
$c_{31} = 337$, $c_{32} = 112$, $c_{33} = 673$, $c_3 = 1122$.

i = 1: $\frac{440}{629}\left(1-\frac{440}{629}\right)629 = 132, \frac{126}{629}\left(1-\frac{126}{629}\right)629 = 101, \frac{63}{629}\left(1-\frac{63}{629}\right)629 = 57$

i = 2: $\frac{150}{750}\left(1-\frac{150}{750}\right)750 = 120, \frac{525}{750}\left(1-\frac{525}{750}\right)750 = 158, \frac{75}{750}\left(1-\frac{75}{750}\right)750 = 68$

i = 3: $\frac{337}{1122}\left(1-\frac{337}{1122}\right)1122 = 236, \frac{112}{1122}\left(1-\frac{112}{1122}\right)1122 = 109, \frac{673}{1122}\left(1-\frac{673}{1122}\right)1122 = 269$

Ve všech devíti případech jsou podmínky dobré aproximace splněny, můžeme tedy spočítat meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu. Pro i, j = 1, 2, 3 a $\alpha = 0{,}05$ dosadíme do vzorce

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})}{c_i}}u_{1-\alpha/2}.$$

$p_{11} \in (0{,}6637;0{,}7354), p_{12} \in (0{,}169;0{,}2316), p_{13} \in (0{,}0767;0{,}1236),$
$p_{21} \in (0{,}1714;0{,}2286), p_{22} \in (0{,}6672;0{,}7328), p_{23} \in (0{,}0785;0{,}1215),$
$p_{31} \in (0{,}2735;0{,}3272), p_{32} \in (0{,}0823;0{,}1174), p_{33} \in (0{,}5712;0{,}6285).$

Interpretujeme např. interval spolehlivosti pro p_{11}: Pokud v jednom měsíci náhodně vybraná domácnost neodebírala žádný deník, tak v příštím měsíci můžeme se spolehlivostí 95 % zaručit, že s pravděpodobností 66,37 % až 73,54 % opět nebude odebírat žádný deník.

7. Klasifikace stavů homogenního markovského řetězce

7.1. Označení: Označení prvků matice $\mathbf{P}^n$

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J a s maticí přechodu **P**. Prvky matice $\mathbf{P}^n$ budeme značit $p_{ij}(n)$.

7.2. Definice: Definice doby prvního návratu do stavu j

Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ vychází ze stavu j, tj. $P(X_0 = j) = 1$. Zavedeme množinu $T_j = \{n \geq 1; X_n = j\}$, která udává pořadí okamžiků návratů do stavu j. Náhodná veličina

$$\tau_j = \begin{cases} \min\{T_j\} \text{ pro } T_j \neq \emptyset \\ \infty \text{ pro } T_j = \emptyset \end{cases}$$

se nazývá doba prvního návratu do stavu j.

7.3. Označení: Označení pravděpodobnostní funkce doby prvního návratu do stavu j

Náhodná veličina τ_j je diskrétní náhodná veličina, nabývá hodnot 1, 2, 3, ... Její pravděpodobnostní funkci označíme $f_j(n)$, tedy $f_j(n) = P(\tau_j = n)$, n = 1, 2, 3, ... (pro n = 0 položíme $f_j(0) = 0$). Pravděpodobnost, že homogenní markovský řetězec vycházející ze stavu j, se vůbec někdy vrátí do stavu j, je tedy $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$. Pravděpodobnost f_j lze vyjádřit jako $P(\tau_j < \infty)$.

7.4. Věta: Souvislost pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu s pravděpodobnostmi přechodu

Pravděpodobnostní funkce doby 1. návratu do stavu j souvisí s pravděpodobnostmi přechodu takto:

$$\forall j \in J: p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}(n-k) f_j(k),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Odtud lze $f_j(n)$ vyjádřit pomocí rekurentního vztahu:

$$\forall j \in J: p_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k) + f_j(n) \Rightarrow f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k)\,.$$

Důkaz:

Pro k = 1, 2, 3, ... označme jev $A_k = \{X_n = j \wedge \tau_j = k\}$. Jevy A_k jsou neslučitelné a $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{X_n = j\}$. Počítáme

$$p_{jj}(n) = P(X_n = j / X_0 = j) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k / X_0 = j\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k / X_0 = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j \wedge \tau_j = k / X_0 = j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(\tau_j = k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge \tau_j = k) = \sum_{k=1}^{n} f_j(k) P(X_n = j / X_0 = j \wedge X_1 \neq j \wedge \ldots \wedge X_{k-1} \neq j \wedge X_k = j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_j(k) P(X_n = j / X_k = j) = \sum_{k=1}^{n} f_j(k) p_{jj}(n-k)$$

(Při úpravách byla použita rovnost $P(A \cap B / C) = P(B / C) P(A / B \cap C)$.)

7.5. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$. Je-li vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$, vypočtěte pravděpodobnost, že doba 1. návratu do stavu 0 bude n, n = 1, 2, 3, ... a vypočtěte pravděpodobnost, že řetězec se vůbec někdy vrátí do stavu 0.

Řešení: Použijeme vzorec $f_j(n) = p_{jj}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}(n-k) f_j(k)$. Počítáme

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 + \alpha\beta & (1-\alpha)\alpha + (1-\beta)\alpha \\ (1-\alpha)\beta + \beta(1-\beta) & \alpha\beta + (1-\beta)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta & 1 - p_{00}(3) \\ 1 - p_{11}(3) & (1-\alpha)\alpha\beta + 2(1-\beta)\alpha\beta + (1-\beta)^3 \end{pmatrix}$$

$f_0(1) = p_{00} = 1 - \alpha$

$f_0(2) = p_{00}(2) - p_{00}f_0(1) = (1-\alpha)^2 + \alpha\beta - (1-\alpha)^2 = \alpha\beta$

$f_0(3) = p_{00}(3) - p_{00}(2)f_0(1) - p_{00}f_0(2) = (1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - [(1-\alpha)^2 + \alpha\beta](1-\alpha) - (1-\alpha)\alpha\beta =$

$=(1-\alpha)^3 + 2(1-\alpha)\alpha\beta + (1-\beta)\alpha\beta - (1-\alpha)^3 - (1-\alpha)\alpha\beta - (1-\alpha)\alpha\beta = (1-\beta)\alpha\beta$

Obecně: $f_0(n) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{pro } n = 1 \\ (1-\beta)^{n-2}\alpha\beta & \text{pro } n = 2,3,\ldots \end{cases}$

7.6. Definice: Definice trvalého a přechodného stavu

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

a) Stav $j \in J$ se nazývá trvalý, jestliže $f_j = 1$ (tj. $P(\tau_j < \infty)$. (Znamená to, že řetězec se do stavu j vrátí po konečně mnoha krocích.)

b) Stav $j \in J$ se nazývá přechodný, jestliže $f_j < 1$ (tj. $P(\tau_j = \infty)$. (Znamená to, že řetězec se do stavu j s kladnou pravděpodobností nikdy nevrátí.)

Množina trvalých stavů se značí J_T, množina přechodných stavů J_P. Přitom $J_T \cup J_P = J, J_T \cap J_P = \emptyset$.

7.7. Věta: Kritérium pro klasifikaci trvalých a přechodných stavů.

a) Stav j je trvalý, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$.

b) Stav j je přechodný, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

7.8. Příklad: Provádíme posloupnost opakovaných nezávislých hodů kostkou. Nechť náhodná veličina X_n udává maximální číslo dosažené v prvních n hodech, n = 1, 2, 3, ... Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, ..., 6}, kde X_n = j, když v prvních n hodech bylo nejvyšší dosažené číslo j. Najděte matici přechodu **P** a klasifikujte stavy na trvalé a přechodné.

Řešení:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zajímají nás jen diagonální prvky matice $\mathbf{P}^n$, protože zkoumáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$.

$$p_{11} = \frac{1}{6}, p_{11}(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2, p_{11}(3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3, \ldots$$

$$p_{22} = \frac{2}{6}, p_{22}(2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2, p_{22}(3) = \left(\frac{2}{6}\right)^3, \ldots$$

Obecně: $p_{jj}(n) = \left(\frac{j}{6}\right)^n$, j = 1, ..., 6

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{6}\right)^n$ absolutně konverguje pro j = 1, 2, 3, 4, 5 a diverguje pro j = 6. Tedy J_T = {6}, J_P = {1, 2, 3, 4, 5}.

7.9. Definice: Definice trvalého nenulového stavu a trvalého nulového stavu

Nechť $j \in J$ je trvalý stav homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$.

a) Stav j se nazývá trvalý nenulový, jestliže existuje střední hodnota μ_j náhodné veličiny τ_j.

b) Stav j se nazývá trvalý nulový, jestliže střední hodnota náhodné veličiny τ_j neexistuje.

7.10. Důsledek: Kritérium pro klasifikaci trvalých nenulových stavů a trvalých nulových stavů

Stav j je trvalý nenulový, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ absolutně konverguje.

Stav j je trvalý nulový, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ diverguje.

7.11. Poznámka: Lze ukázat, že HMŘ s konečnou množinou stavů nemůže mít trvalé nulové stavy.

7.12. Definice: Definice periodického stavu, neperiodického stavu, ergodického stavu

Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro něž $p_{jj}(n) > 0$.

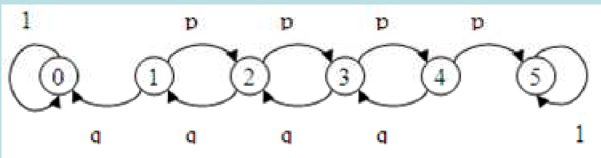
Je-li $d_j > 1$, pak řekneme, že stav j je periodický s periodou d_j.

Je-li $d_j = 1$, pak řekneme, že stav j je neperiodický.

Trvalý nenulový neperiodický stav se nazývá ergodický stav.

7.13. Příklad: Na úsečce délky 5 jsou vyznačeny body 0, 1, ..., 5. V bodě 3 se nachází kulička. Kulička koná náhodnou procházku po úsečce tak, že s pravděpodobností p se posune o jednotku napravo a s pravděpodobností q = 1 – p se posune o jednotku nalevo. Dosáhne-li bodu 0 nebo bodu 5, setrvá tam. Popište proces pomocí homogenního markovského řetězce a klasifikujte stavy na periodické a neperiodické.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, kde $X_n = j$, když v okamžiku n je kulička v bodě j.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_{00}(n) = 1$ pro $\forall n \in N \Rightarrow$ stav 0 je neperiodický.

$p_{55}(n) = 1$ pro $\forall n \in N \Rightarrow$ stav 5 je neperiodický.

$p_{11}(1) = 0$, $p_{11}(2) = pq$, $p_{11}(3) = 0$, $p_{11}(4) = pqp$, ... Největší společný dělitel čísel 2, 4, 6, ... je 2, tedy stav 1 je periodický s periodou 2. Stejně to dopadne se stavy 2, 3, 4.

7.14. Věta: Výpočet střední hodnoty doby 1. návratu do ergodického stavu a trvalého nenulového periodického stavu

a) Nechť $j \in J$ je trvalý nenulový neperiodický stav (tj. ergodický stav). Pak $\mu_j = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}(n)}$.

b) Nechť $j \in J$ je trvalý nenulový periodický stav s periodou d_j. Pak $\mu_j = \dfrac{d_j}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}(nd_j)}$.

7.15. Příklad: Nechť je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0, 1, 2} a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Vypočtěte střední hodnoty dob 1. návratů do stavů 0, 1, 2.

Řešení: Jelikož matice **P** je regulární matice, bude matice $\mathbf{P}^n$ konvergovat k limitní matici, jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a** matice **P**.

$$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_1, a_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{6} \\ a_1 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\ a_2 &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= \frac{6}{25} \\ a_1 &= \frac{10}{25} \\ a_2 &= \frac{9}{25} \end{aligned} \quad \overline{\mathbf{p}} = \left(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25}\right),\ \boldsymbol{\mu} = \left(\frac{25}{6}, \frac{25}{10}, \frac{25}{9}\right)$$

Vychází-li řetězec např. ze stavu 1, tak v průměru po 2,5 krocích se tam vrátí.

8. Rozložitelné a nerozložitelné homogenní markovské řetězce

8.1. Definice: Definice dosažitelných a sousledných stavů

Nechť $\{X_n ; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

a) Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i, když existuje $n \geq 1$ tak, že $p_{ij}(n) > 0$.

Pokud $p_{ij}(n) = 0$ pro všechna $n \geq 1$, pak řekneme, že stav j není dosažitelný ze stavu i.

b) Řekneme, že stav j je sousledný se stavem i, jestliže j je dosažitelný z i a i je dosažitelný z j.

(Symbolicky se dosažitelnost stavu j ze stavu i označuje takto: $i \rightarrow j$ a souslednost stavů i, j se označuje takto: $i \leftrightarrow j$.)

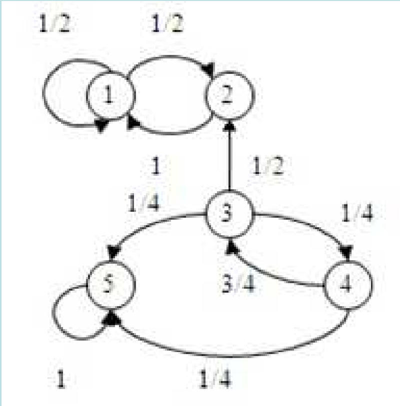
8.2. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů

J = {1, 2, ..., 5} a maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nakreslete přechodový diagram a sestavte tabulku dosažitelných stavů a tabulku sousledných stavů.

Řešení:

Přechodový diagram



Tabulka dosažitelných stavů

stav	dosažitelný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	+

Tabulka sousledných stavů

stav	sousledný stav				
	1	2	3	4	5
1	+	+	-	-	-
2	+	+	-	-	-
3	-	-	+	+	-
4	-	-	+	+	-
5	-	-	-	-	+

8.3. Definice: Definice třídy trvalých stavů a třídy přechodných stavů

Neprázdná množina stavů $C \subseteq J$ se nazývá třída trvalých stavů, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný ze žádného stavu uvnitř C. Množina stavů, která není třídou trvalých stavů, se nazývá třída přechodných stavů.

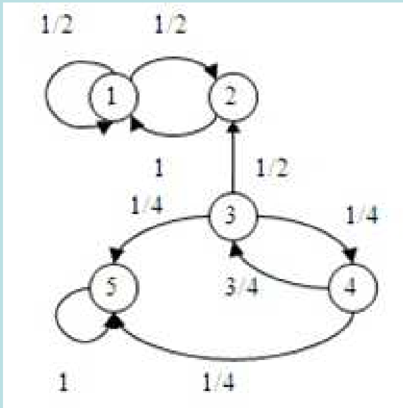
8.4. Příklad: Pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení:

Nejprve uvedeme matici přechodu.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nakreslíme přechodový diagram.



Z diagramu je zřejmé, že když řetězec vstoupí do třídy stavů {1, 2} nebo {5}, není odtud dosažitelný žádný stav vně třídy {1, 2} resp. {5}, tedy $J_T = \{1,2\} \cup \{5\}$. Když řetězec vstoupí do třídy stavů {3, 4}, je odtud dosažitelný stav 5, tedy $J_P = \{3,4\}$.

8.5. Poznámka: Poznámka o podřetězci homogenního markovského řetězce

Jestliže v matici přechodu **P** vynecháme ty řádky a sloupce, které odpovídají stavům nepatřícím do třídy trvalých stavů C, dostaneme opět stochastickou matici. Lze ji považovat za matici přechodu homogenního markovského řetězce s množinou stavů C. Nazývá se podřetězec původního řetězce. Např. pro homogenní markovský řetězec z příkladu 8.2. , který má

matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dostaneme podřetězec s maticí přechodu $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.6. Důsledek: Důsledek pro třídu trvalých stavů a pro třídu přechodných stavů

a) Řetězec nikdy neopustí třídu trvalých stavů, jakmile do ní jednou vstoupí.

b) Řetězec se nikdy nevrátí do třídy přechodných stavů, jakmile ji jednou opustí.

8.7. Věta: Kritérium pro stanovení třídy trvalých stavů

Množina stavů $C \subseteq J$ je třída trvalých stavů, právě když $p_{ij} = 0$ pro $\forall i \in C, j \notin C$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

8.8. Definice: Definice rozložitelného a nerozložitelného homogenního markovského řetězce

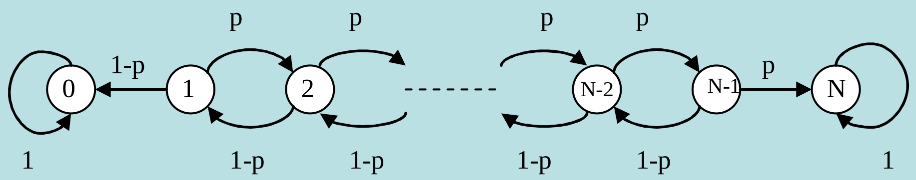
Homogenní markovský řetězec se nazývá nerozložitelný, jestliže všechny jeho stavy jsou sousledné. V opačném případě říkáme, že řetězec je rozložitelný.

Ekvivalentní definice: HMŘ se nazývá nerozložitelný, jestliže v něm neexistuje jiná třída trvalých stavů než J.

8.9. Věta: Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný právě tehdy, má-li matice přechodu (po případném přečíslování stavů) tvar $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice.

Důkaz: viz Prášková, str. 37.

8.10. Příklad: Uvažme náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami, tj. homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., N-1, N} a přechodovým diagramem



Zjistěte, zda tento řetězec je rozložitelný. Pokud ano, najděte třídy trvalých a přechodných stavů.

Řešení: Z přechodového diagramu okamžitě vyplývá, že stavy 0 a N jsou sousledné jenom samy se sebou.

Ostatní stavy 1, 2, ..., N-1 jsou sousledné, řetězec je tedy rozložitelný a $J_T = \{0\} \cup \{N\}, J_P = \{1, 2, \ldots, N-1\}$.

8.11. Definice: Definice stavů stejného typu

Řekneme, že stavy $i, j \in J$ homogenního markovského řetězce jsou stejného typu, jestliže jsou oba

a) přechodné

b) trvalé nenulové

c) trvalé nulové

d) neperiodické

e) periodické s touž periodou.

8.12. Věta: Věta o solidaritě

Jsou-li stavy i a j sousledné, pak jsou stejného typu.

Důkaz: Nebudeme provádět.

8.13. Důsledek: Důsledek pro nerozložitelný homogenní markovský řetězec

V nerozložitelném homogenním markovském řetězci jsou všechny stavy stejného typu. Má-li nerozložitelný homogenní markovský řetězec konečnou množinu stavů, pak jsou všechny stavy trvalé nenulové.

8.14. Věta: Věta o stacionárním rozložení nerozložitelného HMŘ

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec . Pak platí:

1. Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, pak stacionární rozložení neexistuje.
2. Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, pak stacionární rozložení existuje a je jediné.

   2a) Jsou-li všechny stavy neperiodické, pak $a_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) > 0, i, j \in J$ a také $a_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) > 0, j \in J$

   2b) Jsou-li všechny stavy periodické, pak $a_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) > 0, i, j \in J$ a také $a_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_j(k) > 0, j \in J$

8.15. Důsledek: V nerozložitelném homogenním markovském řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozloženi existuje.

8.16. Věta: Věta o množině stavů dosažitelných z trvalého stavu.

Nechť stav i je dosažitelný z nějakého trvalého stavu j. Pak platí:

a) stav i je trvalý stav stejného typu jako stav j

b) i a j jsou sousledné stavy

c) $f_{ji} = f_{ij} = 1$ (tj. pravděpodobnost, že řetězec vycházející ze stavu j resp. i vůbec někdy vstoupí do stavu i resp. j, je rovna 1).

(Znamená to, že množina stavů dosažitelných z nějakého trvalého stavu j je množina trvalých stavů a tvoří nerozložitelný podřetězec původního řetězce.)

8.17. Poznámka:

Nejprve pro jednoduchost předpokládejme, že v rozložitelném řetězci existují jen dvě třídy stavů. Znamená to, že současným přečíslováním stavů v matici přechodu lze vytvořit nulové submatice.

Dostáváme pak buď matici typu

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ jsou čtvercové matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami stavů, přičemž obě třídy jsou třídy trvalých stavů,

nebo typu

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}$ jsou čtvercové matice, přičemž $\mathbf{P}_1$ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi trvalými stavy, matice $\mathbf{Q}$ obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy a matice $\mathbf{R}$ je tvořena pravděpodobnostmi přechodu z přechodných do trvalých stavů.

Je-li matice $\mathbf{P}$ rozložitelná na tvar

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{0}$ jsou nulové čtvercové matice, bude systém oscilovat mezi dvěma třídami přechodných stavů a příslušná matice $\mathbf{P}$ bude popisovat periodický řetězec.

8.18. Poznámka: poznámka o rozkladu konečné množiny stavů J a o kanonickém tvaru matice přechodu

Předpokládejme nyní, že rozložitelný HMŘ je tvořen jak trvalými, tak přechodnými stavy, přičemž má r tříd trvalých stavů.

Věta 8.16. umožní rozložit množinu stavů J takto:

Nechť j_1 je trvalý stav s nejnižším indexem a J_1 je množina všech stavů dosažitelných z j_1.

Nechť j_2 je trvalý stav s nejnižším indexem mezi těmi trvalými stavy, které nepatří do J_1 a nechť J_2 je množina všech stavů dosažitelných z j_2 atd.

Lze tedy psát $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_r \cup J_P$, kde J_1, J_2, ..., J_r jsou neslučitelné množiny trvalých stavů a J_P je množina stavů přechodných. Je-li J konečná množina, pak matici přechodu **P** lze psát v tzv. kanonickém tvaru (po eventuálním přečíslování stavů).

Kanonický tvar matice **P**

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">J</td><td colspan="4">J_T</td><td rowspan="2">J_P</td></tr>
<tr><td>J_1</td><td>J_2</td><td>...</td><td>J_r</td></tr>
<tr><td rowspan="4">J_T</td><td>J_1</td><td>$\mathbf{P_1}$</td><td>Ø</td><td>...</td><td>Ø</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td>J_2</td><td>Ø</td><td>$\mathbf{P_2}$</td><td>...</td><td>Ø</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>J_r</td><td>Ø</td><td>Ø</td><td>...</td><td>$\mathbf{P_r}$</td><td>Ø</td></tr>
<tr><td colspan="2">J_P</td><td>$\mathbf{R_1}$</td><td>$\mathbf{R_2}$</td><td>...</td><td>$\mathbf{R_r}$</td><td>$\mathbf{Q}$</td></tr>
</table>

$\mathbf{P}_1$, ..., $\mathbf{P}_r$ jsou matice obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi třídami trvalých stavů J_1, ..., J_r. Matice $\mathbf{R}_1$, ..., $\mathbf{R}_r$ obsahují pravděpodobnosti přechodu mezi třídami přechodných a trvalých stavů. Matice **Q** obsahuje pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy.

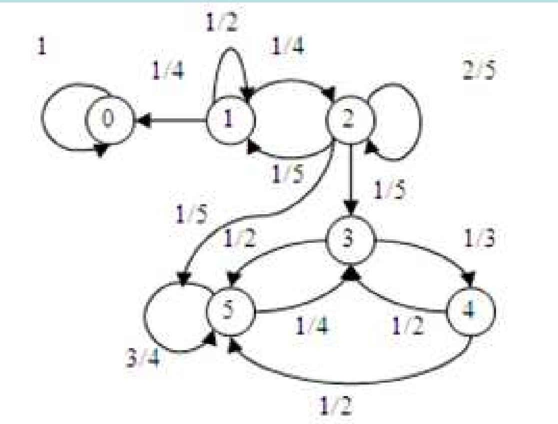
8.19. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{0,1, ..., 5\}$ a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

. Najděte kanonický tvar matice **P**.

Řešení:

Přechodový diagram



$J_1 = \{0\}$, $J_2 = \{3, 4, 5\}$, $J_P = \{1, 2\}$.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že

$$\mathbf{P}_1 = (1)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

8.20. Definice: Definice fundamentální matice nerozložitelného homogenního markovského řetězce

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je nerozložitelný homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Limitní matici přechodu označme **A**. Fundamentální matici **Z** tohoto řetězce definujeme vztahem: $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}$.

8.21. Věta: Věta o výpočtu středních hodnot dob prvních vstupů

Označme m_{ij} střední hodnotu doby 1. vstupu řetězce do stavu j za předpokladu, že vychází ze stavu i. Sestavíme matici $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j \in J}$. Pak $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\widehat{\mathbf{Z}})\widehat{\mathbf{M}}$, kde **E** je matice ze samých jedniček, matice $\widehat{\mathbf{Z}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **Z** a matice $\widehat{\mathbf{M}}$ obsahuje jen diagonální prvky matice **M**.

8.22. Příklad: Při dlouhodobém sledování velkého souboru voličů s časovým krokem 1 měsíc byly zkoumány volební preference. Rozlišujeme strany A, B, C a Ostatní. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4}, kde $X_n = 1$, když náhodně vybraný volič preferuje v n-tém měsíci stranu A, $X_n = 2$ pro stranu B, $X_n = 3$ pro stranu C a $X_n = 4$ pro ostatní strany. Pravděpodobnosti přechodu sympatií voličů jsou uvedeny v matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}05 & 0{,}11 & 0{,}14 \\ 0{,}01 & 0{,}82 & 0{,}05 & 0{,}12 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}03 & 0{,}92 \end{pmatrix}$$

. Najděte limitní matici přechodu a vypočtěte matici středních hodnot dob prvních přechodů.

Řešení: Limitní matici přechodu získáme složením čtyř stacionárních vektorů. Stacionární vektor existuje, neboť již matice $\mathbf{P}^2$ má všechny prvky kladné.

Řešením systému **a** = **aP** s podmínkou $\sum_{j=1}^{4} a_j = 1$ získáme stacionární vektor: **a** = (0,1328; 0,0881; 0,1843; 0,5949).

Znamená to, že během dlouhé doby může strana A očekávat 13,3% voličů, strana B 8,8%, strana C 18,4% a ostatní strany dohromady 59,5%.

Limitní matice přechodu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \\ 0{,}1328 & 0{,}0881 & 0{,}1843 & 0{,}5949 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku matice **A**: Pokud volič v jednom měsíci preferoval stranu A, pak v následujícím měsíci ji bude s pravděpodbností 13,3% preferovat opět. Ke straně B se přikloní s pravděpodobností 8,8%, ke straně C s pravděpodobností 18,4% a s pravděpodobností 59,5% zvolí některou z ostatních stran.

K výpočtu matice středních hodnot dob prvních přechodů potřebujeme fundamentální matici **Z**:

$$\mathbf{Z} = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5863 & 0,2999 & 0,2549 & -2,1411 \\ -0,7741 & 4,7037 & -0,531 & -2,3986 \\ -0,2863 & 0,4354 & 3,6153 & -2,7644 \\ -0,1508 & -0,7502 & -0,7885 & 2,6895 \end{pmatrix}.$$

Matice $\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 2,5863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,7037 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,6153 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,6895 \end{pmatrix}$, matice $\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0,1328} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0,0881} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{01843} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0,5949} \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{M} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}}\right)\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 7,5306 & 50 & 18,2353 & 8,1207 \\ 25,3061 & 11,3538 & 22,5 & 8,5535 \\ 21,6327 & 48,4615 & 5,4265 & 9,1686 \\ 20,6122 & 61,9231 & 23,8971 & 1,6811 \end{pmatrix}$.

Interpretace 1. řádku matice **M**: Volič, který na začátku sledování preferoval stranu A, v průměru za 7,5 měsíce dá poprvé znovu hlas této straně. V průměru za 50 měsíců bude poprvé preferovat stranu B a v průměru za 18,2 měsíce bude poprvé preferovat stranu C. V průměru za 8,1 měsíce se poprvé přikloní k některé z ostatních stran.

9. Absorpční homogenní markovské řetězce

9.1. Definice: Definice absorpčního stavu

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J.

Řekneme, že stav $j \in J$ je absorpční stav, jestliže $p_{jj} = 1$ (tzn., že ze stavu j není dosažitelný žádný jiný stav). Když řetězec vstoupí do absorpčního stavu, pak řekneme, že je absorbován.

9.2. Věta: Věta o vztahu mezi absorpčním stavem a trvalým stavem

Každý absorpční stav je trvalým stavem.

Důkaz: Plyne přímo z definice trvalého stavu.

9.3. Definice: Definice absorpčního homogenního markovského řetězce

Homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů se nazývá absorpční, jestliže každý jeho trvalý stav je absorpční.

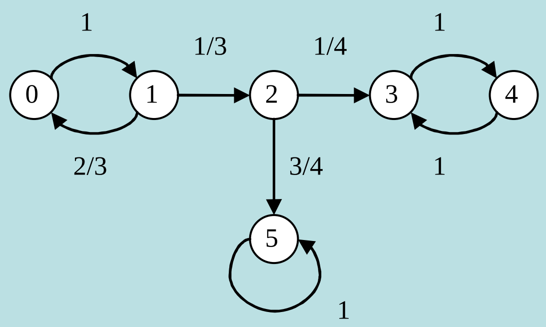
9.4. Příklad: Nechť $\{X_n ; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0,1, ..., 5} a maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Zjistěte, zda jde o absorpční řetězec.

Řešení:

Přechodový diagram



$J_T = \{3,4\} \cup \{5\}$, $J_P = \{0, 1, 2\}$.

Stavy 3 a 4 jsou trvalé, ale nejsou absorpční. Řetězec tedy není absorpční.

9.5. Definice: Definice fundamentální matice absorpčního řetězce

Nechť $\{X_n ; n \in N_0\}$ je absorpční řetězec s konečnou množinou stavů, který má r absorpčních a s neabsorpčních stavů. Stavy přečíslujeme tak, aby po množině J_A r absorpčních stavů následovala množina J_N s neabsorpčních stavů. Matici přechodu **P** přepíšeme do kanonického tvaru $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, kde

I je jednotková matice řádu r,

0 je nulová matice typu r x s,

R je matice typu s x r obsahující pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů a

Q je čtvercová matice řádu s obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy.

Matice $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ (kde **I** je jednotková matice řádu s) se nazývá fundamentální matice absorpčního řetězce.

Vysvětlení: Prvek m_{ij} matice **M** udává střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčním stavu j před přechodem do absorpčního stavu, pokud vyšel z neabsorpčního stavu i. Inverzní matice existuje, pokud $\mathbf{Q}^n$ konverguje k **0**.

9.6. Poznámka: Význam součtu prvků v i-tém řádku fundamentální matice **M**

Střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech, když vychází z neabsorpčního stavu i a skončí v absorpčním stavu, vypočítáme jako součet prvků v i-tém řádku fundamentální matice **M**. Maticový zápis: **t** = **Me**, kde **e** je sloupcový vektor typu s x 1 ze samých jedniček.

9.7. Příklad: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

a) Popište situaci pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Ukažte, že řetězec je absorpční.

c) Najděte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

b) Vypočtěte střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech.

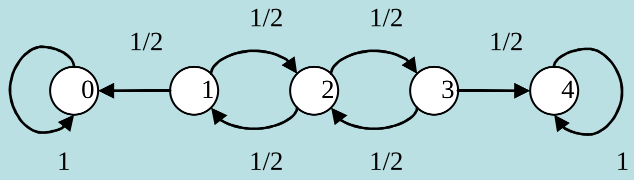
Řešení:

ad a) Zavedeme homogenní markovský řetězce $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, 2, 3, 4}, přičemž $X_n = j$, když v n-tém kroku hry má hráč A právě j Kč.

Matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přechodový diagram:



ad b) $J_T = \{0\} \cup \{4\}$, $J_P = \{1, 2, 3\}$. Trvalé stavy 0 a 4 jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční.

ad c) Matici přechodu v kanonickém tvaru získáme tak, že nejprve zapíšeme pravděpodobnosti přechodu vztahující se k absorpčním stavům 0 a 4 a poté pravděpodobnosti přechodu vztahující se k neabsorpčním stavům 1, 2, 3.

Původní matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice přechodu v kanonickém tvaru:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet fundamentální matice **M** potřebujeme matici **Q** obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{I}-\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpretace: Podívejme se např. na druhý řádek matice **M**. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak lze očekávat, že před skončením hry bude mít v průměru jedenkrát 1 Kč, dvakrát 2 Kč a jedenkrát 3 Kč.

ad d) Podle poznámky 8.6. dostáváme:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku buď 1 Kč nebo 3 Kč, tak v průměru po třech krocích hra skončí. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak v průměru po čtyřech krocích hra skončí.

9.8. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu do absorpčních stavů

Označme b_{ij} pravděpodobnost, že řetězec vycházející z neabsorpčního stavu i bude absorbován ve stavu j.

Sestavíme matici **B** = $(b_{ij})_{i,j\in J}$.

Pak **B** = **MR**, kde **M** je fundamentální matice absorpčního řetězce a **R** je matice v levém dolním rohu matice přechodu **P** v kanonickém tvaru.

Důkaz: Nechť i je neabsorpční a j absorpční stav. Stavu j může být dosaženo 1. krokem s pravděpodobností p_{ij} nebo přechodem do neabsorpčního stavu k s pravděpodobností p_{ik} a odtud přechodem do absorpčního stavu j s pravděpodobností b_{kj}. Tedy $b_{ij} = \sum_{k\in J} p_{ik} b_{kj}$. Maticově: **B** = **R** + **QB**, **B** – **QB** = **R**, (**I** – **Q**)**B** = **R**, **B** = (**I** – **Q**)$^{-1}$**R** = **MR**.

9.9. Definice: Definice matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce

Matice **B** se nazývá matice přechodu do absorpčních stavů daného absorpčního řetězce.

9.10. Příklad: Pro zadání z příkladu 9.7. vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky. Pro připomenutí: Dva hráči A a B dali dohromady do hry vklad 4 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhrává 1 Kč, když rub, prohrává 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů zruinován.

Řešení:

Matice přechodu v kanonickém tvaru: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Již jsme vypočetli, že

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$, tedy $\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Interpretace: Má-li hráč A v daném okamžiku 1 Kč, pak bude s pravděpodobností 3/4 zruinován on a s pravděpodobností 1/4 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 2 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/2 zruinován on a s pravděpodobností 1/2 bude zruinován hráč B. Má-li hráč A v daném okamžiku 3 Kč, pak bude s pravděpodobností 1/4 zruinován on a s pravděpodobností 3/4 bude zruinován hráč B.

9.11. Poznámka: Charakteristiky absorpčního řetězce můžeme v MATLABu vypočítat pomocí funkce absorb.m:

```
function [Pk,M,B,t]=absorb(P)
% funkce pro výpočet základních charakteristik absorpčního řetězce
% Autor: Stanislav Tvrz
% function [Pk,M,B,t]=absorb(P)
% vstupní parametr: matice přechodu P
% výstupní parametry: Pk ... matice přechodu v kanonickém tvaru
%                    M ... fundamentální matice
%                    B ... matice přechodu do absorpčních stavů
%                    t ... vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí

%vypíše pro kontrolu přechodovou matici P
P
vel=size(P);
[i,j]=find(P==1); % najdu prvky matice P o hodnotě 1
vi=size(i);
st=0; % počet nalezených absorpčních stavů

%převod P na kanonický tvar

for k=1:vi
    if i(k)==j(k)
       st=st+1;

       if st==1 % varianta pro první nalezený absorpční stav
          if (i(k)>1)&(i(k)<vel) % první řádek, pokud odpovídá absorpčnímu stavu se nepřesouvá
            P=[P(i(k),:);P(1:i(k)-1,:);P(i(k)+1:vel,:)]; % přesun k-tého řádku na místo prvního
```

```
P=[P(:,i(k)),P(:,1:i(k)-1),P(:,i(k)+1:vel)]; % přesun k-tého sloupce na místo prvního
          elseif (i(k)==vel)&(st<vel)    % varianta pro přesun posledního řádku/sloupce
            P=[P(i(k),:);P(1:i(k)-1,:)]; % přesun k-tého řádku na místo prvního
            P=[P(:,i(k)),P(:,1:i(k)-1)]; % přesun k-tého sloupce na místo prvního
          end;
       else
         if ((i(k))>st+1)&(i(k)<vel) % varianta pro další nalezený absorpční stav
            P=[P(1:st-1,:);P(i(k),:);P(st:i(k)-1,:);P(i(k)+1:vel,:)]; %přesun k-tého řádku na místo dalšího absorpčního
stavu
            P=[P(:,1:st-1),P(:,i(k)),P(:,st:i(k)-1),P(:,i(k)+1:vel)]; %přesun k-tého sloupce na místo dalšího absorpčního
stavu
         elseif (i(k)==vel)&(st<vel) % varianta pro přesun posledního řádku/sloupce
            P=[P(1:st-1,:);P(i(k),:);P(st:i(k)-1,:)]; %přesun k-tého řádku na místo dalšího absorpčního stavu
            P=[P(:,1:st-1),P(:,i(k)),P(:,st:i(k)-1)]; %přesun k-tého sloupce na místo dalšího absorpčního stavu
         end;
       end;
    end;
end;

%Pk = kanonický tvar přechodové matice
Pk=P
% Q = matice přechodových pravděpodobností mezi přechodnými stavy
Q=[P(st+1:vel,st+1:vel)];

% R = matice přechodových pravděpodobností z přechodných do absorpčních stavů
R=[P(st+1:vel,1:st)];

% M = matice středního počtu kroků strávených v j-tém stavu před absorpcí, pokud řetězec vychází ze stavu i
```

```
M=inv(eye(vel-st)-Q);

% B = matice pravděpodobností, že řetězec bude absorbován j-tým stavem, pokud vychází z i-tého stavu přechodného
B=M*R;

% t = vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí
t=M*ones(vel-st,1);
```

Použijeme-li tuto funkci na řešení příkladu 9.10., dostaneme výsledky:

```
Pk =
    1.0000         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0         0
    0.5000         0         0    0.5000         0
         0         0    0.5000         0    0.5000
         0    0.5000         0    0.5000         0

M =
    1.5000    1.0000    0.5000
    1.0000    2.0000    1.0000
    0.5000    1.0000    1.5000

B =
    0.7500    0.2500
    0.5000    0.5000
    0.2500    0.7500

t =
    3.0000
    4.0000
    3.0000
```

9.12. Příklad: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do 30 denních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4, 5}, kde

stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti,

stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti,

stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti,

stav 4 splacené pohledávky a

stav 5 nedobytné pohledávky.

Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou:

$p_{12} = 0{,}77$, $p_{14} = 0{,}23$, $p_{23} = 0{,}34$, $p_{24} = 0{,}66$, $p_{34} = 0{,}73$ a $p_{35} = 0{,}27$.

Úkoly:

a) Sestavte matici přechodu.

b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.

c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.

d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

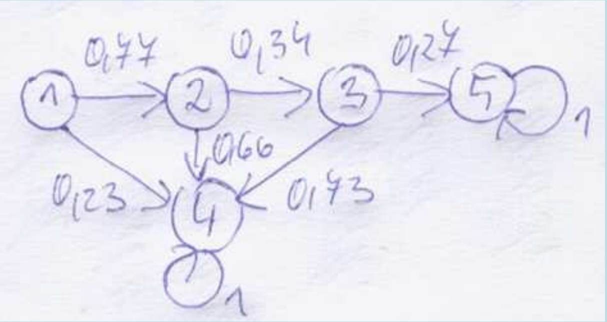
f) Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Řešení:

ad a)

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 & 0{,}23 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 & 0{,}66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}73 & 0{,}27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Přechodový diagram:



ad b) Řetězec má tři přechodné stavy, a to 1, 2, 3 a dva trvalé stavy, a to 4 a 5. Oba jsou absorpční, tedy řetězec je absorpční.

Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}23 & 0 & 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0{,}66 & 0 & 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0{,}73 & 0{,}27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0 \\ 0{,}66 & 0 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad c) Vypočteme fundamentální matici absorpčního řetězce:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 2 & 0 & 1 & 0{,}34 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 v něm v průměru stráví 1 x 30 = 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,77 x 30 = 23,1 dne ve stavu 2 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,26 x 30 = 7,8 dne ve stavu 3 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad d) Vypočteme matici přechodu do absorpčních stavů:

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 0 & 1 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0 \\ 0{,}66 & 0 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0{,}9293 & 0{,}0707 \\ 2 & 0{,}9082 & 0{,}0918 \\ 3 & 0{,}73 & 0{,}27 \end{array}.$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 bude s pravděpodobností 0,9293 splacena a s pravděpodobností 0,0707 se stane nedobytnou.

ad e) Vypočteme vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,26 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 2,03 \\ 1,34 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpretace:

2,03 x 30 = 60,9 – pohledávce zařazené do stavu 1 bude v průměru trvat 60,9 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

1,34 x 30 = 40,2 – pohledávce zařazené do stavu 2 bude v průměru trvat 40,2 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

1 x 30 = 30 – pohledávce zařazené do stavu 3 bude v průměru trvat 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad f) Připomínáme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých 30 denních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek:

$$\begin{pmatrix} 4030000 & 9097000 & 3377000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14472184 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Průměrná hodnota splacených pohledávek je tedy 14 472 184 Kč a nedobytných pohledávek je 2 031 816 Kč.

10. Markovské řetězce s oceněním přechodů

10.1. Definice: Definice markovského řetězce s oceněním přechodů

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J, v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění r_{ij} (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j \in J}$, která se nazývá matice výnosů. Řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ se pak nazývá markovský řetězec s oceněním přechodů.

10.2. Věta: Rekurentní vztah pro střední hodnotu celkového výnosu po n krocích

Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu **P** a matici ocenění **R**. Označme $v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i. Dále označme $q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i. Pak pro $\forall i \in J$ a n = 1, 2, 3, ... platí rekurentní vztah:

$v_i(n) = q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_j(n-1)$, přičemž $v_i(0) = 0$.

V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.3. Příklad: Sledujeme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech – v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Dlouhodobým sledováním byla stanovena matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Jednotlivým přechodům jsou přiřazena určitá ocenění (tj. výnosy nebo ztráty) prostřednictvím matice výnosů $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Pro i = 0, 1 položíme $v_i(0) = 0$. Pro oba stavy vypočtěte střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n = 1, 2,…, 6 období.

Řešení: Nejprve vypočteme střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu 0 resp. 1. Přitom

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$.

$q_0 = \sum_{j=0}^{1} p_{0j} r_{0j} = p_{00} r_{00} + p_{01} r_{01} = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 4 = 7$, $q_1 = \sum_{j=0}^{1} p_{1j} r_{1j} = p_{10} r_{10} + p_{11} r_{11} = 0{,}4 \cdot 5 + 0{,}6 \cdot (-5) = -1$, tj. $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nyní počítáme $\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$ atd.

Tabulka středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, ..., 6:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272
$v_0(n+1)-v_0(n)$	x	3	2,6	2,56	2,556	2,5556
$v_1(n+1)-v_1(n)$	x	2,2	2,52	2,552	2,5558	2,55492
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,8	8,88	8,888	8,8888	8,88888

Vidíme, že s rostoucím n se rozdíl $v_0(n) - v_1(n)$ blíží konstantě $8{,}\overline{8}$. Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o $8{,}\overline{8}$ jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě. Dále můžeme pozorovat, že s rostoucím n se rozdíl $v_i(n+1) - v_i(n)$ blíží konstantě $2{,}\overline{5}$. To souvisí s limitními vlastnostmi řetězce.

10.4. Poznámka: Je-li $\{X_n; n \in N_0\}$ homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0,1,\ldots,m\}$ s oceněním přechodů nerozložitelný, pak existuje jeho stacionární rozložení $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty}(v_i(n+1) - v_i(n)) = \sum_{j=0}^{m} a_j q_j = g\,.$$

Konstanta g se nazývá zisk řetězce. V př. 10.3. $\mathbf{a} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right), \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, tedy $g = \frac{4}{9}7 - \frac{5}{9} = 2,\overline{5}$.

10.5. Věta: Přibližné vyjádření vektoru středních hodnot celkových výnosů po n krocích pomocí limitní matice přechodu

Nechť **A** je limitní matice přechodu daného markovského řetězce s oceněním přechodů. Pak pro dostatečně velká n platí: $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.6. Příklad: Pro zadání z příkladu 10.3. najděte přibližné vyjádření pro vektor **v**(n).

Řešení: Použijeme vzorec $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$. Nejprve najdeme limitní matici **A**, jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru matice **P**. Řešením systému $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$, $a_1 + a_2 = 1$ získáme vektor $\mathbf{a} = (4/9 \;\; 5/9)$,

tudíž $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$.

Dále $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 1{,}0617 & -0{,}0617 \\ -0{,}0494 & 1{,}0494 \end{pmatrix}$, tedy

$$\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}0617 & -0{,}0617 \\ -0{,}0494 & 1{,}0494 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 2{,}\bar{5}n + 4{,}9383 \\ 2{,}\bar{5}n - 3{,}9506 \end{pmatrix}.$$

Tabulka:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7,4938	10,0494	12,609	15,1605	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1,3951	1,1605	3,716	6,2716	8,8272	11,3827

Pro porovnání uvedeme tabulku získanou pomocí rekurentního vzorce:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272

10.7. Poznámka: Vektor středních hodnot celkových výnosů po jednom až n obdobích lze získat pomocí funkce vynos.m:

```
function a = vynos(P,R,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% syntaxe: function a=vynos(P,R,n);
% funkce pocita:
%       vektory strednich hodnot celkovych vynosu po jednom az po n obdobich
%       znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlive stavy
%       v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu, R -  matice vynosu, n - pocet obdobi
disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp('pozn: na prvnim radku hodnoty n')

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
```

```
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);
%graf celkovych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end
```

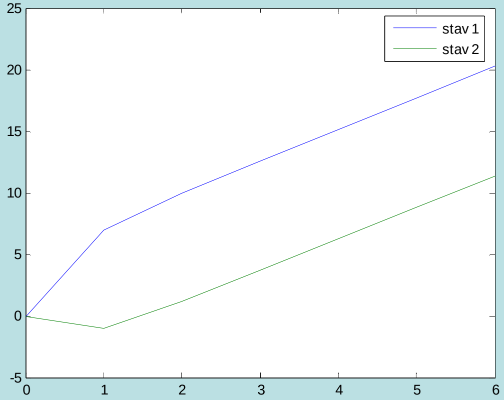
Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.3. pro jedno až 6 období, dostaneme výsledky:

sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	10	12.6	15.16	17.716	20.2716
0	-1	1.2	3.72	6.272	8.8272	11.3827

pozn: na prvnim radku hodnoty n

Graf celkových výnosů:



10.8. Definice: Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase n+1 oceněn číslem $\beta^n r_{ij}$, kde číslo β ($0 < \beta < 1$) je tzv. diskontní faktor. Uvedený řetězec se pak nazývá markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů.

Vysvětlení: Diskontní faktor snižuje hodnotu budoucího výnosu. Vystupuje v roli odúročitele, může být 1/(1+i), kde i je úročitel. Může také vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Jeho užití bude účelné tam, kde se může očekávat, že proces skončí, ale neví se, kdy přesně k tomu dojde.

10.9. Věta: Rekurentní vztah pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů po n krocích.

Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:

$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta\mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$, přičemž $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$.

Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů je $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$

Důkaz: Nebudeme provádět.

10.10. Příklad: V příkladu 10.3. předpokládejme, že diskontní faktor $\beta = 0{,}5$ značí pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Pomocí rekurentního vztahu najděte vektor $\mathbf{v}(n)$ středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, …, 6 a stanovte limitní hodnotu tohoto vektoru.

Řešení: $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\beta = 0{,}5$, $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta\mathbf{P}\mathbf{v}(n\text{-}1)$.

$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$ atd.

Dále uvedeme tabulku středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, ..., 6.

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	8,5	9,15	9,47	9,6297	9,7096
$v_1(n)$	-1	0,1	0,73	0,1049	1,2087	1,2886
$v_0(n)- v_1(n)$	8	8,4	8,42	8,3651	8,4210	8,4210

Nyní vypočteme limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů podle vzorce: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

$$\mathbf{I} - \beta\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0{,}5\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}, \ |\mathbf{I} - \beta\mathbf{P}| = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{19}{40},$$

$$(\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1} = \frac{40}{19}\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix}, \ \lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1} q == \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{186}{19} \\ \frac{26}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}7895 \\ 1{,}3684 \end{pmatrix}$$

Rozdíl složek limitního vektoru: 9,7895 – 1,3684 = 8,4219.

Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o 8,4219 jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě.

10. 11. Poznámka: Vektor středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom až n obdobích a limitní hodnotu tohoto vektoru lze získat pomocí funkce diskont.m:

```
function a=diskont(P,R,beta,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% function a=diskont(P,R,beta,n);
% funkce pocita:
%       vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po jednom az po n obdobich
%       limitni vektor strednich hodnot diskontovanych vynosu
%       znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlive stavy
%       v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu
% R -  matice vynosu
% beta - diskontni faktor
% n - pocet obdobi
%clc;

disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
```

```
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+beta*P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp(['pri hodnote diskontniho faktoru beta = ',num2str(beta)])
disp('pozn: na prvnim radku hodnoty n')
disp(' ')
disp('limitni vektor v(n)')
v_n=inv(eye(vel(1))-beta*P)*q;
disp(num2str(v_n))

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);

%graf diskontovanych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end
```

Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.10. pro jedno až 6 období, dostaneme tyto výsledky:

sloupcove vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	8.5	9.15	9.47	9.6297	9.7096
0	-1	0.1	0.73	1.049	1.2087	1.2886

pri hodnote diskontniho faktoru beta = 0.5

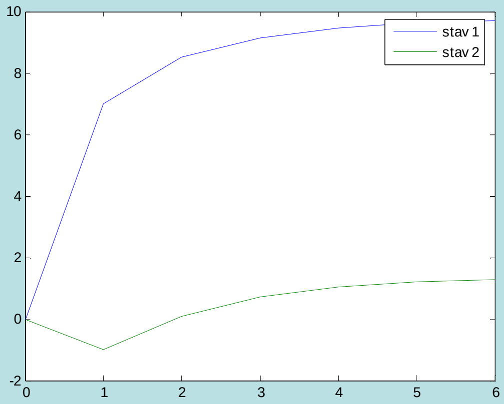
pozn: na prvnim radku hodnoty n

limitni vektor v(n)

9.7895

1.3684

Graf diskontovaných výnosů:



11. Markovské řetězce se spojitým časem – základní pojmy

11.1. Definice: Definice markovského řetězce se spojitým časem

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, $T = \langle 0, \infty)$ je indexová množina, jejíž prvky nazveme okamžiky a

J = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} je nejvýše spočetná množina stavů (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že J = {0, 1, 2, ...} nebo J = {0,1, ..., n}). Stochastický proces $\{X_t ; t \in T\}$ definovaný na měřitelném prostoru (Ω, A), jehož složky X_t nabývají hodnot z množiny stavů J, se nazývá markovský řetězec (se spojitým časem), jsou-li splněny následující podmínky:

a) $\forall j \in J\ \exists t \in T : P(X_t = j) > 0$ (vyloučení nepotřebných stavů)

b) $\forall t_0, t_1, \ldots, t_n \in T\ (t_0 < t_1 < \ldots < t_n) \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J : P(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_{t_0} = j_0) = P(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1})$

za předpokladu, že $P(X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_{t_0} = j_0) > 0$ (markovská vlastnost – budoucí chování markovského řetězce závisí pouze na přítomném stavu a nikoliv na stavech minulých).

Vysvětlení: Markovské řetězce se spojitým časem modelují fyzikální či jiné soustavy, které mohou v libovolném okamžiku náhodně přejít do některého ze svých možných stavů. Markovská vlastnost znamená, že to, do jakého stavu se soustava dostane při následující změně, závisí pouze na tom, v jakém stavu se soustava právě nachází a nezávisí na stavech předchozích. Např. sledujeme-li během pracovní doby provoz automatických strojů v dílně, náhodná veličina X_t, $t \in \langle 0, T)$ je počet strojů, které v okamžiku t nepracují (jsou opravovány nebo čekají na opravu).

11.2. Příklad: Uvažme populaci, jejíž jedinci se mohou množit a zanikat. Pravděpodobnost, že z libovolného jeince vznikne v časovém intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ nový jedinec, je $\lambda h + o(h)$ (symbol o(h) znamená, že $\lim\limits_{h\to\infty} \frac{o(h)}{h} = 0$) a pravděpodobnost, že libovolný jedinec zanikne v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$, je $\mu h + o(h)$. Osudy jedinců jsou navzájem nezávislé. Označme X_t rozsah populace v čase t. Pak stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec se spojitým časem. Nazývá se lineární proces vzniku a zániku (resp. lineární proces množení a úmrtí).

11.3. Označení:

Jev $\{X_t = j\}$ – markovský řetězec je v okamžiku t ve stavu j.

$P(X_t = j) = p_j(t)$ – absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku t.

$\mathbf{p}(t) = (\ldots., p_j(t), \ldots)$ – vektor absolutních pravděpodobností.

$P\left(X_{t+h} = j / X_t = h\right) = p_{ij}(t, t+h)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku t do stavu j v okamžiku t+h

$$\mathbf{P}(t, t+h) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(t, t+h) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$ - matice pravděpodobností přechodu mezi okamžiky t, t+h.

$P(X_0 = j) = p_j(0)$ – počáteční pravděpodobnost stavu j.

$\mathbf{p}(0) = (\ldots., p_j(0), \ldots)$ – vektor počátečních pravděpodobností.

11.4. Věta: Věta o vlastnostech markovského řetězce se spojitým časem

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec. Pokud dále uvedené podmíněné pravděpodobnosti existují, platí pro

$\forall t, h, g \in T \forall i, j \in J:$

a) $P(X_{t+h} = j / X_t = i) \geq 0$, tj. $p_{ij}(t,t+h) \geq 0$

$$P(X_t = j / X_t = i) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}, \text{ tj. } p_{ij}(t,t) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}.$$

b) $\sum_{j \in J} P(X_{t+h} = j / X_t = i) = 1$, tj. $\sum_{j \in J} p_{ij}(t, t+h) = 1.$

(Přechod ze stavu i v okamžiku t do nějakého stavu j v okamžiku t+h je jev s pravděpodobností 1.)

c) $P(X_{t+h+g} = j / X_t = i) = \sum_{k \in J} P(X_{t+h} = k / X_t = i) P(X_{t+h+g} = j / X_{t+h} = k)$, tj. $p_{ij}(t, t+h+g) = \sum_{k \in J} p_{ik}(t, t+h) p_{kj}(t+h, t+h+g)$

(Chapmanovy – Kolmogorovovy rovnice)

d) $P(X_{t+h} = j) = \sum_{k \in J} P(X_t = k) P(X_{t+h} = j / X_t = k)$, tj. $p_j(t+h) = \sum_{k \in J} p_k(t) p_{kj}(t, t+h)$

(Zákon evoluce)

Důkaz: Analogicky jako v diskrétním případě.

11.5. Poznámka: Zápis vlastností markovského řetězce se spojitým časem v maticovém tvaru

a) **P**(t,t+h) ≥ **0**, kde **0** je nulová matice, **P**(t,t) = **I**, kde **I** je jednotková matice.

b) **P**(t,t+h)**e** = **e**, kde **e** je sloupcový vektor ze samých jedniček.

c) **P**(t,t+h+g) = **P**(t,t+h) **P**(t+h,t+h+g).

d) **p**(t+h) = **p**(t) **P**(t,t+h).

11.6. Definice: Definice HMŘ se spojitým časem

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec se spojitým časem. Řekneme, že tento řetězec je homogenní, jestliže platí:
$\forall i, j \in J\ \forall t, h \in T : P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(h)$.

Vysvětlení: Znamená to, že pravděpodobnosti přechodu $P(X_{t+h} = j / X_t = i)$ – pokud existují – závisí pouze na časovém přírůstku h a nezávisí na časovém okamžiku t.

Matice pravděpodobností přechodu **P**(t,t+h) se pak značí **P**(h) a nazývá se matice přechodu za časový přírůstek h. Pro HMŘ se spojitým časem tedy existuje celý systém matic přechodu $\{P(h), h \in T\}$. Je zvykem definovat **P**(0) = **I**.

11.7. Věta: Vyjádření simultánní pravděpodobnostní funkce pro HMŘ

Pro homogenní markovský řetězec se spojitým časem platí:

$$\forall t, h_1, \dots, h_n \in T\ \forall j_0, j_1, \dots, j_n \in J : P(X_t = j_0 \wedge X_{t+h_1} = j_1 \wedge \dots \wedge X_{t+h_1+\dots+h_n} = j_n) = p_{j_0}(t) p_{j_0 j_1}(h_1) \dots p_{j_{n-1} j_n}(h_n)$$

Důkaz: Plyne z věty o násobení pravděpodobností a markovské vlastnosti.

11.8. Věta: CH-K rovnice a zákon evoluce pro HMŘ

Nechť $\{X_t ; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) a systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Pak pro $\forall h, g \in T$ platí:

a) **P**(h+g) = **P**(h) **P**(g) (Chapmanova – Kolmogorovova rovnice)

b) **p**(h) = **p**(0) **P**(h) (zákon evoluce)

Důkaz: ad a) plyne z tvrzení (c) věty 11.4

ad b) plyne z tvrzení (d) věty 11.4

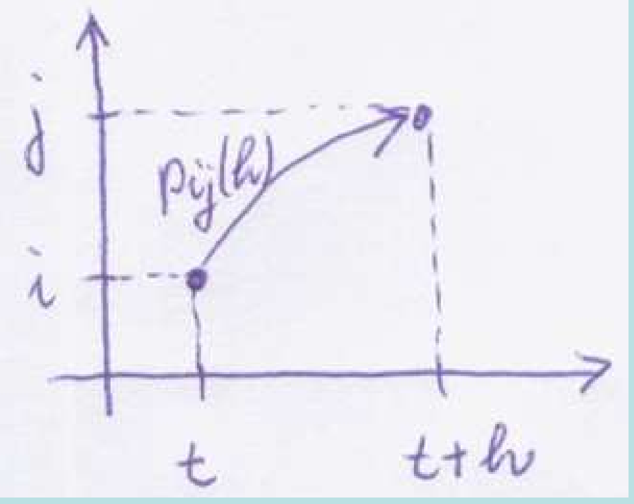
11.9. Věta: Existenční věta

Ke každému stochastickému vektoru **p**(0) a ke každému systému stochastických matic $\{\mathbf{P}(h); h \in T\}$, které splňují CH-K rovnice, existuje HMŘ se spojitým časem, jehož počáteční pravděpodobnosti jsou dány vektorem **p**(0) a systém matic pravděpodobností přechodu je právě $\{\mathbf{P}(h); h \in T\}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

12. Matice intenzit přechodu homogenního markovského řetězce se spojitým časem

12.1. Motivace: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem. Předpokládejme, že v okamžiku t je řetězec ve stavu i a za časový přírůstek h přejde do stavu j s pravděpodobností $p_{ij}(h)$.



Číslo $\frac{p_{ij}(h)}{h}$ vyjadřuje průměrnou pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j za časový přírůstek h.

Označme $p_{ii}(h)$ pravděpodobnost, že za časový přírůstek h řetězec setrvá ve stavu i. Pak 1 - $p_{ii}(h)$ je pravděpodobnost, že za časový přírůstek h řetězec přejde do nějakého jiného stavu.

Číslo $\frac{1-p_{ii}(h)}{h}$ vyjadřuje průměrnou pravděpodobnost výstupu řetězce ze stavu i za časový přírůstek h.

Intenzity přechodu resp. výstupu popisují chování těchto průměrných pravděpodobností pro $h \to 0_+$.

12.2. Poznámka: Nadále budeme předpokládat, že

a) $\forall i, j \in J$ existuje $\lim\limits_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$

b) $\forall i \in J$ existuje $\lim\limits_{h \to 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$

c) $\forall i, j \in J$ existuje $\lim\limits_{h \to 0_+} p_{ij}(h) = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}$

12.3. Definice: Definice intenzit přechodu a výstupu

Nechť $\{X_t ; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem se systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Pak definujeme:

a) $\forall i, j \in J: \; q_{ij} = \lim\limits_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$ - intenzita přechodu ze stavu i do stavu j

b) $\forall i \in J: \; q_i = \lim\limits_{h \to 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$ - intenzita výstupu ze stavu i.

Vysvětlení: Z definice intenzity přechodu resp. výstupu plyne, že $p_{ij}(h) = hq_{ij} + o(h)$ resp. $p_{ii}(h) = 1 - hq_i + o(h)$. Pro dostatečně malá h tedy dostáváme $p_{ij}(h) \approx hq_{ij}$ resp. $p_{ii}(h) \approx 1 - hq_{ii}$. Číslo q_{ij} vyjadřuje koeficient nárůstu pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(h)$ během krátkého časového intervalu délky h a číslo q_i vyjadřuje koeficient poklesu pravděpodobnosti setrvání $p_{ii}(h)$ během krátkého časového intervalu délky h.

12.4. Věta: Věta o součtu intenzit přechodu

Je-li množina stavů J konečná, pak pro intenzity přechodu platí: $\forall i \in J : \sum_{j \in J} q_{ij} = 0$, kde $q_{ii} = -q_i$.

Důkaz: Vztah $\sum_{j \in J} q_{ij} = 0$ přepíšeme do tvaru $\sum_{j \in J, j \neq i} q_{ij} = q_i$.

Počítáme $\sum_{j \in J, j \neq i} q_{ij} = \sum_{j \in J, j \neq i} \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \sum_{j \in J, j \neq i} p_{ij}(h) = \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} [1 - p_{ii}(h)] = q_i$.

12.5. Definice: Definice matice intenzit přechodu

Matice **Q** = $(q_{ij})_{i,j \in J}$, kde $q_{ii} = -q_i$, se nazývá matice intenzit přechodu HMŘ se spojitým časem.

Vysvětlení: Matice **Q** je charakterizována tím, že $q_{ij} \geq 0$ pro $i \neq j$ a $q_{ii} < 0$ a součet prvků v každém řádku je nulový. Je to kvazistochastická matice.

12.6. Věta: Vztah mezi maticí intenzit přechodu a maticí přechodu

Je-li $\{X_t ; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má konečnou množinu stavů J, maticí intenzit přechodu **Q** a systém matic pravděpodobností přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$, pak pro $\forall t \in T$ platí: $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$, kde $e^{\mathbf{Q}t}$ je maticová exponenciální funkce definovaná předpisem: $e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!}$

Důkaz: Nebudeme provádět.

12.6. Poznámka:

Matici intenzit přechodu lze graficky vyjádřit pomocí přechodového diagramu. Je to ohodnocený orientovaný graf, kde

a) vrcholy jsou stavy

b) hrany odpovídají nenulovým intenzitám přechodu

c) ohodnocení hran je rovno těmto intenzitám. Hrany, které nejsou smyčkami, mají kladné ohodnocení ($q_{ij} > 0$) a smyčky mají záporné ohodnocení ($q_{ii} < 0$).

12.7. Příklad: Doba bezporuchového provozu přístroje je náhodná veličina s rozložením Ex(α). Když dojde k poruše, přístroj začne být okamžitě opravován. Doba opravy je náhodná veličina s rozložením Ex(β). Jakmile je oprava ukončena, přístroj je okamžitě uveden do provozu.

a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ se spojitým časem.

b) Najděte matici intenzit přechodu **Q** a nakreslete přechodový diagram.

Řešení:

Ad a) Zavedeme náhodnou veličinu $X_t = \begin{cases} 0, \text{pokud v čase t stroj pracuje} \\ 1, \text{pokud v čase t je stroj v opravě} \end{cases}$. Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem s množinou stavů J = {0,1}.

Ad b) Je-li Y spojitá náhodná veličina, pak její pravděpodobnostní chování je popsáno hustotou pravděpodobnosti $\varphi(y)$. Pro distribuční funkci $\Phi(y)$ platí: $\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(t)dt$. Dále zavedeme funkci přežití $\Psi(y) = P(Y > y)$ a intenzitu $\lambda(y) = -\frac{\Psi'(y)}{\Psi(y)}$.

V našem případě označme Y_1 dobu bezporuchového provozu přístroje, Y_1 ~ Ex(α), tedy $\varphi_1(y_1) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha y_1} \text{ pro } y_1 > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$,

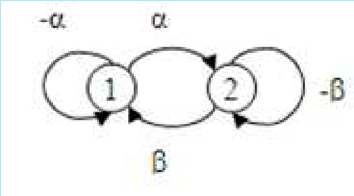
$\Phi_1(y_1) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha y_1} \text{ pro } y_1 > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, $\Psi_1(y_1) = \begin{cases} e^{-\alpha y_1} \text{ pro } y_1 > 0 \\ 1 \text{ jinak} \end{cases}$, $\lambda_1(y_1) = -\frac{\Psi_1'(y_1)}{\Psi_1(y_1)} = -\frac{-\alpha e^{-\alpha y_1}}{e^{-\alpha y_1}} = \alpha$.

Analogicky označme Y_2 dobu opravy přístroje, Y_2 ~ Ex(β). Stejným způsobem odvodíme, že $\lambda_2(y_2) = \beta$.

Matice intenzit přechodu:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \end{array}.$$

Přechodový diagram:



12.8. Věta: Věta o významu intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má spočetnou množinu stavů J a matici intenzit přechodu **Q** = $(q_{ij})_{i,j\in J}$.

a) Nechť $t \in \langle s, s+h \rangle$, kde s ≥ 0 a h > 0. Pak $P(X_t = i / X_s = i) = e^{-q_i h}$, kde $e^{-q_i h} = 0$, je-li $q_i = \infty$.

b) Je-li $q_i = 0$, potom $p_{ii}(h) = 1$.

c) Je-li $0 < q_i < \infty$, pak veličina, která udává dobu setrvání řetězce ve stavu i, se řídí rozložením $Ex(q_i)$. Znamená to, že střední hodnota doby setrvání řetězce ve stavu i je $\frac{1}{q_i}$. Dále, pravděpodobnost toho, že první přechod ze stavu i se uskuteční právě do stavu j, j≠i, je $\frac{q_{ij}}{q_i}$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

12.9. Definice: Definice různých typů stavů

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má matici intenzit přechodu **Q** = $(q_{ij})_{i,j\in J}$.

a) Jestliže $q_i = 0$, pak řekneme, že stav i je absorpční. (Řetězec, který vstoupí do absorpčního stavu, už v něm zůstane. Střední hodnota doby setrvání v absorpční stavu je nekonečně velká.)

b) Jestliže $0 < q_i < \infty$, pak řekneme, že stav i je stabilní. (Budeme se zabývat výhradně řetězci se stabilními stavy)

c) Jestliže $q_i = \infty$, pak řekneme, že stav i je nestabilní. (Střední hodnota doby setrvání v nestabilním stavu je nulová.)

12.10. Definice: Definice stacionárního vektoru HMŘ se SČ

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$. Stochastický vektor **a** takový, že pro $\forall t \in T$ platí **a** = **aP**(t), se nazývá stacionární vektor (stacionární rozložení) daného řetězce.

12.11. Poznámka: Řešení rovnice **a** = **aP**(t) pro $\forall t \in T$ může být obtížné. Proto stacionární vektor počítáme raději pomocí matice intenzit přechodu.

12.12. Věta: Věta o získání stacionárního vektoru pomocí matice intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$ a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$.

Jestliže existuje $t \in T$ tak, že matice **P**(t) je regulární (tj. všechny její prvky jsou kladné), pak existuje stacionární vektor daného řetězce a je dán vztahem: **aQ** = **0**. Toto řešení je jediné.

Důkaz: Nebudeme provádět.

12.13. Příklad: Pro zadání příkladu 12.7. najděte stacionární vektor.

Řešení: Odvodili jsme, že $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$. Hledáme $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$, kde $a_0 + a_1 = 1$, tak, aby $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$.

$$(a_0, a_1)\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} = (0,0), a_0 + a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1 - a_0.$$

$$-\alpha a_0 + \beta a_1 = 0 \Rightarrow -\alpha a_0 + \beta(1 - a_0) = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, a_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Stacionární vektor má tedy tvar: $\mathbf{a} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$.

12.14. Definice: Definice ergodického řetězce

Homogenní markovský řetězec se spojitým časem a systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$ se nazývá ergodický, jestliže pro všechny stochastické vektory **a** odpovídající dimenze existuje $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{aP}(t)$ a tato limita na nich nezávisí.

12.15. Definice: Definice limitního rozložení a limitní matice přechodu

a) Jestliže existuje $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{p}(t) = \bar{\mathbf{p}}$, pak $\bar{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení (limitní vektor) daného řetězce.

b) Jestliže existuje $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}(t) = \mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}$ se nazývá limitní matice přechodu daného řetězce. Má-li všechny řádky stejné, nazývá se ergodická limitní matice přechodu.

12.16. Věta: Věta o souvislosti stacionárního a limitního rozložení

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má stacionární rozložení **a**. Pak platí:

a) Jeho limitní rozložení $\bar{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení **a**.

b) Všechny řádky limitní matice **A** jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a**.

12.17. Poznámka: Při hledání stacionárního rozložení lze v MATLABu použít funkci stacionarni_vektor.m:

```
function [a]=stacionarni_vektor(Q)
%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru
%syntaxe: a=stacionarni_vektor(Q)
%vstupni parametr ... kvazistochasticka matice Q
%vystupni parametr ... stacionarni vektor a
n=size(Q,1);
A=[Q';ones(1,n)];
f=[zeros(n,1);1];
a=(A\f)';
```

12.18. Příklad: Nechť HMŘ se SČ má množinu stavů $\{0,1,2\}$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Pomocí MATLABu najděte jeho stacionární rozložení.

Řešení:

Zadáme matici Q=[-1 1 0;2 -3 1;0 1 -1]

Zavoláme funkci stacionarni_vektor:

a=stacionarni_vektor(Q)

Dostaneme výsledek:

```
a =


    0.5000    0.2500    0.2500
```

Znamená to, že po uplynutí dostatečně dlouhé doby polovinu doby stráví řetězec ve stavu 0, čtvrtinu doby ve stavu 1 a rovněž čtvrtinu doby ve stavu 2.

12.19. Příklad: V dílně pracuje N strojů téhož typu. V libovolný okamžik může nastat porucha kteréhokoliv stroje. O stroje se stará r opravářů, r < N. Na opravě stroje se podílí vždy jen jeden z nich. Stroj se v případě poruchy začne okamžitě opravovat, pokud je některý z opravářů volný. Porouchá-li se stroj v okamžiku, kdy jsou všichni opraváři zaměstnáni, musí se čekat, až se některý uvolní. Je známo, že:
stroj, který pracuje v čase t, se během krátkého časového intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ porouchá s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$;
stroj, který je v čase t opravován, se během krátkého časového intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ vrátí do provozu s pravděpodobností $\mu h + o(h)$.
Pomocí HMŘ se spojitým časem modelujte počet strojů, které v čase t nepracují. Najděte matici intenzit přechodu a najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.
Řešení:
Nechť X_t je počet strojů, které v čase t nepracují. Pak $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má množinu stavů J = {0, 1, … , N}.
Jeho matici pravděpodobností přechodu určíme takto:
Pravděpodobnost, že se počet strojů, které nepracují, zvětší v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které v čase t pracují, tj. $p_{j,j+1}(h) = (N-j)\lambda h + o(h)$, j = 0, 1, …, N-1.
Pravděpodobnost, že se počet strojů, které nepracují, zmenší v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které jsou v čase t opravovány, tj. $p_{j,j-1}(h) = j\mu h + o(h)$, j = 1,2, …, r resp. $p_{j,j-1}(h) = r\mu h + o(h)$, j = r+1, …, N.
Pravděpodobnost, že se počet nepracujících strojů změní v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ o více než 1, je o(h).

Z těchto pravděpodobností přechodu získáme intenzity přechodu podle vzorce $q_{ij} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$.

$$q_{j,j+1} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{j,j+1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{(N-j)\lambda h + o(h)}{h} = (N-j)\lambda, \ j = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$$

$$q_{j,j-1} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{j,j-1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{j\mu h + o(h)}{h} = j\mu, \ j = 1, 2, \ldots, r \text{ resp. } q_{j,j-1} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{j,j-1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{r\mu h + o(h)}{h} = r\mu, \ j = r+1, \ldots, N$$

Intenzity setrvání ve stavech j = 0, 1, …, N můžeme určit z podmínky, že **Q** je kvazistochastická matice.

Sestavíme tedy matici intenzit přechodu:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -N\lambda & N\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -[(N-1)\lambda+\mu] & (N-1)\lambda & \dots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -[(N-2)\lambda+2\mu] & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -[(N-r)\lambda+r\mu] & (N-r)\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r\mu & -[(N-r-1)\lambda+r\mu] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -r\mu \end{pmatrix}$$

Stacionární rozložení získáme řešením systému rovnic : **aQ** = **0** s podmínkou $\sum_{j=0}^{N} a_j = 1$:

$$-N\lambda a_0 + \mu a_1 = 0$$
$$(N-j+1)\lambda a_{j-1} - [(N-j)\lambda + j\mu]a_j + (j+1)\mu a_{j+1} = 0, \; j = 1, \dots, r\text{-}1$$
$$(N-j+1)\lambda a_{j-1} - [(N-j)\lambda + r\mu]a_j + r\mu a_{j+1} = 0, \; j = r, \dots, N\text{-}1$$
$$\lambda a_{N-1} + r\mu a_N = 0$$

Řešení obdržíme ve tvaru:

$$a_j = \binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0, \; j = 1, \dots, r\text{-}1$$

$$a_j = \frac{N(N-1)\dots(N-j+1)}{r!r^{j-r}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0, \; j = r, \dots, N$$

Přitom $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{N} a_j$.

12.20. Příklad: Uvažme systém, v němž je v provozu velké množství předmětů téže funkce, např. talíře v jídelně. Předpokládáme, že předměty pocházejí od tří různých výrobců (říkáme, že jsou tří různých typů) a že doby životnosti předmětů od různých výrobců jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením Ex(λ_i), i = 1, 2, 3. Provádíme cyklickou záměnu typů podle schématu 1 → 2 → 3 → 1. Zvolíme jedno místo v provozu a zavedeme HMŘ $\{X_t; t \in T\}$ se spojitým časem, kde $X_t = j$, když v okamžiku t je na tomto místě zařazen předmět typu j, j = 1, 2, 3.
Najděte matici intenzit přechodu a stanovte stacionární rozložení.

Řešení: Označme Y_j dobu životnosti předmětu j-tého typu, $Y_j \sim \mathrm{Ex}(\lambda_j)$, j = 1, 2, 3. V příkladu 12.7. bylo ukázáno, že intenzita poruchy je λ_j, tedy

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Stacionární rozložení získáme řešením systému rovnic : **aQ** = **0** s podmínkou $\sum_{j=1}^{3} a_j = 1$:

$$-\lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_3 = 0$$

$$\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 = 0$$

$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Řešením tohoto systému obdržíme:

$$a_1 = \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3},\ a_2 = \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3},\ a_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}.$$

13. Laplaceova transformace a její užití při řešení systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic a evolučních diferenciálních rovnic

13.1. Motivace: Pro HMŘ se spojitým časem lze pravděpodobnosti přechodu vyjádřit jako řešení systému Kolmogorovových diferenciálních rovnic a absolutní pravděpodobnosti lze vyjádřit jako řešení systému evolučních diferenciálních rovnic. V obou těchto případech vystupují v uvedených rovnicích intenzity přechodu a jedná se o systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Takovéto systémy můžeme řešit pomocí různých integrálních transformací, z nichž nejrozšířenější je Laplaceova transformace. Laplaceova transformace převádí soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé funkce na soustavu algebraických rovnic pro obrazy těchto funkcí. Tuto soustavu vyřešíme a pomocí operátorového slovníku najdeme k obrazu řešení jeho vzor.

13.2. Definice: Definice Laplaceovy transformace

Nechť f(t) je funkce splňující podmínky:

a) f(t) je spojitá pro $t > 0$,

b) $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$,

c) f(t) je exponenciálního řádu, tj. existují konstanty $M > 0$, $\alpha \in R$ tak, že $\left| f(t) \leq Me^{-\alpha t} \right|$.

Pak funkce $F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$ se nazývá Laplaceova transformace funkce f(t). Funkce f(t) se nazývá vzor a F(z) obraz.

(Obecně je z komplexní proměnná, pro naše účely však postačí $z \geq 0$.)

13.3. Označení:

Laplaceovu transformaci (dále LT) značíme L(f(t)) = F(z) a zpětnou (inverzní) transformaci značíme L^{-1}(F(z)) = f(t).

13.4. Věta: Vztah mezi vzorem a obrazem

Mezi původní funkcí f(t) a její LT F(z) existuje vzájemně jednoznačný vztah.

13.5. Příklad: Najděte LT funkce f(t) = e^{at}.

Řešení:

$$F(z)=\int_0^{\infty} e^{at}e^{-zt}dt=\int_0^{\infty} e^{-t(z-a)}dt=-\frac{1}{z-a}\left[e^{-t(z-a)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{z-a}$$

13.6. Věta: Linearita LT

LT i zpětná LT je lineární je lineární, tj. pro libovolné konstanty $c_1,\ldots,c_n \in R$, aspoň jedna konstanta je nenulová,

platí: $L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i L(f_i(t))$ a $L^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(z)\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i L^{-1}(F_i(z))$

13.7. Věta: LT derivace funkce

Pro LT derivace platí: L(f'(t)) = zF(z) – f(0).

13.8. Věta: LT n-té derivace funkce

Pro LT n-té derivace platí: $L(f^{(n)}(t)) = z^n F(z) – z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

13.9. Poznámka: Uvedeme stručný operátorový slovník.

Vzor f(t)	Obraz F(z)
1	$1/z$
t	$1/z^2$
e^{at}	$1/(z-a)$
$t\ e^{at}$	$1/(z-a)^2$
$A\ e^{-at}$	$A/(z+a)$
$t^k\ e^{-at}$	$k!/(z+a)^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

13.10. Příklad: Užitím LT vyřešte diferenciální rovnici y'(t) + y(t) = e^{-2t} s počáteční podmínkou y(0) = 0.

Řešení: $zY(z) - y(0) + Y(z) = \frac{1}{z+2} \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{1}{z+1} + \frac{-1}{z+2}$

$1 = A(z+2) + B(z+1)$

$2A + B = 1 \Rightarrow 2A - A = 1 \Rightarrow A = 1$

$A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow B = -1$

$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{-1}{z+2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{z+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{-1}{z+2}\right) = e^{-t} - e^{-2t}$

Zkouška: $y'(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$

$-e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t} = e^{-2t}$ - splněno

Počáteční podmínka: y(0) = 1 – 1 = 0 – splněno

13.11. Příklad: Užitím LT najděte řešení systému lineárních diferenciálních rovnic

$$2y_1'(t) - y_2'(t) + y_2(t) = 0$$
$$y_1(t) - 3y_2'(t) + 2y_2(t) = 1$$

s počátečními podmínkami $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

Řešení:

$$2[zY_1(z) - y_1(0)] - [zY_2(z) - y_2(0)] + Y_2(z) = 0 \Rightarrow 2zY_1(z) + (1-z)Y_2(z) = 0$$

$$Y_1(z) - 3[zY_{21}(z) - y_2(0)] + 2Y_2(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow Y_1(z) + (2-3z)Y_2(z) = \frac{1}{z}$$

Řešením systému těchto dvou rovnic získáme $Y_2(z) = \dfrac{-2}{z-\frac{1}{2}} + \dfrac{2}{z-\frac{1}{3}}$, tedy $y_2(t) = -2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}}$.

Z 2. rovnice plyne, že $y_1(t) = 1 + 3y_2'(t) - 2y_2(t) = 1 + 3\left(-e^{\frac{t}{2}} + \dfrac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}\right) + 4e^{\frac{t}{2}} - 4e^{\frac{t}{3}} = 1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}}$.

Celkem: $y_1(t) = 1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}}$, $y_2(t) = -2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}}$.

Zkouška: $y_1'(t) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \dfrac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}, y_2'(t) = -e^{\frac{t}{2}} + \dfrac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}$

1. rovnice: $e^{\frac{t}{2}} - \dfrac{4}{3}e^{\frac{t}{3}} + e^{\frac{t}{2}} - \dfrac{2}{3}e^{\frac{t}{3}} - 2e^{\frac{t}{2}} + 2e^{\frac{t}{3}} = 0$ - splněno, 2. rovnice: $1 + e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}} + 3e^{\frac{t}{2}} - 2e^{\frac{t}{3}} - 4e^{\frac{t}{2}} + 4e^{\frac{t}{3}} = 0$ - splněno

Počáteční podmínky: $y_1(0) = 1 + 1 - 2 = 0, y_2(0) = -2 + 2 = 0$ - splněno.

13.12. Věta: Kolmogorovovy systémy a systém evolučních diferenciálních rovnic

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$, systém vektorů absolutních pravděpodobností $\{\mathbf{p}(t); t \in T\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$ a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q}$. Pak platí:

a) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ (Kolmogorovův systém prospektivních diferenciálních rovnic)

b) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ (Kolmogorovův systém retrospektivních diferenciálních rovnic)

c) $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0)$ = daný stochastický vektor (systém evolučních diferenciálních rovnic).

13.13. Věta: Věta o řešení Kolmogorovových systémů a systému evolučních diferenciálních rovnic

Nechť $\mathbf{Q}$ je kvazistochastická matice řádu n. Pak platí:

a) Existuje jediné řešení systému prospektivních a retrospektivních Kolomogorovových diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Toto řešení představuje systém matic přechodu HMŘ se SČ s množinou stavů $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Existuje jediné řešení systému evolučních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0)$ = daný stochastický vektor. Toto řešení představuje systém vektorů absolutních pravděpodobností HMŘ se SČ s množinou stavů $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

13.14. Příklad: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{1,2\}$, matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

a) Najděte vektor stacionárních pravděpodobností.

b) Najděte vyjádření pro vektor absolutních pravděpodobností.

Řešení:

Ad a) Hledáme vektor **a** tak, aby **aQ** = **0**, $a_1 + a_2 = 1$.

$$(a_1, a_2)\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (0,0), a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 - a_1$$

$$-2a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow 2a_1 - 1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \text{ tedy } \mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ad b) Řešíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$(p_1'(t), p_2'(t)) = (p_1(t), p_2(t))\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, p_1(t) + p_2(t) = 1 \Rightarrow p_2(t) = 1 - p_1(t)$$

$$p_1'(t) = -2p_1(t) + p_2(t) \Rightarrow p_1'(t) = -2p_1(t) + 1 - p_1(t), p_1(0) = \frac{1}{2}.$$

Laplaceův obraz: $zP_1(z) - p_1(0) = -2P_1(z) + \frac{1}{z} - P_1(z) \Rightarrow P_1(z)(z+3) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = \frac{z+2}{z} \Rightarrow P_1(z) = \frac{z+2}{z(z+3)} = \frac{\frac{2}{3}}{z} + \frac{\frac{1}{6}}{z+3}$

$$p_1(t) = L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{z} + \frac{\frac{1}{6}}{z+3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t}, \; p_2(t) = 1 - p_1(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t}. \text{ Zkouška vyjde.}$$

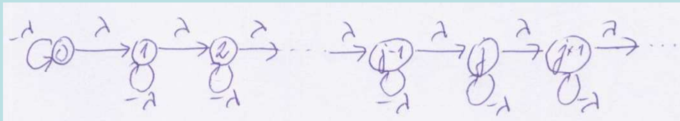
14. Poissonův proces

14.1. Definice: Definice Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$, kde $\lambda > 0$ je konstanta, nazývá se intenzita.

Přechodový diagram:



Tento HMŘ se nazývá Poissonův proces (s parametrem λ).

(Vidíme, že v Poissonově procesu je možné jen setrvání v dosavadním stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.)

Vysvětlení: Poissonův proces popisuje např. náhodné a navzájem nezávislé události. Náhodná veličina $X_t \in \{0,1,\dots\}$ udává počet událostí, které nastanou v intervalu $(0, t\rangle$. Přitom střední hodnota počtu událostí, které nastanou za časovou jednotku, je konstanta $\lambda > 0$. Pravděpodobnost $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ vyjadřuje, že v intervalu $(0, t\rangle$ nenastala žádná událost. Označíme-li S dobu čekání na změnu mezi stavy (tj. dobu čekání na příchod události resp. dobu setrvání ve stavu), pak $P(S > t) = e^{-\lambda t}$, tedy

$$P(S \le t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$. To znamená, že je-li rozložení počtu událostí, které nastaly v intervalu $(0, t\rangle$ Poissonovo, je rozložení doby čekání na změnu resp. doby setrvání ve stavu exponenciální.

Příklady uvažovaných událostí:

- dopady částic kosmického záření zaznamenávané čítačem částic
- rozpady radioaktivního prvku
- výzvy přicházející do telefonní ústředny
- dopravní nehody registrované na nějakém silničním úseku
- poruchy automatického stroje
- příchody zákazníků do nějakého systému obsluhy apod.

Upozornění: U těchto praktických příkladů není splněn předpoklad, že intenzita výskytu událostí λ je nezávislá na čase. Provoz v telefonní ústředně je jistě živější dopoledne než večer; silniční provoz záleží jak na denní době tak na dnu v týdnu; množství radioaktivní látky časem ubývá a tedy ubývá i intenzita rozpadu jejích atomů; poruchovost stroje se může zvyšovat s jeho opotřebením apod. Často se ale sleduje výskyt těchto událostí jen po nějakou omezenou dobu, během níž lze předpokládat neměnnost intenzity λ.

14.2. Věta: Věta o pravděpodobnostním rozložení složek Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ. Pak platí: $\forall t \in T\ \forall j \in J: p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$.

Vysvětlení: Náhodná veličina X_t, která udává např. počet zákazníků, kteří přijdou do fronty v intervalu $(0, t\rangle$, se řídí rozložením Po(λt). Číslo $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost, že v intervalu $(0, t\rangle$ nenastane žádná změna.

Důkaz: Sestavíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \ldots)$.

$$(p_0'(t), p_1'(t), p_2'(t), \ldots) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \ldots)\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) \\ p_2'(t) = \lambda p_{01}(t) - \lambda p_2(t) \\ \vdots \end{array}$$

Obecně: $p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t), j = 1, 2, \ldots$ s počáteční podmínkou $p_0(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, j = 1, 2, …

Při řešení těchto rovnic použijeme LT.

Obraz 1. rovnice: $zP_0(z) - p_0(0)\big| = 1\big| = -\lambda P_0(z) \Rightarrow P_0(z) = \frac{1}{z+\lambda} \Rightarrow p_0(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{z+\lambda}\right) = e^{-\lambda t}$

Obraz 2. rovnice: $zP_1(z) - p_1(0)\big| = 0\big| = \lambda P_0(z)\Big| = \frac{1}{z+\lambda}\Big| - \lambda P_1(z) \Rightarrow P_1(z) = \frac{\lambda}{(z+\lambda)^2} \Rightarrow p_1(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda}{(z+\lambda)^2}\right) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Obraz 3. rovnice: $zP_2(z) - p_2(0)\big| = 0\big| = \lambda P_1(z)\Big| = \frac{\lambda}{(z+\lambda)^2}\Big| - \lambda P_2(z) \Rightarrow P_2(z) = \frac{\lambda^2}{(z+\lambda)^3} \Rightarrow p_2(t) = L^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{(z+\lambda)^3}\right) = \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}$

Obecně: $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, j = 0, 1, 2, \ldots$

14.3. Příklad: Majitel obchodu s potravinami zjistil, že v ranní špičce přichází do obchodu průměrně 20 zákazníků za 5 minut. Majitelova manželka se domnívá, že v průběhu 10 minut může očekávat v průměru 30 zákazníků, zatímco optimističtější majitel v průběhu 10 minut očekává 40 zákazníků. Který odhad je pravděpodobnější?

Řešení:

Příchody zákazníků do obchodu lze modelovat Poissonovým procesem $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t = j, když za časový interval $\langle 0, t \rangle$ přijde do obchodu právě j zákazníků, j = 0, 1, 2, …

Parametr procesu (intenzita procesu): $\lambda = \frac{20}{5} = 4$ zákazníci za 1 minutu .

Podle předpokladu: $X_t \sim Po(4t)$, tedy $P(X_t = j) = \frac{(4t)^j}{j!} e^{-4t}$

Odhad manželky: $P(X_{10} = 30) = \frac{(4 \cdot 10)^{30}}{30!} e^{-4 \cdot 10} = p_{30}(10) = 0{,}01847$

V MATLABu: poisspdf(30,40)

Odhad manžela: $P(X_{10} = 40) = \frac{(4 \cdot 10)^{40}}{40!} e^{-4 \cdot 10} = p_{40}(10) = 0{,}06297$

V MATLABu: poisspdf(40,40)

Optimistický odhad majitele je pravděpodobnější než opatrný odhad jeho manželky.

14.4. Věta: Věta o pravděpodobnostech přechodu v Poissonově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ. Pak platí: $\forall t \in T\ \forall i, j \in J : p_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \text{ pro } j \geq i \\ 0 \text{ pro } j < i \end{cases}$.

Důkaz: Z matice intenzit přechodu plyne, že jediný přechod s nenulovou pravděpodobností je přechod do stavu o 1 vyššího.

Přitom počáteční stav je nulový, tedy $p_j(t) = p_{0j}(t)$. V důsledku homogenity: $p_{ij}(t) = p_{0,j\text{-}i}(t) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \text{ pro } j \geq i \\ 0 \text{ pro } j < i \end{cases}$.

14.5. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ. Pak $E(X_t) = \lambda t$, $D(X_t) = \lambda t$.

Důkaz: Plyne z vlastností Poissonova rozložení, protože $X_t \sim Po(\lambda t)$.

14.6. Věta: Věta o rozložení doby setrvání řetězce v daném stavu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ. Označme S_j dobu, kterou řetězec setrvá ve stavu j-1, j = 1, 2, … Pak $S_j \sim Ex(\lambda)$ a střední hodnota doby setrvání řetězce ve stavu j-1 je $\frac{1}{\lambda}$.

Důkaz: Plyne z věty 12.8.

14.7. Věta: Věta o nezávislosti dob setrvání řetězce v daných stavech

Náhodné veličiny S_j, j = 1, 2, … jsou stochasticky nezávislé.

Důkaz: Nebudeme provádět.

14.8. Příklad: Na autobusovou zastávku přijíždějí autobusy linek č. 1 a č. 2. Předpokládáme, že příjezdy autobusů obou linek tvoří události Poissonových procesů s parametry λ_1, λ_2, přičemž tyto procesy probíhají nezávisle na sobě. Vypočtěte pravděpodobnost, že za časový interval délky t přijede na zastávku právě k autobusů.

Řešení:

Označme X_t počty příjezdů linky č. 1 v intervalu $\left(0,t\right\rangle$, $X_t \sim Po(\lambda_1 t)$, $P\left(X_t = j\right) = \frac{\left(\lambda_1 t\right)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t}$, j = 0, 1, 2, …

Označme Y_t počty příjezdů linky č. 2 v intervalu $\left(0,t\right\rangle$, $Y_t \sim Po(\lambda_2 t)$, $P\left(Y_t = j\right) = \frac{\left(\lambda_2 t\right)^j}{j!} e^{-\lambda_2 t}$, j = 0, 1, 2, …

Dále označme Z_t počty příjezdů autobusů obou linek v intervalu $\left(0,t\right\rangle$, $Z_t = X_t + Y_t$. Máme počítat $P(Z_t = k)$, k = 0, 1, 2, …

Podle věty o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin dostáváme:

$$P\left(Z_t = k\right) = \sum_{j=0}^{k} P\left(X_t = j\right) P\left(Y_t = k - j\right) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\left(\lambda_1 t\right)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t} \frac{\left(\lambda_2 t\right)^{k-j}}{\left(k-j\right)!} e^{-\lambda_2 t} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\lambda_1 t\right)^j \left(\lambda_2 t\right)^{k-j} = \frac{\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Znamená to, že $Z_t \sim Po((\lambda_1 + \lambda_2)\, t)$.

14.9. Věta: Věta o bodovém a intervalovém odhadu parametru λ Poissonova procesu

Nechť v intervalu $\langle 0, T \rangle$ byl sledován Poissonův proces s neznámým parametrem λ a bylo pozorováno n událostí.

a) Bodový odhad parametru λ je dán vzorcem: $\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$, přičemž $E(\hat{\lambda}) = \lambda$ (tj. $\hat{\lambda}$ je nestranný odhad) a $D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{T}$.

b) 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro λ má meze: $d = \frac{1}{2T}\chi^2_{\alpha/2}(2n+2)$, $h = \frac{1}{2T}\chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2)$.

14.10. Příklad: Na určitém zařízení byly po dobu 580 h sledovány poruchy. Za tuto dobu jich nastalo 22. Za předpokladu, že poruchy tvoří události Poissonova procesu s parametrem λ, odhadněte tento parametr a najděte pro něj 95% empirický interval spolehlivosti.

Řešení:

T = 580, n = 22, tedy $\hat{\lambda} = \frac{n}{T} = \frac{22}{580} = 0{,}0379$

$$d = \frac{1}{2T}\chi^2_{\alpha/2}(2n+2) = \frac{1}{2 \cdot 580}\chi^2_{0{,}025}(46) = \frac{1}{1160}29{,}2 = 0{,}0252$$

$$h = \frac{1}{2T}\chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2) = \frac{1}{2 \cdot 580}\chi^2_{0{,}975}(46) = \frac{1}{1160}66{,}6 = 0{,}0574$$

$0{,}0252 < \lambda < 0{,}0574$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

14.11. Poznámka: Poissonův proces lze v MATLABu simulovat pomocí funkce Poisson.m:

```
function [v,abscet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)
%vstupni parametry
%CPS ... celkovy pocet simulovanych prichodu zakazniku
%lambda ... intenzita vstupniho proudu zakazniku
%t ... casovy krok
%vystupni parametry
%v ... vektor variant poctu zakazniku
%abscet ... abs. cetnosti jednotlivych variant
%relcet ... relativni cetnosti jednotlivych variant
%p ... pravdepodobnosti jednotlivych variant
%tabulka1 ... empiricke a teoreticke charakteristiky simulovaneho poctu
%zakazniku
%tabulka2 ... empiricke a teoreticke charakteristiky doby simulace
```

Tuto funkci použijeme při řešení následujícího příkladu.

14.12. Příklad: V sobotu v době od 8 do 20 h sledujeme provoz v klidné ulici ve vilové čtvrti města. V tomto období vjíždějí auta do této ulice v průměru každých 8 minut. Předpokládejme, že intervaly mezi příjezdy aut se řídí exponenciálním rozložením. Pomocí MATLABu simulujte vjezd 20 aut do této ulice.

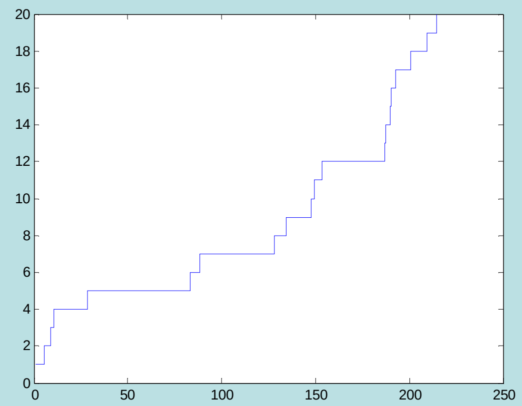
Řešení: V tomto případě jsou vstupní parametry tyto: CPS = 20, lambda = 1/8, časový krok zvolíme např. t = 8. Teoretická celková doba simulace by měla být 20.8 = 160 min, průměr = 8 min, směrodatná odchylka = 8 min.)

[v,abscet,relcet,p, tabulka1, tabulka2]=Poisson(CPS,lambda,t)

Počet aut, která vjíždějí vždy během 8 minut	Abs. četnost	Rel. četnost	pravděpodobnost
0	15	0,5357	0,3679
1	6	0,2143	0,3679
2	6	0,2143	0,1839
4	1	0,0357	0,0153

Průměrný počet aut za časový krok: 0,7857
Střední hodnota počtu aut za časový krok: 1
Pozorovaná směr. odch. počtu aut za časový krok: 1,0313
Směrodatná odchylka počtu aut za časový krok: 1
Celková doba simulace: 214,7869
Teoretická celková doba simulace: 20*8 = 160
Průměrná doba mezi vjezdy aut: 10,7393
Střední hodnota doby mezi vjezdy aut: 8
Pozorovaná směr. odch. doby mezi vjezdy aut: 14,8255
Směrodatná odchylka doby mezi vjezdy aut: 8

Realizace Poissonova procesu:



15. Proces vzniku a zániku

15.1. Motivace: Budeme se zabývat popisem kolísání rozsahu souboru objektů v čase za předpokladu, že

a) v náhodných okamžicích vstupují do tohoto souboru nové objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h\rangle$ vstoupí do souboru rozsahu j nový objekt, je $\lambda_j h + o(h)$, kde $\lambda_j > 0$ je intenzita vstupu do stavu j;

b) v náhodných okamžicích vystupují z tohoto souboru jiné objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h\rangle$ vystoupí ze souboru rozsahu j jeden objekt, je $\mu_j h + o(h)$, kde $\mu_j > 0$ je intenzita výstupu ze stavu j;

c) vstupy a výstupy objektů jsou stochasticky nezávislé jevy;

d) během krátkého časového intervalu zůstává rozsah souboru týž nebo se jedničku zvětší či zmenší.

Bude nás především zajímat, jak se chová rozsah tohoto souboru po dostatečně dlouhé době, tj. po odeznění vlivu počátečních podmínek.

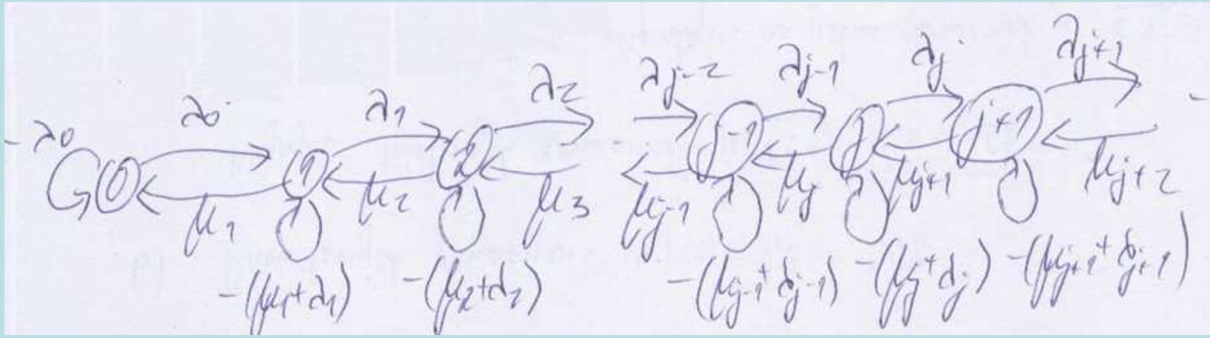
15.2. Definice: Definice procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t ; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$, kde $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\dots$ a $\mu_j > 0,\ j = 1,2,\dots$ jsou konstanty.

Tento řetězec se nazývá proces vzniku a zániku (resp. množení a úmrtí).

Přechodový diagram:



Upozornění: Je zřejmé, že Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku a zániku, v němž $\mu_j = 0$, j = 1, 2, … a $\lambda_j = \lambda$, j = 0, 1, 2, …

15.3. Věta: Stacionární rozložení procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku s intenzitami vzniku $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\ldots$ a intenzitami zániku $\mu_j > 0,\ j = 1,2,\ldots$

Pak stacionární rozložení tohoto procesu je dáno vzorcem: $\forall j \in J : a_j = \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_j} a_0$, kde $a_0 = \dfrac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_j}}$ za předpokladu, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_j}$ absolutně konverguje. Jinak stacionární rozložení neexistuje.

Důkaz: Hledáme řešení systému rovnic $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$, $a_0 + a_1 + \ldots = 1$, tj.

$(a_0, a_1, a_2, \ldots)\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = (0,0,0,\ldots),$ $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = 1$	$-\lambda_0 a_0 + \mu_1 a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} a_0$ $-\lambda_{j-1} a_{j-1} - (\mu_j + \lambda_j) a_j + \mu_{j+1} a_{j+1} = 0,\ j = 1,2,\ldots \Rightarrow$ $a_{j+1} = -\dfrac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j+1}} a_{j-1} + \dfrac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_{j+1}} a_j$ $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = 1$

Nechť j = 1: $a_2 = -\dfrac{\lambda_0}{\mu_2} a_0 + \dfrac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_2} a_1 = -\dfrac{\lambda_0}{\mu_2} a_0 + \dfrac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_2}\dfrac{\lambda_0}{\mu_1} a_0 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} a_0$

Obecně: $a_j = \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_j} a_0$, přičemž $1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_j} a_0 \Rightarrow a_0 = \dfrac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_j}}$, pokud řada $\sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_j}$ absolutně konverguje.

15.4. Příklad: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku s množinou stavů j = {0,1}, intenzitou vzniku λ a intenzitou zániku μ. Najděte:

a) vektor absolutních pravděpodobností **p**(t)

b) matici pravděpodobností přechodu **P**(t)

c) stacionární rozložení **a**.

Řešení: Matice intenzit přechodu: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$

Ad a) Sestavíme systém evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou **p**(0) = (1,0).

$$(p_0'(t), p_1'(t)) = (p_0(t), p_1(t))\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, p_0(t) + p_1(t) = 1 \Rightarrow p_1(t) = 1 - p_0(t)$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_{01}(t) + \mu p_1(t) \Rightarrow p_0'(t) = -\lambda p_1(t) + \mu - \mu p_0(t) \Rightarrow p_0'(t) + (\lambda + \mu)p_0(t) = \mu, p_0(0) = 1$$

Laplaceův obraz: $zP_0(z) - p_0(0)|=1| + (\lambda + \mu)P_0(z) = \frac{\mu}{z} - \Rightarrow P_0(z) = \frac{\lambda + \mu}{z(z + \lambda + \mu)} \Rightarrow P_0(z) == \frac{\frac{\mu}{\lambda + \mu}}{z} + \frac{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}}{z + \lambda + \mu}$

$$p_1(t) = L^{-1}\left(\frac{\frac{\mu}{\lambda + \mu}}{z} + \frac{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}}{z + \lambda + \mu} \right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t},\ p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Celkem: $p(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t}, \lambda - \lambda e^{-(\lambda + \mu)t}\right)$

Ad b) Pravděpodobnosti přechodu určíme např. ze systému Kolmogorovových retrospektivních diferenciálních rovnic $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{QP}(t)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} p_{00}'(t) & p_{01}'(t) \\ p_{10}'(t) & p_{11}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{00}(0) & p_{01}(0) \\ p_{10}(0) & p_{11}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

: pro řešení tohoto systému opět využijeme Laplaceovu transformaci a získáme výsledek:

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}.$$

Ad c) Stacionární rozložení můžeme určit několika způsoby. Podle věty 15.3. máme:

$$a_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad a_1 = 1 - a_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Celkem: $\mathbf{a} = \frac{1}{\lambda + \mu}(\mu, \lambda)$

16. Speciální případy procesu vzniku a zániku

16.1. Definice: Definice lineárního procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (0, 1, 0, …) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\mu+\lambda) & 2\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0, \mu > 0 \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ.

(Intenzity přechodu jsou lineárními funkcemi pořadí stavů, v nichž byl proces v předešlém okamžiku,

tj. $\lambda_j = j\lambda$, j = 0, 1, 2, … $\mu_j = j\mu$, j = 1, 2, …)

16.2. Věta: Věta o absolutních pravděpodobnostech v lineárním procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ. Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vztahy:

Pro $\lambda = \mu$: $p_0(t) = \frac{\lambda t}{1+\lambda t}$, $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1+\lambda t)^{j+1}}$, $j = 1, 2, \dots$

Pro $\lambda \neq \mu$ zavedeme označení $A(t) = \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}$. Pak $p_0(t) = \mu A(t)$, $p_j(t) = [1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)][\lambda A(t)]^{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$

Důkaz: Uvedené vztahy získáme řešením systému evolučních diferenciálních rovnic.

16.3. Důsledek: Pravděpodobnost zániku

Pravděpodobnost, že soubor objektů v čase t zanikne, je $P(X_t = 0) = p_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda t}{1+\lambda t} \text{ pro } \lambda = \mu \\ \mu A(t) \text{ pro } \lambda \neq \mu \end{cases}$. Limitním přechodem

pro t → ∞ zjistíme, že limitní pravděpodobnost zániku je $\lim\limits_{t\to\infty} p_0(t) = \begin{cases} 1 \text{ pro } \lambda \leq \mu \\ \dfrac{\mu}{\lambda} \text{ pro } \lambda > \mu \end{cases}$.

16.4. Věta: Střední hodnota a rozptyl rozsahu souboru

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s intenzitami λ, μ. Předpokládejme, že v čase t = 0 má soubor rozsah

$k_0 \geq 1$. Pak pro střední hodnotu a rozptyl rozsahu souboru v čase t > 0 platí:

Pro λ = μ: $E(X_t) = k_0$, $D(X_t) = 2k_0\lambda t$.

Pro λ ≠ μ: $E(X_t) = k_0 e^{(\lambda-\mu)t}$, $D(X_t) = k_0 \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

16.5. Poznámka: Limitním přechodem pro t → ∞ zjistíme, že limitní střední hodnota rozsahu souboru je

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t) = \begin{cases} k_0 \text{ pro } \lambda = \mu \\ 0 \text{ pro } \lambda < \mu \\ \infty \text{ pro } \lambda > \mu \end{cases}$$

16.6. Příklad: Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces vzniku a zániku s množinou stavů J = {0, 1, 2}, intenzitou vzniku λ = 0,01 a intenzitou zániku μ = 0,001.

a) Jaká je pravděpodobnost, že proces zanikne v čase t = 100?

b) Jaká je limitní pravděpodobnost zániku?

Řešení:

Ad a) Podle důsledku 16.3. $p_0(t) = \mu \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}$, tedy $p_0(100) = 0{,}001 \frac{1 - e^{0,9}}{0{,}001 - 0{,}01 e^{0,9}} = 0{,}0619$

Pravděpodobnost, že v čase t = 100 proces zanikne, je 6,2 %.

Ad b) $\lim_{t \to \infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = 0{,}1$

Limitní pravděpodobnost zániku je 10 %.

16.7. Příklad: V příkladu 16.6. předpokládejme, že v čase t = 0 soubor obsahoval 20 objektů. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka rozsahu souboru v čase t = 100?

Řešení:

$$E(X_t) = k_0 e^{(\lambda-\mu)t} = 20e^{0,9} = 49{,}1921, \sqrt{D(X_t)} = \sqrt{k_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]} = \sqrt{20 \frac{11}{9} e^{0,9}\left(e^{0,9} - 1\right)} = 9{,}3679$$

16.8. Poznámka: Vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku lze v MATLABu ilustrovat pomocí funkce lpvz.m:

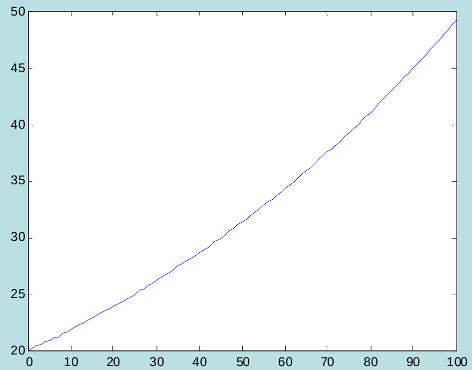
```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% funkce lpvz ilustruje vlastnosti linearniho procesu vzniku a zaniku
% syntaxe: [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% vstupni parametry:
% lambda je intenzita vzniku, mi intenzita zaniku
% tau je konecny cas, k0 rozsah souboru v case t=0
% vystupni parametry:
% M je vektor strednich hodnot rozsahu souboru v case t=0 az tau
% S je vektor smerodatnych odchylek rozsahu souboru v case t=0 az tau
% P je pravdepodobnost zaniku souboru v case t=0 az tau
t=[0:tau]';
M=k0*exp((lambda-mi).*t);
S=sqrt(k0*((lambda+mi)/(lambda-mi))*exp((lambda-mi).*t).*(exp((lambda-mi).*t)-1));
P=mi*((1-exp((lambda-mi).*t)))./(mi-lambda*exp((lambda-mi).*t));
plot(t,M)
figure
plot(t,S)
figure
plot(t,P)
```

Použijeme tuto funkci pro proces popsaný v př. 16.6. a 16.7.

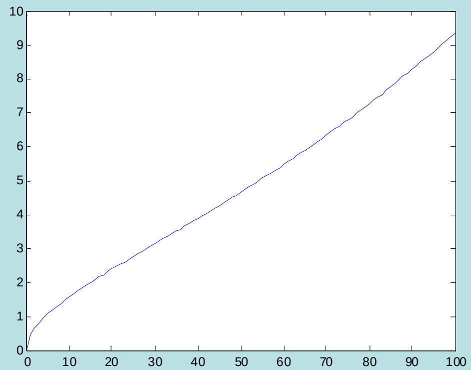
lambda=0.01;mi=0.001;tau=100;k0=20;

Dostaneme

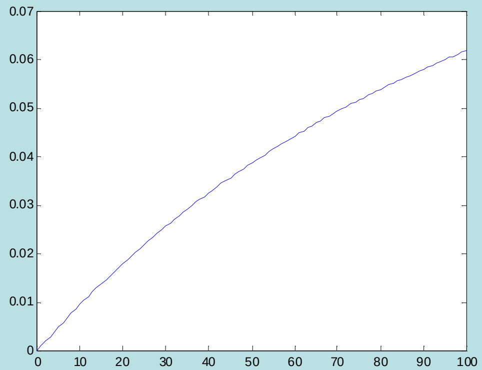
graf závislosti středních hodnot rozsahu souboru na čase



graf závislosti směrodatných odchylek rozsahu souboru na čase



graf závislosti pravděpodobnosti zániku na čase



16.9. **Definice:** Definice Erlangova procesu

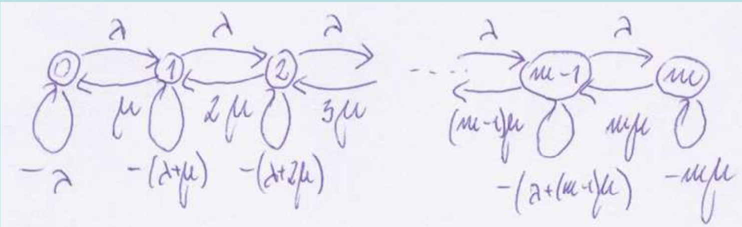
Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku a zániku, který má konečnou množinu stavů J = {0, 1, 2, …, m}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …, 0) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)\mu & -((m-1)\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0 \text{ a } \mu > 0 \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá Erlangův proces.

Vysvětlení: Erlangův proces charakterizuje např. provoz telefonní ústředny, do níž vede m linek. Nechť X_t je počet obsazených linek v okamžiku t, X_t = 0, 1, …, m. Počet obsazených linek se v krátkém časovém intervalu můžeme změnit jen o jedničku. Intenzita nové výzvy je λ, zatímco intenzita ukončování hovoru je úměrná momentálnímu počtu obsazených linek s koeficientem úměrnosti μ. Výzva, která přichází k plně obsazené telefonní ústředně, se ztrácí.

Přechodový diagram:



Agner Krarup Erlang (1878 – 1929) byl dánský matematik, jako první se vědecky zabýval problematikou telefonních sítí. Pracoval 20 let pro Kodaňskou telefonní společnost. Na jeho počest byl zaveden 1 erlang jako jednotka telefonního provozu.

16.10. Věta: Věta o stacionárním rozložení Erlangova procesu

Stacionární rozložení Erlangova procesu je dáno vzorcem: $a_j = \dfrac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k},\ j = 0,1,\ldots,m$. Stacionární rozložení existuje vždy.

Důkaz: Hledáme řešení systému **aQ** = **0**, $\sum_{j=0}^{m} a_j = 1$.

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m)\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)\mu & -((m-1)\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix} = (0,0,\ldots,0)$$

$$\lambda a_0 + \mu a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda}{\mu} a_0$$

$$\lambda a_{j-1} - (\lambda + j\mu)\mu a_j + (j+1)\mu a_{j+1} = 0 \Rightarrow a_{j+1} = \frac{1}{j+1}\left(-\frac{\lambda}{\mu} a_{j-1} + \frac{\lambda + j\mu}{\mu} a_j\right),\ j = 1,2,\ldots,m-1$$

$$\lambda a_{m-1} - m\mu = 0$$

Nechť j = 1: $a_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{\mu}a_0 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}a_1\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{\mu}a_0 + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\mu}a_0\right) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_0$. Obecně: $a_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0,\ j = 1,2,\ldots,m$.

Přitom $1 = \sum_{j=0}^{m} a_j = \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0 \Rightarrow a_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}$. Celkem: $a_j = \dfrac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k},\ j = 0,1,\ldots,m$

16.11. Příklad: V dílně pracují tři opraváři. Do této dílny přichází v průměru 24 zákazníků za 1 h. Jestliže příchozí zákazník najde volného opraváře, je k němu přiřazen a začne oprava. Jestliže není žádný opravář volný, zákazník nečeká a odchází. Předpokládáme, že doba opravy se řídí exponenciálním rozložením, přičemž průměrná doba opravy je 5 min.

a) Jakou procentuální část pracovní doby jsou opraváři nevyužiti?

b) Kolik procent potenciálních zákazníků je odmítnuto?

c) Jaký je průměrný počet obsluhujících opravářů?

Řešení: Zavedeme Erlangův proces $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t je počet obsluhujících opravářů v okamžiku t, X_t = 0, 1, 2, 3.

Přitom $\lambda = 24, \mu = \dfrac{1}{\frac{1}{12}} = 12, \dfrac{\lambda}{\mu} = 2, m = 3$

Ad a) $a_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{3} \frac{1}{j!} 2^j} = \left(1 + 2 + \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{6}2^3\right)^{-1} = \dfrac{3}{19} = 0{,}158$, tedy 15,8 % pracovní doby opraváři nepracují.

Ad b) Zákazník bude odmítnut, když budou všichni tři opraváři pracovat. Počítáme $a_3 = \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^3 a_0 = \dfrac{1}{6} \cdot 8 \cdot \dfrac{3}{19} = 0{,}211$, tedy 21,1 % potenciálních zákazníků bude odmítnuto.

Ad c) Vypočítáme zbylé složky stacionárního rozložení **a** = (a_0, a_1, a_2, a_3): $a_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} a_0 = \dfrac{6}{19}$, $a_2 = \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_0 = \dfrac{6}{19}$

Střední hodnota počtu obsluhujících opravářů: $\sum_{j=0}^{3} j a_j = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \dfrac{6}{19} + \dfrac{12}{19} + \dfrac{12}{19} = \dfrac{30}{19} = 1{,}579$.

16.12. Poznámka: Stacionární rozložení Erlangova procesu můžeme vypočítat v MATLABu pomocí funkce Erlang.m:

```
function [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% funkce na vypocet stacionarniho rozlozeni Erlangova procesu
% syntaxe: [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% vstupni parametry:
% m ... nejvyssi poradove cislo v mnozine stavu
% lambda ... intenzita vzniku
% lambda ... intenzita zaniku
% vystupni parametr
% a ... vektor stacionarnich pravdepodobnosti
a0=1/sum(((lambda/mi).^(0:m)).*(1./(factorial(0:m))));
a=((lambda/mi).^(1:m)).*(1./(factorial(1:m)))*a0;
a=[a0 a];
```

Použijeme tuto funkci pro řešení příkladu 16.11.:

```
m=3;lambda=24;mi=12;
a=Erlang(m,lambda,mi)
```

Dostaneme výsledek:

```
a =
    0.1579    0.3158    0.3158    0.2105
```

16.13. Definice: Definice procesu vzniku

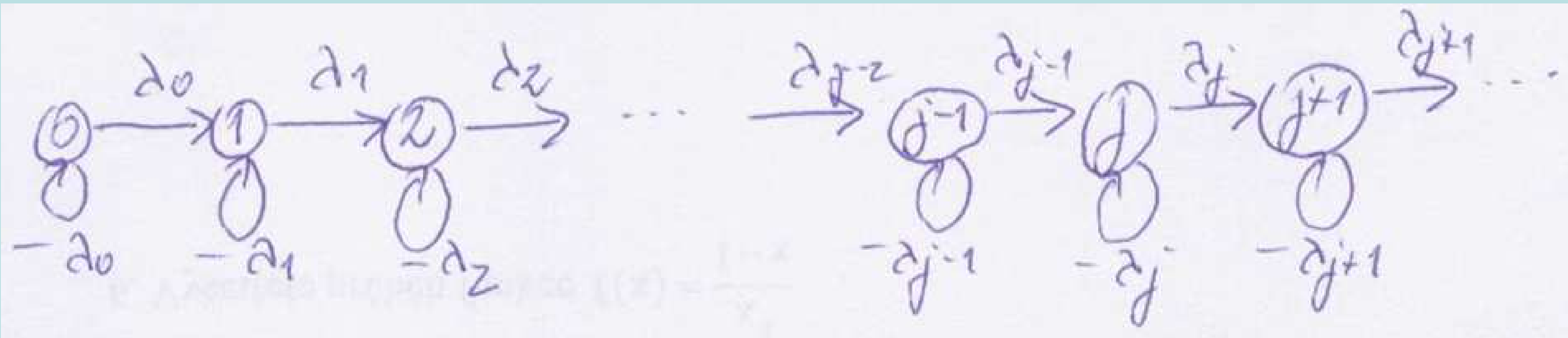
Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\dots \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá proces vzniku (resp. množení) s intenzitami $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\dots$

Vysvětlení: Proces vzniku popisuje kolísání rozsahu souboru objektů v čase, přičemž objekty mohou do souboru pouze vstupvat a nemohou vystupovat. Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku, kde $\lambda_j = \lambda$, j = 0, 1, 2, …

Přechodový diagram:



.

16.14. Věta: Absolutní pravděpodobnosti a pravděpodobnosti přechodu v procesu vzniku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je proces vzniku s intenzitami $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\ldots$ Pak platí:

a) Absolutní pravděpodobnosti jsou dány vztahy:

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$p_j(t) = (-1)^j \lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_0) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_j)},\ j = 1, 2, \ldots$$

b) Pravděpodobnosti přechodu jsou dány vztahy:

$$p_{j,j+1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\left(e^{-\lambda_j t} - e^{-\lambda_{j+1} t}\right) \text{pro } \lambda_{j+1} \neq \lambda_j \\ \lambda_j t e^{-\lambda_j t} \text{ pro } \lambda_{j+1} = \lambda_j \end{cases}$$

Důkaz:

Ad a) Plyne ze systému evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou **p**(0) = (1, 0, 0, …)

Ad b) Plyne ze systému Kolmogorovových prospektivních diferenciálních rovnic $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$

s počáteční podmínkou **P**(0) = **I**

16.15. Příklad: Nechť v procesu vzniku jsou intenzity vzniku dány vztahem $\lambda_j = (N + j)\lambda$, kde N je dané přirozené číslo a $\lambda > 0$ je konstanta. Odvoďte vektor absolutních pravděpodobností.

Řešení:

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t} = e^{-N\lambda t}$$

$$p_j(t) = (-1)^j \lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_0)\cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_j)} =$$

$$= (-1)^j \lambda^j N(N+1)\ldots(N+j-1)\sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-(N+i)\lambda t}}{((N+i)\lambda - N\lambda)\cdot \ldots \cdot ((N+i)\lambda - (N+i-1)\lambda)((N+i)\lambda - (N+i+1)\lambda)\cdot \ldots \cdot ((N+i)\lambda - (N+j)\lambda)}$$

$$= (-1)^j \lambda^j \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!}\sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-(N+i)\lambda t}}{i\lambda(i-1)\lambda\ldots\lambda(-1)\lambda\ldots(i-j)\lambda} = (-1)^j \lambda^j \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!}\frac{1}{\lambda^j} e^{-N\lambda t}\sum_{i=0}^{j} \frac{e^{-i\lambda t}}{(-1)^j i!(j-i)!} =$$

$$= \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} e^{-N\lambda t} \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left(e^{-\lambda t}\right)^i (-1)^{j-i} = \binom{N+j-1}{j} e^{-N\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^j$$

Znamená to, že $X_t \sim Ps(N, e^{-\lambda t})$.

16.16. Definice: Definice lineárního procesu vzniku

Nechť v procesu vzniku jsou intenzity vzniku úměrné rozsahu souboru, tj. $\lambda_j = j\lambda$, j = 1, 2, …, $\lambda > 0$. Předpokládejme, že na začátku je v souboru jeden objekt. Matice intenzit přechodu má tedy tvar $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & \ddot{0} & -3\lambda & 3\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Tento proces se nazývá lineární proces vzniku (Yuleův proces).

16.17. Věta: Absolutní pravděpodobnosti v Yuleově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Yuleův proces s intenzitou vzniku $\lambda > 0$. Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vzorcem:

$$p_j(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1} e^{-\lambda t}, \; j = 1, 2, \dots$$

Znamená to, že rozsah souboru v čase t zmenšený o 1 se řídí rozložením Ge($e^{-\lambda t}$).

Důkaz: Plyne z příkladu 16.7., kde položíme N = 1.

16.18. Věta: Střední hodnota a rozptyl v Yuleově procesu

V Yuleově procesu je střední hodnota rozsahu souboru v čase t rovna $e^{\lambda t}$ a rozptyl $e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$.

Důkaz: Plyne z vlastností geometrického rozložení.

(Proces vzniku i Yuleův proces mají v praxi jen malý význam, protože v reálném světě neexistují populace, jejichž jedinci nepodléhají zániku. Nicméně, uvedených procesů je možno použít např. k modelování krátkodobého růstu kolonie bakterií v prostředí s dostatkem živin.)

16.19. Příklad: Nechť je dán Yuleův proces s parametrem λ = 2,34.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v čase t = 0,6 bude rozsah souboru nejvýše 5?

b) Vypočtěte střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozsahu souboru v čase t = 0,2.

Řešení:

Ad a) $p_j(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1} e^{-\lambda t}, \; j = 1,2,\ldots$

$$P\left(X_{0,6} \le 5\right) = \sum_{j=0}^{5} p_j(0,6) = \sum_{j=0}^{5} \left(1 - e^{-2,34 \cdot 0,6}\right)^{j-1} e^{-2,34 \cdot 0,6} = 0,7557$$

Ad b) $E\left(X_t\right) = e^{\lambda t}, \; D\left(X_t\right) = e^{\lambda t}\left(e^{\lambda t} - 1\right)$

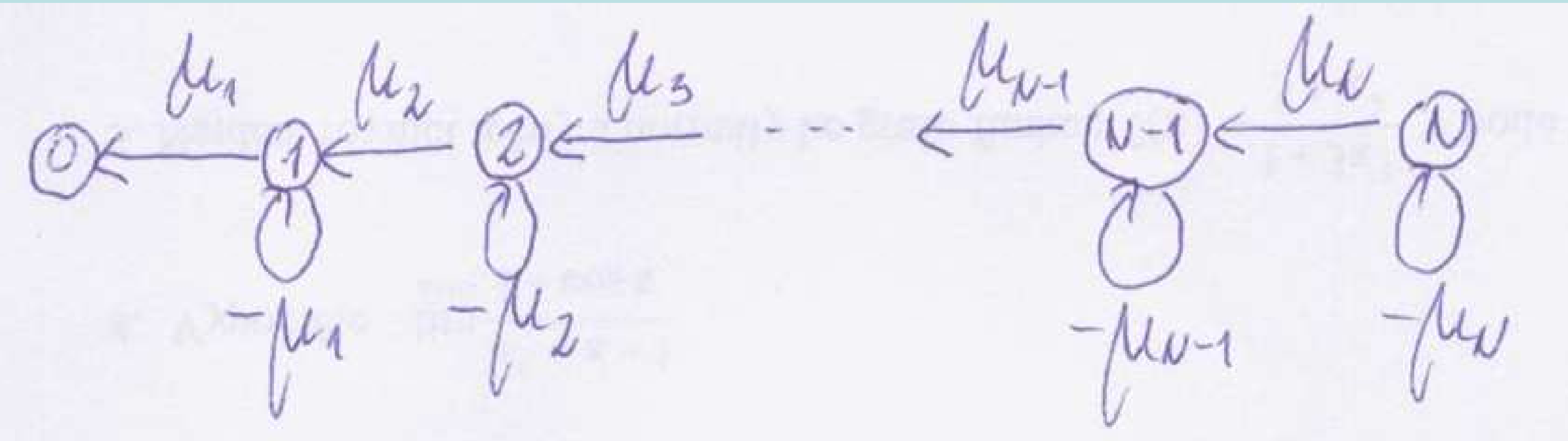
$$E\left(X_{0,2}\right) = e^{2,34 \cdot 0,6} = 1,5968, \; \sqrt{D\left(X_{0,2}\right)} = \sqrt{e^{2,34 \cdot 0,6}\left(e^{2,34 \cdot 0,6} - 1\right)} = 0,9762$$

16.20. Definice: Definice procesu zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …, N}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (0, 0, …, 1) a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_N & -\mu_N \end{pmatrix}$, kde $\mu_j > 0, j = 1,2,\dots,N$ jsou konstanty. Tento proces se nazývá proces zániku.

Vysvětlení: Na počátku má soubor N objektů. Objekty mohou ze souboru jenom vystupovat, přičemž intenzita výstupu ze souboru rozsahu j je μ_j, j = 1, 2, …, N. Proces končí zánikem souboru.

Přechodový diagram:



16.21. Definice: Definice lineárního procesu zániku

Nechť v procesu zániku jsou intenzity zániku úměrné rozsahu souboru, tj. $\mu_j = j\mu$, j = 0, 1, …, N, $\mu > 0$. Matice intenzit

přechodu má tedy tvar: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N\mu & -N\mu \end{pmatrix}$. Tento proces se nazývá lineární proces zániku.

16.22. Věta: Absolutní pravděpodobnosti v lineárním procesu zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je lineární proces zániku s intenzitou zániku $\mu > 0$. Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vzorcem:

$p_j(t) = \binom{N}{j}\left(e^{-\mu t}\right)^j\left(1 - e^{-\mu t}\right)^{N-j}$, $j = 0,1,\dots,N$. Znamená to, že rozsah souboru v čase t se řídí rozložením Bi(N, $e^{-\mu t}$).

Důkaz: Plyne z evolučních diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0) = (0, 0, \dots, 1)$.

16.23. Věta: Střední hodnota a rozptyl v lineárním procesu zániku

V lineárním procesu zániku je střední hodnota rozsahu souboru v čase t rovna $Ne^{-\mu t}$ a rozptyl $Ne^{-\mu t}(1- e^{-\mu t})$.

Důkaz: Plyne z vlastností binomického rozložení.