Stochastické procesy ve finanční matematice

Doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Kapitola 1

Základy teorie pravděpodobnosti

Hlavním cílem tohoto kurzu je se seznámit se základními metodami analýzy stochastických procesů, používaných v modelech matematické teorie financí.

Matematické modely ve financích jsou z velké většiny stochastické. Základním nástrojem který vzužívají je tedy teorie pravděpodobnosti. V této kapitole připomeneme některé základní pojmy a techniky z teorie pravděpodobnosti, tak jak je budeme v dalších kapitolách potřebovat.

1.1 Motivace

Uvažujme jako příklad cenu jedné akcie firmy Citi Bank dne 1. 2. 2012. Dnes, 9. 1. 2012, je pro nás tato cena neznámá, a modelujeme ji tedy jako náhodnou veličinu. Ovšem za měsíc, 9. 2. 2012, již bude známou hodnotou (konstantou). Pro matematické modelování ve financích je typická tato "mezihra" náhodných a známých, veličin, kterou se zabývá teorie stochastických procesů.

Uvažujme množinu (posloupnost) náhodných veličin X_t, $t \in I$ (X_t je tedy stochastický proces).

Je-li X_t cena zvolené akcie v čase t, pak zřejmě X_t, X_{t+1} nejsou nezávislé náhodné veličiny. Hodnota X_t něco říká o pravděpodobnostním rozdělení náhodné veličiny X_{t+1}. Na druhé straně, přírustky $X_{t+2} - X_{t+1}$ a $X_{t+1} - X_t$ budou ve většině našich modelů nezávislé. To úzce souvisí s hypotézou efektivního trhu, která říká: Všechny informace dostupné v čase t jsou již obsaženy v ceně X_t. Jak uvidíme, je to také jedním z hlavních argumentů proč je Brownův pohyb "přirozeným " modelem vývoje cen akcií.

1.2 Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti je hlavním nástrojem matematických modelů ve financích. Je dobré si uvědomit hned na začátku že pojem pravděpodobnost má více možných interpretací.

1. Frekventistický přístup: Pravděpodobnost jevu je limita jeho relativní četnosti při velkém počtu opakování téhož experimentu. Nevýhodou této definice je omezení na opakovatelné jevy. Předpoklad opakovatelnosti konkrétní situace na trhu není ve financích úplně reálný.

2. Bayesovský přístup[1]: Pravděpodobnost vyjadřuje míru naší nejistoty v pravdivost nějakého tvrzení, založenou na informacích, které v danou chvíli máme. V tomto pojetí je každá pravděpodobnost ve skutečnosti podmíněná (informacemi které právě máme). Například pravděpodobnost padnutí šestky na kostce je $P(X = 6) = \frac{1}{6}$, pokud nemáme žádnou informaci o tom jak je kostka vyrobena. Budeme-li znát například přesné složení materiálu (nehomogenost dřeva), může se tato pravděpodobnost změnit.

Matematická technika výpočtů nicméně na interpretaci ve většině případů nezávisí a je stejná pro obě pojetí.

1.3 Opakování základních pojmů teorie pravděpodobnosti

Pravděpodobnostní prostor (model) obvykle označujeme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde

– Ω je prostor elementárních jevů, t.j. všechny možné stavy modelovaného systému které chceme rozlišovat (např. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ u hodu kostkou).

– $\mathcal{A}$ je množina všech pozorovatelných jevů. Prvky$\mathcal{A}$ jsou podmnožiny Ω. Jev je tedy formálně vzato množina elementárních jevů, které jsou s ním slučitelné. (Například jev padne sudé číslo je množina $\{2, 4, 6\}$)

Je-li Ω konečné nebo spočetné (tak tomu bude u všech diskrétních modelů), je $\mathcal{A}$ v definici pravděpodobnostního prostoru nadbytečná, neboť automaticky $\mathcal{A}$ je rovno $\exp \Omega$, množině všech podmnožin Ω.

– $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ je pravděpodobnostní míra. V diskrétním případě stačí

[1] Tento přístup je historicky starší, pochází od Laplace a Bayese.

znát hodnoty této míry na elementárních jevech, tedy $P : \Omega \to \langle 0, 1 \rangle$. $P(\omega)$ je pak pravděpodobnost elementárního jevu ω, a pro obecný jev $A \in \mathcal{A}$ platí

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Pokud je ale Ω nespočetná, pak $\exp \Omega$ má příliš velkou mohutnost, aby se na ní dala definovat pravděpodobnostní míra. Musíme se pak omezit na menší σ-algebru. S tím se setkáme až u spojitých modelů.

1.4 Diskrétní náhodné proměnné

Diskrétní náhodná proměnná je funkce

$$X : \Omega \to \{x_1, x_2, ...\} \subseteq \mathbb{R},$$

kde $\{x_1, x_2, ...\}$ je diskrétní podmnožina $\mathbb{R}$.

Definice 1.4.1. Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je

$$f(x) = P(X = x).$$

Definice 1.4.2. distribuční funkce náhodné veličiny X je definována jako

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Připomeňme si ještě definici nezávislosti dvou jevů.

Definice 1.4.3. Jevy A, $B \subseteq \Omega$ jsou nezávislé, jestliže

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

tj.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Jinak řečeno (podle prvního vztahu) víme-li že nastal jev B, nezmění to pravděpodobnost jevu A.

Definice 1.4.4. Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou ***nezávislé***, jestliže jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ jsou nezávislé pro všechna x a y.

Jinými slovy, znalost hodnoty X nedává žádnou informaci o hodnotě Y.

Pravděpodobnostní funkce obsahuje všechny informace o náhodné veličině. Často nám ale stačí číselné charakteristiky.

Definice 1.4.5. ***Očekávání*** (střední hodnota) náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $f(x)$ je definována jako

$$E(X) = \sum_{x:\, f(x)>0} x f(x),$$

je-li řada absolutně konvergentní.

Očekávání můžeme vypočítat také pomocí vztahu:

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) P(\omega)$$

Definice 1.4.6. Je-li k přirozené číslo, ***k-tý moment*** m_k náhodné veličiny X je definován jako

$$m_k = E(X^k).$$

Definice 1.4.7. ***k-tý centrální moment*** σ_k je definován jako

$$\sigma_k = E((X - m_k)^k).$$

Speciálně,

$$m_1 = E(X)$$

je střední hodnota a

$$\sigma_2 = E((X - E(X))^2)$$

je rozptyl (variance) Tedy $\sigma_2 = \sigma^2$, kde $\sigma = \sqrt{\sigma_2}$ je střední směrodatná odchylka.

Definice 1.4.8. Nechť A je jev, tj. $A \subseteq \Omega$, a nechť $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina definovaná vztahem

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A \end{cases}.$$

Pak I_A se nazývá ***indikátorová funkce*** jevu A.

Libovolnou náhodnou veličinu můžeme zapsat pomocí indikátorových funkcí jevů $A_i = \{X = x_i\}$. Máme

$$X = \sum_i x_i I_{A_i}.$$

I_A je příkladem Bernoulliovské náhodné veličiny. Nabývá pouze hodnot 0 a 1.

1.5 Závislost a nezávislost náhodných veličin

Lemma 1.5.1. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Potom*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Důkaz: Označme $A_x = \{X = x\}$ a $B_y = (Y = y)$. Pak

$$XY = \sum_{x,y} xy I_{A_x \cap B_y},$$

tedy

$$E(XY) = \sum_{x,y} xyE(I_{A_x \cap B_y}) = \sum_{x,y} xyP(A_x \cap B_y) =$$

$$\sum_{x,y} xyP(A_x)P(B_y) = (\sum_x xP(A_x))(\sum_y yP(B_y)) = E(X)E(Y).$$

Opak obecně neplatí.

Definice 1.5.2. Říkáme, že náhodné veličiny X a Y jsou ***nekorelované***, jestliže platí:

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Věta 1.5.3. *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny. Pak*

1. $Var(aX) = a^2 Var(X)$ *pro* $a \in \mathbb{R}$.
2. *Jsou-li X a Y nekorelované (speciálně nezávislé) náhodné veličiny, pak*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Důkaz: První tvrzení plyne ihned z definice. Dokážeme druhé tvrzení.

$$
\begin{gathered}
Var(X+Y) = E\left([(X+Y)-E(X+Y)]^2\right) = \\
E\left[(X+Y)^2 - 2(X+Y)E(X+Y) + E^2(X+Y)\right] = \\
E(X+Y)^2 - 2E(X+Y)E(X+Y) + E^2(X+Y) = \\
= E(X+Y)^2 - 2(E(X)+E(Y))^2 + E^2(X+Y) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\
-2\left[(E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2\right] + E^2(X) + 2E(XY) + E^2(Y) \\
= E(X^2) + E(Y^2) + 4E(XY) - (E(X))^2 - 4E(X)E(Y) - (E(Y))^2 \\
= E(X^2) + E(Y^2) + 4E(X)E(Y) - (E(X))^2 - 4E(X)E(Y) - (E(Y))^2 = \\
\left(E(X^2) - (E(X))^2\right) + \left(E(Y^2) - (E(Y))^2\right) = Var(X) + Var(Y)
\end{gathered}
$$

Definice 1.5.4. ***Kovariance*** náhodných veličin X a Y je definována jako

$$cov(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right].$$

Korelační koeficient X a Y je

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Platí:

$$\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow cov(X,Y) = 0$$

a

$$cov(X,Y) = E(XY) = E(X)E(Y).$$

Dále je

$$|\rho(X,Y)| \leq 1.$$

Klíčová otázka z praktického hlediska je jak ověřit nezávislost dvou daných náhodných veličin. Definice k tomu vhodná není.

Definice 1.5.5. Nechť X a Y jsou diskrétní náhodné veličiny (na stejném pravděpodobnostním prostoru). *Sdružená distribuční funkce* X a Y je definovaná vztahem

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y).$$

Definice 1.5.6. ***Sdružená pravděpodobnostní funkce***: $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to$

$[0,1]$ je definovaná vztahem

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x \wedge Y = y).$$

Analogicky pro více náhodných veličin. Následující lemma dává dobře ověřitelné kriterium nezávislosti.

Lemma 1.5.7. *Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy když*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Důkaz: cvičení.

Ze znalosti sdružené pravděpodobnostní funkce $f_{X,Y}$ můžeme vypočítat ***marginální pravděpodobnostní funkce*** f_X a f_Y. Máme

$$\begin{aligned} f_X(x) = P(X = x) &= P(\bigcup_y (\{X = x\} \cap \{Y = y\})) \\ &= \sum_y P(X = x \wedge Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x,y). \end{aligned}$$

Příklad 1.5.8. Nechť $X : \Omega \to \{1,2,3\}$a $Y : \Omega \to \{-1,0,2\}$ jsou náhodné veličiny, a sdružená pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou:

	$y=-1$	$y=0$	$y=2$	f_X
$x=1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{6}{18}$
$x=2$	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$
$x=3$	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$
f_Y	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{18}{18}$

Jsou X a Y nezávislé? - Nejsou v tom případě by řádky musely být násobkem jeden druhého. Vypočteme kovarianci těchto dvou náhodných veličin. Máme

$$XY : \Omega \to \{-1, 0, -2, -3, 2, 4, 6\}.$$

Dále

$$E(X) = \frac{1}{18} + \frac{10}{18} + \frac{21}{18} = \frac{37}{18}, \quad E(Y) = \frac{13}{18}$$

a

$$E(XY) = -1\frac{1}{18} + 2\frac{2}{18} - 2\frac{2}{18} + 4\frac{3}{18} + 6\frac{3}{18} = \frac{29}{18}$$

Celkem tedy

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{29}{18} - \frac{481}{324} = \frac{522-481}{324} = \frac{41}{324}.$$

1.6 Podmíněná pravděpodobnost a podmíněné očekávání

Připomeňme definici podmíněné pravděpodobnosti pro jevy,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ve finančních modelech je obvykle každá pravděpodobnost podmíněná informací, kterou máme v danou chvíli.

Definice 1.6.1. Podmíněná pravděpodobnostní funkce Y za podmínky $X = x$, označená $f_{Y|X}(. \mid x)$, je definována jako

$$f_{Y|X}(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x),$$

pro každé x takové, že $P(X = x) > 0$.

Máme

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(Y = y \wedge X = x)}{P(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

tedy

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

analogický tvar jako platí pro jevy.

V předchozím příkladu máme pro $x = 1$

$$f_{Y|X}(y \mid 1) \sim \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}\right) = \frac{f_{X,Y}}{f_X}.$$

Víme-li, že $X = x$, pak Y má novou pravděpodobnostní funkci $f_{Y|X}(y \mid x)$ jakožto funkci y (x je pevné).

Očekávání vůči této funkci je podmíněné očekávání Y za podmínky $X = x$, které označíme $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$.

Definice 1.6.2. Funkce (tj. náhodná veličina)

$$\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$$

se nazývá ***podmíněné očekávání*** Y při znalosti X.

V minulém příkladu je:

$$\Psi(1) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{3}{6}0 + \frac{2}{6}2 = \frac{1}{2},$$

$$\Psi(2) = \frac{-2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

a $\Psi(3) = \frac{6}{7}$.

Věta 1.6.3. *Pro podmíněné očekávání* $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$ *platí*

$$E(\Psi(x)) = E(Y).$$

Důkaz: cvičení.

1.7 Součty náhodných veličin

Lemma 1.7.1. *Nechť* X *a* Y *jsou dvě náhodné veličiny na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* $f(x, y)$ *je jejich sdružená pravděpodobnostní funkce. Pak pro jejich součet* $Z = X + Y$ *platí*

$$P(X + Y = z) = \sum_x f(x,\, z - x).$$

Důkaz: Máme

$$\{X + Y = z\} = \bigcup_x (\{X = x \wedge Y = z - x\})$$

tedy

$$P(X + Y = z) = \sum_x P(\{X = x\} \wedge \{Y = z - x\}) = \sum_x f(x,\, z - x).$$

Pokud X, Y jsou nezávislé, pak

$$f_{X,Y}(x,\, z-x) = f_X(x) f_Y(z-x),$$

tedy

$$f_{X+Y}(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z-x),$$

což je ***konvoluce funkcí*** f_X a f_Y. Označuje se $f_X \star f_Y$.

Kapitola 2

Jednoduchá náhodná procházka

2.1 Náhodná procházka

Jednoduchá náhodná procházka je základem diskrétních modelů pro pohyb cen aktiv. Je to "diskrétní verze" Brownova pohybu.

Uvažujme následující hru: Hází se opakovaně mincí (ne nutně férovou). Padne-li hlava (H), získáme 1 Kč. Padne-li orel (O), prohrajeme 1 Kč. Označme:

S_0 … suma, kterou máme na začátku,

S_n … suma, kterou máme po n hrách.

Je tedy

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde X_i je náhodná veličina popisující výsledek i-té hry. Předpokládáme, že pravděpodobnostní funkce X_i je

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = 1 - p = q$$

pro všechna i a navíc X_i jsou nezávislé.

X_i jsou tedy analogií Bernoulliho náhodné veličiny, kde místo hodnot $\{1, 0\}$ máme $\{1, -1\}$. Pro každé pevné n je S_n náhodná veličina, tedy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stochastický proces.

Definice 2.1.1. Stochastický proces $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá ***jednoduchá náhodná procházka***. Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, nazývá se ***symetrická*** jednoduchá náhodná procházka.

Někdy je vhodnější uvažovat jinou interpretaci – náhodný pohyb částice po přímce: V každém kroku $t = 0, 1, 2, \ldots$ se částice posune buď o 1 doprava s pravděpodobností p nebo o 1 doleva s pravděpodobností $q = 1 - p$.

Velmi užitečné je *grafické znázornění* jednoduché náhodné procházky. Body o souřadnicích (n, S_n) spojíme úsečkami. Vzniklá lomená čára se nazývá ***trajektorie*** (cesta) náhodné procházky. Trajektorie je grafické znázornění realizace náhodného procesu $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Varianty náhodné procházky:

- jiné rozdělení X_i (např. normální)
- hodnoty X_i ne v $\mathbb{R}$ ale v $\mathbb{R}^d$ … vícerozměrná náhodná procházka

2.2 Základní vlastnosti náhodné procházky

Lemma 2.2.1. *Jednoduchá náhodná procházka je* ***prostorově homogenní****, tedy platí*

$$P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_n = j + b \mid S_0 = a + b).$$

Důkaz: Obě strany rovnosti jsou rovny $P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a)$.

Analogicky platí i časová homogenita.

Lemma 2.2.2. *Jednoduchá náhodná procházka je* ***časově homogenní****, neboli platí*

$$P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_{n+m} = j \mid S_m = a).$$

Důkaz: Levá strana je rovna

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a),$$

pravá strana je rovna

$$P(\sum_{i=m}^{n+m} X_i = j - a).$$

Rovnost tedy plyne z nezávislosti a stejného rozdělení X_i.

Lemma 2.2.3. *Jednoduchá náhodná procházka má* ***Markovovu vlastnost****, tedy*

$$P(S_{m+n} = j \mid S_0, S_1, ..., S_m) = P(S_{m+n} = j \mid S_m).$$

Důkaz: Známe-li hodnotu S_m, pak rozdělení pravděpodobnosti S_{n+m} závisí jen na krocích X_{m+1}, X_{m+2}, ..., X_{m+n}, tedy je nezávislé na S_0, S_1, ..., S_{m-1}.

Markovovu vlastnost lze intuitivně popsat slovy “Náhodná procházka nemá paměť.” nebo “Minulost ovlivňuje budoucnost jen skrze současnost.”

2.3 Základní techniky pro počítání s náhodnou procházkou

Tato sekce se věnuje základním technikám počítání s náhodnou procházkou:

- podmínění 1. krokem
- počítání trajektorií
- generující funkce

2.3.1 Technika podmínění 1. krokem

Příklad 2.3.1. (zruinování hráče): Uvažujme předchozí hru s férovou mincí ($p = \frac{1}{2}$). Padne-li hlava (H), hráč získá 1 Kč, padne-li orel (O), hráč prohraje 1 Kč. Nechť $S_0 = k$ je jeho počáteční jmění. Hráč si chce koupit auto v ceně N. Bude hrát tak dlouho, dokud $S_n = N$ (koupí auto) nebo $S_n = 0$ (bankrot). Jaká je pravděpodobnost, že si hráč koupí auto?

Uvažujme jevy:
A … hráč nakonec zbankrotuje;
H … první hod je hlava ($P(\mathbf{H}) = p$);
O … první hod je orel ($P(\mathbf{O}) = q$).
Podle věty o úplné pravděpodobnosti:

$$P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H})P(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O})P(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

Označme $P_k(\mathbf{A})$ hledanou pravděpodobnost bankrotu pro dané počáteční jmění k, tedy

$$P_k(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H})P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O})P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H})$ je ale pravděpodobnost bankrotu v situaci, kdy hráč po 1. kroku má $k+1$ (a hra začíná znovu; z nezávislosti X_i). Tedy

$$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) = P_{k+1}(\mathbf{A})$$

a podobně

$$P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}) = P_{k-1}(\mathbf{A}).$$

Označme $p_k = P_k(\mathbf{A})$. Dosazením dostaneme

$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1} = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$$

což je diferenční rovnice 2. řádu. Máme

$$\frac{1}{2}(p_{k+1} - p_k) = \frac{1}{2}(p_k - p_{k-1}),$$

tedy přírůstky pravděpodobnosti jsou konstantní. Označme přírůstky $b = p_k - p_{k-1}$, tedy $p_k = p_0 + kb$. Okrajové podmínky pro diferenční rovnici jsou:

$p_0 = 1$...okamžitý bankrot

$p_N = 0$...okamžitá koupě auta

Odtud dostaneme $1 + Nb = 0$, tedy $b = -\frac{1}{N}$ a $p_k = 1 - \frac{k}{N}$.

Pro $p \neq \frac{1}{2}$ musíme vyřešit diferenční rovnici.

2.3.2 Technika počítání trajektorií

Uvažujme náhodnou procházku vycházející z bodu a. Tedy $S_0 = a$, $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = q$, a

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pro pevně danou cestu je pravděpodobnost, že prvních n kroků bude sledovat tuto trajektorii, rovna $p^r q^l$, kde r je počet kroků doprava (nahoru) a l je počet kroků doleva (dolů), tedy

$$r = \mid \{i : S_{i+1} - S_i = 1, i \leq n\} \mid,$$

kde $\mid . \mid$ značí velikost množiny.

Každý jev můžeme vyjádřit pomocí vhodné množiny trajektorií (které jsou s ním v souladu), a jeho pravděpodobnost je součet pravděpodobností těchto trajektorií. Máme

$$P(S_n = b) = \sum_r M_n^r(a,b) p^r q^{n-r},$$

kde $M_n^r(a,b)$ je počet cest (S_0, S_1, ..., S_n) takových, že $S_0 = a$, $S_n = b$, a majících přesně r kroků doprava.

Víme, že $r + l = n$ a $r - l = b - a$, odtud $2r = n + b - a$, tj.

$$r = \frac{n+b-a}{2}$$

a

$$l = \frac{n-b+a}{2}.$$

Tedy

$$P(S_n = b) = \binom{n}{r} p^{\frac{n+b-a}{2}} q^{\frac{n-b+a}{2}} = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)} p^{\frac{n+b-a}{2}} q^{\frac{n-b+a}{2}},$$

pokud $\frac{1}{2}(n + b - a) \in \mathbb{N}$ (jinak je pravděpodobnost rovna 0).

V následujícím textu se budeme zabývat otázkami: Kdy se náhodná procházka dostane poprvé do dané hodnoty? Jakou největší hodnotu nabývá do času n?

2.3.3 Princip reflexe

Označme $N_n(a,b)$ počet všech cest z bodu $(0,a)$ do bodu (n,b). Víme, že

$$N_n(a,b) = M_n^r(a,b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)}.$$

Dále nechť $N_n^0(a,b)$ je počet všech cest z bodu $(0,a)$ do bodu (n,b), které obsahují nějaký bod $(k,0)$ na ose x, tj. navštíví bod 0.

Věta 2.3.2. ***(princip reflexe)**: Je-li a, $b > 0$ pak platí*

$$N_n^0(a,b) = N_n(-a,b).$$

Důkaz: Každá cesta z bodu $(0,-a)$ do (n,b) protne osu x poprvé v nějakém bodě $(k,0)$. Reflexí této cesty okolo osy x dostaneme cestu z bodu $(0,a)$

do (n, b), která navštíví osu x. Tato operace dává vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi cestami z $(0, -a)$ do (n, b) a cestami $(0, a)$ do (n, b), které navštíví osu x. Tedy $N_n^0(a, b) = N_n(-a, b)$.

Věta 2.3.3. *(**o volbách**): Je-li $b > 0$, pak počet cest z bodu $(0, 0)$ do bodu (n, b), které se nevrátí do bodu 0 je*

$$\frac{b}{n} N_n (0, b) ,$$

kde $N_n (0, b)$ je počet všech cest z bodu $(0, 0)$ do bodu (n, b).

Důkaz: Pro všechny takové cesty je první krok bod $(1, 1)$ (jinak se nutně dostaneme do nuly), tedy jejich počet je roven (z časové homogenity):

$$\begin{aligned} &N_{n-1} (1, b) - N_{n-1}^0 (1, b) = N_{n-1} (1, b) - N_{n-1} (-1, b) = \\ = &\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-1+b-1)} - \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+b)} = \binom{n-1}{m-1} - \binom{n-1}{m} \\ &= \frac{b}{n}\binom{n}{m} = \frac{b}{n} N_n (0, b) , \end{aligned}$$

kde jsme označili $m = \frac{1}{2}(n + b)$.

Příklad 2.3.4. (*Úloha o volbách*) Kandidát A má α hlasů; kandidát B dostal β hlasů, kde $\alpha > \beta$, tj. kandidát A zvítězil. Jaká je pravděpodobnost, že během voleb byl A celou dobu před B?

Označme $X_i = 1$ je-li i-tý hlas pro A, $X_i = -1$ je-li i-tý hlas pro kandidáta B. Je tedy $n = \alpha + \beta$.

Součet $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ popisuje o kolik vede A nad B v čase k (případně prohrává je-li $S_k < 0$).

Podle věty o volbách je trajektorií z bodu $(0, 0)$ do bodu $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, které se nedostanou do 0 přesně

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} N_{\alpha+\beta} (0, \alpha - \beta) .$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} N_{\alpha+\beta} (0, \alpha - \beta)}{N_{\alpha+\beta} (0, \alpha - \beta)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

Nyní se budeme zajímat o to, jaká je pravděpodobnost, že se náhodná procházka nevrátí do 0. Máme $S_0 = 0$ a chceme $S_1 \neq 0$, ..., $S_n \neq 0$, tedy ekvivalentně $S_1 S_2 ... S_n \neq 0$.

Věta 2.3.5. *Je-li $S_0 = 0$, pak pro $n \geq 1$ platí*

$$P(S_1 S_2 ... S_n \neq 0 \mid S_n = b) = \frac{\mid b \mid}{n} P(S_n = b),$$

tedy

$$P(S_1 S_2 ... S_n \neq 0) = \frac{1}{n} E(S_n).$$

Důkaz: cvičení

2.3.4 Generující funkce

Uvažujeme posloupnost reálných čísel

$$a = \{a_i;\, i = 0,\, 1,\, 2,\, ..\}\,.$$

Taková posloupnost obsahuje velké množství informace, kterou můžeme výhodně "zakódovat" do jediného objektu (funkce), s nímž budeme moci lépe pracovat. Speciálně získáme možnost použít operace (např. derivaci) které pro posloupnosti nemají smysl.

Definice 2.3.6. ***Generující funkce posloupnosti*** a je funkce daná součtem mocninné řady

$$G_a(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$$

pro $s \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje.

Posloupnost a dostaneme z generující funkce G_a zpět vztahem

$$a_i = \frac{G_a^{(i)}(0)}{i!},$$

kde $G_a^{(i)}(0)$ je i-tá derivace G_a v bodě 0.

Příklad 2.3.7. Nechť $a = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, ...\}$ Pak

$$G_a = s - s^3 + s^5 - s^7 + ...$$

což je geometrická řada s prvním členem s a s kvocientem $q = -s^2$. Tedy

$$G_a(s) = s \frac{1}{1+s^2} = \frac{s}{1+s^2}$$

pro $\mid s \mid < 1$ (obor konvergence).

Definujeme generující funkci diskrétní náhodné veličiny.

Definice 2.3.8. Nechť X je diskrétní náhodná veličina, která nabývá hodnoty v množině $\{0, 1, 2, ...\}$ s pravděpodobnostní funkcí

$$f(i) = P(X = i).$$

Generující funkce této ***náhodné veličiny*** je definovaná jako generující funkce její pravděpodobnostní funkce, tedy

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)s^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i)s^i.$$

Platí

$$G_X(s) = E(s^X).$$

Základní vlastnosti generujících funkcí:

1. Existuje nezáporné číslo R (poloměr konvergence) takové, že $G(s)$ konverguje pro $\mid s \mid < R$ a diverguje pro $\mid s \mid > R$.
2. $G(s)$ můžeme derivovat nebo integrovat člen po členu, libovolně mnohokrát, pro $\mid s \mid < R$.
3. Jednoznačnost: Je-li $G_a(s) = G_b(s)$ pro $\mid s \mid < R$, kde $0 < R' \leq R$, pak $a_n = b_n$ pro všechna n.

Příklady generujících funkcí náhodných veličin:

1. Konstantní náhodná veličina: $P(X = c) = 1$, tedy

   $$G_X(s) = 1s^c = s^c,$$

   kde $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Bernoulliho náhodná veličina: $P(X = 1) = p$; $P(X = 0) = 1 - p$, tedy

   $$G_X(s) = ps^1 + (1 - p)s^0 = 1 - p + ps.$$

3. Geometrické rozdělení: $P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$, tedy

   $$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)s^i = \sum_{n=1}^{\infty} p(1 - p)^{n-1}s^n = \sum_{n=1}^{\infty} ps\,[(1 - p)s]^{n-1} =$$

   $$= ps\sum_{n=0}^{\infty} [(1 - p)s]^n = \frac{sp}{1 - (1 - p)s} = \frac{sp}{1 - s + sp}.$$

4. Poissonovo rozdělení s parametrem λ: $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, tedy

$$G_X(s)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}s^i=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^i}{i!}=e^{-\lambda}e^{\lambda s}=e^{\lambda s-\lambda}=e^{\lambda(s-1)}$$

(využili jsme $\sum\frac{x^n}{n!}=e^x$).

2.3.5 Charakteristiky náhodných veličin a jejich generující funkce

:

$E(X)$ a $Var(X)$ lze jednoduše spočítat pomocí $G_X(s)$.

Věta 2.3.9. *Nechť X je náhodná veličina s generující funkcí $G(s)$. Pak platí:*

1. $E(X)=G'_X(1)$
2. *obecně*
$$E(X(X-1)...(X-k+1))=G^{(k)}(1)$$
(tzv. k-tý faktoriální moment)

Důkaz: První tvrzení je speciální případ druhého. Máme

$$G^{(k)}(s)=\sum_i s^{i-k}i(i-1)...(i-k+1)f(i)=$$

$$=E(s^{X-k}X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro $s\to 1$ dostaneme

$$G_X(1)=E(X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro rozptyl dostaneme speciálně vztah

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(X(X-1)+X)-E(X)^2=$$

$$=E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2=G''_X(1)+G'_X(1)-\left[G'_X(1)\right]^2.$$

2.3.6 Součty náhodných veličin a konvoluce

Něchť $a = \{a_i,\ i \geq 0\}$ a $b = \{b_i,\ i \geq 0\}$ jsou dvě posloupnosti, pak konvoluce $c = a \star b$ je posloupnost definovaná vztahem

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0.$$

Jsou-li G_a, G_b generující funkce posloupností a a b, pak generující funkce posloupnosti c je

$$G_c(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) s^n =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \right) \left(\sum_{n=i}^{\infty} b_{n-i} s^{n-i} \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n \right) = G_a(s) G_b(s).$$

Tím jsme dokázali následující tvrzení.

Věta 2.3.10. *Generující funkce konvoluce dvou posloupností je součinem generujících funkcí těchto posloupností.*

Věta 2.3.11. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s).$$

Důkaz: Víme, že pro pravděpodobnostní funkci $X+Y$ platí $f_{X+Y} = f_X \star f_Y$ (z nezávislosti) a podle předchozí věty víme, že generující funkce konvoluce je součin generujících funkcí. Tedy

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

Je-li tedy $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$, kde X_i jsou nezávislé, pak

$$G_S = G_{X_1} G_{X_2} ... G_{X_n}.$$

Definice 2.3.12. ***Sdružená pravděpodobnostní generující funkce náhodných veličin***, nabývajících hodnot v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, je definovaná jako

$$G_{X_1, X_2}(s_1, s_2) = \sum P\left(X_1 = i \,\wedge\, X_2 = j\right) s_1^i s_2^J = E(s_1^{X_1} s_2^{X_2})$$

Analogicky pro více náhodných veličin.

2.3.7 Generující funkce a náhodná procházka

Uvažujme opět náhodnou procházku:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde $P(X_i = 1) = p$ a $P(X_i = -1) = q = 1 - p$. Přitom X_i jsou nezávislé a $S_0 = 0$.

Jak často se náhodná procházka vrací do počátku? Jaké je pravděpodobnostní rozdělení prvního návratu do počátku? (Pro další návraty je to opět totéž, z nezávislosti X_i.)

K zodpovězení těchto otázek využijeme generující funkce.

Označme

$$p_0(n) = P(S_n = 0)$$

pravděpodobnost, že náhodná procházka je v 0 v čase n,

$$f_0(n) = P(S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0,\ ...,\ S_{n-1} \neq 0,\ S_n = 0)$$

pravděpodobnost, že první návrat do počátku nastal v čase n.

Uvažujme generující funkce těchto dvou posloupností,

$$P_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n$$

a

$$F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n) s^n.$$

Máme $p_0(0) = 1$ (neboť $S_0 = 0$) a $f_0(0) = 0$.

Lemma 2.3.13. *Platí*

$$P_0(s) = \left(1 - 4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Důkaz: Víme, že $S_n = 0 \Leftrightarrow$ počet kroků doprava = počet kroků doleva, tedy $r = \frac{n}{2} = l$. Počet takových cest je $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ pro n sudé a 0 pro n liché. Označme $k = \frac{n}{2}$, tj. $n = 2k$. Máme

$$p_0(2k) = \binom{2k}{k} p^k q^k$$

a

$$P_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pqs^2)^k. \tag{2.1}$$

Tvrdíme, že $P_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$. Využijeme obecného binomického rozvoje

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^a,$$

kde

$$\binom{a}{n} = \frac{a\,(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$$

(pro $a \in \mathbb{N}$ je rozvoj konečný, pro $a \in \mathbb{R} \wedge a \notin \mathbb{N}$ je rozvoj nekonečný) Pro $a = -\frac{1}{2}$ a $x = -4pqs^2$ dostaneme

$$\left(1 - 4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-4pqs^2\right)^k = \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4)^k \left(pqs^2\right)^k$$

Porovnáním 2.1 a 2.2 tedy stačí dokázat, že

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4)^k = \binom{2k}{k}.$$

Pro levou stranu dostaneme

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} (-1)^k \cdot 2^{2k} =$$

$$2^k \cdot (-1)^{2k} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{k!} = 2^k \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{k!}.$$

Pro pravou stranu

$$\binom{2k}{k} = \frac{2k\,(2k-1)\,(2k-2)\ldots 1}{k! \cdot k!} = 2^k \cdot k! \cdot \frac{(2k-1)\,(2k-3)\ldots 3 \cdot 1}{k! \cdot k!} =$$

$$2^k \cdot \frac{(2k-1)\,(2k-3)\ldots 3 \cdot 1}{k!}.$$

Tedy l.s. = p.s. Tím je lemma dokázáno.

Věta 2.3.14. *Platí:*

$$1) P_0(s) = 1 + P_0(s) \cdot F_0(s)$$

a

$$2) F_0(s) = 1 - \left(1 - 4pqs^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Důkaz: Označme A jev, že $\{S_n = 0\}$ a nechť B_k jsou jevy první návrat do počátku nastal v k-tém kroku ($k = 1, 2, ..., n$).

1) B_k jsou disjunktní a dávají rozklad, tedy

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) \cdot P(B_k).$$

Máme $P(B_k) = f_0(k)$ a $P(A \mid B_k) = p_0(n-k)$. Tedy

$$p_0(n) = \sum_{k=1}^{n} p_0(n-k) \cdot f_0(k).$$

Vynásobíme s^n a sečteme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) \cdot s^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} p_0(n-k) \cdot f_0(k) \cdot s^n =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_0(k) \cdot s^k\right)\left(\sum_{n=k}^{\infty} p_0(n-k) \cdot s^{n-k}\right) = P_0(s) \cdot F_0(s).$$

Jelikož

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) \cdot s^n = P_0 - 1,$$

dostáváme $P_0 - 1 = P_0 \cdot F_0$, tedy $P_0 = 1 + P_0 \cdot F_0$.

Pro důkaz 2) dostáváme z 1)

$$F_0 = \frac{P_0 - 1}{P_0} = 1 - \frac{1}{P_0} = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}.$$

■

Důsledek 2.3.15. Pravděpodobnost toho, že se částice někdy vrátí do počátku je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = F_0(1) = 1 - \mid p - q \mid.$$

Speciálně, pro symetrickou náhodnou procházku ($p = q$) je návrat jistý.

Důsledek 2.3.16. Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, tedy návrat je jistý, pak očekávání času prvního návratu do počátku je

$$E(T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot F_0(n) = F_0'(1) = \infty.$$

Důkaz:

1. Máme

$$F_0(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} = 1 - \sqrt{1 - 4p + 4p^2} =$$

$$= 1 - \sqrt{(1-2p)^2} = 1 - \mid 1 - 2p \mid = 1 - \mid 1 - p - p \mid = 1 - \mid q - p \mid .$$

Pro $q = p = \frac{1}{2}$ je $F_0(1) = 1 - 0 = 1$.

2. Je-li návrat jistý, tedy $p = \frac{1}{2}$, pak $P(T_0 = \infty) = 0$, a tedy $E(T_0) = F_0'(1)$, kde $F_0 = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}$. Máme

$$F_0' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqs^2}} \cdot (-4pq2s) = \frac{4pqs}{\sqrt{1 - 4pqs^2}},$$

tedy $\lim_{s \to 1_-} F'(s) = +\infty$.

Dokázali jsme tedy následující tvrzení.

Věta 2.3.17. ***(Pólyova věta)****: Symetrická náhodná procházka se s pravděpodobností 1 vrátí do počátku.*

2.3.8 Časy navštívení bodu r

Označme

$$f_r(n) = P(S_1 \neq r,\ S_2 \neq r,\ ...,\ S_{n-1} \neq r,\ S_n = r)$$

pravděpodobnost, že se náhodná procházka dostane poprvé do bodu r v čase n, s generující funkcí

$$F_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_r(n) \cdot s^n.$$

Věta 2.3.18. *Platí:*

1. $F_r(s) = [F_1(s)]^r$ *pro* $r \geq 1$,

2. $F_1(s) = \frac{1-\left(1-4pqs^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2qs}$.

Důkaz: Označme $T_r = min\,\{n;\ S_n = r\}$ počet kroků potřebných k dosažení hodnoty r poprvé. Nechť $r > 0$. Abychom dosáhli r, musíme se dostat nejdříve do bodu 1, a potom z bodu 1 do bodu r. To je z prostorové homogenity totéž jako dostat se z 0 do $r-1$. Odtud plyne $T_r = T_1 + T_{r-1}$. Navíc T_1 a T_{r-1} jsou nezávislé, tedy platí $F_r = F_1 \cdot F_{r-1}$. Máme

$$f_1(n) = P(S_1 \neq 1,\ S_2 \neq 1,\ ...,\ S_{n-1} \neq 1,\ S_n = 1) = P(A) =$$

$$= P(A \mid S_1 = 1) \cdot P(S_1 = 1) + P(A \mid S_1 = -1) \cdot P(S_1 = -1) =$$
$$= P(A \mid S_1 = 1) \cdot p + P(A \mid S_1 = -1) \cdot q = 0 \cdot p + f_2(n-1) \cdot q.$$

Odtud

$$f_1(n) = f_2(n-1) \cdot q.$$

Vynásobíme s^n a sečteme

$$f_1(n) \cdot s^n = q \cdot f_2(n-1) \cdot s^n$$

pro $n > 1$. Tedy

$$\sum_{n=2} f_1(n) \cdot s^n = \sum_{n=2} q \cdot f_2(n-1) \cdot s^n =$$
$$\sum_{n=2} sq \cdot f_2(n-1) \cdot s^{n-1} = sq \sum_{n=1} f_2(n) \cdot s^n.$$

Odtud dostáváme

$$F_1 - ps = F_2 \cdot qs.$$

Víme, že $F_2 = F_1^2$, tedy

$$F_1 - ps = F_1^2 \cdot qs$$

což vede ke kvadratické rovnici

$$qs \cdot F_1^2 - F_1 + ps = 0.$$

Řešením dostaneme dva kořeny

$$F_1 = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{4qps^2}}{2qs} \\ \frac{1+\sqrt{4qps^2}}{2qs} \end{cases}$$

přitom ale kořen $\frac{1+\sqrt{4qps^2}}{2qs}$ nevyhovuje zadání, protože má v bodě 0 limitu ∞.

Důsledek 2.3.19. Pravděpodobnost, že náhodná procházka někdy navštíví kladnou část reálné osy, je rovna $min\left\{1, \frac{p}{q}\right\}$.

Důkaz: Hledaná pravděpodobnost je rovna pravděpodobnosti že náhodná procházka navštíví bod 1. Ta je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n),$$

součtu pravděpodobností, že se dostaneme do bodu 1 v nějakém čase n.

Víme, že

$$F_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n) \cdot s^n.$$

Dosazením $s = 1$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n) = F_1(1) = \frac{1-(1-4pq)^{\frac{1}{2}}}{2q} = \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2(1-p)} =$$

$$\frac{1-\sqrt{(1-2p)^2}}{2(1-p)} = \frac{1- \mid 1-2p \mid}{2(1-p)} = \frac{1- \mid q-p \mid}{2q} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1-(-(q-p))}{2q} = \frac{1-p+q}{2q} = \frac{2q}{2q} = 1 & \text{pro}\, q < p \\ \frac{1-q+p}{2q} = \frac{2p}{2q} = \frac{p}{q} & \text{pro}\, q > p \end{cases}.$$

Příklad 2.3.20. Ruleta má 37 čísel (včetně 0). Budeme vsázet stále na lichá čísla, tedy $p = \frac{18}{37}$ a $q = \frac{19}{37}$. Pravděpodobnost, že budeme někdy vyhrávat je $\frac{p}{q} = \frac{18}{19}$.

Kapitola 3

Diskrétní modely ve finanční matematice

V této kapitole se budeme věnovat 1-krokovým a vícekrokovým diskrétním modelům finančního trhu.

3.1 1-krokový model

Uvažujeme jednu pevně zvolenou akcii, a předpokládejme, že
– v čase $t = 0$ je cena akcie S_0 známá hodnota;
– v čase $t = 1$ je cena akcie S_1 náhodná veličina (neznámá hodnota).
Hodnota $S_1(\omega)$ je funkcí tržního scénáře $\omega \in \Omega$, kde

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$$

je prostor tržních scénářů

Dále předpokládejme, že existuje bezrizikové aktivum, jehož hodnota v čase $t = 0$ je rovna 1 a v $t = 1$ je rovna e^r za všech tržních scénářů. Hodnota r se nazývá bezriziková úroková míra. Předpokládáme, že r je úroková míra stejná jak pro půjčování, tak pro ukládání peněz.

1. příklad: ***Forwardová smlouva*** (uzavřená v čase $t = 0$): V čase $t = 1$ koupí X od Y jednu akcii za cenu F. Jaká je "správná" cena F?

Věta 3.1.1. *Jestliže neexistuje arbitráž, pak cena forwardové smlouvy je* $F = S_0 \cdot e^r$.

Arbitráží je míněna možnost jak si bez rizika zajistit zisk "z ničeho". Přesnou definici si uvedeme za chvilku.

Důkaz: Dokážeme, že jak $F > S_0 \cdot e^r$, tak $F < S_0 \cdot e^r$ vede k arbitráži.

1) Nechť $F > S_0 \cdot e^r$ (výhodné pro Y). Uvažujme následující strategii:

$t = 0 \ldots Y$ si vypůjčí v bance S_0, koupí akcii a uzavře forwardovou smlouvu na prodej akcie.

$t = 1 \ldots Y$ prodá akcii za F, do banky vrátí $S_0 \cdot e^r$.

Zůstane mu bezrizikový zisk $F - S_0 \cdot e^r > 0$, strategie tedy dává arbitráž.

2) Nechť $F < S_0 \cdot e^r$ (výhodné pro X) Uvažujme teď tuto strategii:

$t = 0 \ldots X$ prodá akcii na krátko (tedy vypůjčí si akcii – tzv. short-selling) za S_0, uloží výnos do banky a uzavře forwardovou smlouvu na koupi akcie.

$t = 1 \ldots X$ dostane z banky $S_0 \cdot e^r$, koupí akcii za F a vrátí ji (tj. uzavře krátkou pozici). Zůstane mu $S_0 \cdot e^r - F > 0$, tj. bezrizikový zisk. Opět je to arbitráž.

Tedy pokud neexistuje arbitráž, pak $F = S_0 \cdot e^r$.

2. příklad: ***Evropská call opce*** dává držiteli právo koupit akcii v čase $t = 1$ za cenu K (tzv. realizační cena opce). Kupec opce zaplatí v čase $t = 0$ za toto právo prodejci cenu V_0. Jaká je férová cena V_0? (V čase $t = 0$ neznáme S_1.)

Držitel opce ji uplatní, je-li $K < S_1$ (jinak koupí akcii levněji na trhu). Tedy hodnota v čase $t = 1$ je

$$V_1 = (S_1 - K)_+ = \begin{cases} S_1 - K & \text{pokud } S_1 > K \\ 0 & \text{pokud } S_1 \leq K \end{cases}.$$

Jaká je hodnota V_0? Předpokládejme, že existují dva možné tržní scénáře (ω_1, ω_2) a nechť pro $t = 1$ máme $S_1(\omega_1) = d_1$ a $S_1(\omega_2) = d_2$.

Chceme určit V_0, za předpokladů

1. $d_1 < K < d_2$
2. $d_1 \leq S_0 \cdot e^r \leq d_2$

(pro $S_0 \cdot e^r < d_1 < d_2$ dostaneme arbitráž). Uvažujme portfolio $(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3$, kde x_1 je počet aktiv peněžního trhu (bezrizikových), x_2 je počet akcií a x_3 počet opcí.

Hodnota portfolia v čase $t = 1$ za scénáře ω_1 je

$$y_1 = x_1 \cdot e^r + x_2 \cdot d_1 + 0 \cdot x_3$$

Hodnota portfolia v čase $t = 1$ za scénáře ω_2 je

$$y_2 = x_1 \cdot e^r + x_2 \cdot d_2 + (d_2 - K) \cdot x_3$$

Zobrazení $T : (x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které má nenulové jádro dimenze 1.

Tedy pro portfolio (0, 0, 1) existuje jednoznačné portfolio $(x_1, x_2, 0)$, které má stejnou hodnotu jako (0, 0, 1) v obou scénářích.[1]

Hodnoty x_1 a x_2 najdeme řešením rovnic:

$$x_1 \cdot e^r + x_2 \cdot d_1 = 0$$

pro $(V_1(\omega_1))$ a

$$x_1 \cdot e^r + x_2 \cdot d_2 = d_2 - K$$

pro $(V_1(\omega_2))$.

Řešením dostaneme:

$$x_1 = \frac{-d_1 e^{-r}(d_2 - K)}{d_2 - d_1}$$

a

$$x_2 = \frac{d_2 - K}{d_2 - d_1}.$$

Portfolio $(x_1, x_2, 0)$ má stejnou hodnotu jako (0, 0, 1) v každém scénáři. Musí mít tedy stejnou hodnotu v čase $t = 0$ (jinak by existovala arbitráž).

Tedy

$$V_0 = -e^{-r} \cdot \frac{d_1(d_2 - K)}{d_2 - d_1} \cdot 1 + \frac{d_2 - K}{d_2 - d_1} \cdot S_0 = (d_2 - K)\left(\frac{e^r S_0 - d_1}{d_2 - d_1}\right) e^{-r} + 0$$

$$= e^{-r} V_1(\omega_2)\, p + V_1(\omega_1)(1 - p),$$

kde $V_1(\omega_1) = 0$.

e^{-r} je diskontní faktor a

$$p = \frac{e^r S_0 - d_1}{d_2 - d_1}$$

se nazývá "tržní" (risk-neutrální, rovnovážná) pravděpodobnost scénáře ω_2.

Tedy V_0 je diskontované očekávání hodnoty opce v čase $t = 1$ vzhledem k tržní pravděpodobnostní míře.

[1] tzv. replikující portfolio

3.2 Základní věta APT

APT označuje arbitrážní teorii oceňování (Arbitrage Pricing Theory)

Uvažujme trh s K aktivy A^1, ..., A^K volně obchodovatelnými, kde A^1 je bezrizikové aktivum. Cena podílu aktiva A^j v čase $t = 0$ je S_0^j (známá hodnota).

Máme tržní scénáře

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}.$$

Předpokládejme, že A^1 je bezrizikové, tj.

$$S_1^1(\omega_j) = e^r$$

pro všechna $j = 1, ..., N$, kde r je úroková míra.

$S_1^j(\omega_i)$ (náhodné veličiny na $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$) bude označovat hodnotu aktiva A^j v čase $t = 1$ za scénáře ω_i.

Máme tedy matici $N \times K$ s prvky $S_1^j(\omega_i)$ (scénáře píšeme do řádku).

Definice 3.2.1. ***Portfolio*** je vektor

$$\Theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K) \in \mathbb{R}^K,$$

kde θ_j je počet podílů aktiva A^j v portfoliu. Pro $\theta_j < 0$ je majitel v krátké pozici v aktivu A^j (o velikosti $\mid \theta_j \mid$). V čase $t = 0$ je hodnota Θ rovna

$$V_0(\Theta) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j \cdot S_0^j.$$

Pro $t = 1$ závisí hodnota Θ na ω_i,

$$V_1(\Theta, \omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j \cdot S_1^j(\omega_i).$$

Definice 3.2.2. ***Arbitráž*** je portfolio, které "získává peníze z ničeho", tj. formálně: buď

$$V_0(\Theta) \leq 0 \quad \text{a} \quad V_1(\Theta, \omega_j) > 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$, nebo

$$V_0(\Theta) < 0 \quad \text{a} \quad V_1(\Theta, \omega_j) \geq 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$.

Definice 3.2.3. Pravděpodobnostní míra $\pi_i = \pi(\omega_i)$ na množině Ω všech scénářů je ***rovnovážná pravděpodobnostní míra*** (neboli risk-neutrální míra), jestliže pro všechna A^j je hodnota podílu v čase $t = 0$ rovna diskontovanému očekávání vzhledem k pravděpodobnostní míře π hodnoty podílu v čase $t = 1$. Tedy

$$S_0^j = e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)\cdot S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 1, ..., K$, kde e^{-r} je diskontní faktor.

Věta 3.2.4. ***(Základní věta APT)***: *Rovnovážná pravěpodobnostní míra existuje právě tehdy, když neexistuje arbitráž.*

Důkaz:

Implikace $\Leftarrow$ je snadná:

Jestliže existuje rovnovážná pravděbodobnostní míra a Θ je portfolio, jehož hodnota v $t = 1$ je ≥ 0 za všech scénářů, pak

$$V_0(\Theta) = e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)\cdot V_1(\Theta,\omega_i) \geq 0,$$

tedy Θ není arbitráž, a arbitráž neexistuje.

Nyní chceme dokázat opačnou implikaci: Neexistuje-li arbitráž, pak existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra taková, že

$$S_0^j = e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)\cdot S_1^j(\omega_i).$$

Pro $j = 1$ platí tento vztah automaticky:

$$\begin{aligned} 1 = S_0^1 &= e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)\cdot e^r \\ &= e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)\cdot S_1^1(\omega_i). \end{aligned}$$

Uvažujme nyní $2 \leq j \leq K$. Označme ε množinu všech takových vektorů tvaru $y = (y_2, ..., y_K)$, kde

$$y_j = e^{-r}\sum_{i=1}^{N}\pi(\omega_i)\cdot S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 2, 3, ..., K$, pro nějakou pravděpodobnostní míru π.

$\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^{K-1}$ je uzavřený konvexní polyedr, který je konvexním obalem svých extrémních bodů, které odpovídají pravděpodobnostem $\pi(\omega_i) = 1$, $\pi(\omega_j) = 0$ pro $j \neq 0$.

Chceme dokázat, že neexistuje-li arbitráž, pak

$$S = \left(S_0^2, ..., S_0^K\right) \in \varepsilon.$$

Jinak řečeno, pokud $S \notin \varepsilon$, pak existuje arbitráž. Využijeme větu o oddělující nadrovině:

Věta 3.2.5. *(Věta o oddělující nadrovině:) Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina, $x \notin F$. Pak existuje $v \in \mathbb{R}^n$ tak, že $v \cdot x < v \bullet y$ pro všechna $y \cdot F$, kde $\cdot$ je skalární součin.*

Důkaz: Nechť a je nejbližší bod v F k bodu x, pak vektor $a - x$ má hledané vlastnosti.

Máme tedy

$$S \in \varepsilon \Rightarrow \exists \Theta^\star = (\theta_2, ..., \theta_K) \neq 0$$

tak, že pro všechna $y \in \varepsilon$ platí:

$$y \cdot \Theta^\star > S \cdot \Theta^\star.$$

ε obsahuje extrémní body, tedy pro všechna i platí:

$$e^{-r} \sum_{j=2}^{K} \theta_j \cdot S_1^j(\omega_i) > \sum_{j=2}^{K} \theta_j \cdot S_0^j$$

(tj. $A_i > B$).

Tedy existuje arbitráž:

Nechť $A_i < \theta_1 < B$ pro všechna i, pak portfolio $(-\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ je arbitráž (hodnota v $t = 0$ je < 0 a hodnota v $t = 1$ je > 0 pro všechna ω_i).

Uvažujeme evropskou call opci, jejíž výplatní funkce je, jak víme,

$$V_1 = (S_1 - K)_+.$$

Dále $S_1(\omega_i) = d_i$ pro $i = 1, 2$ a $d_1 < d_2$. Pokud neexistuje arbitráž, pak existuje π taková, že cena v $t = 0$ je diskontované očekávání, tedy speciálně pro akcii máme

$$S_0 = e^{-r} \cdot (\pi(\omega_1) \cdot d_1 + \pi(\omega_2) \cdot d_2)$$

a víme, že $\pi(\omega_1) + \pi(\omega_2) = 1$. Speciálně platí $d_1 < S_0 \cdot e^r < d_2$ (v předchozím to byl předpoklad, teď to platí automaticky).

Dostaneme

$$\pi(\omega_1) = \frac{d_2 - S_0 e^r}{d_2 - d_1}$$

a

$$\pi(\omega_2) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}.$$

Je-li opce volně obchodovatelná, a má-li zůstat trh bez arbitráže, musí totéž platit i pro opci, tedy:

$$V_0 = \pi(\omega_2) \cdot (d_2 - K) + \pi(\omega_1) \cdot 0 = \pi(\omega_2) \cdot (d_2 - K) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}(d_2 - K).$$

Jištění (Hedging): Uvažujme aktiva A^1, A^2, ..., A^K, B. Nechť $S_t^j(\omega_i)$ a $S_t^B(\omega_i)$ jsou ceny v čase t a scénáři ω_i, kde $t = 0, 1$.

Definice 3.2.6. Portfolio $\Theta = (\theta_1,\, \theta_2,\, ...,\, \theta_K)$ je ***replikující portfolio*** pro B, jestliže

$$S_1^B(\omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j \cdot S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $i = 1,\, ...,\, N$.

Věta 3.2.7. *Nechť $\Theta = (\theta_1,\, \theta_2,\, ...,\, \theta_K)$ je replikující portfolio pro B. Neexistuje-li arbitráž, pak v čase $t = 0$ platí:*

$$S_0^B = \sum_{j=1}^{K} \theta_j \cdot S_0^j.$$

Důkaz: Nechť tvrzení neplatí.

Je-li $S_0^B > \sum_{j=1}^{K} \theta_j \cdot S_0^j$, pak $(-1,\, \theta_1,\, \theta_2,\, ...,\, \theta_K)$ v $\left(B,\, A^1,\, A^2,\, ...,\, A^K\right)$ je arbitráž, protože

$$\sum_{j=1}^{K} \theta_j \cdot S_0^j - S_0^B < 0$$

a

$$S_1^B(\omega_i) - \sum_{j=1}^{K} \theta_j \cdot S_1^j(\omega_i) = 0$$

pro všechna $\omega_i \in \Omega$.

Analogicky, pro

$$S_0^B < \sum_{j=1}^{K} \theta_j \cdot S_0^j$$

vezmeme opačné portfolio.

3.3 Model s více periodami

3.3.1 Trh se dvěma periodami

Uvažujme jedno bezrizikové aktivum a 1 rizikovou akcii. Tržní scénáře jsou nyní

$$\Omega = \{(++)\,, (+-)\,, (-+)\,, (--)\}\,.$$

Předpokládejme, že
$S_1(+) = u \cdot S_0$
$S_1(-) = d \cdot S_0$
$S_2(++) = u \cdot S_1(+) = u^2 \cdot S_0$
$S_2(+-) = d \cdot S_1(+) = u \cdot d \cdot S_0$
$S_2(-+) = u \cdot S_1(-) = d \cdot u \cdot S_0$
$S_2(--) = d \cdot S_1(-) = d^2 \cdot S_0$

($u \ldots$ up a $d \ldots$ down.) Máme tři částečné trhy. V každém uděláme stejný výpočet jako v jednokrokovém modelu. Dostaneme rovnovážné pravděpodobnosti (pro jednoduchost předpokládejmě, že $r = 0$).

$$p_u = \frac{1-d}{u-d}$$

(S_0 se vykrátí) a

$$p_d = \frac{u-1}{u-d}.$$

Celkem rovnovážná pravděpodobnostní míra bude:

$$P(++) = p_u^2, \quad P(--) = p_d^2, \quad P(+-) = P(-+) = p_u p_d.$$

3.3.2 Vícekrokový model s T kroky

Množina všech možných scénářů je v tomto případě

$$\Omega = \{(+, +, +, ..., +)\,, (+, +, ..., +, -)\,, ..., (-, -, ..., -)\}\,.$$

Má 2^T prvků, je tedy 2^T možných scénářů.

Pro $\omega \in \Omega$ je jeho rovnovážná pravděpodobnost

$$P(\omega) = p_u^K \cdot p_d^{T-K},$$

kde K je počet + ve scénáři ω.

Chceme-li ocenit opci, její cena bude očekávání (obecně diskontované očekávání, ale my pro jednoduchostuvažujeme $r = 0$) její hodnoty v čase T

$$V_T = (S_T - K)_+$$

vůči rovnovážné pravděpodobnostní míře. Nechť m je nejmenší přirozené číslo takové, že $S_0 \cdot u^m \cdot d^{T-m} \geq K$. Máme tedy

$$V_0 = \sum_{n=m}^{T} p_u^n \cdot p_d^{T-n} \cdot \binom{T}{n} \cdot \left(S_0 \cdot u^n \cdot d^{T-n} - K\right)$$

$$= \sum_{n=m}^{T} \frac{(1-d)^n \cdot (u-1)^{T-n}}{(u-d)^T} \cdot \binom{T}{n} \cdot \left(S_0 \cdot u^n \cdot d^{T-n} - K\right),$$

kde $\binom{T}{n}$ je počet trajektorií s celkem n plusy.

Poznámka. Položíme-li $d = \frac{1}{u}$, pak v limitě pro $T \to \infty$ a $u = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{T}}}$ dostaneme Black-Scholesův spojitý model pro oceňování opcí. σ je parametr nazývaný volatilita.

Kapitola 4

Zákony arcsinu a Pólyova věta

4.1 Zákony arcsinu pro symetrickou náhodnou procházku

V této podkapitole uvedeme dva zákony arcsinu, pro časy pobytu napravo od počátku (tj. v kladných hodnotách) a pro poslední navštívení počátku.

4.1.1 1. zákon arcsinu

Věta 4.1.1. ***(1. zákon arcsinu pro poslední návštěvu počátku)****: Nechť $p = \frac{1}{2}$ a $S_0 = 0$. Pravděpodobnost, že poslední návštěva počátku do času $2n$ nastane v čase $2k$, je rovna*

$$P\left(S_{2k} = 0\right) \cdot P\left(S_{2n-2k} = 0\right).$$

Důkaz: Označme $\alpha_{2n}(2k)$ pravděpodobnost, že poslední návštěva počátku do času $2n$ nastane v čase $2k$. Máme

$$\alpha_{2n}(2k) = P\left(S_{2k} = 0\right) \cdot P\left(S_{2k+1} \cdot S_{2k+2} ... S_{2n} \neq 0 \mid S_{2k} = 0\right).$$

Z časové homogenity plyne

$$\alpha_{2n}(2k) = P\left(S_{2k} = 0\right) \cdot P\left(S_1 \cdot S_2 ... S_{2n-2k} \neq 0 \mid S_0 = 0\right).$$

Tvrzení tedy plyne z následujícího lemmatu.

Lemma 4.1.2. *Pro symetrickou náhodnou procházku platí:*

$$P(S_1 ... S_{2m} \neq 0) = P(S_{2m} = 0),$$

kde $P(S_{2m}=0)=\binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$.

Důkaz: Využijeme důsledek věty o volbách: Je-li $S_0=0$, pak pro $n\geq 1$ platí

$$P\left(S_1\cdot S_2...S_n\neq 0\mid S_n=b\right)=\frac{1}{2}\cdot E\left(\mid S_n\mid\right).$$

Dále ze symetrie plyne

$$P(S_1...S_{2m}\neq 0)=\frac{1}{2m}\cdot E(\mid S_{2m}\mid)=2\cdot\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m}2k\cdot P(S_{2m}=2k)$$

$$=2\sum_{k=1}^{m}\frac{2k}{2m}\cdot P(S_{2m}=2k)=2\sum_{k=1}^{m}\frac{2k}{2m}\cdot\binom{2m}{m+k}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left[\binom{2m-1}{m+k-1}-\binom{2m-1}{m+k}\right].$$

V posledním členu je m počet kroků do prava a výraz se sumou je tzv. teleskopický součet[1]. Dále platí

$$\binom{2m-1}{m+k-1}-\binom{2m-1}{m+k}=\frac{2k}{2m}\binom{2m}{m+k}.$$

Opravdu, máme

$$\frac{(2m-1)\ldots(m-k+1)}{(m+k-1)!}-\frac{(2m-1)\ldots(m-k)}{(m+k)!}=$$

$$=\frac{(m+k)\,(2m-1)\ldots(m-k+1)-(2m-1)\ldots(m-k+1)\,(m-k)}{(m+k)!}$$

$$=\frac{(2m-1)\ldots(m-k+1)\left[(m+k)-(m-k)\right]}{(m+k)!}=\frac{2k}{2m}\cdot\frac{2m\,(2m-1)\ldots(m-k+1)}{(m+k)!}=$$

$$=\frac{2k}{2m}\cdot\binom{2m}{m+k}.$$

Odtud plyne, že

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left[\binom{2m-1}{m+k-1}-\binom{2m-1}{m+k}\right]=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\cdot\left[\binom{2m-1}{m}-\binom{2m-1}{2m}\right]$$

[1] Z takového součtu nám zůstane jen první a poslední člen - ostatní se odečtou.

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \binom{2m-1}{m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \cdot \frac{(2m-1)\cdot \ldots \cdot m \cdot 2}{m!}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \frac{2m\,(2m-1)\ldots(m+1)}{m!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \binom{2m}{m} = P\left(S_{2m} = 0\right),$$

a odtud plyne tvrzení věty.

V následující podkapitole uvidíme proč se těmto tvrzením říká zákon arcsinu.

4.1.2 Stirlingova formule

Chceme porovnat hodnotu $n!$, (která se v různých formách vyskytuje v kombinačních číslech pro počty trajektorií) s mocninnými funkcemi. Víme, že $n^n \gg n \cdot (n-1)\ldots 2 \cdot 1 \gg 2^n$, tedy $n^n \gg n! \gg 2^n$.

Jak rychle jde ale posloupnost $a_n = \frac{n!}{n^n}$ k nule? Lze ji srovnat s geometrickou posloupností? Pro $n \to \infty$ dostaneme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{n!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Tedy (zatím jen hodně přibližně) můžeme psát

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{1}{e^n},$$

neboli $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$.

Stirlingova formule dává přesnější odhad. Platí

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

v tom smyslu, že

$$\lim_{n\to 0} \frac{n!}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Ze Stirlingovy folrmule dostaneme odhad na hodnotu $u_{2k} = P\left(S_{2k} = 0\right)$.

Lemma 4.1.3. *Platí* $u_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ *pro* $k \to \infty$, *tedy*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{2k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi k}}} = 1.$$

Důkaz: Máme

$$u_{2k} = P\left(S_{2k}=0\right) = \binom{2k}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$= \frac{(2k)!}{k!\,(2k-k)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} =$$

$$\frac{\frac{(2k)^{2k}}{e^{2k}}\sqrt{2\pi 2k}}{\left(\frac{k^k}{e^k}\sqrt{2\pi k}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{2^{2k}\cdot k^{2k}\sqrt{2\pi k2}}{\left(k^k\sqrt{2\pi k}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{2^{2k}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

Podle zákonu arcsinu je

$$\alpha_{2n}(2k) = u_{2k}\cdot u_{2n-2k},$$

tedy

$$P\left(S_{2k}=0 \wedge S_{2k+1}...S_{2n}\neq 0\right) = P\left(S_{2k}=0\right)\cdot P\left(S_{2n-2k}=0\right)$$

Ze Stirlingova vzorce máme

$$\alpha_{2n}(2k) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi\,(n-k)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k\,(n-k)}}.$$

Hodnota $\sqrt{k\,(n-k)}$ je maximální pro $k=\frac{n}{2}$, tedy $\alpha_{2n}(2k)$ je minimální pro $k=\frac{n}{2}$.

Označme T_{2n} čas posledního navštívení bodu 0 do času $2n$. Pak pro $x\in(0,\,1)$ máme,

$$P\left(T_{2n}\le 2xn\right) = \sum_{k\le xn}\frac{1}{\pi\sqrt{k\,(n-k)}} \doteq$$

$$\int_0^{xn}\frac{1}{\pi\sqrt{u\,(n-u)}}du = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{n}},$$

neboť

$$\left(2\arcsin\sqrt{\frac{x}{n}}\right)' = 2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{n}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{n}}}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdot\frac{x}{n}\cdot n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-x)x}{n^2}\cdot n}} = \frac{1}{\sqrt{(n-x)\,x}}.$$

4.1.3 2. zákon arcsinu

2. zákon arcsinu se týká časů pobytu na jedné straně od počátku (tj. doby, kdy jeden z hráčů byl ve vedení).

Věta 4.1.4. ***N****echť $p = \frac{1}{2}$ a $S_0 = 0$. Pravděpodobnost, že náhodná procházka stráví přesně $2k$ časových intervalů napravo od počátku je (opět) rovna*

$$P\left(S_{2k} = 0\right) \cdot P\left(S_{2n-2k} = 0\right).$$

Důkaz: učebnice Grimmet, Stirzacker

4.2 Pólyova věta v $\mathbb{R}^n$

Definice 4.2.1. Mějme posloupnost náhodných vektorů X_1, X_2, ..., $X_{n,\ldots}$, kde

$$X_i = \left(X_i^{(1)},\, X_i^{(2)},\, ...,\, X_i^{(m)}\right)$$

je m-rozměrný vektor. Nechť platí

$$P\left(X_i^{(j)} = 1\right) = \frac{1}{2}$$

a

$$P\left(X_i^{(j)} = -1\right) = \frac{1}{2}$$

pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a pro všechna $j \in \{1,\, 2,\, ...,\, m\}$, a všechna $X_i^{(j)}$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny.

m***-rozměrná náhodná procházka*** je definována vztahem

$$S_n^{(j)} = S_0^{(j)} + \sum_{k=1}^{n} X_k^{(j)},$$

tedy vektorově

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Pro $m = 2$ uvažujme množinu mřížových bodů

$$\mathbb{Z}^2 = \{(i,\, j) \mid i,\, j \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Nechť $S_0 = (0,\, 0)$, pak

$$P\left[S_1 = [1, 1]\right] = P\left[S_1 = [-1, -1]\right] =$$

$$= P\left[S_1 = [-1,1]\right] = P\left[S_1 = [1,-1]\right] = \frac{1}{4}$$

Věta 4.2.2. ***(Pólyova věta)****: Pravděpodobnost, že se náhodná procházka vrátí nekonečněkrát zpět do počátku je rovna 1 pro $m = 1$ a $m = 2$ a je rovna 0 pro $m > 2$.*

Poznamenejme, že pro $m = 3$ je pravděpodobnost alespoň jednoho návratu do počátku $\doteq 0,35$.

Důkaz: Jako u jednorozměrné procházky označme

$$p_0(n) = P(S_n = 0)$$

pravděpodobnost návratu v čase n, a

$$f_0(n) = P(S_n = 0 \wedge S_1 \cdot S_2 ... S_{n-1} \neq 0)$$

pravděpodobnost prvního návratu v čase n. Nechť P_0 a F_0 jsou generující funkce těchto posloupností. Víme, že pro generující funkce platí

$$F_0 = 1 - \frac{1}{P_0}.$$

Máme

$$P(\text{částice se někdy vrátí do počátku}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = F_0(1) = 1 - \frac{1}{P_0(1)}.$$

Tedy

$$P_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_0(n).$$

Odtud dostáváme, že

$$P(\text{částice se někdy vrátí do počátku}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) \text{ diverguje} \\ < 1 & \text{pokud } \sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) \text{ konverguje} \end{cases}$$

Podle Stirlingovy formule víme, že $u_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi - k}}$. Pro $m = 1$ je

$$p_0(n) = P(S_n = 0) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Víme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverguje, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konverguje pro $s > 1$.

Pro $m > 1$ je

$$P\left(S_n = 0\right) = P\left(S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = ... = S_n^{(m)} = 0\right) = \left(P\left(S_n^{(1)} = 0\right)\right)^m,$$

tedy

$$p_0\left(n\right) = P\left(S_n = 0\right) \approx \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Dále

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0\left(n\right) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}}$$

konverguje pro $\frac{m}{2} > 1$, tj. $m > 2$.

Tedy pro $m > 2$ je hledaná pravděpodobnost < 1, pro $m = 1$ a $m = 2$ je hledaná pravděpodobnost 1.

Kapitola 5

Martingaly

Martingal je matematickým vyjádřením myšlenky "férové hry" Víme, že je-li trh bez arbitráže, existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra P.

Ve jednokrokovém modelu:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

a $S_0 = e^{-r} E_P(S_1) = E(e^{-r} \cdot S_1)$.

Tedy cena v čase $t = 0$ je očekávání vzhledem k pravděpodobnosti P ceny v čase $t = 1$.

Obecně pro T-krokový model

$$S_0 = E_P\left(S_T \cdot e^{-rT}\right).$$

Navíc pro libovolný čas $t \leq T$ je

$$S_t = E_P\left(S_T \cdot e^{-r(T-t)} \mid S_0, S_1, ..., S_t\right),$$

kde S_t je podmíněné očekávání diskontované hodnoty S_T, podmíněné informacemi o tržním scénáři, které máme v čase t.

Tedy diskontovaný proces S_t má vlastnost martingalu.

Připomenutí: Máme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $\mathcal{A}$ je σ-algebra[1] (pozorovatelné jevy).

Definice 5.0.3. Mějme měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a indexovou množinu $T \neq \emptyset$ (která hraje roli času). Déle mějme zobrazení $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$, které má tyto vlastnosti:

1. pro $\forall t \in T$: $X(\bullet, t)$ je náhodná veličina (značíme X_t)

[1] σ-algebra je systém podmnožin Ω, uzavřený na sjednocení, doplňky, a průniky (i spočetné).

2. pro $\forall \omega \in \Omega$: $X(\omega, \bullet)$ je prvkem množiny reálných funkcí definovaných na T.

Pak takové zobrazení nazýváme ***stochastický proces*** definovaný na množině T. Značíme $\{X_t;\, t \in T\}$.

Dělení stochastických procesů: máme 4 základní typy:

- diskrétní proces s diskrétním časem (např. náhodná procházka)
- diskrétní proces se spojitým časem (např. Poissonův proces)
- spojitý proces s diskrétním časem (např. Markovovy řetězce)
- spojitý proces se spojitým časem (např. Wienerův proces)

5.1 Přirozená filtrace

Definice 5.1.1. Ve vícekrokovém trhu se informace o tržním scénáři odhaduje krok po kroku. Pro $t \leq T$ definujeme

$$\mathcal{F}_t = \{\text{všechny jevy určené během prvních } t \text{ period}\}\,.$$

$\mathcal{F}_t$ je σ-algebra. Konečná posloupnost $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ se nazývá ***přirozená filtrace*** prostoru tržních scénářů Ω.

Obecně, systém σ-algeber $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ se nazývá ***filtrace***, jestliže platí

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$$

kdykoliv je $t \leq s$. (To znamená, že s rostoucím časem neztrácíme informace, σ-algebra se s rostoucím časem zvětšuje.)

Příklad: **2-krokový model trhu**. Množina tržních scénářů je

$$\Omega = \{(++)\,,\,(+-)\,,\,(-+)\,,\,(--)\}\,.$$

V čase $t = 0$ jsou určeny pouze jevy Ω a $\emptyset$, tedy

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\, \Omega\}\,.$$

V čase $t = 1$ jsou určeny jevy: $F_+ = \{(++)\,,\,(+-)\}$ a $F_- = \{(-+)\,,\,(--)\}$. Tedy

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset,\, \Omega,\, F_+,\, F_-\}\,.$$

V čase $t = 2$ jsou určeny všechny jevy (každá podmnožina Ω), tedy

$$\mathcal{F}_2 = \exp \Omega = \{\forall \, \text{podmnožiny} \, \Omega\} \, .$$

Příklad: T**- krokový model.** Množina Ω_T tržních scénářů je množina posloupností délky T s komponentami +, -. Celkem je jich 2^T.

Částečný scénář jsou posloupnosti $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t)$ délky $t \leq T$, kde

$\xi_j = +$ nebo $\xi_j = -$ pro $j = 1, 2, ..., t$. Množinu těchto scénářů označme Ω_t.

Pro každý částečný scénář $\xi = (\xi_1, ..., \xi_t)$ definujeme jev $F(\xi)$ jako množinu všech úplných scénářů, jejichž prvních t složek jsou právě $\xi_1, ..., \xi_t$, tedy

$$F(\xi) = \{\omega \in \Omega : \, \omega_j = \xi_j \text{ pro všechna } j = 1, 2, ..., t\} \, .$$

Úplné scénáře odpovídají koncovým uzlům stromu, částečné pak nekoncovým. σ-algebry $\mathcal{F}_t$ definujeme jako

$$\mathcal{F}_t = \{\text{všechna konečná sjednocení jevů } F(\xi) \, , \text{ kde } \xi{=}\xi_1, \xi_2, \ldots, \; \xi_t \in \Omega_t\}$$

Martingal je herní strategie: V 1. kroku vsadíme 1 Kč. Pokud prohrajeme, vsadíme 2 Kč (nakonec vyhrajeme, ale musíme mít neomezené zdroje).

Cena akcie v čase t závisí na tržním scénáři, ale jen na jeho složkách do času t, nezávisí na složkách scénáře v časech $> t$.

Tedy proces ceny je adaptovaný přirozené filtraci.

Definice 5.1.2. Posloupnost náhodných veličin X_t je ***adaptovaná přirozené filtraci***, jestliže pro každé t a pro každý tržní scénář $\omega = \xi_1, ..., \xi_T$ hodnota $X_t(\omega)$ závisí jen na částečném scénáři $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t$.

5.2 Martingal

Definice 5.2.1. Nechť $\mathcal{F}$ jepřirozená filtrace prostoru tržních scénářů $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ a P je pravděpodobnostní míra na Ω. Adaptovaná posloupnost náhodných veličin X_t se nazývá ***martingal***, jestliže platí

$$E(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = X_t$$

pro všechna $t \in \{0, 1, ..., T - 1\}$.

Pokud

$$E(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) \geq X_t$$

mluvíme o ***submartingalu***, pokud

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \leq X_t$$

mluvíme o ***supermartingalu***.

$\mathcal{F}_t$ obsahuje veškeré informace dostupné v čase t, většinou je tato informace obsažena v hodnotách X_1, X_2, ..., X_t.

Tedy

$$E\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left(X_{t+1} \mid X_1, X_2, ..., X_t\right)$$

Definice 5.2.2. (obecnější): Nechť $\{S_n\}$ pro $0 \leq n < \infty$ je posloupnost náhodných veličin, která splňuje

1. $E\left(|S_n|\right) < \infty$,
2. $E\left(S_{n+1} \mid X_0, X_1, ..., X_n\right) = S_n$,

pak S_n se nazývá (diskrétní) ***martingal vzhledem k posloupnosti*** náhodných veličin X_n pro $0 \leq n < \infty$.

Příklad 5.2.3. Symetrická (jednoduchá) náhodná procházka: Nechť $P\left(X_i = 1\right) = \frac{1}{2} = P\left(X_i = -1\right)$ a $S_n = X_0 + ... + X_n$, pak S_n je martingal vzhledem k posloupnosti X_n.

5.3 Samofinancující portfolia

5.3.1 Dynamické portfolio

Uvažujme T-krokový model trhu s obchodovanými aktivy A^1, A^2, ..., A^K. Označme $S_t^A(\omega)$ cenu podílu aktiva A v čase t ve scénáři ω. a $\Theta_t^A(\omega)$ počet podílů aktiva A, které držíme v portfoliu Θ v čase t za scénáře ω (tj. během období od skončení obchodování v čase t do začátku obchodování v čase $t+1$).

Posloupnost Θ_t^A musí být adaptovaná přirozené filtraci. Dynamické portfolio je ***omezené***, jestliže náhodné veličiny Θ_t^A jsou všechny omezené.

5.3.2 Samofinancující portfolio

Hodnota portfolia Θ po rebalancování (upravení) v čase t za scénáře ω je

$$V_t^\Theta = V_t^\Theta(\omega) = \sum_A \Theta_t^A(\omega) \cdot S_t^A(\omega),$$

kde součet je přes všechna aktiva $A = A^1, A^2, ..., A^K$.

Hodnota V_{t+1}^{Θ} bude obecně jiná, než V_t^{Θ}, kde V_{t+1}^{Θ} je po proběhnutí obchodování v čase t.

Pokud do portfolia nepřidáváme ani neodebíráme prostředky, musí být jeho hodnota těsně po rebalancování stejná jako před rebalancováním, tedy

$$\sum \Theta_t^A \cdot S_{t+1}^A(\omega) = \sum \Theta_{t+1}^A \cdot S_{t+1}^A(\omega),$$

kde S_{t+1}^A jsou nové ceny a Θ_{t+1}^A jsou nové podíly v portfoliu.

Úpravou pak dostaneme

$$V_{t+1}^{\Theta}(\omega) - V_t^{\Theta}(\omega) = \sum_A \Theta_t^A \cdot \left(S_{t+1}^A(\omega) - S_t^A(\omega)\right).$$

To je podmínka pro samofinancující portfolio.

Věta 5.3.1. *Nechť v T-periodickém trhu M neexistuje arbitráž a nechť existuje bezrizikové aktivum s úrokovou mírou $r = 0$. Pak vzhledem k rovnovážné pravděpodobnostní míře je proces cen (S_t) libovolného obchodovatelného aktiva martingalem vzhledem k přirozené filtraci*

Definice 5.3.2. Nechť $\mathcal{F}_t$ je přirozená filtrace a Y_t je posloupnost náhodných veličin adaptovaných $\mathcal{F}_t$. Y_t se nazývá ***předvídatelná posloupnost***, jestliže pro všechna $t \geq 1$ je Y_t $\mathcal{F}_{t-1}$ - měřitelná, tedy hodnota Y_t na konci každé obchodní periody je funkcí hodnot známých na začátku této periody.

5.4 Martingalová transformace

Definice 5.4.1. Nechť $\{X_t\}$ pro $0 \leq t \leq T$ je martingal a nechť $\{Y_t\}$ pro $0 \leq t \leq T$ je předvídatelná posloupnost. Pak ***martingalová transformace*** $\{(Y \bullet X)_t\}_{0 \leq t \leq T}$ je posloupnost náhodných veličin definovaná jako

$$(Y \bullet X)_t = X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} Y_j (\Delta X)_{j+1}$$

, kde $(\Delta X)_{t+1} = X_{t+1} - X_t$.

Věta 5.4.2. *Martingalová transformace je martingalem vzhledem k $\mathcal{F}_t$.*

Důsledek 5.4.3. Nechť M je T-periodický trh bez arbitráže, obsahující bezrizikové aktivum s úrokovou mírou $r = 0$ a nechť M má rovnovážnou pravděpodobnostní míru P. Pak pro každé samofinancující portfolio je proces jeho ceny $\left(V_t^{\Theta}\right)_{0 \leq t \leq T}$ martingalem.

Důkaz: Proces ceny je martingalová transformace.

5.4.1 Podmíněná očekávání a martingalová transformace

Kapitola 6

Úplnost trhu

6.1 Věta o úplnosti trhu

Uvažujeme trh M s aktivy A^1, ..., A^k. Připomeňme si, co říká Základní věta arbitrážní teorie (APT): Z neexistence arbitráže plyne existence rovnovážné pravděpodobnostní míry (může jich být i více).

Definice 6.1.1. Trh bez arbitráže se nazývá ***úplný***, jestliže existuje právě jedna rovnovážná pravděpodobnostní míra. Trh je neúplný, pokud existuje více rovnovážných pravděpodobnostních měr.

Definice 6.1.2. ***Derivát*** je obchodovatelné aktivum, jehož hodnota V_1 v čase $t = 1$ je funkcí $V_1(\omega_i)$ tržního scénáře (tj. náhodná veličina, funkce na $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$).

Replikující portfolio pro daný derivát V, jehož hodnoty v čase $t = 1$ za scénáře ω_i jsou rovny $V_1(\omega_i)$ je portfolio $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ v aktivech A^1, ..., A^k takové, že:

$$V_1(\omega_i) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j \cdot S_1^j(\omega_i),$$

kde $S_1^j(\omega_i)$ je cena j-tého aktiva A^j za scénáře ω_i.

Z neexistence arbitráže plyne, že

$$V_\Theta = \sum_{j=1}^{k} \theta_j \cdot S_0^j,$$

tj. derivát má jednoznačně určenou cenu v čase $t = 0$.

Věta 6.1.3. *(**o úplnosti trhu**): Nechť M je trh bez arbitráže s bezrizikovým aktivem. Existuje-li pro každý derivát replikující portfolio v A^1, ..., A^k, pak je trh úplný. Naopak je-li M úplný a rovnovážná pravděpodobnostní míra dává kladnou pravděpodobnost každému scénáři (tj. $\pi(\omega_i) > 0$ pro $\forall i$), pak pro každý derivát existuje replikující portfolio (a tedy derivát má jednoznačně určenou cenu).*

Důkaz je založen na jednoduchých myšlenkách z lineární algebry. Deriváty tvoří vektorový prostor (izomorfní $\mathbb{R}^N$). Trh je úplný, právě tehdy když hodnoty A^1, A^2, ..., A^k generují $\mathbb{R}^N$. Tedy vektory $S_1^j(\omega_i)$, $j = 1, ..., k$ generují $\mathbb{R}^N$. Speciálně platí $k \geq N$.

Důkaz: Chceme nejdříve dokázat, že pokud existuje replikujcí portfolio, pak M je úplný.

Uvažujme pro pevně zvolený scénář $\omega_l \in \Omega$ následující derivát D_l, jehož hodnota v čase $t = 1$ je rovna

$$V_1(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq l \\ 1 & \text{pro } i = l \end{cases}.$$

Podle předpokladu existuje replikující portfolio pro D_l, označme ho $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$, v aktivech A^1, ..., A^k. Tedy

$$V_0 = \sum \theta_j \cdot A^j.$$

Je-li π rovnovážná pravděpodobnostní míra, pak také

$$V_0 = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} V_1(\omega_i) \cdot \pi_i = e^{-r} \pi(\omega_l).$$

Odtud plyne

$$\pi(\omega_l) = e^r \sum_{j=1}^{k} \theta_j \cdot S_0^j$$

a tedy π je jednoznačně určena.

Zbývá nám dokázat opačnou implikaci. Označíme

$$\vec{a_j} = \left(S_1^j(\omega_1), S_1^j(\omega_2), ..., S_1^j(\omega_N)\right)$$

vektor v $\mathbb{R}^N$ pro každou hodnotu j (pro každé aktivum A_j). Derivát je vektor v $\mathbb{R}^N$, který dá se replikovat právě tehdy, když vektor jeho hodnot v jednotlivých scénářích patří do lineárního obalu vektorů $\vec{a_j}$.

Nechť existuje $\pi(\omega_i)$ jednoznačně určená, taková, že $\pi(\omega_i) > 0$ pro všechna i. Budeme postupovat sporem: Nechť existuje derivát D, který nemá replikující portfolio. Tedy jsou-li jeho hodnoty ve scénářích ω_i rovny $f(\omega_i)$ a označíme-li

$$\vec{f} = (f(\omega_1), ..., f(\omega_N)).$$

pak $\vec{f}$ není lineární kombinací $\vec{a_j}$, a tedy $\vec{a_j}$ negeneruje $\mathbb{R}^N$. Existuje tedy vektor $\vec{v} = (v_1, ..., v_N)$, který je kolmý na libovolný vektor $\vec{a_j}$ pro všechna j.

Tedy

$$\sum_{i=1}^{N} v_i \cdot S_1^j(\omega_i) = 0$$

pro $j = 1, ..., k$. A^1 je bezrizikové, tedy

$$A_1^1(\omega_i) = e^r$$

pro všechna i. Speciálně tedy $\vec{v} \perp (1, ..., 1)$ a $\sum_{i=1}^{N} v_i = 0$. Pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ označme

$$\pi^*(\omega_i) = \pi(\omega_i) + \varepsilon \cdot v_i.$$

Máme

$$\sum_{i=1}^{N} \pi^*(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) + \sum_{i=1}^{N} v_i = 1 + 0 = 1.$$

Navíc, je-li ε dostatečně malé, pak $\pi^*(\omega_i) > 0$, neboť $\pi(\omega_i) > 0$, a platí

$$\sum_{i=1}^{N} \pi^*(\omega_i) \cdot S_1^j(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) \cdot S_1^j(\omega_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot S_1^j(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) \cdot S_1^j(\omega_i)$$

a tedy π^* je další rovnovážná pravděpodobnostní míra, což je spor.

Kapitola 7

Wienerův proces (Brownův pohyb)

Wienerův proces je proces se spojitým časem a spojitými hodnotami, který můžeme intuitivně chápat jako limitu náhodné procházky (pro $\Delta x \to 0$ a $\Delta t \to 0$).

Nechť $P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$, kde X_i, ..., X_n jsou stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny s $E(X_i) = 0$ a $Var(X_i) = 1$. Potom

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

kde $S_0 = 0$ je standardní symetrická náhodná procházka.

Pro $t = n \cdot \Delta t$ (tedy $n = \frac{t}{\Delta t}$) definujeme

$$S_t = S_{n \cdot \Delta t} = (X_1 + X_2 + ... + X_n) \cdot \Delta x.$$

Z nezávislosti přírůstků X_j plyne, že $E(S_t) = 0$ a

$$Var(S_t) = (\Delta x)^2 \cdot n = (\Delta x)^2 \cdot \frac{t}{\Delta t}.$$

Zajímá nás limitní přechod $\Delta x \to 0$ a $\Delta t \to 0$.

Uvažujeme mocninnou závislost mezi Δx a Δt. Pro $\Delta t = (\Delta x)^p$, kde $p > 0$, dostáváme

$$Var(S_t) = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot t \begin{cases} \to 0 & \text{pro } p < 2 \\ = t & \text{pro } p = 2 \\ \to \infty & \text{pro } p > 2 \end{cases}.$$

Konečný nenulový rozptyl tedy dostaneme jen pro volbu $p = 2$. Pro

$$\Delta t = (\Delta x)^2$$

dostaneme v limitě pro $\Delta t \to 0$ standardní Wienerův proces.

Z Centrální limitní věty plyne, že S_t má v limitě pro $\Delta t \to 0$ (a $(\Delta x)^2 = \Delta t$) normální rozdělení $N(0,\, t)$.

Věta 7.0.4. ***(Lindenbergova centrální limitní věta)*** *Nechť X_1, X_2, ... jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, které mají střední hodnotu μ a konečný rozptyl σ^2. Označme*

$$Y_n = \frac{(X_1 + X_2 + ... + X_n - \mu n)}{\sqrt{n}}$$

pro $n = 1,\, 2,\, ...$ Pak Y_n konverguje v distribuci k rozdělení $N(0,\, \sigma^2)$.

Definice 7.0.5. Stochastický proces W_t ve spojitém čase a se spojitými hodnotami, kde $t \in [0, \infty)$ se nazývá ***standardní Wienerův proces***, jestliže platí:

1. $W_0 = 0$
2. (*spojitost*) S pravděpodobností 1 je trajektorie Wienerova procesu spojitá.
3. (*nezávislost*) PřírůstkyWienerova procesu jsou nezávislé, tj. pro $0 < t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq ... \leq t_n < s_n$ jsou přírůstky $W_{s1} - W_{t1}$, $W_{s2} - W_{t2}$, ..., $W_{sn} - W_{tn}$ navzájem nezávislé.
4. (*normalita přírůstků*) Přírůstky $W_s - W_t$ pro $s > t$ mají rozdělení $N(0,\, s - t)$.

Speciálně $W_t \sim N(0,\, t) \sim \sqrt{t} \cdot N(0,\, 1)$.

Označme ΔW přírůstek Wienerova procesu za čas Δt. Máme $\Delta W = \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon$, kde ε má standardní normální rozdělení $N(0,\, 1)$.

Speciálně

$$E(\Delta W) = \sqrt{\Delta t} \cdot E(\varepsilon) = 0$$

a

$$Var(\Delta W) = E\left((\Delta W)^2\right) = \Delta t \cdot 1 = \Delta t.$$

Zobecněný Wienerův proces je definován pomocí infinitezimálního přírůstku.

$$dX = a \cdot dt + b \cdot dW,$$

kde a, b jsou konstanty a W je standardní Wienerův proces. Koeficient a je ***koeficient driftu*** a b je ***koeficient volatility***. Opět máme

$$\Delta X = a \cdot \Delta t + b \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t},$$

tedy $E(\Delta X) = a \cdot \Delta t$ a $Var(\Delta X) = b^2 \Delta t$.

Pro $b = 0$ máme $dX = a \cdot dt$, tedy $X_t = a \cdot t$ je deterministický proces.

Další zobecnění: koeficienty a, b se mohou měnit a mohou záviset na t a hodnotách X.

7.1 Wienerův proces pro cenu akcie

Wienerův proces není vhodný pro popis ceny akcie z několika důvodů:

- Ceny akcie mohou nabývat i záporné hodnoty.
- Při Wienerově procesu je pravděpodobnost, že se cena zvýší o 1 Kč stejná je-li $S = 1$ Kč, stejně jako $S = 100\,000$ Kč. Pro nás není důležitá absolutní měna, ale relativní přírůstek vůči ceně akcie.

Bez volatility máme: $\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t$. Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit relativní přírůstek: $\frac{\Delta S}{S} = \mu \cdot \Delta t$, kde μ je drift (konstanta). Odtud dostáváme $\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt$ a řešením diferenciální rovnice se separovanými proměnnými dostáváme $S_t = S_0 \cdot e^{\mu T}$.

Obecně

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW,$$

kde μ je drift a σ je volatilita. To je ***geometrický Wienerův proces***. Máme

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW$$

a diskretizací dostaneme:

$$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

kde $\varepsilon \sim N(0,\, 1)$.

Tedy

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

a

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu \cdot \Delta t,\, \sigma^2 \cdot \Delta t\right).$$

Navíc

$$E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \mu \cdot \Delta t$$

a

$$Var\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma^2 \cdot \Delta t.$$

Chceme vypočítat S (vyřešit rovnici). K tomu potřebujeme Itôovo lemma.

7.1.1 Itôovo lemma

Itôovo lemma je analogií pravidla pro derivaci (resp. diferenciál) složené funkce a slouží k výpočtu přírůstků funkce Itôova procesu.

Nechť hodnota X se vyvýjí podle procesu

$$dX = a\,(X,\, t) \cdot dt + b\,(X,\, t) \cdot dW,$$

kde W je standardní Wienerův proces a a, b jsou funkce X a t. Nechť $G\,(x,\, t)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce dvou proměnných x, t. Jak se vyvýjí $G\,(X,\, t)$?

Itôovo lemma (heuristická verze):

Pro G platí

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot dx$$

neboli dosadíme-li za dx:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + a \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot b \cdot dW.$$

Pro porovnání připomeňme diferenciál funkce.

- 1 proměnná: $\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x$
- funkce 2 deterministických proměnných x, t:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x,$$

  neboli

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial x} dx.$$

V případě Wienorova procesu platí heuristický vztah $(dW)^2 = dt$, tedy máme navíc člen $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot b^2 \cdot dt$.)

7.1.2 Odvození Black-Scholesovy rovnice

Black-Scholesova rovnice představuje model vývoje ceny akcie. Předpokládejme, že pohyb ceny akcie je popsán tedy geometrickým Wienerovým procesem,

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW,$$

neboli

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW.$$

Použijeme Itôovo lemma na funkci $G(S,\, t) = lnS$. Máme $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$ a $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2}$. Tedy z Itôova lemmatu

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot dW$$

a

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot dW.$$

Z toho plyne, že $\ln S_T - \ln S_0$ má normální rozdělení se střední hodnotou $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T$ a rozptylem $\sigma^2 T$. Tedy

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T;\, \sigma^2 T\right).$$

S_T má tedy ***lognormální rozdělení***, tj. $\ln S_T$ má normální rozdělení.

Máme rovnici pro cenu akcie, která sleduje geometrický Wienerův proces:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW \tag{7.1}$$

Nechť f je cena evropské call opce (s danou realizační cenou K a časem expirace T), tedy zisk je $(S_T - K)_+$. f závisí na S a t a je tedy funkcí dvou proměnných $f(S,\, t)$. Hodnota $f(S,\, t)$ je cena opce v situaci, kdy cena akcie je rovna S a v čase t.

Tedy podle Itôova lemmatu

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 .$$

za dS dosadíme z 7.1, tedy

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW)^2 .$$

Jelikož $(dt)^2$ a $dt \cdot dW$ jsou členy vyššího řádu a víme, že $(dW)^2 = dt$, dostáváme:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot dW \tag{7.2}$$

Vhodnou kombinací 7.1 a 7.2 můžeme sestavit portfolio z akcií a opcí, jehož výnos je deterministický, jinak řečeno můžeme eliminovat stochastický člen dW.

Označme Π hodnotu portfolia složeného z 1 opce a $-\frac{\partial f}{\partial S}$ akcie, tedy

$$\Pi = -\frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + 1 \cdot f$$

Pro přírůstek hodnoty portfolia za čas dt máme:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S}\right) \cdot dS + 1 \cdot df.$$

Po dosazení z 7.1 dostaneme

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) \cdot dt$$

a stochastický člen se vyruší.

$d\Pi$ se musí (z neexistence arbitráže) rovnat zisku z bezrizikového aktiva s úrokovou mírou r, tj.

$$d\Pi = r \cdot \Pi \cdot dt.$$

Celkem dostaneme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) \cdot dt = r \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + f\right) \cdot dt$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \cdot r = r \cdot f$$

To je Black-Scholesova parciální diferenciální rovnice.

Po transformaci (substitucích) dostaneme rovnici difuze (rovnici vedení tepla)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

Řešením společně s koncovou podmínkou (známe hodnotu $f(T) = (S_T - K)_+$) dostaneme Black-Scholesův vzorec.