Oceňování finančních derivátů

doc. RNDr. Martin Kolář, Ph. D.
Mgr. Lenka Křivánková

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Kapitola 1

Základní vlastnosti opcí

Definice 1.1. *Opce* je právo koupit (v případě *call opce*) nebo prodat (*put opce*) podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu, která se nazývá *realizační cena* (strike price, excercise price) v pevně stanovené době (*expirační doba*).

Podkladové aktivum: akcie, komodity, cizí měny, akciové indexy, futures, swapy, ...

1.1 Dělení opcí

Základní dělení opcí:

I.
- call opce - nákupní opce ...... právo nakoupit
- put opce - prodejní opce ...... právo prodat

II.
- Evropské opce - mohou být uplatněny jen v době expirace
- Americké opce - mohou být uplatněny kdykoli po dobu životnosti opce, nejpozději v čase expirace

Obchodování:

- burza - standardní opce
- trh OTC (over the counter) - opce "na míru"

Ten, kdo právo (opci) kupuje, musí prodávajícímu zaplatit cenu za toto právo, která se nazývá *prémie*.

Prémie má 2 složky:

- vnitřní hodnotu
- časovou hodnotu

Pro call opci:

$$\text{Vnitřní hodnota} := \max(S_t - K, 0),$$

kde S_t je okamžitá cena akcie v čase t, K je realizační cena opce.

Pro put opci:

$$\text{Vnitřní hodnota} := \max(K - S_t, 0),$$

kde S_t je okamžitá cena akcie v čase t, K je realizační cena opce.

Časová hodnota = prémie − vnitřní hodnota

Dělení opcí podle vztahu současné a realizační ceny:

- opce mimo peníze (out of the money):
  $S_t < K$ pro call opci, $S_t > K$ pro put opci
- opce na penězích (at the money):
  $S_t = K$ pro put i call opci
- opce v penězích (in the money):
  $S_t > K$ pro call opci, $S_t < K$ pro put opci

Příklad 1. Americké opce na akcii Intelu 29.5.2003, $S_0 = 20,83$.

call	June	July	October
20	1,25	1,60	2,40
22,5	0,20	0,45	1,15

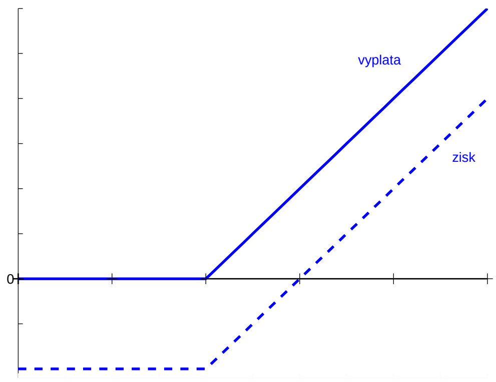
put	June	July	October
20	0,45	0,85	1,50
22,5	1,85	2,20	2,85

1.2 Základní typy použití opcí

Označení:

S_0	...	cena akcie v současnosti
S_t	...	cena akcie v čase t
S_T	...	cena akcie v čase expirace
T	...	čas expirace
r	...	úroková míra
K	...	realizační cena opce
C	...	cena evropské call opce
P	...	cena evropské put opce
c	...	cena americké call opce
p	...	cena americké put opce

Výplatní funkce evropské call opce je $\max(S_T - K, 0)$



Obrázek 1.1: Call opce

1.2.1 Jištění (hedging)

Příklad 2. V září 2009 máme 10 akcií KB, současná cena je $S_0 = 280$ Kč za akcii. Chceme se pojistit proti poklesu ceny na příští 2 měsíce. Koupíme 10 listopadových put opcí s realizační cenou 275 Kč. Nechť $P = 10$ Kč. Zaplatíme $10 \cdot 10 = 100$ Kč (cena jisticí strategie).

- Pokud cena klesne pod 275 Kč, uplatníme opci, dostaneme $275 \cdot 10 = 2750$, celkem máme zisk $2750 - 100 = 2650$.

- Pokud cena bude větší než 275 Kč, prodáme akcii na trhu, opět máme víc než $2750 - 100 = 2650$.

1.2.2 Pákový efekt (leverage)

Násobení jak potenciálního zisku tak ztrát.

Příklad 3. Investor si myslí, že akcie Citibank v příštích 2 měsících porostou a má 2000\$ na investici. Nechť $S_0 = 20\$$ a nechť 2-měsíční call opce s realizační cenou 22,5\$ stojí 5\$. Porovnejte 2 strategie:

1. koupit 100 akcií

2. koupit 400 call opcí

Řešení.

	15\$	35\$
Akcie	−500\$	1500\$
Opce	−2000\$	3000\$

1.3 Put-Call parita

Platí

$$C - P = \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K$$

neboli

$$C + K = S_T + P.$$

Pro bezrizikové portfolio platí $C - P - S_T = K$, tedy jeho hodnota v čase 0 je $K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$.

Celkem

$$\boxed{C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT} = P + S_0}$$

platí nezávisle na předpokladech B.-S. modelu.

	$C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$	$P + S_0$
$S_T < K$	$0 + K = K$	$K - S_T + S_T = K$
$S_T > K$	$S_T - K + K = S_T$	$0 + S_T = S_T$

Tedy

$$V_T(C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT}) = V_T(P + S_0) = \max(K, S_T),$$

kde V_T je hodnota portfolia v čase T.

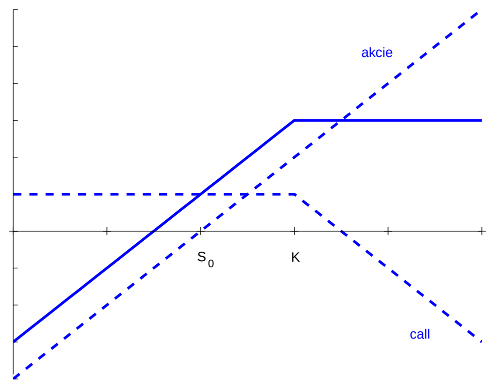
Kapitola 2

Opční strategie

2.1 Strategie s jednou opcí a jednou akcií

2.1.1 Upsání kryté call opce

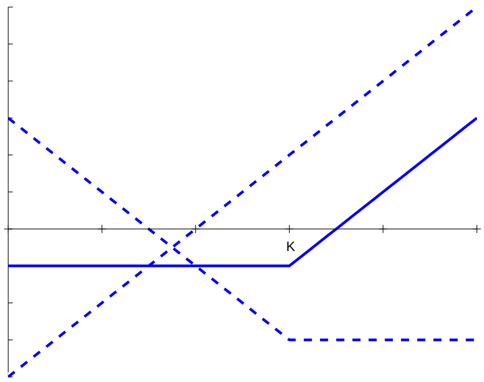
t.j. dlouhá pozice v akcii + krátká pozice v call opci



Obrázek 2.1: Krytá call opce

2.1.2 Pojistný (ochraný) put

(protective put)
t.j. dlouhá pozice v akcii + dlouhá pozice v put opci Z put-call parity plyne, že pojistný put má stejný profil jako call opce jen posunutý o konstantu ($S + P = C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$).

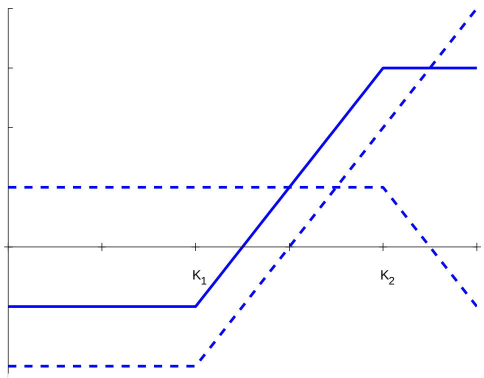


Obrázek 2.2: Pojištěná put opce

2.2 Dvě nebo více opcí stejného typu (Spread)

2.2.1 Bull spread

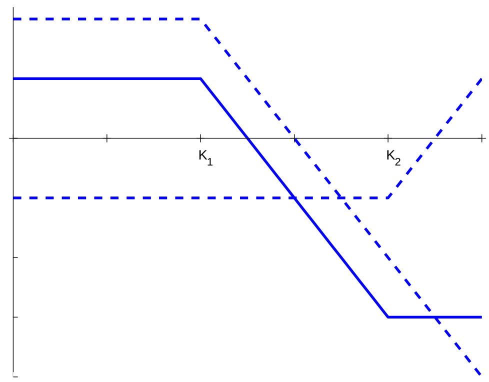
Koupíme call s real. cenou K_1 a prodáme call opci s real. cenou $K_2 > K_1$.



Obrázek 2.3: Bull spread

2.2.2 Bear spread

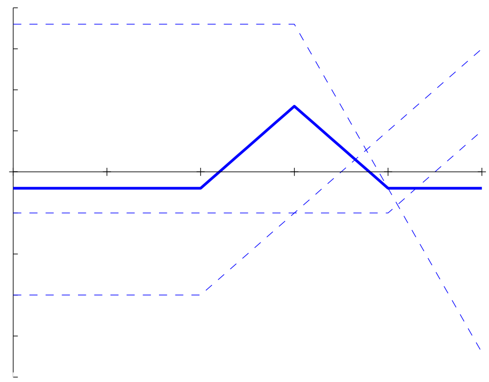
Naopak. Koupíme call s real. cenou K_2 a prodáme call opci s real. cenou $K_1 < K_2$.



Obrázek 2.4: Bear spread

2.2.3 Butterfly spread

Tři opce s různými real. cenami:
Koupíme 1 call opci s real. cenou K_3 (vysokou) a 1 call opci s real. cenou K_1 (nízkou) a upíšeme 2 call opce s real. cenou K_2, mezi K_1 a K_3 a blízko S_0. (Malá investice, investor neočekává velký pohyb v ceně akcie.)

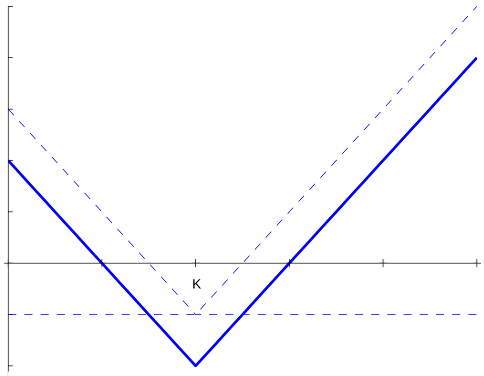


Obrázek 2.5: Butterfly spread

2.3 Kombinace put a call opcí

2.3.1 Bottom straddle

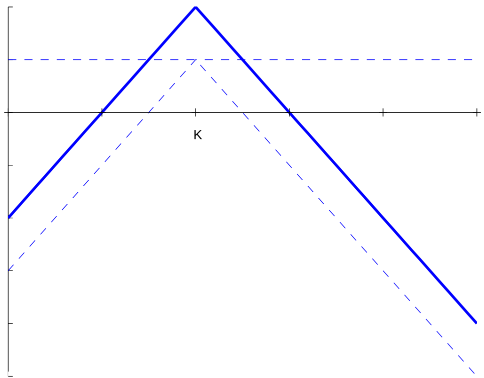
Koupíme call a put se stejnou real. cenou K.



Obrázek 2.6: Bottom straddle

2.3.2 Top straddle

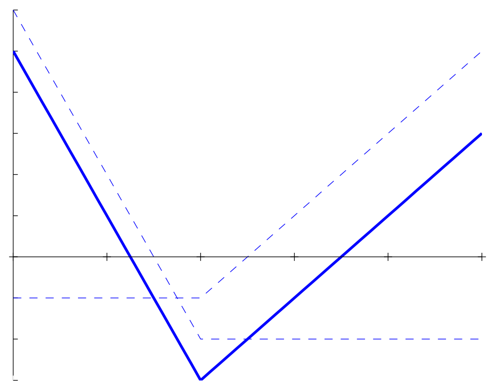
Prodáme call a put se stejnou real. cenou K.



Obrázek 2.7: Top straddle

2.3.3 Strip

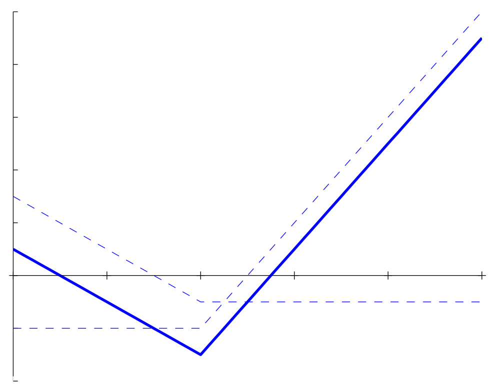
1 call + 2 put na dlouho



Obrázek 2.8: Strip

2.3.4 Strap

2 call + 1 put na dlouho



Obrázek 2.9: Strap

Obecně můžeme vytvořit libovolný po částech lineární profil výplaty, pokud existují opce s libovolnou realizační cenou.

Základní předpoklady:

1. neexistují transakční náklady
2. všechny zisky jsou zdaněny stejnou sazbou
3. existuje stejná bezriziková úroková míra pro vklady i půjčky

Kapitola 3

Horní a dolní odhad cen opcí

3.1 Horní odhad

Pro call opci
Call opce znamená právo koupit akcii za určitou cenu $\Rightarrow$ nemůžeme mít hodnotu větší než akcie, tedy

$$C \leq S_0,$$

podobně pro americkou, $c \leq S_0$.
Jinak existuje arbitráž: koupit akcii a upsat opci.
Pro $K \to 0$ bude $C \to S_0$.

Pro put opci
Put opce znamená právo prodat akcii za cenu $K \Rightarrow$ opce nemůžeme mít vyšší cenu než K (i kdyby cena akcie klesla téměř na 0), tedy pro evropskou put opci platí

$$P \leq K \text{ v čase realizace,}$$

tedy v čase 0 platí

$$P \leq K \cdot \mathrm{e}^{-rT}.$$

Jinak existuje arbitráž: upíšeme put opci, uložíme zisk na bezrizikový vklad, v čase T máme $P \cdot \mathrm{e}^{rT} > K$.
Pro $S_0 \to 0$ bude $P \to K$.

3.2 Dolní odhad

Pro call opci

$$C \geq S_0 - K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$$

Příklad 4. Nechť $S_0 = 20\$,\ K = 18\$, r = 10\%$ ročně, $T = 1$ rok

$$S_0 - K \cdot \mathrm{e}^{-rT} = 20 - 18 \cdot \mathrm{e}^{-0,1} = 3,71$$

Nechť $C = 3\$$.
Arbitráž: koupíme call opci a prodáme akcii nakrátko. Máme ihned $20 - 3 = 17\$$, uložíme je, v čase $T = 1$ máme $17 \cdot \mathrm{e}^{0,1} = 18,79$.
Je-li $S_T > 18$, uplatníme opci, uzavíráme krátkou pozici a máme zisk $18,79 - 18 = 0,79$.
Je-li $S_T < 18$, koupíme akcii na trhu, uzavřeme krátkou pozici, máme zisk $> 0,79$.

Obecně uvažujeme 2 portfolia:

A: 1 call + hotovost $K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$

B: 1 akcie

V čase T je hodnota A:
Je-li $S_T < K \cdots K + 0 = K$.
Je-li $S_T > K \cdots K + (S_T - K) = S_T$.
Tedy $V_T(A) = \max(K, S_T)$.

Pro portfolio B je $V_T(B) = S_T$.

Tedy $V_T(A) \geq V_T(B)$ za všech scénářů, tedy to platí v čase 0 (jinak by existovala arbitráž).
Tedy

$$C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT} \geq S_0 \ \Rightarrow \ \boxed{C \geq S_0 - K \cdot \mathrm{e}^{-rT}}$$

Důsledek 3.1.

$$C \geq S_0 - K \cdot \mathrm{e}^{-rT} > \underbrace{S_0 - K}_{\text{vnitřní hodnota opce}}$$

Cena evropské call opce je vždy větší než její vnitřní hodnota.
Totéž platí pro americkou call opci ($c \geq C > S_0 - K$).

Pro put opci

$$P \geq K \cdot \mathrm{e}^{-rT} - S_0$$

Uvažujeme 2 portfolia:

C: 1 put + 1 akcii

D: hotovost $K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$

	C	D
$S_T < K$	$(K - S_T) + S_T = K$	K
$S_T > K$	S_T	K

Tedy $V_T(C) = \max(S_T, K) \geq V_T(D) = K$.
Tedy $V_0(C) \geq V_0(D) \Rightarrow P + S_0 \geq K \cdot \mathrm{e}^{-rT}$.

$$\boxed{P \geq K \cdot \mathrm{e}^{-rT} - S_0}$$

Uplatnění americké call opce:

Příklad 5. Uvažujeme americkou call opci s $S_0 = 50$ Kč, $K = 40$ Kč, $T = 1$ měsíc. Opce je hluboko v penězích. Zdálo by se vhodné, opci hned uplatnit, ale není to tak.

- Pokud chceme akcii koupenou za opci držet víc než 1 měsíc, pak je lepší měsíc počkat a uložit 40 Kč do banky, kde přináší úrok. (Navíc pokud cena klesne pod 40 Kč, budeme rádi, že jsme opci neuplatnili.)

- Pokud akcii chceme hned prodat (např. myslíme, že je nadhodnocená), pak je lepší opci prodat než uplatnit. Opci si koupí někdo kdo akcii chce držet (takový investor existuje, jinak by cena nebyla 50 Kč). Cena opce bude větší než její vnitřní hodnota, t.j. $50 - 40 = 10$ Kč.

<u>Tedy americká call opce má stejnou hodnotu jako evropská call opce.</u>

Důvody pro neuplatňování americké call opce před časem expirace:

- Call opce je pojištění, pokud ji prodáme, přijdeme o něj.

- Časová hodnota peněz.

U americké put opce jsou tyto 2 důvody proti sobě.

Příklad 6. $K = 10\$$ a S_0 je skoro 0, čím dřív opci uplatníme, tím lépe (peníze za prodej uložíme do banky).

$\Rightarrow$ Americká put opce má větší hodnotu než evropská put opce. $p > P$

$\Rightarrow$ Existují situace kdy hodnota evropské put opce je menší než její vnitřní hodnota (tedy časová hodnota je záporná).

Kapitola 4

Analýza citlivosti Black-Scholesova vzorce

4.1 Proměnné na nichž závisí hodnota opce

Black-Scholes model:

K	...	realizační cena
S_0	...	současná cena
σ	...	volatilita
T	...	čas
r	...	bezriziková úroková míra

$+$	...	přímá úměrnost
$-$	...	nepřímá úměrnost

	Call	Put
S_0	$+$	$-$
K	$-$	$+$
T	$+$	$+$
r	$+$	$-$
σ	$+$	$+$

r: Put opce je potencionální příjem v budoucnosti, pokud roste r, jeho současná hodnota klesá.
Call opce je potencionální výdej v budoucnosti, tedy je to naopak.

σ: S rostoucí volatilitou šance velkeho růstu i velkého poklesu rostou. Pro majitele akcie se tyto vlivy kompenzují, ale majitel call (resp. put) opce profituje z růstu (resp. poklesu), zatímco při poklesu (resp. růstu) je jeho ztráta omezena opční prémií.
$\Rightarrow \sigma$ - roste $\Rightarrow C$ - roste (resp. P - roste)

T: Delší čas znamená větší nejistotu (podobně jako u volatility), tedy stejný argument jako pro σ ukazuježe C a P rostou přímo úměrně T.

V B.-S. vzorci vystupuje jen součin $\sigma\sqrt{T}$, tedy vliv σ a $\sqrt{T}$ je stejný.

4.2 Black-Scholesův vzorec

Pro evropskou call a put opci:

$$C = S_0\ \Phi(d_1) - K\ \ \mathrm{e}^{-rT}\ \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}),$$

kde Φ je distribuční funkce $N(0,1)$,

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

4.3 Greeks

4.3.1 Motivace: Jištění opční pozice

Příklad 7. Banka prodala call opce na 100 000 akcií za 300 000 Kč. $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,2$, $T = 20$ týdnů (0,38 roku). Cena opcí je 240 000. Tedy banka prodala o 60 000 dráž než je teoretická hodnota. Jak se může pojistit proti rizikům a zaručit si zisk?

Řešení. dvě strategie

1. strategie: nedělat nic (nekrytá pozice, naked position)
   $S_T < 50 \Rightarrow$ neplatí nic, má zisk 300 000
   $S_T > 50 \Rightarrow$ musí zaplatit $10^5 \cdot (S_T - 50)$

2. strategie: (Krytá pozice) banka koupí v čase $t = 0$ 100 000 akcií
   $S_T > 50 \Rightarrow$, např. $S_T = 51$, prodá za 50, ale koupila za 49 $\Rightarrow$ další zisk
   $S_T < 50 \Rightarrow$, např. $S_T = 40$, na portfoliu ztratí 900 000 (z opcí má zisk jen 300 000)

Podle B.-S. vzorce by cena jištění v průměru měla být 240 000, ale strategie 1 a 2 mají velké výkyvy. Pokud se chceme držet blízko 240 000, musíme použít dynamiské jištění.

3. strategie: (Dynamická) Stop-loss strategie

   - koupíme akcii pokud cena vzroste nad K
   - jakmile klesne cena pod K, opět prodáme

   Tedy $S_t < K$ máme nekrytou pozici,
   $S_t > K$ máme krytou pozici.
   Zdánlivě produkuje stejnou výplatu jako opce.
   Cena strategie: $S_0 > K$ pak S_0,
   $S_0 < K$ pak je cena 0.
   Celkem $\max(S_0 - K, 0)$.

Problém: Je-li $S_t = K$, nevíme zda cena poroste nebo bude klesat (hypotéza efektivního trhu). Prakticky musíme kupovat pro $K + \epsilon$ a prodávat pro $K - \epsilon$. Pro $\epsilon \to 0$ očekávaný počet obchodů půjde do ∞ (vlastnost Brownova pohybu, že protne osu x nekonečněmnohokrát v libovolně malém okolí 0). Každá dvojice obchodů je ztráta 2ϵ.

Lemma 4.1. *Je-li $W_{t_0} = K$, kde W_t je Brownův pohyb, pak s pravděpodobností 1 trajektorie W_t nabývá v intervalu $(t_0, t_0 + \delta)$ hodnoty K nekonečněmnohokrát pro libovolně malé δ.*

4.3.2 Delta a Δ-hedging

Δ měří rychlost změny opční ceny vzhledem ke změně ceny akcie, t.j.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S},$$

kde C je cena call opce a S je cena akcie.

Příklad 8. Nechť $\Delta = 0,6$ pro $S_0 = 100$ a $C = 10$. Tedy upsání 20 call opcí můžeme jistit koupením $0,6 \cdot 20 = 12$ akcií. Zisk (ztráta) za opce je jištěna ztrátou (ziskem) z pozice akcií.
Např. akcie vzroste o 1 Kč $\Rightarrow$ zisk 12 Kč na akciích a ztráta $-20 \cdot 0,6 = -12$ Kč na opcích (každá opce jde dolů o 0,6 Kč).
Δ opční pozice je $0,6 \cdot (-20) = -12$.
Δ pozice v akciích je $12 \cdot 1 = 12$.
Celková Δ portfolia je $-12 + 12 = 0$.

$\Delta = 0$ ... Δ-neutrální portfolio
Hodnota takového portfolia se nemění při malém pohybu ceny akcie.
Δ se mění, závisí na $S \to$ dynamický hedging.
Platí

$$\Delta(\text{call}) = \Phi(d_1),$$

kde $d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.
Z put-call parity:

$$\begin{aligned} & P + S = C + K \cdot \mathrm{e}^{-rT} \\ \frac{\partial}{\partial S}: \quad & \frac{\partial P}{\partial S} + 1 = \frac{\partial C}{\partial S} + 0 \\ & \Delta(\text{put}) = \Delta(\text{call}) - 1 = \Phi(d_1) - 1 \end{aligned}$$

Delta portfolia
π ... hodnota portfolia A

$$\Delta(A) = \frac{\partial \pi}{\partial S}$$

Nechť portfolio obsahuje w_i i-té opce, pak

$$\Delta(A) = \sum_i w_i \cdot \Delta_i,$$

kde Δ_i je Δ i-té opce (z linearity derivace).

Příklad 9. Česká banka má 3 pozice v opcích na euro:

1. dlouhou pozici na 10^5 call opcí s $K = 27$ Kč a $T = 3$ měsíce. $\Delta = 0,533$,
2. krátkou pozici na $2{\cdot}10^5$ call opcí s $K = 28$ Kč a $T = 5$ měsíců. $\Delta = \ 0,468$,
3. krátkou pozici na $5{\cdot}10^4$ put opcí s $K = 28$ Kč a $T = 2$ měsíce. $\Delta = \ -0,508$.

$\Delta(1+2+3) = 10^5 \cdot (0,533) - 2 \cdot 10^5(0,468) - 5.10^4(-0,508) = -14\ 900$ Tedy banka může udělat portfolio Δ-neutrální nakoupením 14 900 Euro.

Δ závisí na S, musíme portfolio dynamicky "rebalancovat," aby bylo Δ-neutrální (prodej akcií + nákup opcí, nebo naopak).
Transakční náklady: pro 1 opci je Δ-hedging neúnosně drahý kvůli transakčním nákladům. Pro velké portfolio je ale schůdný, je třeba jen jedna transakce pro celé portfolio (v daném čase).

4.3.3 Theta

Θ měří citlivost portfolia (hodnoty opce) na změnu času, t.j.

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial T}.$$

$$\Theta(\text{call}) = -\frac{S_0 \cdot \Phi'(d_1) \cdot \sigma}{2\sqrt{T}} - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\Phi(d_2),$$

kde $\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{{d_1}^2}{2}}$.
Θ je jiný typ parametru než Δ, protože čas je deterministická proměnná, proti plynutí času se nemá smysl jistit. Θ se v praxi používá jako náhražka za Γ.

4.3.4 Gamma

Γ měří rychlost změny Δ vzhledem ke změně ceny S, t.j.

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}.$$

Malé Γ - Δ se mění pomalu, není třeba tak často rebalancovat pro udržení Δ-neutrálního portfolia.
Velké Γ - Δ je citlivé na změny $S \Rightarrow$ častější rebalancování.
Γ měří křivost.
Pro Δ-neutrální portfolio platí přibližně:

$$\vartriangle\pi = \Theta \cdot \vartriangle t + \underbrace{\Delta \cdot \vartriangle S}_{=0} + \tfrac{1}{2}\Gamma \cdot (\vartriangle S)^2 + o(\vartriangle t).$$

<u>Γ-neutrální portfolio:</u>
Pozice v akcii má $\Gamma = 0$.
Je třeba nástroj (např. opce), který má $\Gamma \neq 0$, t.j. který závisí nelineárně na ceně akcie.
Je-li Γ_A gamma portfolia A a gamma opce je Γ_O, pak přidáním w_T počtu opcí do portfolia máme $\Gamma = \Gamma_A + w_T \Gamma_O$. Tedy pro $w_T = \frac{-\Gamma_A}{\Gamma_O}$ dostaneme $\Gamma = 0$, t.j. Γ neutrální portfolio.

Přidáním opce se změní Δ portfolia, nebude tedy Δ-neutrální. Proto musíme ještě změnit pozici v akciích (nezmění Γ-neutralitu, protože Γ(akcie)=0).

Portfolio s $\Delta = 0$ a $\Gamma = 0$ je imunní i proti větším výkyvům ceny podkladové akcie.

Příklad 10. Uvažujeme Δ-neutrální portfolio s $\Gamma = -3000$. Δ a Γ opce jsou 0,62 a 1,5. Pak portfolio bude Γ-neutrální, jestliže přidáme dlouhou pozici v $\frac{3000}{1{,}5} = 2000$ call opcích. Tím se změní Δ portfolia z 0 na $2000 \cdot 0,62 = 1240$. Musíme ještě prodat 1240 akcií, abychom dostali portfolio, které je Δ-neutrální (a současně Γ-neutrální).

Výpočet Γ:

$$\Gamma(\text{call}) = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_0} = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

Pro dlouhou pozici je $\Gamma > 0$.

Taylorův rozvoj hodnoty portfolia v parametrech
Připomenutí: Tayl. polynom 2. stupně pro funkci 2 proměnných

$$f(x,y)\doteq f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2$$

Označme:

$\partial f = f(x,y)-f(x_0,y_0)$	...	přírůstek funkce
$\partial x = x - x_0$	...	přírůstek x
$\partial y = y - y_0$	...	přírůstek y

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial x}\partial x+\frac{\partial f}{\partial y}\partial y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\partial x)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\partial x\partial y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\partial y)^2$$

Nechť π je hodnota portfolia, r, σ bereme konstantní, uvažujeme π jako funkci S a t.

$$\partial\pi\doteq\underbrace{\frac{\partial\pi}{\partial S}}_{=\Delta}\partial S+\underbrace{\frac{\partial\pi}{\partial t}}_{=\Theta}\partial t+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2\pi}{\partial S^2}}_{=\Gamma}(\partial S)^2+\frac{\partial^2\pi}{\partial t\partial S}\partial t\partial S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}(\partial t)^2$$

Tedy (po zanedbání)

$$\underline{\partial\pi\doteq\Delta\partial S+\Theta\partial t+\frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2}$$

Pro Δ-neutrální portfolio máme

$$\partial\pi\doteq\Theta\partial t+\frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2,$$

pro Δ i Γ neutrální portfolio máme

$$\partial\pi\doteq\Theta\partial t.$$

4.3.5 Vega

$\mathcal{V}$ měří citlivost na změnu volatility, t.j.

$$\mathcal{V}(\text{call})=\frac{\partial C}{\partial\sigma}.$$

Platí $\mathcal{V}(\text{call})=S_0\cdot\sqrt{T}\cdot\Phi'(d_1)$.

Velké vega - velká citlivost portfolia na změny volatility.
Pozice v akcii má vega = 0.
Γ-neutrální portfolio má obvykle nenulové $\mathcal{V}$ a naopak.
K sestavení Γ i $\mathcal{V}$ neutrálního portfolia jsou potřeba nejméně dva různé deriváty na podkladovou akcii.

Příklad 11. Uvažujme Δ-neutrální portfolio A s $\Gamma(A) = -5000$ a $\mathcal{V}(A) = -8000$. Obchodovaná opce O má gamma $0,5$, vega $2,0$ a delta $0,6$.

Řešení. Portfolio bude $\mathcal{V}$-neutrální pokud koupíme $8000/2 = 4000$ opcí. To zvýší Δ na $4000 \cdot 0,6 = 2400$, tedy je třeba prodat 2400 akcií, aby bylo opět Δ-neutrální. Γ se změní na $-5000 + 4000 \cdot 0,5 = -3000$.

Pro Γ a současně $\mathcal{V}$ neutrální portfolio musíme mít k dispozici ještě další opci.

Příklad 12. Nechť opce O_2 má gamma $0,8$, vega $1,2$ a delta $0,5$.

Řešení. Máme-li w_1 opcí O a w_2 opcí O_2 pak chceme:

$$\Gamma : -5000 + 0,5w_1 + 0,8w_2 = 0$$

$$\mathcal{V} : -8000 + 2,0w_1 + 1,2w_2 = 0$$

Odtud dostaneme:

$$w_1 = 400$$
$$w_2 = 6000$$

Tedy koupíme-li 400 opcí O a 6000 opcí O_2, pak portfolio bude Γ i $\mathcal{V}$ neutrální. Jeho Δ bude $400 \cdot 0,6 + 6000 \cdot 0,5 = 3240$. Tedy musíme ještě prodat 3240 akcií, aby bylo portfolio i Δ-neutrální.

Taylorův rozvoj v proměnných $S,\ t,\ \sigma$:

$$\begin{aligned}\partial\pi \doteq& \frac{\partial\pi}{\partial S}\partial S + \frac{\partial\pi}{\partial t}\partial t + \frac{\partial\pi}{\partial\sigma}\partial\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\pi}{\partial S^2}(\partial S)^2 \\ =& \Delta\partial S + \Theta\partial t + \mathcal{V}\partial\sigma + \frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2\end{aligned}$$

4.3.6 Rho

ρ měří změnu hodnoty opce (portfolia) v závislosti na změně úrokové míry.

$$\rho(\text{call}) = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Platí $\rho(\text{call}) = K \cdot T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \Phi(d_2)$.

4.3.7 Vztah mezi Δ, Θ a Γ

Připomenutí: Black-Scholesova rovnice pro cenu derivátu f (např.: $f = C, P, \ldots$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

tedy pro hodnotu π portfolia derivátů dostaneme (na jednu stejnou podkladovou akcii)

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} = r \cdot \pi.$$

Tedy

$$\Theta + r \cdot S \cdot \Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot \pi.$$

Pro Δ-neutrální portfolio:

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot \pi.$$

Je-li Θ velké kladné, pak Γ je velké záporné a naopak. V Δ-neutrálním portfoliu lze Θ použít jako náhražku Γ.

Kapitola 5

Implikovaná volatilita

Parametry B.-S. modelu: $S_0,\ K,\ T,\ r,\ \sigma$.
σ je jediný parametr, který nelze pozorovat.
2 způsoby počítání s volatilitou:

- odhad z historických dat
- používání implikované volatility

σ měří naši nejistotu ohledně zisku z akcie.
V B.-S. modelu máme:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}W_t$$
$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t$$

Z Itôova lemmatu dostaneme

$$S_t = S_0 \exp\left[\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T + \mu T\right]$$

tedy (zlogaritmuji)

$$\ln S_T - \ln S_0 = \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T + \mu T$$

tedy $\ln S_T - \ln S_0$ má rozdělení $N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$ (je BP s driftem).

Tedy $\ln S_T$ má střední hodnotu $\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ a rozptyl $\sigma^2 T$. S_T má log-normální rozdělení (t.j. $\ln S_T$ má normální rozdělení).

$$S_T = S_0\,\mathrm{e}^{xT},$$

kde $x = \frac{1}{T} \cdot \ln \frac{S_T}{S_0}$ a x má rozdělení $N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$, t.j. střední směrodatná odchylka x je $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$.

Definice 5.1. x se nazývá *míra zisku akcie*, $x \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$.

Měření volatility
Volatilita je míra nejistoty o výnosech akcie (typické hodnoty σ jsou 0,15-0,60).

Víme, že $x \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$. Tedy σ je střední směrodatná odchylka míry zisku akcie za 1 rok.

Pro malé $T = \Delta t$ víme, že

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t\right).$$

$\sigma\sqrt{T}$ je střední směrodatná odchylka relativní změny ceny akcie za čas T.

Příklad 13. $\sigma = 0,3$ (30% ročně), $S_0 = 50$ Kč.
Tedy střední směrodatná odchylka procentuální změny ceny akcie za 1 týden je

$$30 \cdot \sqrt{\frac{1}{52}} \doteq 4,16\%.$$

Tedy pohyb o 1 odchylku je $50 \cdot 0,0416 \doteq 2,08$ Kč.

5.1 Odhad volatility z historických dat

$n+1$	...	počet pozorování
S_i	...	cena akcie na konci i-tého intervalu, $i = 0, 1, \ldots, n$
τ	...	délka časového intervalu v letech

Označme $u_i = \ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})$ a nechť s je střední směrodatná odchylka u_i, $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$, kde $\bar{u}$ je střední hodnota u_i.

Víme, že střední směrodatná odchylka u_i je $\sigma \cdot \sqrt{\tau}$ a je tedy odhad $\sigma\sqrt{\tau}$, a odhad σ je

$$\boxed{\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}}$$

Obchodní $\times$ kalendářní dny
V praxi se ignorují dny, ve kterých se neobchoduje, tedy

$$\text{volatilita za rok} \;=\; \text{volatilita za 1 obch. den} \;\cdot\; \sqrt{\text{počet obch. dnů za rok}}.$$

Životnost opce:

$$T = \frac{\text{počet obch. dnů do expirace}}{\text{počet obch. dnů za rok (=252)}}.$$

5.2 Implikovaná volatilita a volatility smile

Předpoklady B.-S. modelu:
ceny akcie sledují geometrický Brownův pohyb, tedy pravděpodobnostní rozdělení cen akcie S_t je lognormální.

Empirické výsledky:
Procenta dnů kdy pohyby kursů jsou větší než 1, 2, 3, 4, 5, 6 středních směrodatných odchylek.

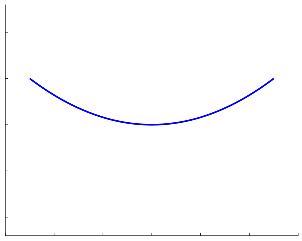
	realita (% dnů)	lognormální B.-S. model (% dnů)
$>$ 1 SSO	25,00	32,00
$>$ 2 SSO	5,00	5,00
$>$ 3 SSO	1,30	0,27
$>$ 4 SSO	0,30	0,01
$>$ 5 SSO	0,08	0,00
$>$ 6 SSO	0,03	0,00

Jak toho využít?
Nakoupit opce hluboko mimo peníze, podle B.-S. modelu jsou velmi levné, a čekat. Protože velké výkyvy mají daleko větší pravděpodobnost než v lognormálním modelu, některé opce se dostanou do peněz.

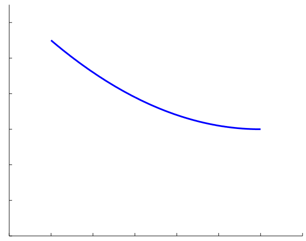
Jak se používá Black-Scholesův model v praxi?
V praxi se dovolí, aby volatilita závisela na realizační ceně opce a čase do expirace.

Definice 5.2. Ze skutečných tržních cen opcí dopočítáme volatilitu v B.-S. vzorci, která vede k této ceně. To je *implikovaná volatilita.*

Pokud by B.-S. model beze zbytku platil, pak by tato volatilita byla stejná pro všechny realizační ceny K. Ve skutečnosti, ale σ závisí na K (volatility smile, skew).



Obrázek 5.1: Volatility smile



Obrázek 5.2: Volatility skew

1. Opce na směnné kurzy:
Připomenutí: Hodnota opce v čase $t = 0$ je rovna diskontovanému očekávání hodnoty opce v čase expirace $t = T$, vzhledem k risk-neutrální pravděpodobnostní míře.
Levý i pravý chvost skutečného rozdělení je "těžší" (větší) než u lognormálního rozdělení.

Uvažujeme call opci s realizační cenou K_2.
Bude v penězích pro $S_T > K_2$.
Pravděpodobnost toho, že $S_T > K_2$ je větší pro skutečné rozdělení než pro lognormální.
Větší pravděpodobnost $\Rightarrow$ větší očekávání $\Rightarrow$ větší cena opce $\Rightarrow$ větší volatilita $\Rightarrow$ zvednutí grafu implikované volatility $\Rightarrow$ "půlka" volatility smile.
Analogicky pro K_1 uvažujeme put opci s realizační cenou K_1. (Z put-call parity plyne, že implikovaná volatilita je stejná pro put i call opci se stejnými parametry.)
Tak dostaneme levou půlku volatility smile.

2. Opce na akcie:
Levý chvost je u skutečného rozdělení větší než u lognormálního rozdělení, pravý chvost je menší.
Tak dostaneme jen levou půlku volatility smile, celkově dostaneme skew.

Vliv jištění na volatilitu:
Δ-hedging: pohyb ceny nahoru $\Rightarrow$ nákup
pohyb ceny dolů $\Rightarrow$ prodej $\Rightarrow$ další pokles
Jištění tedy zesiluje pohyb cen a tím zvyšuje volatilitu.

Kapitola 6

Exotické opce

- evropské + americké opce ... plain vanilla (obyčejné)
  mají standardní vlastnosti, obchodují se ve velkém množství
- nestandardní produkty ... exotické opce

6.1 Packages

- balíčky
- portfolio z evropských opcí, forwardů, podkladových akcií, hotovosti
- příklady máme z opčních strategií - spreads, straddles, ...

Příklad 14. Flexibilní forward

- krátká pozice: zaručuje, že podkladové aktivum můžeme prodat za nějakou cenu mezi K_1 a K_2
- dlouhá pozice: zaručuje, že podkladové aktivum můžeme koupit za nějakou cenu mezi K_1 a K_2

6.2 Nestandardní americké opce

- omezení na dobu uplatnění
- standardní americké opce můžeme uplatnit kdykoli

Příklad 15. a) uplatnění opce je omezené na určitá data ... **Bermudské opce**

b) uplatnění opce je možné jen po část životnosti opce, např.: od jistého data

c) realizační cena se může měnit během životnosti opce

6.3 Složené opce

- opce na opce

- 4 typy: call na call
call na put
put na call
put na put

- 2 realizační ceny, 2 realizační data

- dají se ocenit za předpokladů B.-S. modelu, pomocí 2-dimenzionálního normálního rozdělení

Call na call
V čase 1. expirace T_1 má držitel právo koupit call opci za cenu K_1, která mu dává v čase T_2 právo koupit podkladové aktivum (akcii) za cenu K_2.
Evropská call na call má v čase $t = 0$ hodnotu

$$V_0 = S_0 \cdot M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2 \cdot \mathrm{e}^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - \mathrm{e}^{-rT_1} \cdot K_1 \cdot \Phi(a_2),$$

kde

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^\star) + (r + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1},$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \qquad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2},$$

$M(a, b; \rho)$ je sdružená distribuční funkce 2-dim. normálního rozdělení s korelačním koeficientem ρ.
$M(a, b; \rho) = \mathrm{P}(X \leq a \;\&\; Y \leq b)$, kde X a Y mají 2-dim. normální rozdělení s korelačním koeficientem ρ.
$S^\star$ je cena aktiva v čase T_1 pro kterou je cena call opce v čase T_1 rovna K_1.
Tedy pokud $S_1 > S^\star$ složená opce bude uplatněna (v čase T_1),
$S_1 < S^\star$ složená opce bude uplatněna (v čase T_1).
$S_1 \ldots$ cena akriva v čase T_1.

6.4 Chooser options

- na výběr, as you like it

V předem daném čase T_1 se držitel rozhodne, zda jde o call nebo put opci. Tedy hodnota v čase T_1 je $\max(C, P)$, kde C je hodnota příslušné call opce,
P je hodnota příslušné put opce.
Pokud realizační ceny obou jsou stejné, rovny K, potom máme podle put-call parity:

$$\max(C, P) = \max(C, C + K\,\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)} - S_1) = C + \max(0, K\,\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)} - S_1).$$

Tedy chooser opce je rovna:

- 1 call opce s realizační cenou K a dobou expirace T_2
- 1 put opce s realizační cenou $K \cdot \mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)}$ a časem expirace T_1.

Tyto dvě opce oceníme podle B.-S. modelu.

6.5 Bariérové opce

Knock-in:
opce začíná platit jen pokud cena akcie dosáhne bariéry H v čase 0 až T.

Knock-out:
opce je bezcenná pokud cena akcie dosáhne bariéry H v čase 0 až T.

Další rozlišení: $H > S_0$ ... bariéra shora; $H < S_0$ ... bariéra zdola

$H < S_0$:	down-and-in	$H > S_0$:	up-and-in
	down-and-out		up-and-out

C_{di} ... down-and-in call opce
Hodnota v čase $t = 0$ této opce je

$$C_{di} = S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} \cdot \Phi(y) - K \cdot \mathrm{e}^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} \cdot \Phi\left(y - \sigma\sqrt{T}\right),$$

kde

$$\lambda = \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2}, \qquad y = \frac{\ln\left(H^2/S_0 \cdot K\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\,\sigma\,\sqrt{T}.$$

Platí $C = C_{di} + C_{do} \Rightarrow$ call down-and-out má hodnotu $C_{do} = C - C_{di}$. Analogicky pro C_{ui} a C_{uo} (up-and-in, up-and-out call opce).

6.6 Binární opce

- nespojitá výplatní funkce
- Cash-or-nothing call opce má výplatu $\begin{cases} 0 & \text{pokud } S_T < K \\ Q & \text{pokud } S_T > K \end{cases}$, kde Q je pevně daná hodnota.

Vzhledem k risk-neutrální míře je pravděpodobnost, že cena v čase expirace bude větší než K, rovna $\Phi(d_2)$.
Tedy cena cash-or-nothing call opce je rovna: $\mathrm{e}^{-rT} \cdot Q \cdot \Phi(d_2)$.
Analogicky pro cash-or-nothing put opci, hodnota je $\mathrm{e}^{-rT} \cdot Q \cdot \Phi(-d_2)$.

Asset-or-nothing call má výplatní funkci $\begin{cases} 0 & \text{pokud } S_T < K \\ S_T & \text{pokud } S_T > K \end{cases}$.

Obyčejná call opce = asset-or-nothing − cash-or-nothing, pro $Q = K$.

6.7 Look back options

- Výplata závisí na max (resp. min) ceny aktiva během života opce.

Pro evropskou look back call opci bude výplata rovna $S_T - \min\limits_{t\in(0,T)} S_t$.
Tedy opce nám umožní koupit akcii za minimální cenu dosaženou během života opce.

Pro put opci je výplata: $\max\limits_{t\in(0,T)} S_t - S_T$.
Umožňuje prodat za maximální cenu dosaženou během života opce.

6.8 Shout options

- Držitel opce má možnost 1× za dobu života opce "zavolat" na prodejce opce. Na konci obdrží buď obvyklou výplatu, nebo vnitřní hodnotu opce v čase zavolání.

Označme čas zavolání τ. Výplata tedy je

$$\max(0, S_T - S_\tau) + (S_\tau - K).$$

Tedy hodnota v čase τ je současná hodnota $(S_\tau - K)$ + hodnota evropské call opce s expirační cenou S_τ.
Dál ocenění jako u americké opce.

6.9 Asijské opce

- Asijská call opce má výplatní funkci: $\max(0, S_{\text{průměr}} - K)$
  Asijská put opce má výplatní funkci: $\max(0, K - S_{\text{průměr}})$
- pro geometrický průměr existuje oceňovací formule
- pro aritmetický průměr neexistuje, jen přibližný vzorec

6.10 Basket options

- opce na portfolia
- výplatní funkce závisí na hodnotě portfolia akcií, místo jedné akcie

Kapitola 7

Deriváty úrokových měr

Zatím jsme předpokládali, že úroková míra r je konstantní, teď budeme předpokládat, že r se mění v čase.

Tržní cena rizika
Uvažujeme derivát, jehož hodnota závisí na jediné proměnné θ. Předpokládejme, že θ se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = m \cdot \mathrm{d}t \ + \ s \cdot \mathrm{d}W,$$

kde W je standardní Wienerův proces, m a s mohou záviset na θ a na t.
θ může být např. cena akcie, cena ropy, ...

Nechť f_1 a f_2 jsou ceny 2 derivátů závislých jen na θ a t. Jejich výplata je funkcí θ v nějakém budoucím čase. Nechť f_1 a f_2 splňují rovnice

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{f_1} = \mu_1 \,\mathrm{d}t + \sigma_1 \,\mathrm{d}W,$$

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{f_2} = \mu_2 \,\mathrm{d}t + \sigma_2 \,\mathrm{d}W,$$

kde $\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2,$ jsou funkce θ a t. W je tentýž proces ve všech třech rovnicích.

ΔW můžeme vhodnou kombinací f_1 a f_2 eliminovat:

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta W \qquad && / \cdot \sigma_2 f_2 \\ \Delta f_2 &= \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta W \qquad && / \cdot (-\sigma_1 f_1) \end{aligned}$$

Uvažujme portfolio: $\sigma_2 f_2$ hodnota 1. derivátu
$- \sigma_1 f_1$ hodnota 2. derivátu

Nechť π je hodnota tohoto portfolia. Pak

$$\begin{aligned} \pi &= \sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2 \\ \Delta\pi &= \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2 = \mu_1 f_2 \sigma_2 f_1 \Delta t - \sigma_1 f_1 \mu_2 f_2 \Delta t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ portfolio je bezrizikové; musí tedy platit (neexistence arbitráže)

$$\Delta\pi = r \cdot \pi \cdot \Delta t,$$

kde r je bezriziková úroková míra.
Dosazením dostaneme:

$$\begin{aligned} \Delta\pi = \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2 &= r(\sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2)\Delta t \\ (\sigma_2 \mu_1 f_1 f_2 - \sigma_1 \mu_2 f_2 f_1)\Delta t &= r(\sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2)\Delta t \\ \sigma_2 \mu_1 - \mu_2 \sigma_1 &= r\sigma_2 - r\sigma_1 \\ \sigma_2(\mu_1 - r) &= \sigma_1(\mu_2 - r) \\ \underbrace{\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}}_{\text{parametry} f_1} &= \underbrace{\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}}_{\text{parametry} f_2} \quad \Rightarrow \text{ závisí pouze na } \theta \end{aligned}$$

Tedy jsme dokázali, že je-li cena derivátu závislého jen na θ a t rovna f, splňující rovnici

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mu \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W,$$

pak

$$\boxed{\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda} \qquad \text{(pro všechny takové deriváty).}$$

Definice 7.1. λ se nazývá *tržní cena rizika* veličiny θ (λ je funkcí θ a t).

Máme $\mu - r = \lambda \cdot \sigma$ $\qquad$ $\sigma \ldots$ míra rizika související s θ obsažená v f
$\lambda \ldots$ cena rizika

pravá strana = míra rizika $\cdot$ cena rizika
levá strana = očekávaný zisk přidaný k bezrizikové míře, který kompenzuje toto riziko

Příklad 16. Uvažujme derivát, jehož hodnota je závislá na ceně ropy (v kladném směru; t.j. roste-li cena ropy, roste cena derivátu) a nezávisí na jiných proměných. Předpokládejme, že očekávaný zisk je 12% ročně, volatilita je 20% ročně a nechť $r = 8\%$.
Tedy tržní cena rizika ropy je

$$\frac{0,12 - 0,08}{0,2} = 0,2.$$

Připomenutí:
Výměnou pravděpodobnostní míry za ekvivalentní můžeme dosáhnout změny koeficientu driftu (Cameron-Martinova věta pro konstantní drift, Girsanova věta pro obecný stochastický drift).
Alternativní terminologie: výběr pravděpodobnostní míry určuje "svět," ve kterém platí určitá cena rizika ("míra" $\sim$ cena rizika).
Cena rizika $= 0 \sim$ risk-neutrální svět.

Nechť opět f je cena derivátu závislého na proměnné θ. Předpokládejme, že se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$\mathrm{d}f = \mu f \,\mathrm{d}t + \sigma f \,\mathrm{d}W,$$

kde W je standardní Wienerův proces, μ a σ jsou funkce t a θ.

Hodnota μ závisí na vztahu investora vůči riziku. Ve světě, kde cena rizika je rovna 0 (risk-neutrální svět), máme

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} = 0 \iff \mu = r,$$

tedy

$$\mathrm{d}f = rf \,\mathrm{d}t + \sigma f \,\mathrm{d}W.$$

To platí v standardním risk-neutrálním světě (cena rizika $\approx$ výběr pravděpodobnostní míry).

Příklad 17.

Volba I: dostaneme s jistotou 50 Kč

Volba II: dostaneme s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ 100 Kč, dostaneme s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ 0 Kč

Očekávání je pro obě volby stejné (50 Kč).
Volba I má rozptyl 0 (nulové riziko), volba II má nenulové riziko.

Investor je

1. rizikově neutrální: obě volby jsou ekvivalentní
2. rizikově averzní: volba I je lepší (většina investorů)
3. vyhledávající riziko: volba II je lepší (hazardní hráči)

Jiné předpoklady o tržní ceně rizika dávají "jiné světy." Obecně máme

$$\mu = r + \lambda\sigma \qquad \left(\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}\right).$$

Tedy

$$\mathrm{d}f = (r + \lambda\sigma) \cdot f \,\mathrm{d}t + \sigma f \,\mathrm{d}W. \tag{7.1}$$

Tedy tržní cena rizika určuje míru růstu všech derivátů závislých na dané proměnné. Při přechodu od jedné ceny rizika k jiné se mění koeficient růstu, ale volatilita zůstává stejná.

Pro určitou hodnotu ceny rizika dostaneme reálný svět, to co pozorujeme v praxi.

Připomenutí:
Itôův proces je martingal právě tehdy, když koeficient u $\mathrm{d}t$ je identicky rovný nule, t.j. $\mathrm{d}\theta = \sigma(t, \theta) \cdot \mathrm{d}W$.
Víme, že pro martingal $\boxed{\mathrm{E}(\theta_T) = \theta_0}$.

7.1 Numeraire

- volba jednotek

Nechť f a g jsou ceny obchodovatelných aktiv, závisející na jednom zdroji nejistoty.

Definice 7.2. Definujeme

$$\Phi = \frac{f}{g}.$$

Φ je *relativní cena* f vzhledem ke g.

Φ můžeme chápat jako cenu f vyjádřenou v jednotkách g, namísto korun. Aktivum g se nazývá *numeraire.*

Věta 7.3. *Platí: neexistence arbitráže $\Rightarrow$ Φ je martingal pro nějakou volbu tržní ceny rizika. Touto volbou je volatilita g.*

Důkaz. Nechť volatility f a g jsou σ_f a σ_g. Z rovnice 7.1 máme (za tržní cenu rizika bereme volatilitu g, tedy σ_g):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \left(r + \sigma_g \cdot \sigma_f\right) \; f \; \mathrm{d}t + \sigma_f \; f \; \mathrm{d}W \\ \mathrm{d}g &= \left(r + {\sigma_g}^2\right) \; g \; \mathrm{d}t + \sigma_g \; g \; \mathrm{d}W. \end{aligned}$$

Itôovo lemma (použité na funkci ln) dává

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ln f &= \left(r + \sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{{\sigma_f}^2}{2}\right) \mathrm{d}t + \sigma_f \, \mathrm{d}W \\ \mathrm{d}\ln g &= \left(r + \frac{{\sigma_g}^2}{2}\right) \mathrm{d}t + \sigma_g \, \mathrm{d}W, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Big(\ln f - \ln g\Big) &= \left(\sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{{\sigma_f}^2}{2} - \frac{{\sigma_g}^2}{2}\right) \mathrm{d}t + \Big(\sigma_f - \sigma_g\Big) \mathrm{d}W \\ \mathrm{d}\left(\ln\left(\frac{f}{g}\right)\right) &= -\frac{1}{2}\Big(\sigma_f - \sigma_g\Big)^2 \mathrm{d}t + \Big(\sigma_f - \sigma_g\Big) \mathrm{d}W. \end{aligned}$$

Aplikací Itôova lemmatu na proces $\frac{f}{g}$ a funkci ln dostaneme

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \Big(\sigma_f - \sigma_g\Big) \cdot \frac{f}{g} \, \mathrm{d}W.$$

Tedy $\Phi = \frac{f}{g}$ je <u>martingal</u>. □

Svět, ve kterém je cena rizika rovna volatilitě g, budeme nazývat (forward)-<u>risk-neutrální vzhledem k g</u>.

Tedy $\frac{f}{g}$ je martingal $\Rightarrow$

$$\frac{f_0}{g_0} = \mathrm{E}_g \left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

a tedy

$$f_0 = g_0 \; \mathrm{E}_g \left(\frac{f_T}{g_T}\right),$$

kde E_g je očekávaná hodnota v risk-neutrálním světě vzhledem ke g.

Volby numeraire:

1. Peněžní trh jako numeraire:

   Peněžní trh je aktivum, které v čase $t = 0$ má hodnotu 1 Kč a získává okamžitou bezrizikovou míru r v libovolném čase, (kde r může být stochastické).

   Je-li g hodnota peněžního trhu, pak $\mathrm{d}g = r \cdot g \cdot \mathrm{d}t$.
   Drift je stochastický, ale volatilita g je rovna 0. Tedy v risk-neutrálním světě vzhledem ke g je cena rizika rovna 0.

   Tedy $f_0 = g_0 \,\widehat{\mathrm{E}}\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$, kde $\widehat{\mathrm{E}}$ je očekávání ve standardním risk-neutrálním světě. Dále máme
   $$g_0 = 1 \quad \text{a} \quad g_T = \mathrm{e}^{\int_0^T r \,\mathrm{d}t}$$
   tedy
   $$f_0 = \widehat{\mathrm{E}}\left(\mathrm{e}^{-\int_0^T r\,\mathrm{d}t} \cdot f_T\right) \qquad \text{neboli} \qquad \boxed{f_0 = \widehat{\mathrm{E}}\left(\mathrm{e}^{-\bar{r}T} \cdot f_T\right)},$$
   kde $\bar{r} = \frac{1}{T}\int_0^T r\,\mathrm{d}t$ je aritmetický průměr hodnoty r mezi časy 0 a T.

2. Bezkuponový dluhopis jako numeraire:

   Nechť $P(t, T)$ je cena v čase t bezkuponového dluhopisu, který vyplatí 1\$ v čase T. Položme g rovno $P(t, T)$.
   E_T bude označovat očekávání ve světě, který je risk-neutrální vzhledem k $P(t, T)$.
   Protože $g_T = P(T, T) = 1$ a $g_0 = P(0, T)$, rovnice
   $$f_0 = g_0 \cdot \mathrm{E}_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$
   dává
   $$\boxed{f_0 = P(0, T) \cdot \mathrm{E}_T(f_T)}. \tag{7.2}$$
   Tedy oproti peněžnímu trhu je diskontování (pomocí $P(0, T)$) mimo operátor očekávání. To zjednodušší oceňování derivátů, které závisí jen na hodnotách v čase T.

Nechť θ je stochastická proměnná, různá od úrokové míry. Forwardový kontrakt na θ se splatností v čase T je definován jako kontrakt s výplatou $\theta_T - K$ v čase T, kde θ_T je hodnota v čase T a K je realizační cena. Nechť f označuje hodnotu kontraktu. Dále máme

$$f_0 = P(0,T) \cdot [\mathrm{E}_T(\theta_T) - K].$$

Forwardová cena F je ta hodnota K, pro kterou je $f_0 = 0$. Tedy

$$P(0,T) \cdot [\mathrm{E}_T(\theta_T) - F] = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \mathrm{E}_T(\theta_T).$$

Tedy forwardová cena proměnné θ je očekávání budoucí ceny ve světě risk-neutrálním vzhledem k $P(t,T)$.

7.2 Rozšíření B.-S. modelu na situaci, kdy úroková míra je stochastická

Uvažujeme evropskou call opci s časem expirace T. Podle 7.2 máme

$$C = P(0,T) \cdot \mathrm{E}_T[\max(S_T - K, 0)],$$

kde S_T je cena akcie v čase T, K je realizační cena opce.
Nechť R je zero rate (okamžitá úroková míra T-roční)

$$P(0,T) = \mathrm{e}^{-RT}$$

tedy

$$C = \mathrm{e}^{-RT} \cdot \mathrm{E}_T[\max(S_T - K, 0)].$$

Předpokládejme, že S_T je lognormální v risk-neutrálním světě vůči $P(t,T)$ se střední směrodatnou odchylkou W. Dostaneme (jako při odvození standardního Black-Scholesova vzorce)

$$\mathrm{E}_T[\max(S_T - K, 0)] = \mathrm{E}_T(S_T) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[\mathrm{E}_T(S_T)/K] + W^2/2}{W}, \qquad d_2 = \frac{\ln[\mathrm{E}_T(S_T)/K] - W^2/2}{W},$$

$\mathrm{E}_T(S_T)$ je forwardová cena akcie pro kontrakt se splatností v čase T.

Z neexistence arbitráže plyne, že $\mathrm{E}_T(S_T) = S_0 \cdot \mathrm{e}^{RT}$. Celkem tedy

$$C = S_0 \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \mathrm{e}^{-RT} \cdot \Phi(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[S_0/K] + RT + W^2/2}{W}, \qquad d_2 = \frac{\ln[S_0/K] + RT - W^2/2}{W}.$$

Platí-li $W = \sigma \cdot \sqrt{T}$, pak dostaneme přesně B.-S. vzorec s r nahrazeným R.

Poznámka. Proč je $\mathrm{E}_T(S_T)$ forwardová cena akcie.
Nechť θ je proměnná, která není úroková míra. Forwardový kontrakt na θ se splatností v čase T je definován jako kontrakt s výplatou $\theta_T - K$ v čase T, kde θ_T je hodnota v čase T. Označme f hodnotu forwardového kontraktu. Máme

$$f_0 = P(0,T) \cdot [\mathrm{E}_T(\theta_T) - K].$$

Forwardová cena (realizační cena) je ta hodnota K, pro kterou je $f_0 = 0$. Tedy

$$P(0,T) \cdot [\mathrm{E}_T(\theta_T - K)] = 0, \quad \text{neboli} \quad K = \mathrm{E}(\theta_T).$$

Tedy forwardová cena je očekávaná budoucí cena ve světě, který je risk-neutrální vzhledem k $P(t,T)$.

7.3 Oceňování derivátů úrokových měr

Výplata závisí nějakým způsobem na úrovni úrokové míry. Oceňování je složitější než u opcí, neboť:

- pro řadu produktů je třeba mít model, který popisuje chování celé výnosové křivky,
- úrokové míry jsou použity jak pro diskontování, tak pro definici výplaty z derivátu.

7.3.1 Blackův model

Mějme evropskou call opci na proměnnou V.

Definujeme:

T	...	čas do expirace opce
F	...	forwardová cena V na kontrakt s expirací v čase T
F_0	...	hodnota F v čase 0 (kontrakt uzavřený v čase 0)
K	...	realizační cena opce
$P(t,T)$	...	cena v čase t bezkuponového dluhopisu vyplácejícího v čase T 1$
V_T	...	hodnota V v čase T
σ	...	volatilita F

Pro oceňování opce:

1. Předpokládejme, že $\ln V_T$ má normální rozdělení se střední hodnotou F_0 a směrodatnou odchylkou $\sigma\sqrt{T}$.
2. Diskontujeme očekávanou výplatu pomocí T-roční okamžité úrokové míry (což je ekvivalentní vynásobení výplaty faktorem $P(0,T)$).

Výplata z opce je $\max(V_T - K, 0)$. Z lognormálního rozdělení dostaneme (jako u B.-S. vzorce):

$$\mathrm{E}(\max(V_T - K, 0)) = \mathrm{E}(V_T) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2),$$

kde $\mathrm{E}(V_T)$ je očekávaná hodnota V_T a

$$d_1 = \frac{\ln[\mathrm{E}_T(V_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln[\mathrm{E}_T(V_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Protože předpokládáme, že $\mathrm{E}(V_T) = F_0$, máme

$$C = P(0,T) \cdot [F_0\ \Phi(d_1) - K\ \Phi(d_2)], \tag{7.3}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[F_0/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Podobně pro put opci:

$$P = P(0,T) \cdot [K\ \Phi(-d_2) - F_0\ \Phi(-d_1)].$$

Nepředpokládáme geometrický Brownův pohyb pro vývoj V (uvolnění předpokladů B.-S. modelu).

7.3.2 Opce na dluhopisy

Některé dluhopisy mají opce "zabudované v sobě."

Callable bond: dluhopis, který dovoluje firmě, která ho vydala, odkoupit jej zpátky za určenou cenu, v určených časech v budoucnosti.

Tedy držitel vlastně prodává call opci na tento dluhopis firmě, která ho vydala.

Na ocenění evropské call opce na dluhopis použijeme Blackův model.
Předpoklady: cena dluhopisu v čase T je lognormální.
Rovnici 7.3 můžeme použít (s F_0 rovnou forwardové ceně dluhopisu F_B a σ rovno forwardové volatilitě dluhopisu σ_B). Dostaneme

$$\begin{aligned} C &= P(0,T) \cdot [F_B \ \Phi(d_1) - K \ \Phi(d_2)], \\ P &= P(0,T) \cdot [K \ \Phi(-d_2) - F_B \ \Phi(-d_1)], \end{aligned}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[F_B/K] + {\sigma_B}^2 T/2}{\sigma_B \sqrt{T}} \qquad \text{a} \qquad d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}.$$

F_B se vypočítá podle vztahu

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0,T)},$$

kde I je současná hodnota kuponů a B_0 je cena dluhopisů v čase 0.

Literatura

[1] Hull J. C.: *Options, Futures and other derivatives,* Preatice Hall 2006

[2] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky,* EPOS, Bratislava 2005