



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE
DO ROZVOJE
VZDĚLÁVÁNÍ

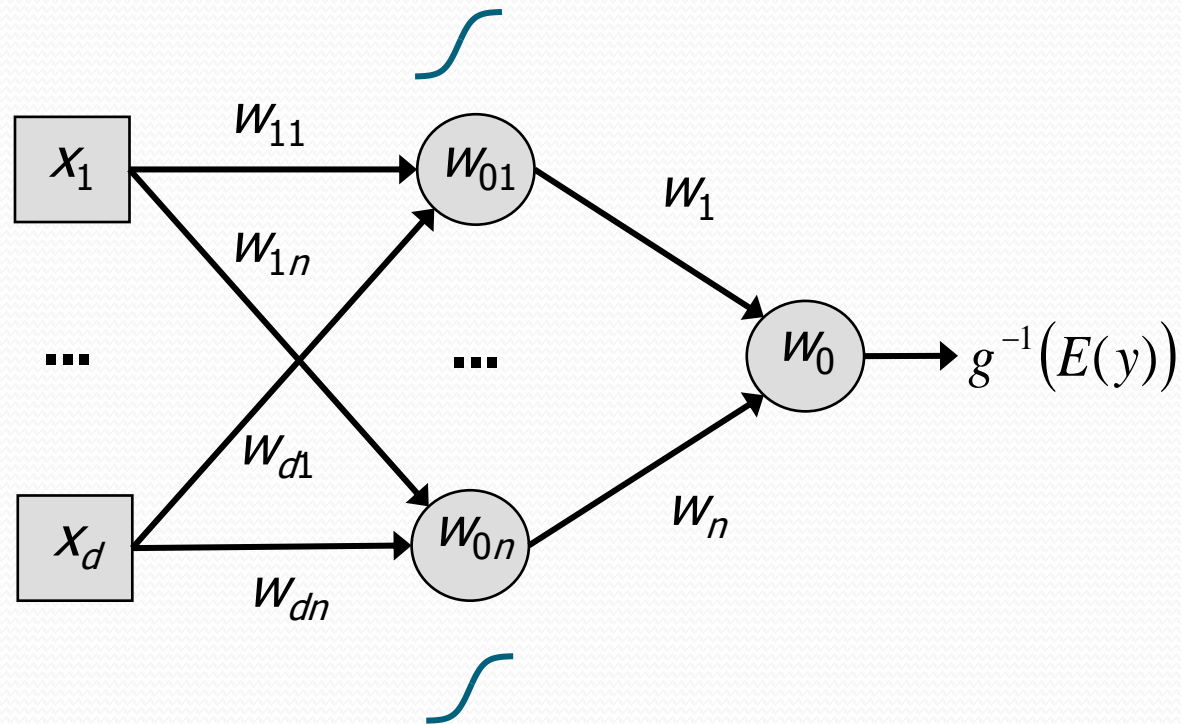
Seminář z finanční matematiky

Martin Řezáč
2012

Obsah:

1.	Neuronové sítě – úvod.	3
2.	Vícevrstvé NN, Backpropagation, MADALINE	35
3.	Asociativní NN, Hebbův zákon, Kohonenovy mapy, LVQ	63
4.	RBF sítě, Modulární NN, Hammingova síť	95
5.	Bayesovské sítě.	123
6.	Bayesovské sítě – aplikace.	145
7.	Výpočet pojistného v životním pojištění	181
8.	Investování do akcií	209
9.	Fundamentální analýza	249
10.	Technická analýza	284
11.	Oceňování nemovitého majetku	336
12.	Black-Scholesův model	369
13.	Oceňování derivátů, opce	386
14.	Reference.	413

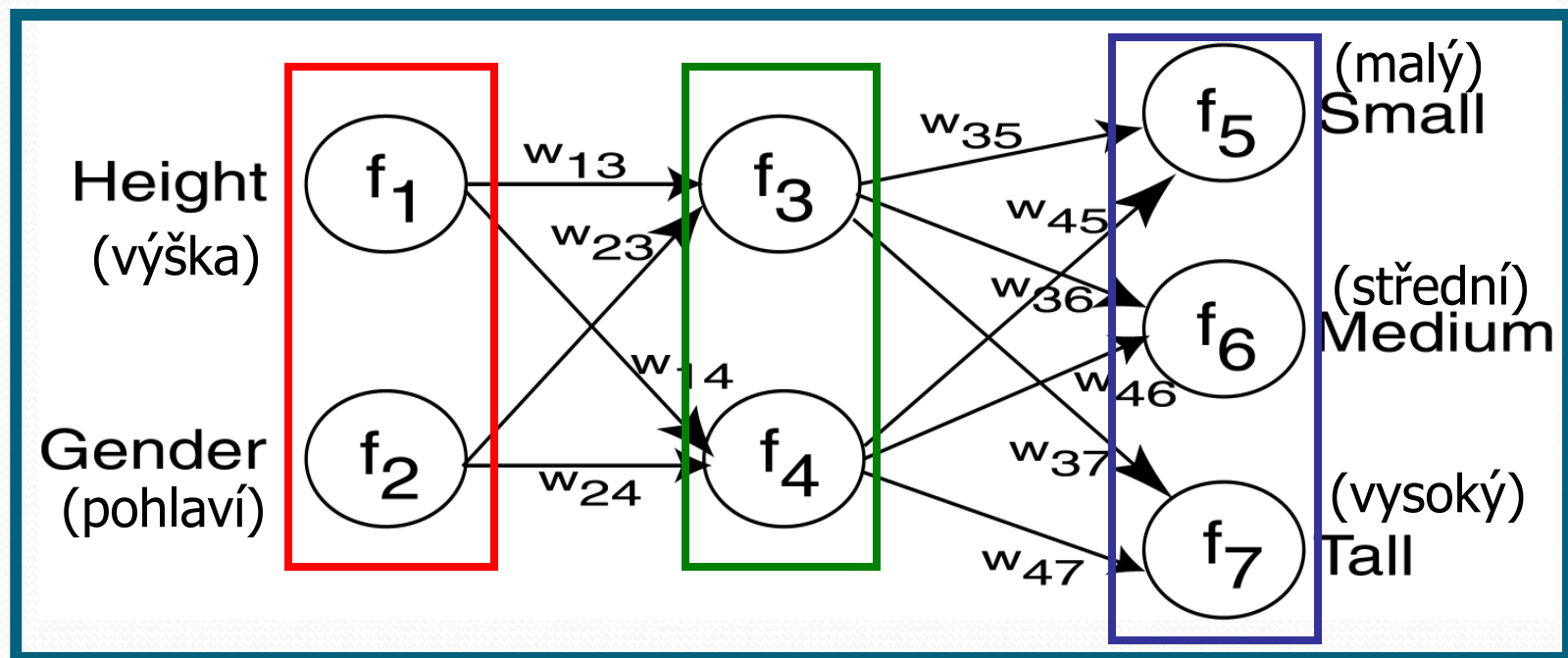
1. Neuronové sítě - úvod



Neuronové sítě (Neural Networks)

- Někdy se také uvádí název *Artificial Neural Networks (ANN)*, tj. *umělé neuronové sítě*.
- Založené na pozorované funkcionalitě lidského mozku.
- Ovšem v porovnání s mozkiem jde o velmi zjednodušený matematický model.
- Často jde u NN o adaptivní systém, který mění svou strukturu na základě vnějších či vnitřních informací získaných v průběhu učící fáze.
- Využívají se např. při vyhledávání vzorů v datech, rozpoznávání řeči nebo klasifikačních problémech.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_neural_network

Příklad neuronové sítě

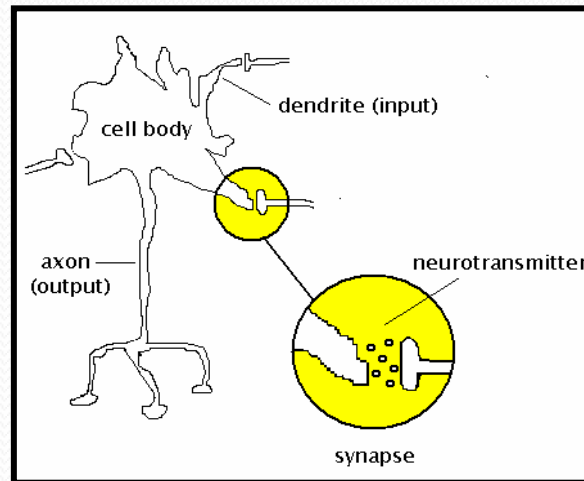


vstup
(input)

skrytá vrstva
(hidden layer)

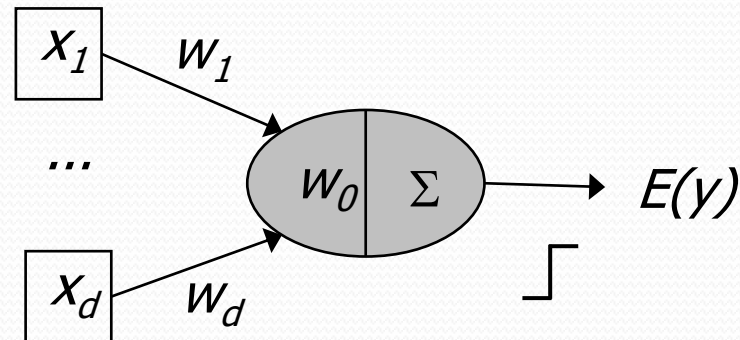
výstup
(output)

The Neuron



- Excitatory (+) and inhibitory (-) inputs, arriving at the dendrites, are weighted by adaptable synapses.
- The weighted inputs are added together.
- If the sum is greater than an adaptable threshold (bias) value, the neuron sends activation down its axon.

The McCulloch-Pitts Neuron



- A McCulloch-Pitts neuron with d inputs is formally defined by the following equation:

$$E(y) = f\left(w_0 + \sum_{i=1}^d w_i x_i\right)$$

- The step function, $f(\cdot)$, turns each McCulloch-Pitts neuron into a linear classifier/discriminator.

The Hebb Rule

- The strength of the connection between neurons i and j should be adjusted in accordance with the equation:

$$\Delta w_{ij} = \eta \hat{y}_i x_j$$

- *The eta (η) term is the neuron's learning rate, which scales the amount of weight adjustment.*
- Permitted learning rate values range from 0 to 1.
- Large learning rate values risk divergence.

The Widrow-Hoff Delta Rule

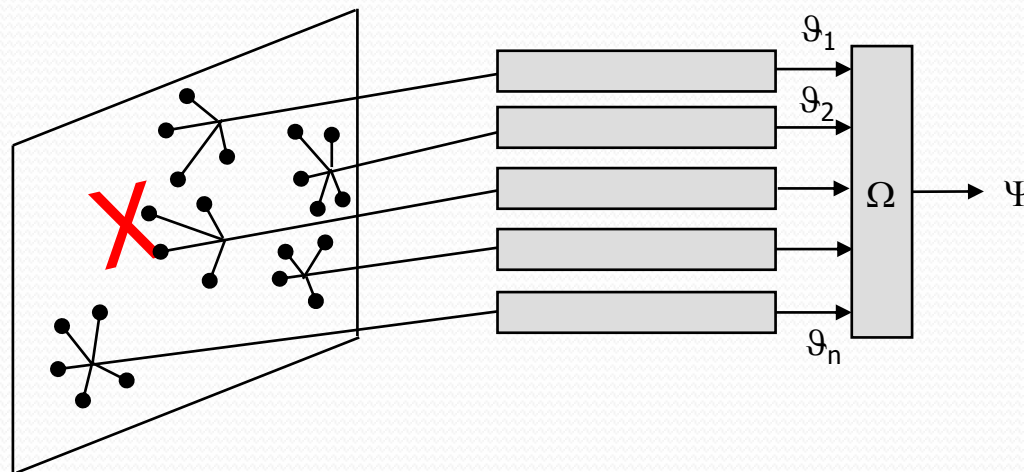
- Hebb's learning rule is unstable.
- Widrow and Hoff proposed a variant of Hebb's rule, one that is stable under a range of learning rates:

$$\Delta w_{ij} = \eta(y_i - \hat{y}_i)x_j$$

- They called their learning model the *delta rule*.
- Because the delta rule reduces the sum of squared error, it is also known as the *least mean squares rule*.

The Perceptron

- The perceptron is a pattern-recognition machine invented in the 1950s for optical character recognition.

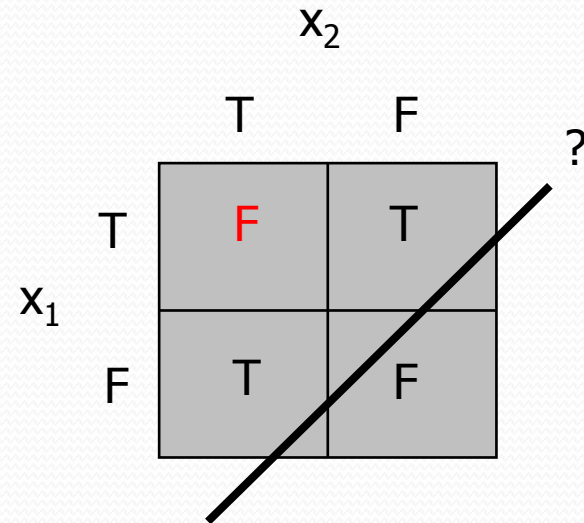


- Each processing unit is a *McCulloch-Pitts neuron*.
- A perceptron with n outputs is a discriminator function that divides the input space into n distinct regions.

The Limitations of a Simple Perceptron

- The simple (linear) perceptron can only solve linearly separable problems.
- The EXCLUSIVE OR truth table (below) is an example of a problem that is **not** linearly separable.

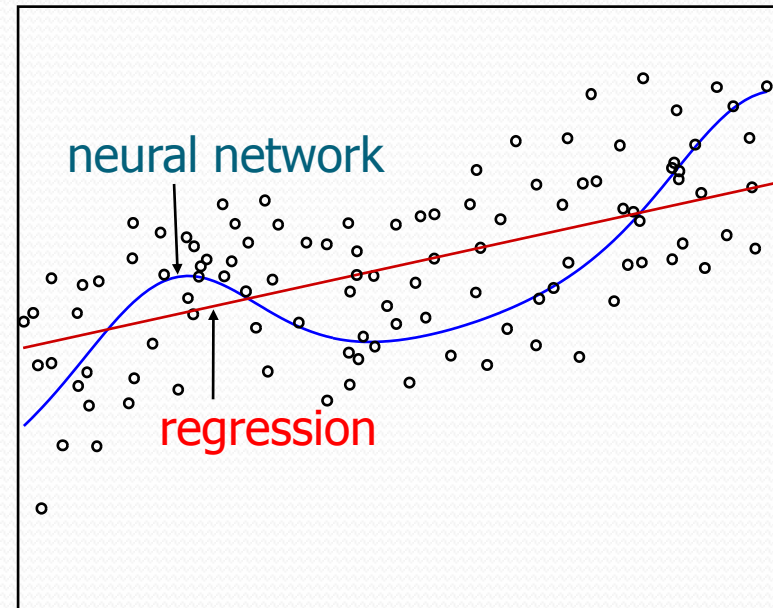
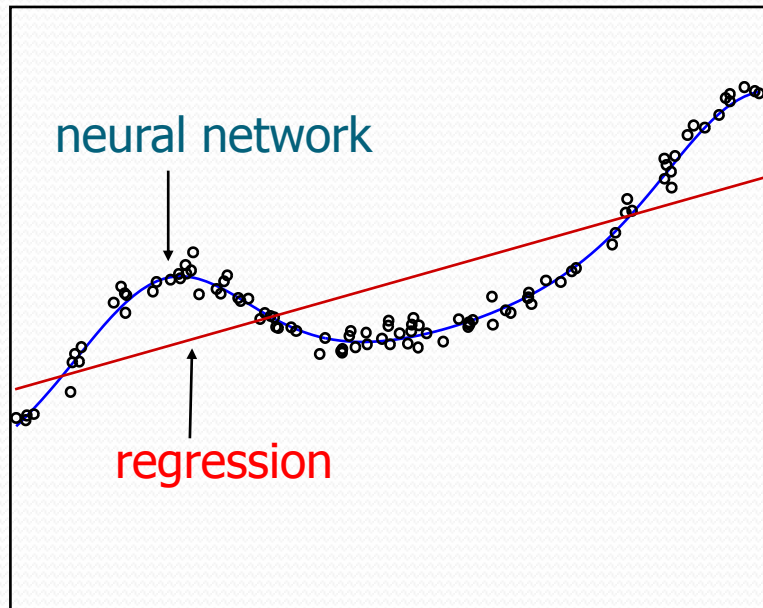
Inputs		Output
x_1	x_2	
F	F	F
T	F	T
F	T	T
T	T	F



Výhody NN

- Schopnost učení.
- Snadná parametrizace.
- Robustnost.
- Řeší mnoho problémů.

The Impact of Noisy Data



Nevýhody NN

- Nesnadné porozumění/interpretace.
- Můžou trpět přeučením (overfitting).
- Vstupy musí být numerické.
- Obtížná verifikace.

Typy neuronových sítí

- Existuje celá řada typů neuronových sítí, přičemž každý z nich se hodí na jinou třídu úlohy.
- Podle přítomnosti „učitele“ dělíme neuronové sítě na
 - sítě s učitelem (srovnávání výstupu s požadovaným)
 - sítě bez učitele (bez vnějšího arbitru).

Typy neuronových sítí podle zpracování signálu

Symbol	Způsob zpracování signálu
–	chybí vrstva
*	žádné
L	lineární kombinace
V	vzdálenost
Z	znaménko
S	sigmoida
G	Gaussova funkce
E	exponenciála
MIN	nejmenší vyhrává
MAX	největší vyhrává

Typy neuronových sítí podle zpracování signálu

Typ sítě	Vrstvy			Autoři
	Vstupní	Skrytá	Výstupní	
OLAM	*	–	L(+Z)	Haykin
HEBB	*	–	L+Z	Hopfield
HAMM	*	L+MAX	L+Z	Lipmann
MLP ₁	*	L+Z	L+Z	Widrow, Hoff
MLP ₂	*	L+S	L+S	Rummelhart
SOM	*	–	V+MIN	Kohonen
RBF	*	V+G	L	Poggio, Girosi
MOD	*	L+E	L	Jacobs, Jordan
COUNT	*	V+MIN	L	Nielsen

Typy neuronových sítí podle zpracování signálu

- V předchozí tabulce je základních devět typů sítí:
 - optimální lineární asociativní paměť (Optimum Linear Associative Memory – OLAM),
 - Hebbova síť (HEBB),
 - Hammingova síť (HAMM),
 - vícevrstvá síť s bipolárními neurony (Multi Layer Perceptron 1 – MLP₁),
 - vícevrstvá síť se spojitým chováním (MLP₂), Kohonenovy mapy (SOM),
 - síť s radiální bází (RBF),
 - modulární síť (MOD) a
 - síť se zpětným šířením (counterpropagation – COUNT).
- Další sítě lze vytvářet jejími kombinacemi.

Asociativní neuronové sítě

- U asociativní paměti probíhá vybavení příslušné informace na základě její částečné znalosti (asociace).
- Rozlišujeme sítě s pamětí
 - autoasociativní (upřesnění či zúplnění vstupní informace na základě již naučeného)
 - heteroasociativní (vybavení si sdružené informace na základě vstupní asociace)

Učení neuronových sítí

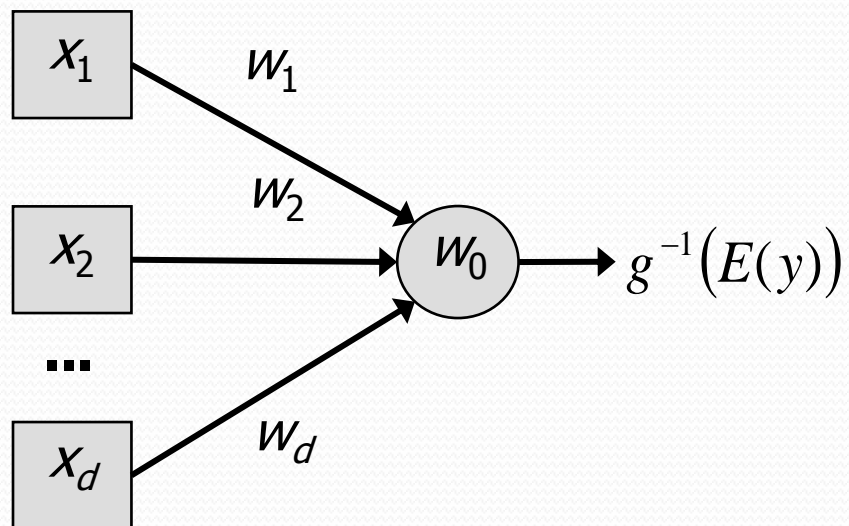
- Algoritmus učení je různý, nicméně obecně má tyto kroky:
 - inicializace vah (malé náhodné hodnoty)
 - předložení nového vzoru (vektor reálných hodnot X)
 - výpočet aktuálního vstupu (podle f aktivační funkce)
 - přizpůsobení vah (přepočtení vah podle zjištěné odchylky)
 - opakování procesu učení (až do stabilizace vah w_i)
- Fáze učení sítě se nazývá adaptivní a po naučení je síť ve fázi vybavování (aktivní fázi).

Využití neuronových sítí

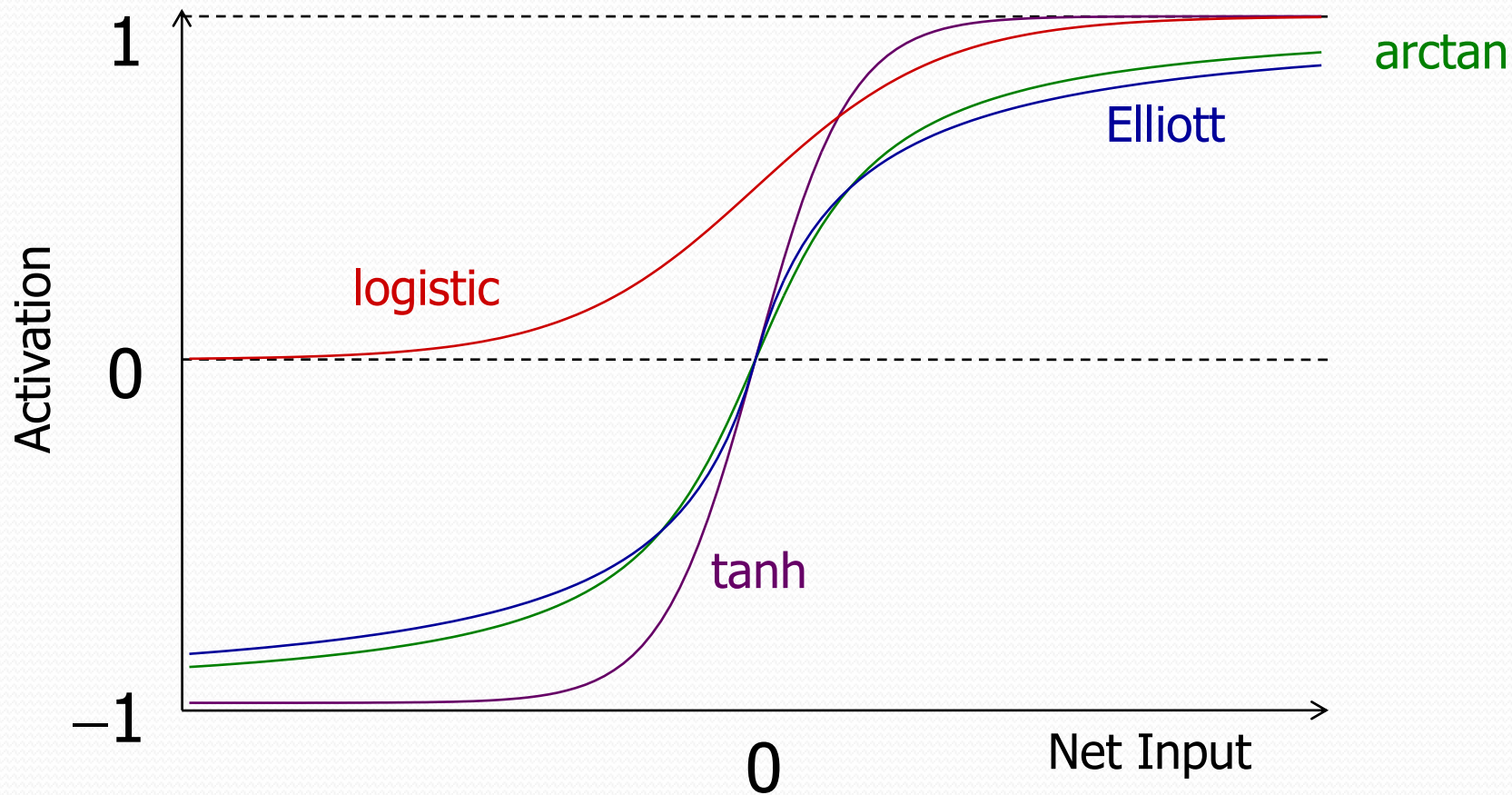
Úloha	Vhodné neuronové sítě
logické obvody	HEBB, HAMM, MLP ₁
odstranění šumu	MLP ₁ , MLP ₂ , RBF, MOD
řeč a výslovnost	MLP ₂ , SOM
kompresa	COUNT
data mining	OLAM, HEBB, SOM
optické rozpoznávání znaků	HEBB, OLAM, HAMM, MLP ₁ , MLP ₂ , RBF, SOM

Linear Perceptron

$$g^{-1}(E(y)) = w_0 + \sum_{i=1}^d w_i x_i$$

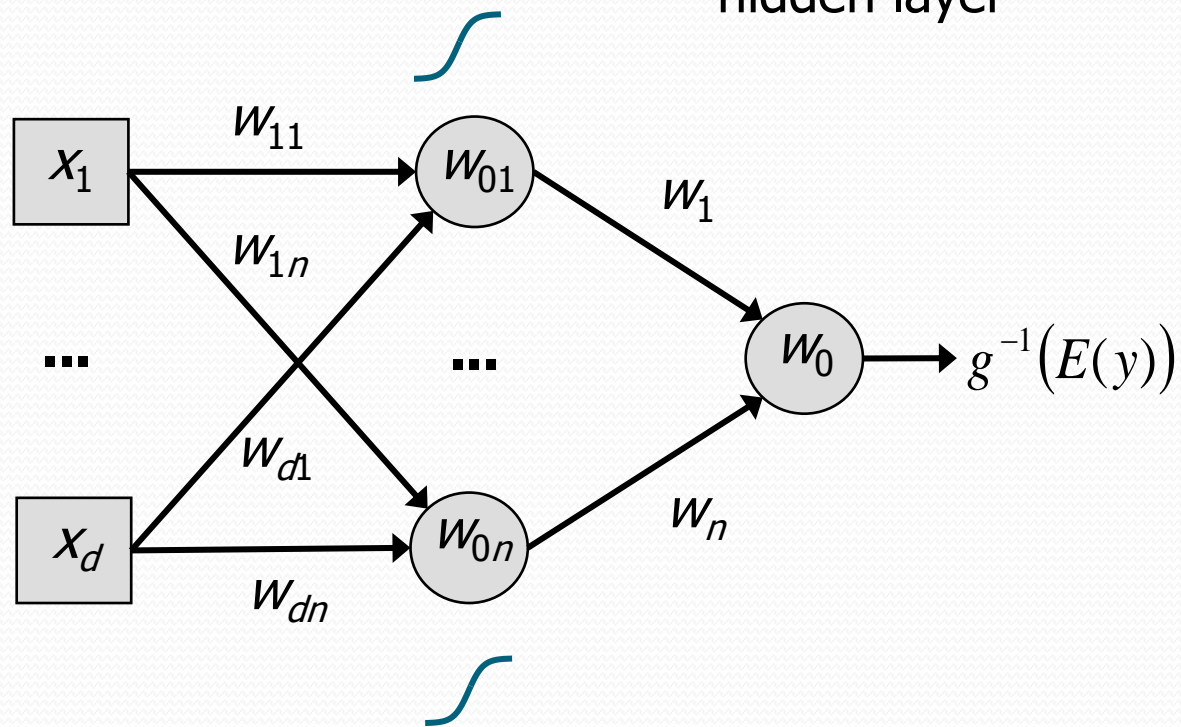


Activation Functions



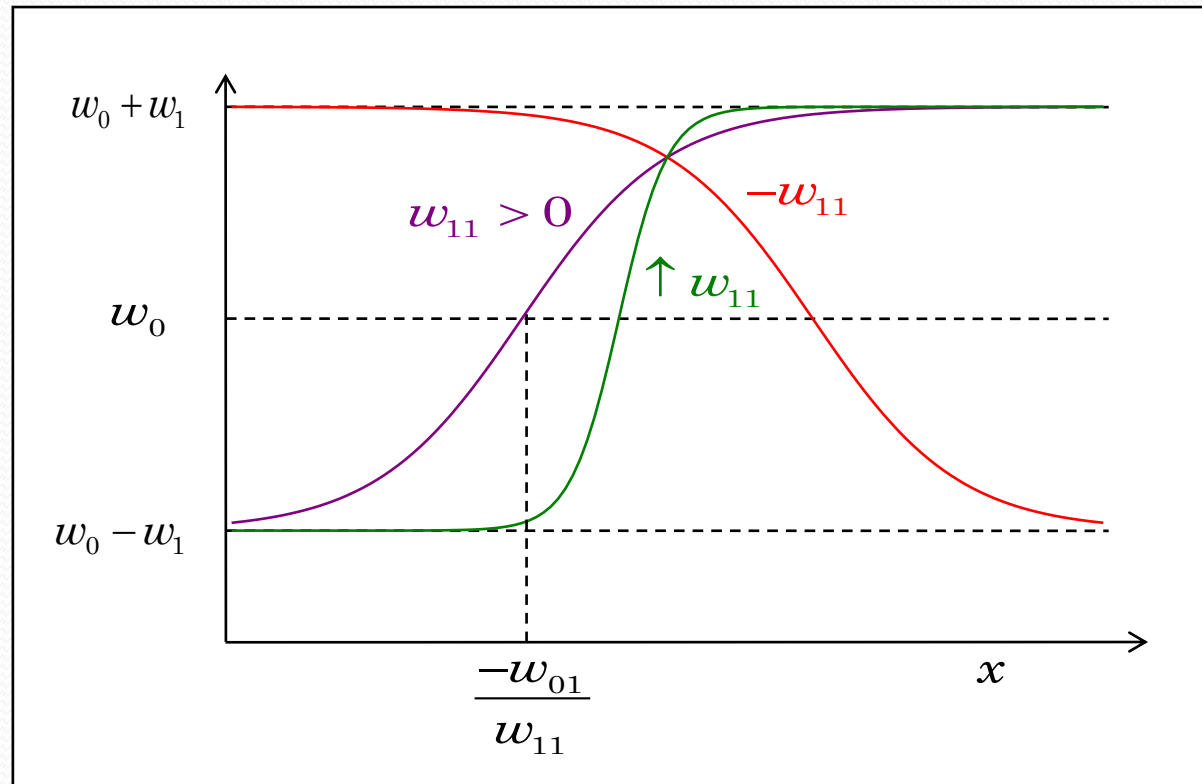
Multilayer Perceptron

$$g^{-1}(E(y)) = w_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^h w_i g_i \left(w_{0i} + \sum_{j=1}^d w_{ij} x_j \right)}_{\text{hidden layer}}$$

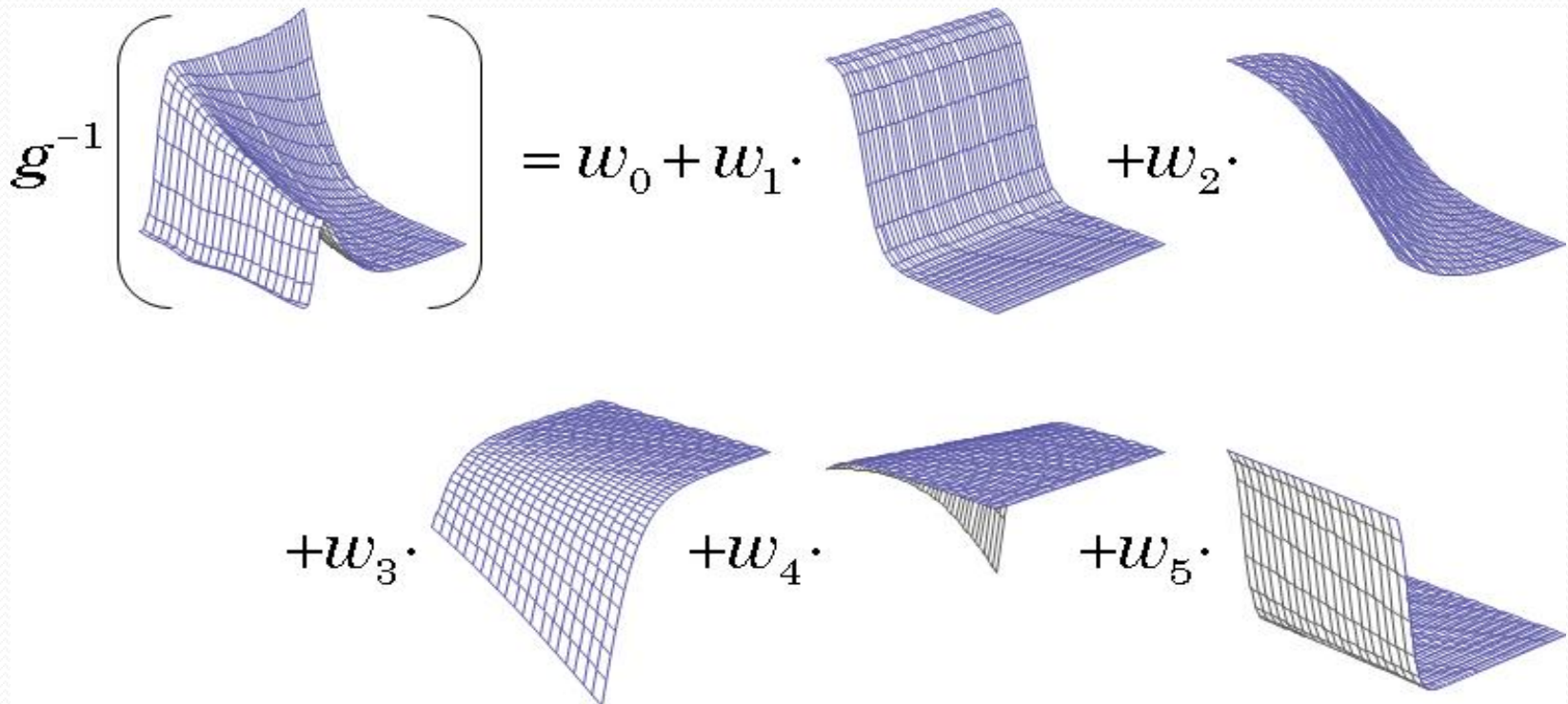


Shaping the Sigmoid

$$w_0 + w_1 \tanh(w_{01} + w_{11}x)$$

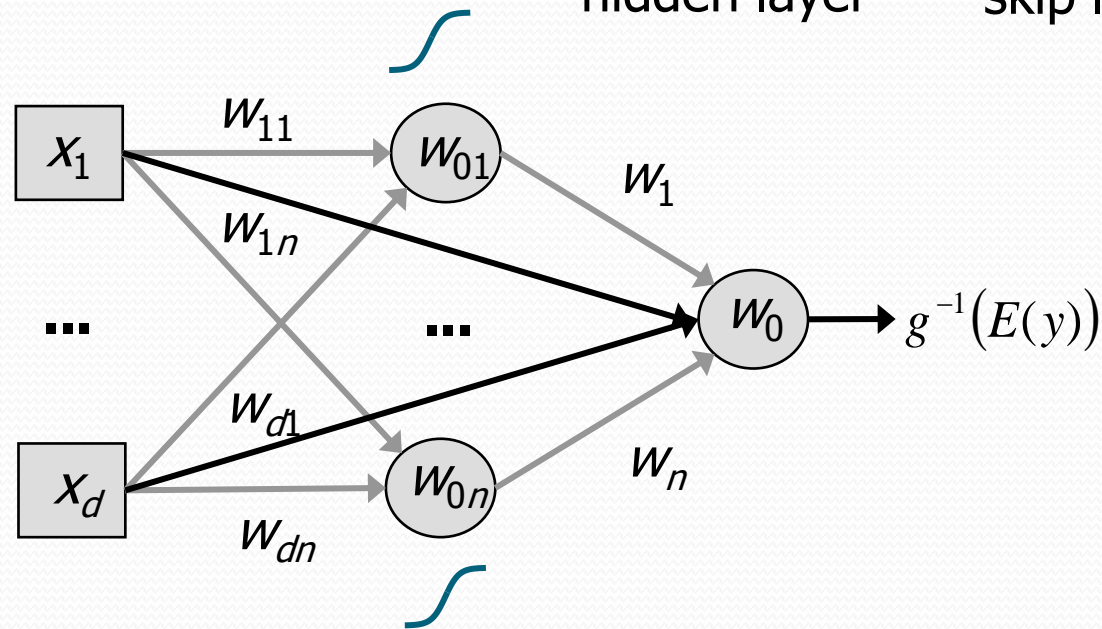


Sigmoidal Basis Functions



Skip-Layer Perceptron

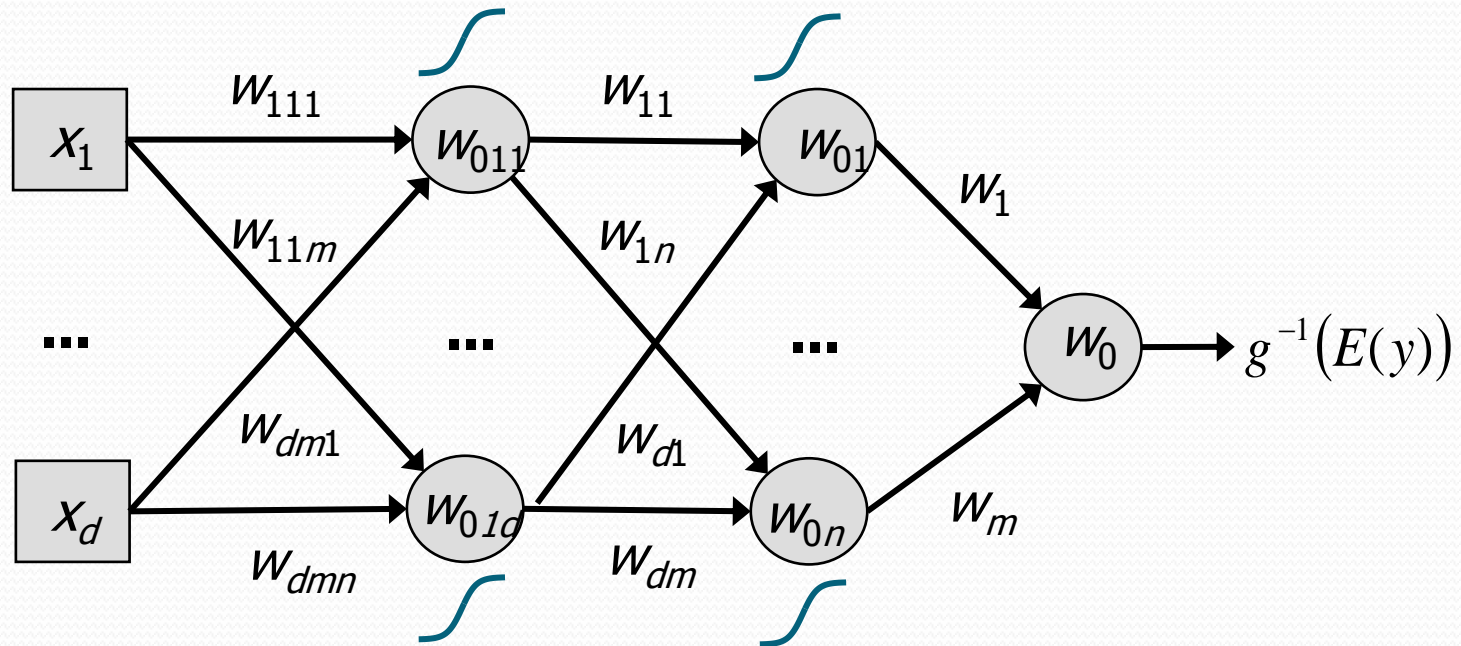
$$g^{-1}(E(y)) = w_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^h w_i g_i \left(w_{0i} + \sum_{j=1}^d w_{ij} x_j \right)}_{\text{hidden layer}} + \underbrace{\sum_{k=1}^d w_k x_k}_{\text{skip layer}}$$



MLP with Two Hidden Layers

$$g^{-1}(E(y)) = w_0 + \sum_{k=1}^m w_k g_k \left(w_{0k} + \sum_{j=1}^n w_{jk} g_j \left(w_{0jk} + \sum_{i=1}^d w_{ijk} x_i \right) \right)$$

nested hidden layers

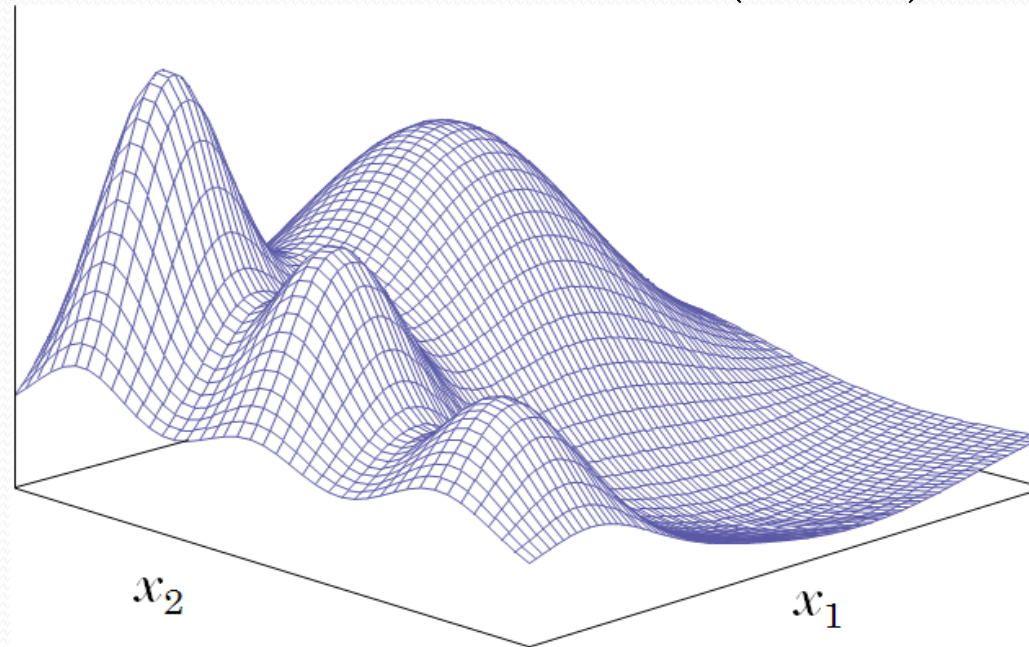


How Many?

- A single hidden layer network models any **continuous** relationship between the inputs and outputs.
- Two hidden layers model **discontinuous** relationships.
- The number of hidden units that will be required in each defined hidden layer is problem specific.

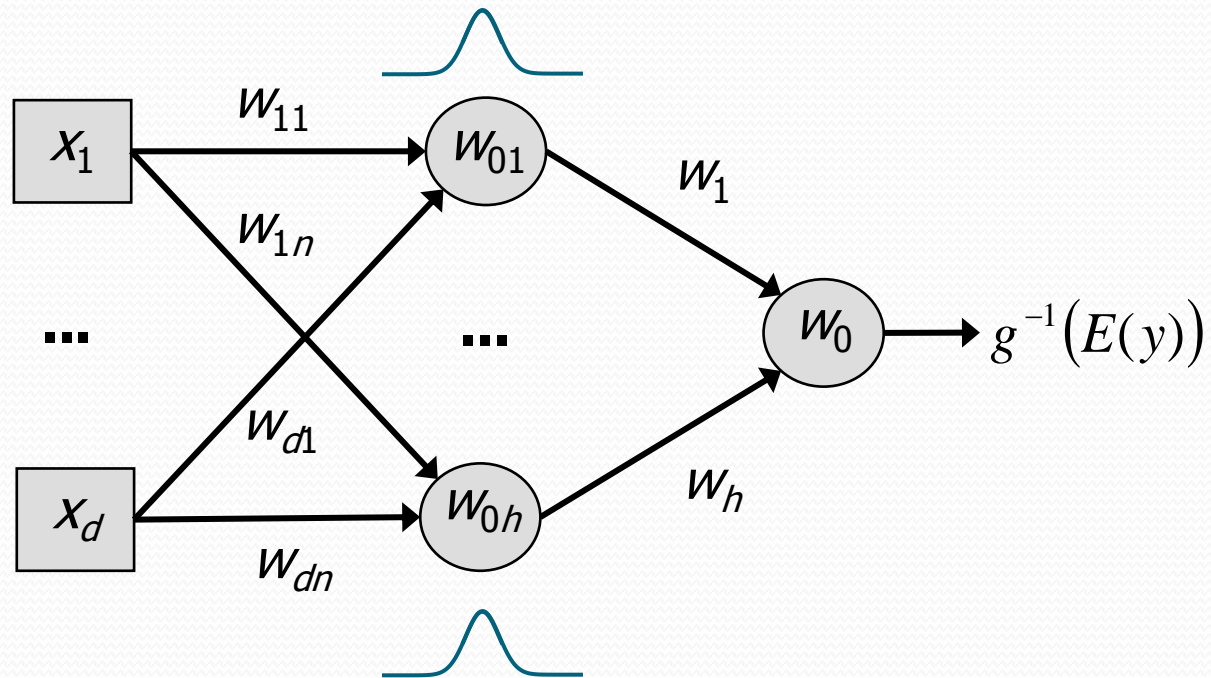
Overview of Radial Basis Functions

- Ordinary Radial Basis Functions (ORBF).
- Normalized Radial Basis Functions (NRBF).



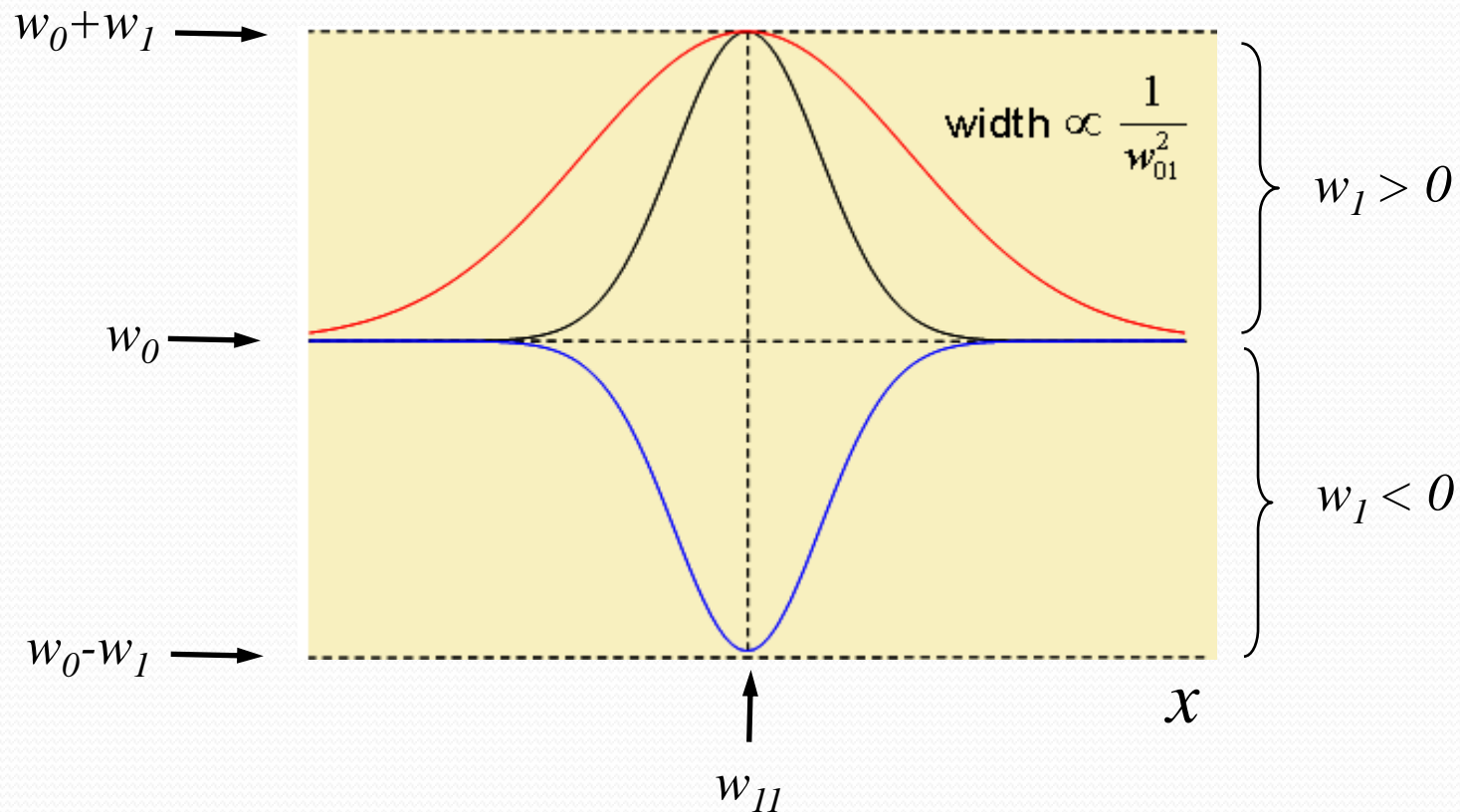
Ordinary Radial Basis Functions

$$g^{-1}(E(y)) = w_0 + \sum_{i=1}^h w_i \underbrace{\exp \left[-w_{0i} \left(\sum_{j=1}^d (x_j - w_{ij})^2 \right) \right]}_{\text{hidden unit}}$$



Shaping the Gaussian

$$w_0 + w_1 \exp\left(-w_{01}^2(x - w_{11})^2\right)$$



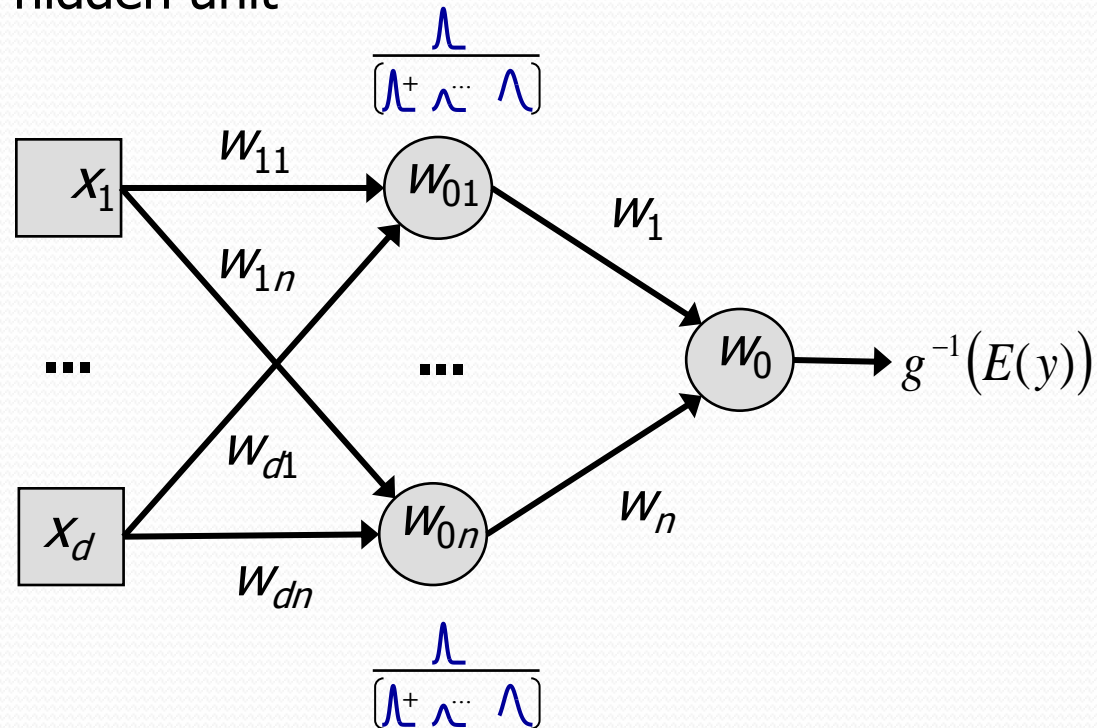
RBF Combination Functions

- **XRADIAL** Unequal Heights and Widths.
- **EQRADIAL** Equal Heights and Widths.
- **EWRADIAL** Equal Widths.
- **EHRADIAL** Equal Heights.
- **EVRADIAL** Equal Volumes.

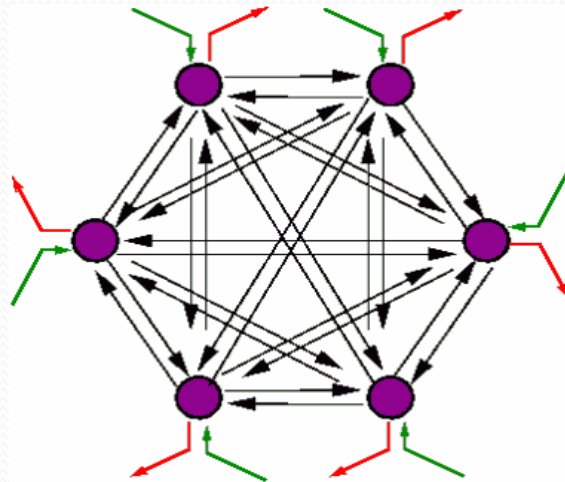
Normalized Radial Basis Functions

$$g^{-1}(E(y)) = w_0 + \sum_{i=1}^h w_i \underbrace{\left(\frac{e_i}{\sum_{j=1}^k e_j} \right)}_{\text{hidden unit}} \text{ where } e_i = \exp \left[f \cdot \ln(a_i) - w_{0i}^2 \left(\sum_{j=1}^d (x_j - w_{ji})^2 \right) \right]$$

hidden unit



2. Vícevrstvé NN, Backpropagation, MADALINE



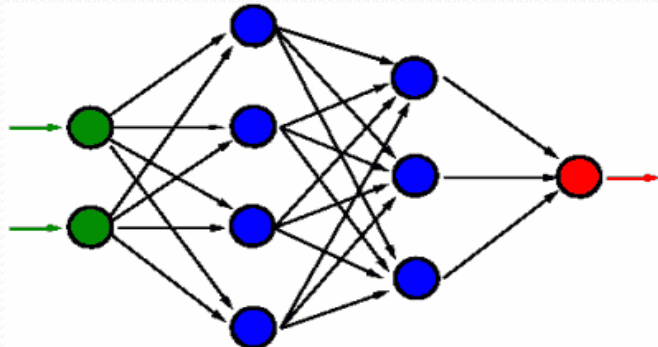
Neuronová síť (NS)

Neuronová síť se v čase vyvíjí, mění se propojení a stav neuronů a adaptují se váhy. V souvislosti se změnou těchto charakteristik v čase je účelné rozdělit celkovou dynamiku NS a pracovat v třech režimech (dynamikách):

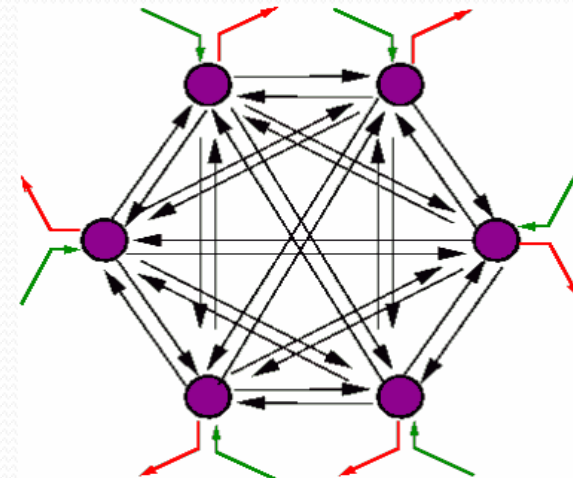
- **Organizační** – změna topologie
- **Aktivní** – změna stavu
- **Adaptivní** – změna konfigurace

Organizační dynamika NS

- Specifikuje architekturu sítě
 - Dopředná, acyklická (feed-forward)



- Rekurentní, cyklická



Aktivní dynamika NS

- Specifikuje **počáteční stav** NS a způsob jeho změny v čase při pevných ostatních charakteristikách (topologie a konfigurace).
- Nastaví se stavy vstupních neuronů (**vstup sítě**).
- Po inicializaci vstupů nastává vlastní výpočet.
- Stav výstupních neuronů, který se v čase mění je tzv. **výstup** NS, který je po čase konstantní a NS tak v aktivním režimu realizuje nějakou funkci na výstupním prostoru (**funkce NS**).
- Aktivní dynamika určuje i funkci jednoho neuronu. Např.:

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \dots \xi \geq 0 \\ 0 & \dots \xi < 0 \end{cases} \quad \xi = \sum_{i=0}^n \omega_i x_i$$

Adaptivní dynamika NS

- Specifikuje **počáteční konfiguraci** NS a způsob jakým se mění váhy v síti v čase.
- Všechny možné konfigurace tvoří tzv. **váhový prostor**.
- V adaptivním režimu se tedy nastaví váhy všech spojů a po inicializaci konfigurace probíhá vlastní adaptace (jejím cílem je najít konfiguraci, která v aktivním režimu realizuje předepsanou funkci).
- Učení s učitelem vs. bez učitele.

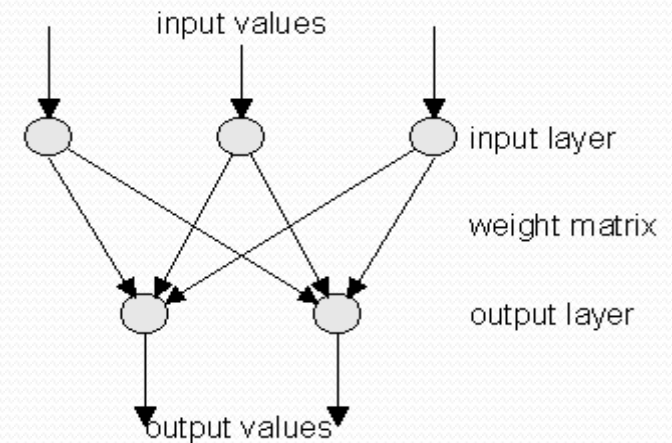
Síť perceptronů I.

- **Organizační** dynamika specifikuje pevnou architekturu jednovrstvé sítě n - m , tedy síť se skládá z n vstupních neuronů, z nichž každý je vstupem každého z m výstupních neuronů.

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \{0,1\}^m$$

$$\mathbf{W} = (\omega_{10}, \dots, \omega_{1m}, \dots, \omega_{m0}, \dots, \omega_{mn})$$



Sít' perceptronů II.

- **Aktivní dynamika** (určuje způsob výpočtu funkce sítě) – reálné stavy neuronů na vstupní vrstvě se nastaví na vstup a výstupní neurony počítají svůj binární stav, který určuje výstup sítě.
- Každý perceptron nejprve vypočítá svůj vnitřní potenciál jako příslušnou afinity kombinaci:

$$\xi = \sum_{i=0}^n \omega_{ji} x_i \quad j = 1, \dots, m$$

Sít' perceptronů III.

- Koeficienty $w = (\omega_{10}, \dots, \omega_{1m}, \dots, \omega_{m0}, \dots, \omega_{mn})$ tvoří konfiguraci sítě.
- Stav perceptronu se potom určí z jeho vnitřního potenciálu aplikací aktivační funkce, která má tvar ostré nelinearity:

$$\sigma : R \rightarrow \{0,1\} \quad \sigma(\xi) = \begin{cases} 1 \dots \xi \geq 0 \\ 0 \dots \xi < 0 \end{cases}$$

Síť perceptronů IV.

- To znamená, že funkce síť perceptronů závislá na konfiguraci w je daná vztahem:

$$\mathbf{y}(w) : R^n \rightarrow \{0,1\}^m;$$

$$\mathbf{y}_j = \sigma(\xi_j) \quad j = 1, \dots, m \quad \sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \dots \xi \geq 0 \\ 0 & \dots \xi < 0 \end{cases}$$

Síť perceptronů V.

- V **Adaptivní** dynamice je požadovaná funkce sítě perceptronů daná trénigovou množinou:

$$T = \left\{ (\mathbf{x}_k, \mathbf{d}_k) \left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in R^n \\ \mathbf{d}_k = (d_{k1}, \dots, d_{km}) \in \{0,1\}^m \end{array} \right. \quad k = 1, \dots, p \right\}$$

- Kde \mathbf{x}_k je reálný vstup k-tého trénigového vzoru a \mathbf{d}_k je odpovídající požadovaný binární výstup.
- Cílem adaptace je, aby síť pro každý vstup \mathbf{x}_k z trénigové množiny odpovídala v aktivním režimu požadovaným výstupům \mathbf{d}_k , tedy aby platilo:

$$\mathbf{y}(\mathbf{w}, \mathbf{x}_k) = \mathbf{d}_k \quad k = 1, \dots, p$$

Síť perceptronů VI.

- Na začátku adaptace v (diskrétním) čase 0 jsou váhy konfigurace nastavené náhodně z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.
- V každém časovém kroku je síti předložen jeden vzor z trénigové množiny a síť se ho snaží naučit, tedy adaptuje podle něj svoje váhy.
- Pořadí vzorů je dané tzv. **trénigovou strategií**.
- Perceptronové učící pravidlo:

$$\omega_{ji}^{(t)} = \omega_{ji}^{(t-1)} - \varepsilon x_{ki} (y_j(\mathbf{w}^{(t-1)}, \mathbf{x}_k) - d_{kj}) \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Síť perceptronů VII.

- \mathcal{E} z intervalu $(0,1>$ je rychlost učení.
- $y_j(\mathbf{w}^{(t-1)}, \mathbf{x}_k) - d_{kj}$ je rozdíl mezi skutečným j -tým výstupem sítě pro vstup k -tého vzoru a požadovanou hodnotou odpovídajícího výstupu tohoto vzoru.
- Určuje tedy chybu j -tého výstupu sítě pro k -tý trénigový vzor. Pokud je tato chyba nulová, příslušné váhy se neadaptují. V opačném případě může být tato chyba buď 1 nebo -1.
- Tato adaptivní dynamika zajistí, aby síť po konečném počtu kroků adaptivního režimu našla konfiguraci, pro kterou bude správně klasifikovat všechny trénigové vzory.

Vícevrstvá síť a Backpropagation

- Najznámnější a nejpoužívanější model NS, který se používá přibližně v 80% všech aplikací NS.
- Zobecnění sítě perceptronů – tzv. **vícevrstvý perceptron**.
- Algoritmus zpětného šíření chyby – **Backpropagation**.

Organizační a aktivní dynamika

Organizační dynamika:

- obecně se používá dvou- nebo třívrstvá síť
- X – množina n vstupních neuronů
- Y – množina m výstupních neuronů
- \mathcal{E}_j - reálný vnitřní potenciál neuronu j
- y_j - reálný stav (výstup) neuronu j
- ω_{ji} - reálná synaptická váha spoje od neuronu i k nevstupnímu neuronu j
- $\omega_{j0} = -h_j$ - bias nevstupního neuronu j odpovídající formálnímu jednotkovému vstupu $y_0 = 1$
- J_{\leftarrow} - množina neuronů, které jsou vstupem neuronu j
- J_{\rightarrow} - množina neuronů, kterým je neuron j vstupem

Organizační a aktivní dynamika

Aktivní dynamika:

- Výpočet funkce $\mathbf{y}(w) : R^n \rightarrow (0,1)^m$ probíhá podle diskrétní aktivní dynamiky.
- V čase 0 jsou odpovídající stavy vstupních neuronů nastavené na vstup sítě a ostatní neurony nemají určený stav.
- V čase $t > 0$ jsou vypočtené reálné hodnoty vnitřních potenciálů všech neuronů, které už mají určený stav (v čase t se aktualizují neurony v t -té vrstvě):

$$\xi_j = \sum_{i \in j_{\leftarrow}} \omega_{ji} y_i$$

- Dále je stanoven reálný stav $y_j = \sigma(\xi_j)$ neuronu j pomocí diferencovatelné aktivační funkce :

$$\sigma : R \rightarrow (0,1) \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda\xi}}$$

Organizační a aktivní dynamika

- Diferencovatelnost použité funkce a z ní plynoucí diferencovatelnost funkce sítě je podstatná pro učící algoritmus backpropagation.
- λ - parametr strmosti (gain)– v základním modelu je rovný 1, ale obecně může být strmost různá pro každý nevstupní neuron j . Stav neuronu se potom počítá:

$$\mathbf{y}_j = \sigma_j(\xi_j), \quad \text{kde} \quad \sigma_j(\xi) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda_j \xi}}$$

- Takto se vypočtou výstupy všech neuronů, hlavně výstupních, které určují výstup sítě a tedy i hodnotu sítě funkce pro daný vstup.

Adaptivní dynamika

- Podobně jako u sítě perceptronů je požadovaná funkce zadána trénigovou množinou:

$$T = \left\{ (\mathbf{x}_k, \mathbf{d}_k) \left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in R^n \\ \mathbf{d}_k = (d_{k1}, \dots, d_{km}) \in \{0,1\}^m \end{array} \right. k = 1, \dots, p \right\}$$

- Chyba sítě** $E(\mathbf{w})$ vzhledem k této trénigové množině je definována jako součet parciálních chyb sítě vzhledem k jednotlivým trénigovým vzorům, přičemž závisí na konfiguraci sítě \mathbf{w} :

$$E(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^p E_k(\mathbf{w})$$

kde
$$E_k(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in Y} (y_j(\mathbf{w}, \mathbf{x}_k) - d_{kj})^2$$

- Cílem adaptace je minimalizace chyby sítě ve váhovém prostoru – používá se gradientní metoda vyžadující diferencovatelnost chybové funkce.

Adaptivní dynamika

- V čase 0 jsou váhy konfigurace nastavené náhodně, blízko nuly.
- Adaptace probíhá v diskrétních časových krocích, které odpovídají tréninkovým cyklům.
- Nová konfigurácia $\mathbf{w}^{(t)}$ v čase $t > 0$ se vypočítá:

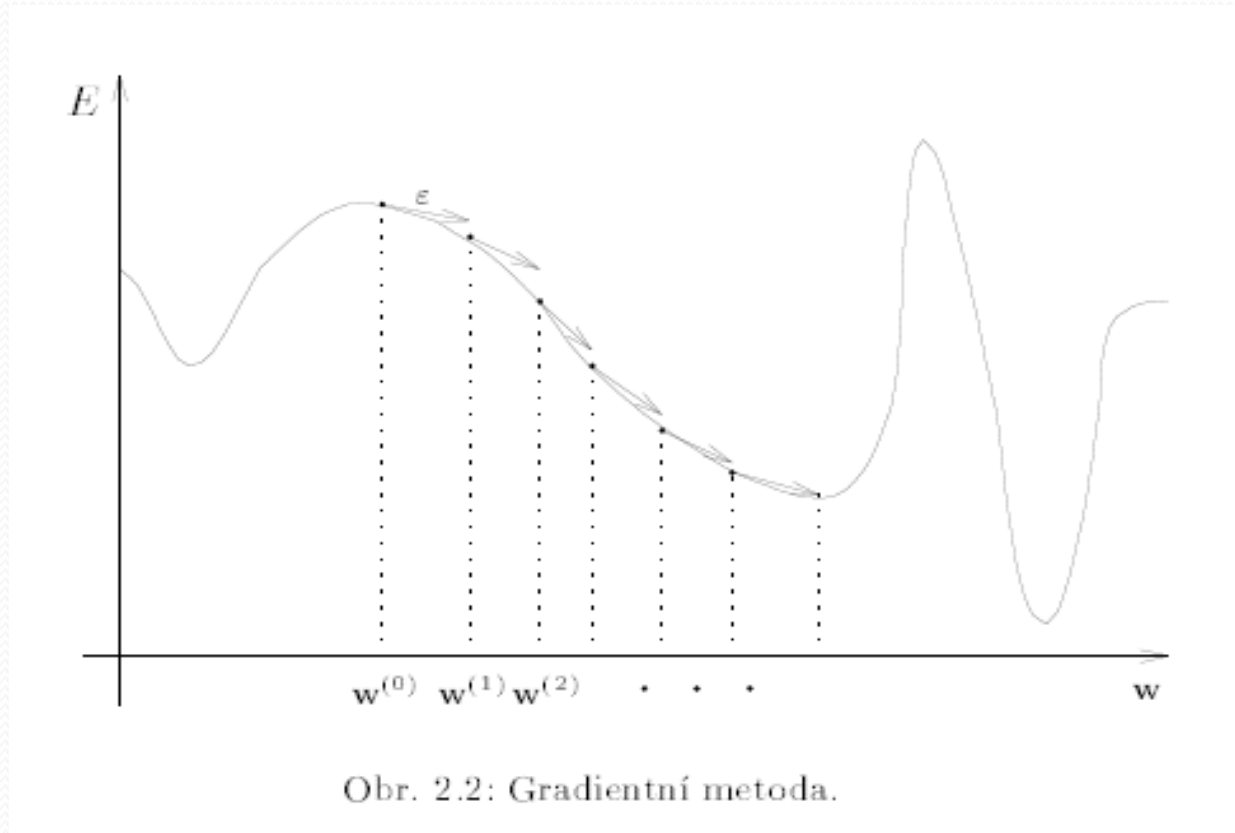
$$\omega_{ji}^{(t)} = \omega_{ji}^{(t-1)} + \Delta\omega_{ji}^{(t)}$$

- Kde změna vah v čase t je úměrná zápornému gradientu chybové funkce v čase $t-1$:

$$\Delta\omega_{ji}^{(t)} = -\varepsilon \frac{\partial E}{\partial \omega_{ji}} (\mathbf{w}^{(t-1)})$$

- ε z (0,1) je rychlost učení

Adaptivní dynamika



Při adaptaci sestrojíme v bodě současné konfigurace tečný vektor – gradient a posuneme se ve směru tohoto vektoru.

Strategie zpětného šíření

- Potřebujeme vypočítat gradient chybové funkce.
- Podle pravidla o derivaci součtu:

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{ji}} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial E_k}{\partial \omega_{ji}}$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial \omega_{ji}} = \frac{\partial E_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \omega_{ji}}$$

kde $\frac{\partial \xi_j}{\partial \omega_{ji}} = y_i$

a $\frac{\partial y_j}{\partial \xi_j} = \frac{\lambda_j e^{-\lambda_j \xi_j}}{(1 + e^{-\lambda_j \xi_j})^2} = \frac{\lambda_j}{1 + e^{-\lambda_j \xi_j}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\lambda_j \xi_j}} \right) = \lambda_j y_j (1 - y_j)$

- Po dosazení $\frac{\partial E_k}{\partial \omega_{ji}} = \frac{\partial E_k}{\partial y_j} \lambda_j y_j (1 - y_j) y_i$

Strategie zpětného šíření

- Pro výpočet $\frac{\partial E_k}{\partial y_j}$ se používá strategie zpětného šíření:

1. Je-li j je z Y (výstupní neuron): $\frac{\partial E_k}{\partial y_j} = y_j - d_{kj}$

čož odpovídá chybě výstupního neuronu j pro k -tý trénigový vzor.

2. Pro skrytý neuron uplatníme pravidlo o derivování složené funkce:

$$\frac{\partial E_k}{\partial y_j} = \sum_{r \in j \rightarrow} \frac{\partial E_k}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \omega_{ji}} = \sum_{r \in j \rightarrow} \frac{\partial E_k}{\partial y_r} \lambda_r y_r (1 - y_r) \omega_{rj} \quad j \notin X \cup Y$$

- Tedy výpočet derivace pro skrytý neuron j jsme převedli na výpočet parciálních derivací u neuronů r , do kterých vede vstup z neuronu j .

MADALINE I.

- **Multiple ADALINE**
- Základním prvkem je neuron ADALINE, který je velmi podobný perceptronu.
- **Organizační** dynamika je totožná jako u sítě perceptronů, ale namísto perceptronu je použitý ADALINE.

MADALINE II.

- **Aktivní** dynamika se liší tím, že výstupy sítě mohou být obecně reálné a jednotlivé ADELINÉ realizují lineární funkci (chybí nelineární aktivační funkce).

$$\mathbf{y}(w) : R^n \rightarrow R^m \quad y_j = \sum_{i=1}^n \omega_{ji} x_i \quad j = 1, \dots, m$$

MADALINE III.

- V **Adaptivním** režimu je požadovaná funkce MADALINE zadaná trénigovou posloupností, kde reálné vstupy trénigových vzorov \mathbf{x}_k jsou generované náhodně s daným rozdělením pravděpodobnosti a u každého je daný požadovaný výstup \mathbf{d}_k :

$$T = \left\{ (\mathbf{x}_k, \mathbf{d}_k) \left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in R^n \\ \mathbf{d}_k = (d_{k1}, \dots, d_{km}) \in R^m \end{array} \right. \quad k = 1, 2, \dots \right\}$$

MADALINE IV.

- Chyba j -tého ADALINE vzhledem k tréninkové posloupnosti v závislosti na části konfigurace \mathbf{w}_j je definovaná:

$$E_j(\mathbf{w}_j) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (y_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{x}_k) - d_{kj})^2}{p} = \mathbf{E} \left[\frac{1}{2} (y_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{x}_k) - d_{kj})^2 \right] \quad j = 1, \dots, m$$

- Je to tedy (podle zákona velkých čísel) střední hodnota poloviny mocniny rozdílu skutečného stavu j -tého ADALINE a odpovídajícího požadovaného výstupu vzhledem k tréninkové posloupnosti.

MADALINE V.

- Cílem adaptace je minimalizace chyby $E_j(\mathbf{w}_j)$.
- Vypočítáme gradient této chybové funkce záměnou limity a derivace a s využitím pravidla o derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial E_j}{\partial \omega_{ji}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p x_{ki} (y_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{x}_k) - d_{kj}) \quad i = 0, \dots, n$$

- Vyjádříme jako střední hodnotu:

$$\frac{\partial E_j}{\partial \omega_{ji}} = E[x_{ki} (y_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{x}_k) - d_{kj})] \quad i = 0, \dots, n$$

- Dosadíme za funkci y_j :

$$\frac{\partial E_j}{\partial \omega_{ji}} = -E[x_{ki} d_{kj}] + \sum_{r=0}^n \omega_{jr} E[x_{kr} x_{ki}] \quad i = 0, \dots, n$$

MADALINE VI.

- 2 možné postupy minimalizace chybové funkce:

1. Položíme parciální derivace rovny 0: $\frac{\partial E_j}{\partial \omega_{ji}} = 0$

Odhadnem středné hodnoty: $E[x_{ki} d_{kj}]$; $E[x_{kr} x_{ki}]$

Dostanem sústavu:

$$\sum_{r=0}^n \omega_{jr} E[x_{kr} x_{ki}] = E[x_{ki} d_{kj}] \quad i = 0, \dots, n$$

Řešením této soustavy je konfigurace \mathbf{w}_j^* pro j-tý ADALINE, která minimalizuje chybovou funkci.

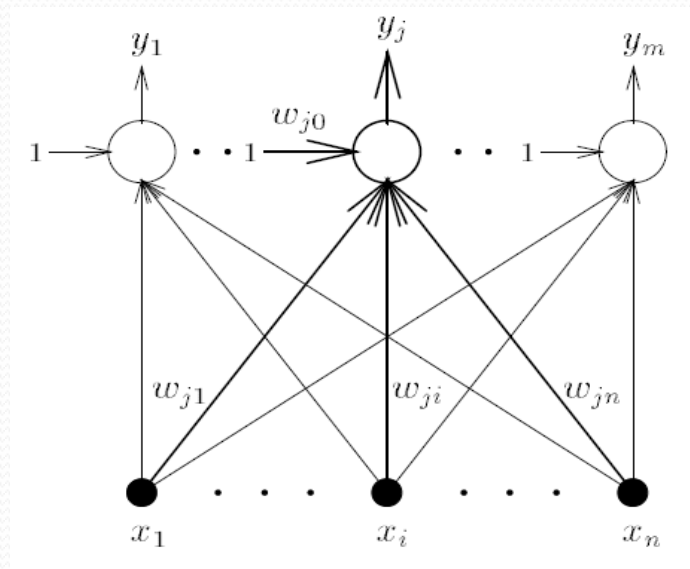
MADALINE VII.

- 2 možné postupy minimalizace chybové funkce:
- 2. Použití gradientní metody s využitím (Widrow-Hoff) pravidla **LMS** (Last-Mean-Square), podle kterého je změna konfigurace v čase t daná:

$$\omega_{ji}^{(t)} = \omega_{ji}^{(t-1)} - \varepsilon x_{ki} \left(y_j \left(\mathbf{w}_j^{(t-1)}, \mathbf{x}_k \right) - d_{kj} \right) \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, m \\ i = 0, \dots, n \end{array}$$

Tento adaptivní proces konverguje z libovolné počáteční konfigurace $\mathbf{w}^{(0)}$ ke konfiguraci \mathbf{w}^* , která minimalizuje chybové funkce $E_j(\mathbf{w}_j)$ $j = 1, \dots, m$.

3. Asociativní neuronové sítě, Hebbův zákon, Kohonenovy mapy, LVQ

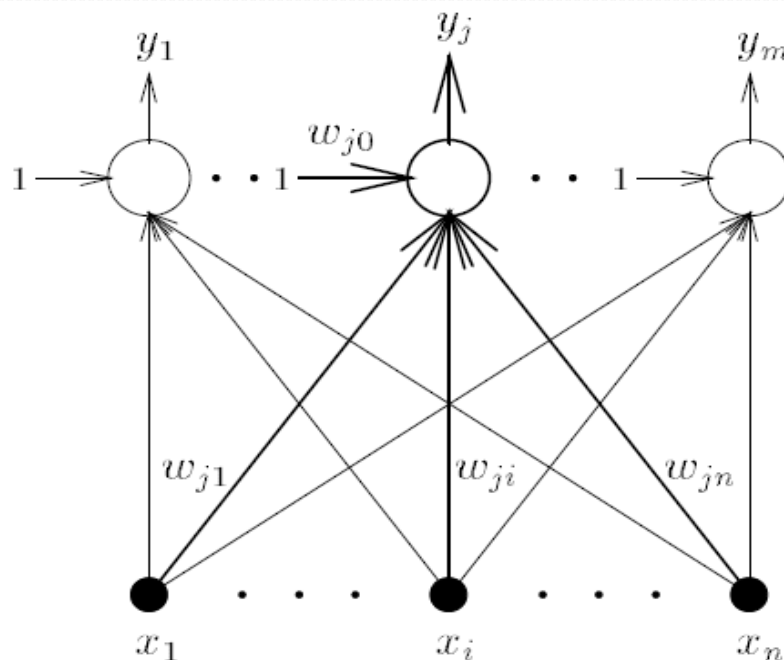


Lineární asociativní síť

- Model neuronové sítě, při kterém sa využívá asociativní paměť.
- Rozdíl proti klasickým počítačům – na vyhledání položky neslouží adresa v paměti, ale částečná znalost informace.
- Příklad: č-b foto připomene barvu vlasů, očí, jméno.
- 2 typy asociativní paměti:
 - Autoasociativní – zpřesnění vstupní informace
(vybavení si barevného obrazu).
 - Heteroasociativní – vybavení si združené informace
(vybavení si jména).

Lineární asociativní síť

- Organizační dynamika:
 - Skládá se z n vstupních neuronů, kde každý je vstupem každého z m výstupních neuronů.



Lineární asociativní síť

- Aktívní dynamika:

- Určuje způsob výpočtu funkce sítě.
- Počítá se jako lineární kombinace vstupů.
- Formálně se její funkce $\mathbf{y}(\mathbf{w}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

zapisuje: $y_j = \sum_{i=1}^n w_{ji}x_i \quad j = 1, \dots, m.$

- Vyjádření maticovým zápisem: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$
vstupy/výstupy jsou sloupcové vektory $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$
konfigurace sítě je daná váhovou maticí \mathbf{W} typu $m \times n$,
jejíž řádky odpovídají synaptickým váhám vstupů.

- Maticový součin:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & \dots & w_{mn} \end{pmatrix}$$

Lineární asociativní síť

- Adaptivní dynamika:
 - V adaptivním režimu je požadovaná funkce zadaná trénigovou množinou

$$\mathcal{T} = \left\{ (\mathbf{x}_k, \mathbf{d}_k) \mid \begin{array}{l} \mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{d}_k = (d_{k1}, \dots, d_{km}) \in \mathbb{R}^m \end{array} \quad k = 1, \dots, p \right\}$$

- Při autoasociativní paměti – výstup odpovídá vstupu (m=n a $\mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k$)
- 2 možnosti adaptace:
 - Adaptace podle Hebbova zákona
 - Pseudohebbovská adaptace

Lineární asociativní síť

- Adaptace podle Hebbova zákona:
 - Vysvětlená adaptivní dynamika pro případ heteroasociativní paměti.
 - Tvrdí, že změna synaptické váhy spoje mezi dvěma neurony je úměrná jejich souhlasné aktivitě, tedy součinu jejich stavů.
 - Na začátku adaptace ($t=0$) jsou všechny váhy konfigurace nulové, tedy $w_{ji}^{(0)} = 0$ ($j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$) .
 - V čase $t=1, \dots, p$ je síti předložený k -tý tréninkový vzor, váhy se adaptují: $w_{ji}^{(t)} = w_{ji}^{(t-1)} + d_{kj} x_{ki}$ $\begin{matrix} j = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, n . \end{matrix}$
 - Adaptace končí po p krocích – všechny tréninkové vzory jsou naučené.
 - Výsledná konfigurace:

$$w_{ji} = \sum_{k=1}^p d_{kj} x_{ki} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, n . \end{matrix}$$

Lineární asociativní síť

- Adaptace podle Hebbova zákona:

- Vyjádření pomocí matic:

$$\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{W}^{(k-1)} + \mathbf{d}_k \mathbf{x}_k^T, \quad k = 1, \dots, p,$$

kde T je transpozice matice, $\mathbf{0}$ je nulová matice a váhová matice $\mathbf{W}^{(k)}$ určuje konfiguraci sítě v čase $t=k$.

- Výsledná konfigurace:
$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(p)} = \sum_{k=1}^p \mathbf{d}_k \mathbf{x}_k^T = \mathbf{D}\mathbf{X}^T$$

kde sloupce matic \mathbf{X} , resp. \mathbf{D} jsou vstupy \mathbf{x}_k , resp. požadované výstupy \mathbf{d}_k trénigových vzorů.

- V případě autoasociativní paměti ($\mathbf{X}=\mathbf{D}$) $\mathbf{W} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$

Lineární asociativní síť

- Adaptace podle Hebbova zákona:

- Předpokládáme, že množina vstupních vektorů je ortonormální – vzájemně kolmé jednotkové vektory (vstupy se tedy dostatečně liší a jsou porovnatelné).

- Síť má schopnost reprodukce – ze vstupu \mathbf{x}_r dostaneme příslušný výstup \mathbf{d}_r .

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{W}\mathbf{x}_r = \left(\sum_{k=1}^p \mathbf{d}_k \mathbf{x}_k^\top \right) \mathbf{x}_r = \sum_{k=1}^p \mathbf{d}_k (\mathbf{x}_k^\top \mathbf{x}_r) = \mathbf{d}_r$$

- Síť by pro vstup $\mathbf{x}_r + \delta$, který je blízko \mathbf{x}_r měla dát požadovaný výstup \mathbf{d}_r .

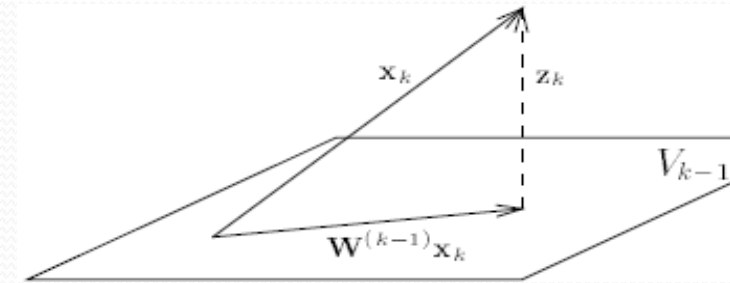
- Odpovídající chyba je norma rozdílu skutečného výstupu pro vstup $\mathbf{x}_r + \delta$ a požadovaného výstupu \mathbf{d}_r

$$E_r(\delta) = \|\mathbf{y}(\mathbf{x}_r + \delta) - \mathbf{d}_r\| = \|\mathbf{W}\mathbf{x}_r + \mathbf{W}\delta - \mathbf{d}_r\| = \|\mathbf{W}\delta\|$$

Lineární asociativní síť

- Pseudohebbovská adaptace:
 - Zeslabuje předpoklad reprodukce na ortonormalitu vstupů trénigových vzorů.
 - Předpokládejme LN množinu trénigových vzorů $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ – tvoří bázi vekt. prostoru V_p .
 - Vytvoříme z nich ortogonální bázi $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_p\}$ V_p .
 - V čase $t=0$ je $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0}$.
 - Po předložení k -tého trénigového vzoru určíme
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{W}^{(k-1)} \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{W}^{(k-1)} + \frac{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k}.$$
 - Výsledná váhová matice bude $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(p)} = \sum_{k=1}^p \frac{\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k} = \mathbf{X} \mathbf{X}^+$
kde $\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$.
 - \mathbf{X}^+ je pseudoinverzní matice k matici \mathbf{X} .

Lineární asociativní síť



- Pseudohebbovská adaptace – geometrický význam:
 - $\mathbf{W}^{(k-1)}\mathbf{x}_k$ – ortogonální projekce \mathbf{x}_k do V_{k-1} , kt. je určený bází $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$, resp. $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_p\}$.
 - Chceme overřit, že \mathbf{z}_k je kolmý na všechny \mathbf{z}_r , $\mathbf{z}_k\mathbf{z}_r=0$.
 - Dosadíme za $(\mathbf{W}^{(k-1)})^\top = \sum_{s=1}^{k-1} \frac{\mathbf{z}_s\mathbf{z}_s^\top}{\mathbf{z}_s^\top\mathbf{z}_s}$.

- Dostaneme $\mathbf{z}_k^\top\mathbf{z}_r = \mathbf{x}_k^\top\mathbf{z}_r - \sum_{s=1}^{k-1} \frac{\mathbf{x}_k^\top\mathbf{z}_s\mathbf{z}_s^\top\mathbf{z}_r}{\mathbf{z}_s^\top\mathbf{z}_s} = \mathbf{x}_k^\top\mathbf{z}_r - \frac{\mathbf{x}_k^\top\mathbf{z}_r\mathbf{z}_r^\top\mathbf{z}_r}{\mathbf{z}_r^\top\mathbf{z}_r} = 0$.

- Pokud \mathbf{x} leží ve V_p , pak splývá se svojí ortogonální projekcí $\mathbf{W}\mathbf{x}=\mathbf{x}$, speciálně pro vstupní bázické vektory $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ dostaneme

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{W}\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_r$$

- Tedy lineární autoasociativní síť vznikuvší pseudohebbovskou adaptací má schopnost reprodukce.

Lineární asociativní síť

- Pseudohebbovská adaptace – zobecnění pro heteroasociativní paměť:

- Rekurzivní zápis výpočtu váhové matice v případě heteroasociativní paměti určuje Grevilleova věta:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{W}^{(k-1)} + \frac{(\mathbf{d}_k - \mathbf{W}^{(k-1)}\mathbf{x}_k) \mathbf{z}_k^T}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k}$$

kde \mathbf{z}_k je stejný sloupcový vektor jako v případě autoasociativní paměti.

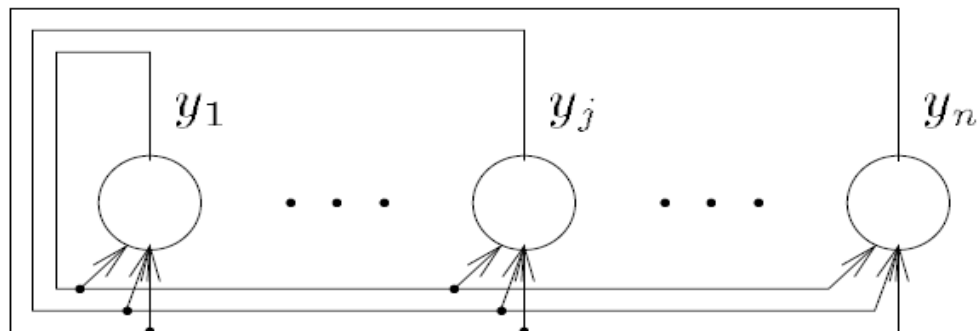
- Pomocí pseudoinverze dostaneme $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{X}^{(k-1)} \left(\mathbf{X}^{(k-1)} \right)^+ \mathbf{x}_k$, kde $\mathbf{X}^{(k-1)}$ je matice $n \times (k-1)$ – sloupce jsou vstupní vektory prvních $k-1$ trénigových vzorů.
- Pseudohebbovská adaptivní dynamika zaručuje schopnost heteroasociativní sítě reprodukovat trénigové vzory:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{W}\mathbf{x}_r = \mathbf{D}\mathbf{X}^+[\mathbf{X}]_r = \mathbf{D}[(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})]_r = \mathbf{d}_r$$

kde $[\mathbf{X}]_r$ je r -tý sloupec matice \mathbf{X} .

Hopfieldova síť

- Používá se jako autoasociativní paměť.
- Organizační dynamika:
 - Cyklická síť s n neurony.
 - Každý je spojený s každým.
 - Všechny neurony jsou vstupní a zároveň výstupní.
 - Dva opačně orientované spoje se dají chápat jako jeden neorientovaný.



Hopfieldova síť

- Adaptivní dynamika:
 - Řídí se hebbovým zákonem.
 - Funkce sítě je specifikovaná trénigovou množinou:

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \{-1, 1\}^n, k = 1, \dots, p\}$$

- Trénigové vzory nejsou uložené přímo, ale jsou reprezentované pomocí vztahů mezi stavy neuronů.
- Probíhá v p diskrétních krocích, kde jsou předkládány trénigové vzory, podle kterých se adaptují synaptické váhy a výsledná konfigurace se zapisuje:

$$w_{ji} = \sum_{k=1}^p x_{kj} x_{ki} \quad 1 \leq j \neq i \leq n$$

Hopfieldova síť

- Aktivní dynamika – pro případ sekvenčního synchronního výpočtu:

- V čase 0 jsou stavy nastavené na vstup sítě $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$, t.j.

$$y_i^{(0)} = x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

- V čase $t > 0$ je aktualizovaný neuron j , vybraný např. systematicky: $t = \tau n + j$, kde τ je makroskopický čas – počet period, v kterých jsou aktualizované všechny neurony.

- Celočíselný potenciál neuronu j : $\xi_j^{(t-1)} = \sum_{i=1}^n w_{ji} y_i^{(t-1)}$

- Znamínko určuje nový bipolární stav:

$$y_j^{(t)} = \begin{cases} 1 & \xi_j^{(t-1)} > 0 \\ y_j^{(t-1)} & \xi_j^{(t-1)} = 0 \\ -1 & \xi_j^{(t-1)} < 0 \end{cases}$$

- Výpočet končí v čase t^* , kdy se síť nachází v tzv. stabilním stavu.

- Stavy výstupních neuronů určují výstup sítě $\mathbf{y}=(y_1, \dots, y_n)$, kde

$$y_j = y_j^{(t^*)} \quad (j = 1, \dots, n)$$

Samooorganizace

- Modely neuronových sítí, které využívají soutěžní strategii učení.
- Výstupní neurony soutěží, který bude aktivní – na rozdíl od Hebbovských sítí je v určitém čase aktivní jen jeden neuron.
- Nejdůležitější/nejznámější architektura soutěžní strategie je Kohonenova samoorganizační mapa.

Vektorová kvantizace (VQ)

- Úlohou je přiblížit hustotu pravděpodobnosti reálných vstupních vektorů \mathbf{x} pomocí konečného počtu reprezentantů \mathbf{w}_i .
- Jedním ze způsobů nalezení reprezentantů je minimalizovat chybu VQ definovanou jako:

$$E = \int \|\mathbf{x} - \mathbf{w}_c\|^2 p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{kde } c = \arg \min_{l=1, \dots, h} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{w}_l\|\}.$$

- Pokud hustotu neznáme a problém je zadáný konečnou trénigovou množinou vzorů, chybu vypočítáme jako

$$E = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \|\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_c\|^2$$

- Index c funkčně závisí na vzorech \mathbf{x} a reprezentantech \mathbf{w} .

Vektorová kvantizace (VQ)

- Lloydův algoritmus:
 - Nechť je problém zadáný trénigovou množinou a parametrem h , který určuje počet reprezentantů.
 - Projdeme trénigovou množinu a ke každému vstupu $\mathbf{x}^{(t)}$ určíme příslušné w_c , pro každé w_j zjistíme

$$T_j = \left\{ \mathbf{x}^{(t)}; j = \arg \min_{l=1, \dots, h} \{ \|\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_l\| \} \right\}$$

vypočítáme
$$\mathbf{t}_j = \frac{1}{|T_j|} \sum_{\mathbf{x}_j \in T_j} \mathbf{x}_j$$

a w_j nahradíme hodnotou \mathbf{t}_j .

Kohonenovo učení

- Lloydův algoritmus je nevýhodný v tom, že ke změnám reprezentantů dochází až po průchodu celou trénigovou množinou.
- Proto byla vyvinutá jeho on-line varianta – jednoduchá samoorganizační síť, jejíž algoritmus se nazývá Kohonenovo učení.

Kohonenovo učení

- Organizační dynamika:
 - Dvojvrstvá síť s úplným propojením jednotek mezi vrstvami.
 - Vstupní vrstva – n neuronů – slouží k distribuci vstupních hodnot \mathbf{x} .
 - Výstupní vrstva – jednotky, které odhadují hustotu pravděpodobnosti vstupů.
 - Váhy w_j příslušné dané výstupní jednotce j určují její polohu ve výstupním prostoru.

Kohonenovo učení

- Aktivní dynamika:

- Vstupy – reálná čísla, výstupy – hodnoty 0, 1, přičemž jen jeden neuron je aktivní.

- Výstup neuronu v závislosti na jeho vzdálenosti od vstupního vektoru se počítá

$$y_j^{(t)} = \begin{cases} 1 & j = \arg \min_{l=1, \dots, h} \{ \|\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_l\| \} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Popsaný princip – „vítěz bere vše“ – je to jeden z mechanismů pro realizaci tzv. laterální inhibice.
- Každý neuron se snaží oslabit ostatní silou úměrnou jeho potenciálu, který je tím větší, čím je neuron blíže vstupu.
- Výstupní neuron s největším potenciálem zůstane aktivní.

Kohonenovo učení

- Adaptivní dynamika:
 - Procházíme celou tréninkovou množinou.
 - Po předložení tréninkového vzoru proběhne mezi jednotkami sítě soutěž.
 - Vítěz změní svoje váhy podle vzorce:

$$w_{ji}^{(t)} = \begin{cases} w_{ji}^{(t-1)} + \theta(x_i^{(t-1)} - w_{ji}^{(t-1)}) & j = \arg \min_l \{ \|\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_l\| \} \\ w_{ji} & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Reálný parametr $0 < \theta \leq 1$ určuje míru změny vah, na začátku je těsně pod hodnotou 1 a postupně se zmenšuje.
- Geometrický význam:
 - Vítězný neuron c posune svůj váhový vektor \mathbf{w}_c o určitou vzdálenost směrem k aktuálnímu vstupu.

Kohonenovy samoorganizační mapy

- Organizační dynamika:
 - Podobná jednoduché samoorganizační síti.
 - Výstupní jednotky jsou navíc uspořádané do nějaké struktury, např. dvojrozměrná mřížka, jednorozměrná řada jednotek,...
 - Struktura určuje, které jednotky v síti navzájem sousedí.
 - Okolí neuronu c velikosti s je množina všech neuronů, jejichž vzdálenost od c je $\leq s$

$$N_s(c) = \{j; d(j, c) \leq s\}$$

- Měření vzdálenosti neuronů je závislé na topologické struktuře vstupních neuronů.

Kohonenovy samoorganizační mapy

- Aktivní dynamika:
 - Stejný způsob práce sítě, jako u předcházejícího modelu.
 - Princip „vítěz bere vše“, jen jeden aktivní neuron.
 - Vstupy – reálná čísla, výstupy – 0,1.
 - Pokud dáme síti vstupní vektor, jednotky soutěží, kdo mu je nejbližší...tato jednotka má výstupní hodnotu rovnu 1.

Kohonenovy samoorganizační mapy

- Adaptivní dynamika:

- Bere do úvahy uspořádání neuronů.
- Upravují se váhy nejen vítězné jednotky, ale i jednotkám v okolí, tedy s vítězným neuronem se posouvají i jeho sousedi v síti.
- Na začátku bývá okolí velké, na konci zahrnuje jen samotného vítěze.
- Funkce, která pro neurony z okolí neuronu c dává hodnotu θ , pro ostatní 0.

$$h_c(j) = \begin{cases} \theta & j \in N_s(c) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Adaptaci vah zapisujeme: $w_{ji}^{(t)} = w_{ji}^{(t-1)} + h_c(j)(x_i^{(t)} - w_{ji}^{(t-1)})$
- Obecnější definování $h_c(j)$ pomocí Gaussovy funkce, aby přechod mezi nulovými a nenulovými hodnotami byl spojitý

$$h_c(j) = h_0 \exp\left(\frac{-d(j, c)^2}{\sigma^2}\right)$$

- Parametr h_0 – maximální míra posunu.
- V každém kroku je třeba projít a změnit všechny váhové vektory v síti.

LVQ (learning vector quantizations)

- Nyní se budeme zabírat tím, jak se dá Kohonenova síť použít pro řešení problémů klasifikace dat do kategorií.
- 3 algoritmy učící vektorové kvantizace – slouží na doučení sítě.
- Uvažujme data $\{(\mathbf{x}^{(t)}, d^{(t)}); t=1, \dots, k\}$, kde $\mathbf{x}^{(t)}$ je z \mathbb{R}^n a $d^{(t)}$ je z $\{C_1, \dots, C_q\}$, každý vstupní vektor $\mathbf{x}^{(t)}$ má přiřazenou jednu z konečného počtu kategorií C_k .
- Učení má 3 fáze:
 - Učení bez učitele, jako v předcházejícím případě.
 - Označení výstupních neuronů kategoriemi.
 - Doučení sítě jedním z algoritmů LVQ.

LVQ (learning vector quantizations)

- Postup učení:
 - Použijeme standardní učící algoritmus Kohonenovy sítě – rozmístíme neurony do vstupného prostoru – musí aproximovat hustotu pravděpodobnosti vzorů.
 - Využijeme výstupy $d^{(t)}$ z trénigové množiny – u každého trénigového vzoru zjistíme, který neuron je mu nejbliže, zapamatujeme si, do které kategorie patřil.
 - Po průchodu trénigovou množinou – každý výstupní neuron má tabulku četností jednotlivých kategorií – reprezentuje neuron.
 - Každému neuronu přiřadíme kategorii, kterou reprezentoval nejčastěji – označíme v_j .
 - Výsledek – rozdělení neuronů do skupin, které odpovídají jednotlivým kategoriím.
 - Použijeme jeden z třech algoritmů – pro doladění vah výstupních neuronů.

LVQ (learning vector quantizations)

- LVQ₁:
 - Snaží se posílit správnou klasifikaci posunutím neuronu k danému vstupu, resp. napravit nesprávnou klasifikaci odsunutím neuronu od daného vstupu.
 - Posunutí se týká jen jednoho neuronu – ten, který „zvítězil“.
 - Posunutí se děje o malou část vzdálenosti neuronu od vstupního vzoru.

LVQ (learning vector quantizations)

- LVQ₁ – přesnější algoritmus:
 - Předkládáme síti všechny trénigové vzory.
 - Každému vzoru určíme nejbližší neuron: $c = \arg \min_{l=1, \dots, h} \{ \|\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_l\| \}$
 - Provedeme úpravy vah tohoto neuronu, přičemž ostatní neurony zůstávají beze změny:
$$\mathbf{w}_c^{(t)} = \begin{cases} \mathbf{w}_c^{(t-1)} + \alpha(\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_c^{(t-1)}) & d^{(t)} = v_c \\ \mathbf{w}_c^{(t-1)} - \alpha(\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_c^{(t-1)}) & d^{(t)} \neq v_c \end{cases}$$
 - Parametr α by měl mít počáteční hodnotu 0,01 – 0,02 a během cca 100tis. iterací by měl být roven nule.
 - Hranice vytvořená mezi třídami pomocí LVQ₁ je aproximace Bayesovské rozhodovací hranice – určuje, do které třídy bod připadne podle jeho pozice vzhledem k místu, kde se střetávají distribuce vzorů daných dvou tříd.
 - LVQ₁ posouvá vzory směrem od rozhodovací hranice, přičemž rozhodovací hranice se nachází uprostřed spojnice mezi dvěma neurony pocházejícími z různých tříd.

LVQ (learning vector quantizations)

- LVQ₂:
 - Snaží se upravit předcházející algoritmus tak, aby posouval rozhodovací hranici směrem k Bayesovské hranici.
 - V jednom kroku posune vždy dva neurony.

LVQ (learning vector quantizations)

- LVQ₂ - podmínky pro určení 2 neuronů:
 - Necht' máme vzor $\mathbf{x}^{(t)}$, uvažujeme případ, kdy pro 2 neurony $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j$ nejbližše tomuto vzoru platí, že jeden klasifikujeme dobře a druhý špatně, přičemž nepřihlížíme k tomu, který je nejbližše.
 - Vzorek $\mathbf{x}^{(t)}$ nesmí ležet příliš blízko ani jednoho neuronu, vzorek se má nacházet v okně/okolí nadroviny v středu spojnice $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j$, přesněji vzorek padne do okna relativní šířky q , pokud

$$\text{platí} \quad \min \left\{ \frac{d_i}{d_j}, \frac{d_j}{d_i} \right\} > s$$

$$\text{kde} \quad s = \frac{1-q}{1+q}, \quad d_i = d(\mathbf{w}_i, \mathbf{x}^{(t)}), \quad d_j = d(\mathbf{w}_j, \mathbf{x}^{(t)})$$

- Hodnota q je mezi 0,1 a 0,3 – snaha o co nejužší okno (přesné umístění hranice) a dostatečnou šířku (zachycení statisticky významných dat).

LVQ (learning vector quantizations)

- LVQ₂ - postup:
 - Předpokládejme např., že $\mathbf{x}^{(t)}$ a \mathbf{w}_j patří do stejné kategorie ... provedeme následující změny vah:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_i^{(t)} &= \mathbf{w}_i^{(t-1)} - \alpha(\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_i^{(t-1)}) \\ \mathbf{w}_j^{(t)} &= \mathbf{w}_j^{(t-1)} + \alpha(\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_j^{(t-1)})\end{aligned}$$

- Algoritmus nejprve zlepšuje pozice rozhodovací hranice tím, že ji posune směrem k Bayesovské hranici, po jistém počtu kroků se však jednotky od této hranice začínají vzdalovat.
- LVQ₂ se osvědčil pro cca 10000 iterací.

LVQ (learning vector quantizations)

- LVQ₃:

- Doplněný o další pravidlo, kterým se zajistí, že správně klasifikující neurony se budou pohybovat směrem k předkládanému tréninkovému vzoru.

- Krok vypadá následovně:
$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{(t)} &= \mathbf{w}_i^{(t-1)} - \alpha(\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_i^{(t-1)}) \\ \mathbf{w}_j^{(t)} &= \mathbf{w}_j^{(t-1)} + \alpha(\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_j^{(t-1)}) \end{aligned}$$

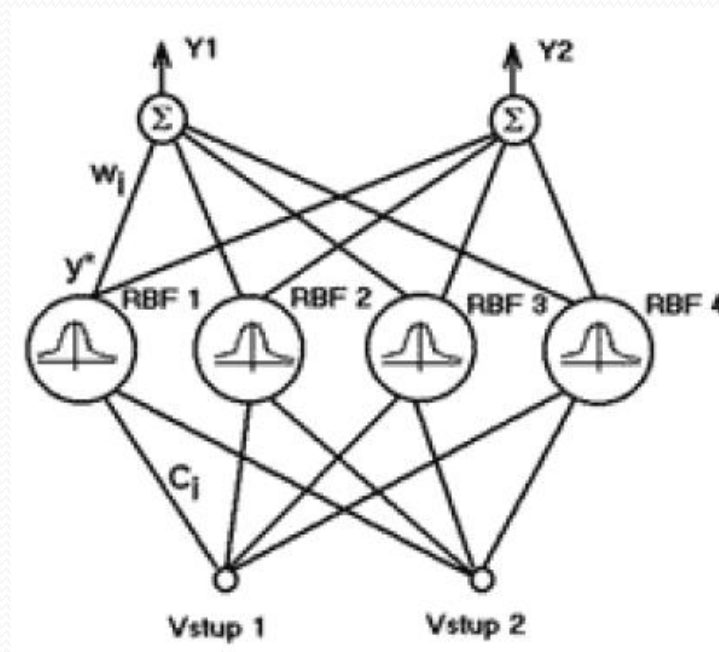
kde i, j je pár výstupních neuronů, které jsou nejbližší k vzoru $\mathbf{x}^{(t)}$, $v_j=d^{(t)}$, $v_i \neq d^{(t)}$ a $\mathbf{x}^{(t)}$ patří do okna relativní šířky q .

- Platí:
$$\mathbf{w}_r^{(t)} = \mathbf{w}_r^{(t-1)} + \varepsilon \alpha (\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{w}_r^{(t-1)})$$

kde $r=i$, nebo $r=j$, a $v_i=v_j=d^{(t)}$.

- Hodnota ε závisí na šířce okna, měla by být v rozmezí 0,1 – 0,5, je konstantní v čase.
- Pro parametr α platí: $0 < \alpha < 1$.

4. RBF sítě, Modulární NN, Hammingova síť

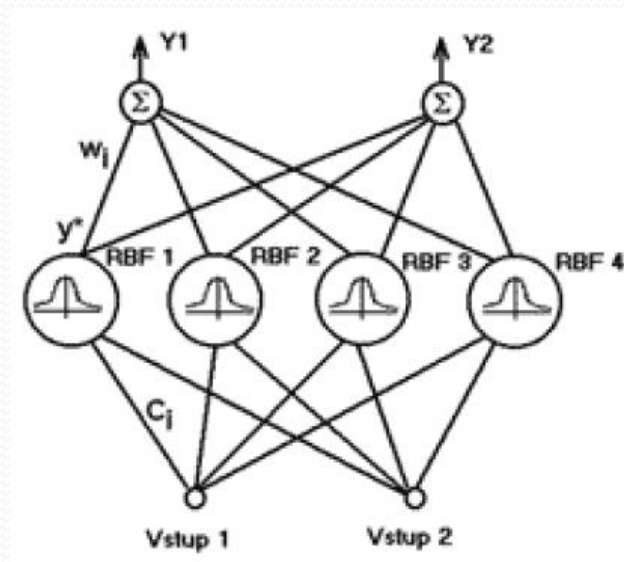


Neuronové sítě typu RBF

- Patří do kategorie sítí s lokálními neurony, což jsou modely *dopředných sítí* obsahující jednu skrytou vrstvu s lokálními jednotkami, které mají výstup lokalizován do okolí bodu určeného svými parametry
- **Radiální bazické funkce:** radiální funkci si lze představit jako funkci určenou středem, která pro argumenty se stejnou vzdáleností od středu dává stejné funkční hodnoty (v dvojrozměrném prostoru se jedná o kružnice)

Neuronové sítě typu RBF

- RBF síť má 3 vrstvy neuronů –vstupní, skrytou a výstupní.
- Vstupní vrstva neuronů má za úkol pouze zprostředkovávat přenos hodnot ze vstupů sítě do neuronů skryté vrstvy.
- Skrytá vrstva je tvořena RBF neurony, které realizují jednotlivé radiální funkce.
- Výstupní vrstvu tvoří perceptronovské neurony.



RBF jednotka (neuron)

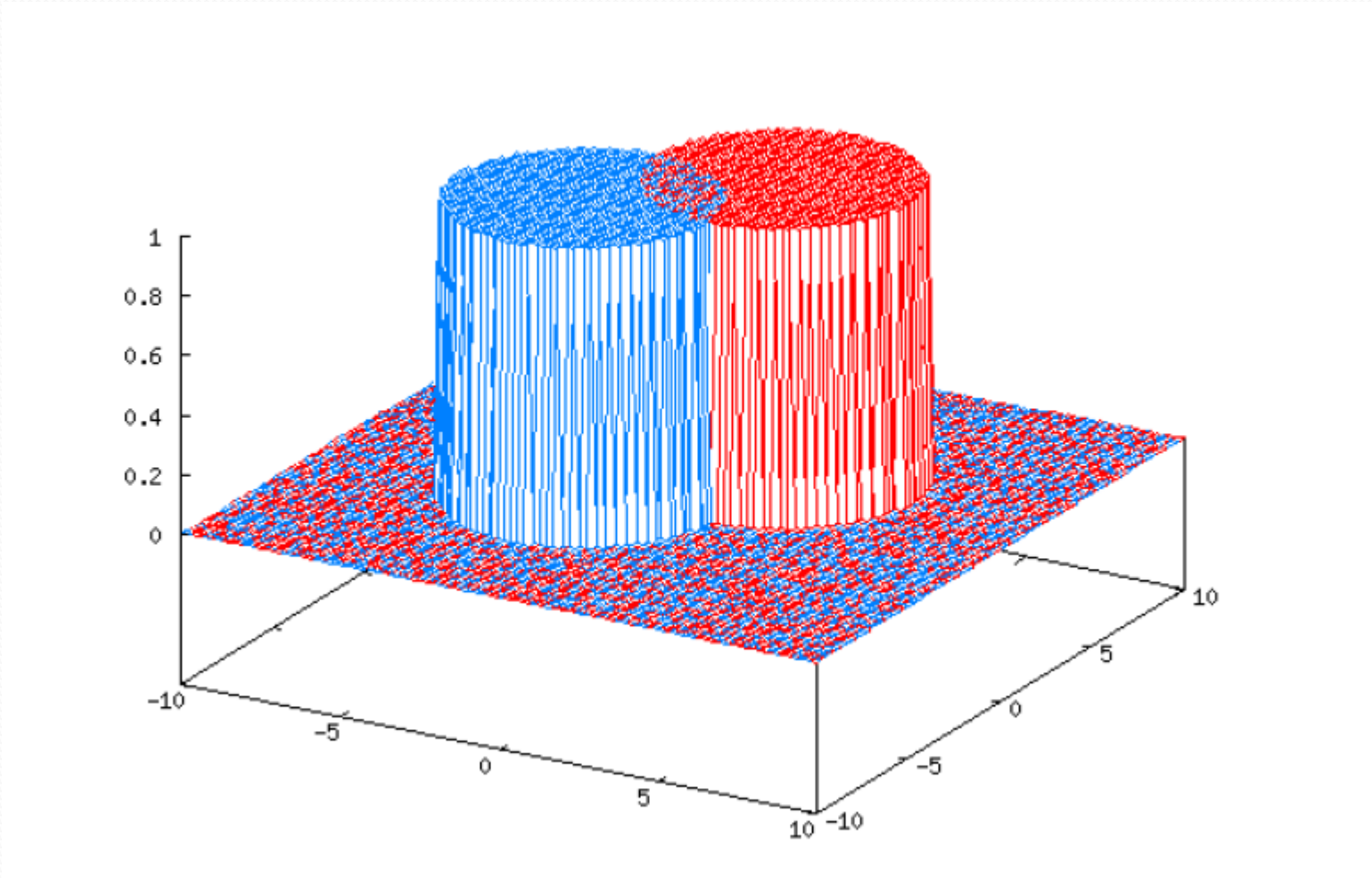
- Má n reálných vstupů $x=(x_1,\dots,x_n)$, z nichž má každý váhu (parametr) c_i
- Má jeden reálný výstup y , který odráží stav RBF neuronu, tzn. je-li neuron v klidu ($y=0$) nebo je-li aktivní ($0<y\leq 1$)
- Může mít další parametr b , tzv. šířku
- RBF jednotka si pamatuje souřadnice středu $c = (c_1,\dots,c_n)$ a dále jednu skalární veličinu (šířku b)
- Vektoru c se také říká prototyp

Funkce RBF jednotky

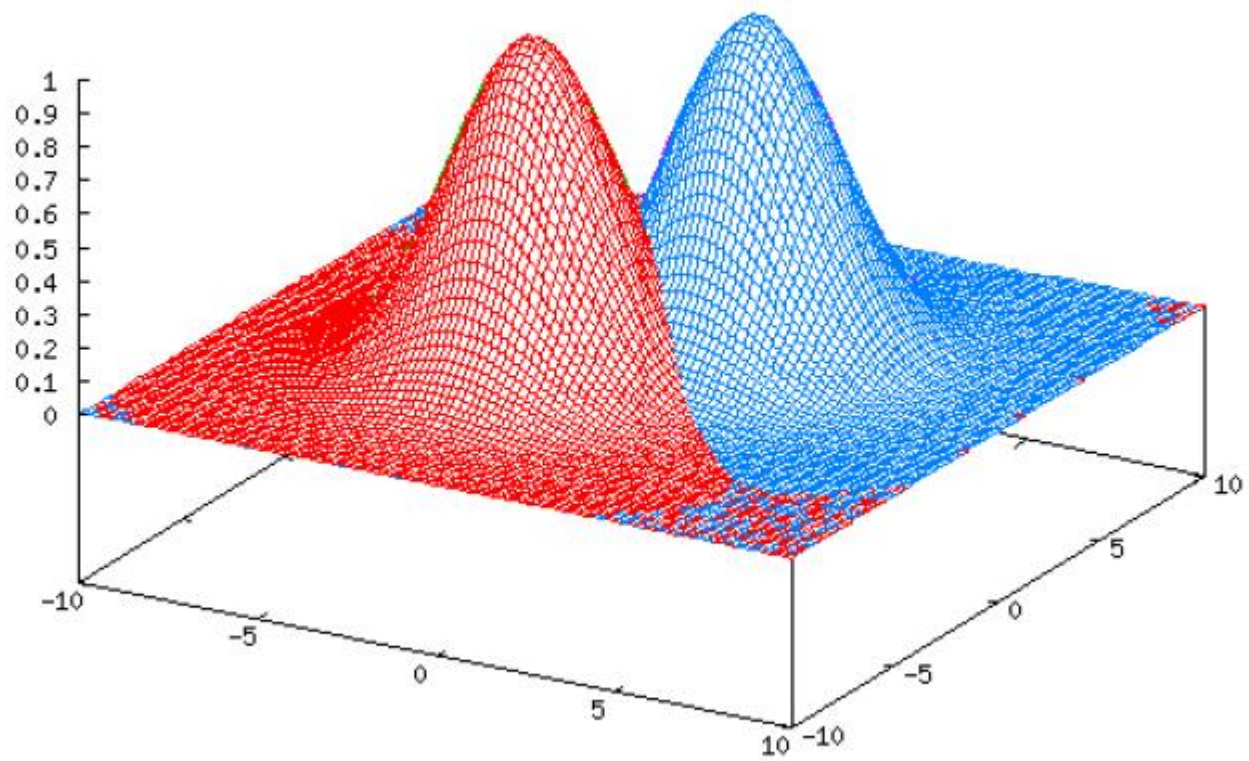
- RBF jednotka vypočte, jaká je (euklidovská) vzdálenost bodu x od středu c
$$\|X - C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - C_{ji})^2}$$
- Pokud je tato vzdálenost menší než šířka b , tak dojde k aktivaci neuronu a jeho výstupu
- Šířka b tedy určuje oblast kolem středu c , kde dává jednotka nenulový výstup, pokud do této oblasti spadne nějaká vstupní hodnota
- Průběh výstupní veličiny Y při aktivaci neuronu přitom může mít různý charakter podle použité výstupní funkce

- Pro RBF neurony se používá euklidovská metrika na rozdíl od perceptronů, kde je metrikou skalární součin
- Jako výstupní funkce RBF neuronu se nejčastěji používá Gaussova funkce (výhodou Gaussovy funkce je, že výstup neuronu se pohybuje spojitě v rozmezí 0 až 1, čímž se vyjadřuje vzálenost vstupního vektoru x od středu c ; jestliže tato vzdálenost je menší než šířka b , pak neuron je aktivován a jeho výstup je v rozmezí $0 < Y \leq 1$)
- Dále se používají i lineární výstupní funkce (výstupní hodnota je rovna vnitřnímu potenciálu) a diskrétní výstupní funkce

- **Diskrétní funkce:** výstup RBF jednotky nabývá hodnoty 0, pokud vzdálenost vstupního vektoru x od středu c je větší než šířka b , v opačném případě nabývá hodnoty 1
- V tomto případě zde není obsažena informace, jak je vektor x vzdálen od středu c
- Užítí tohoto typu výstupní funkce je vhodné pro klasifikaci



- **Gaussova funkce:** pokud vstupní vektor x leží v dosahu šířky b od středu c , má výstup vzhled Gaussova rozdělení:
$$\varphi(z) = e^{-(z/\beta)^2}, \beta \geq 0$$
- Pro $x=c$ nabývá výstup hodnoty 1, pro jiné vzdálenosti hodnota výstupu klesá symetricky do všech stran, pro vzdálenost větší než šířka b nabývá hodnoty 0
- β určuje strmost Gaussovy funkce



Přechodová funkce RBF jednotky

$$\xi = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|}{b}, \quad y = \varphi(\xi)$$

- První výraz definuje vnitřní potenciál: vnitřní potenciál je vzdálenost vstupního vektoru \mathbf{x} od středu \mathbf{c} (příp. dělena šířkou b , která se také nazývá sféra vlivu neuronu).
(určuje, zda je vzdálenost vektorů x a c větší nebo menší než šířka b).
- Druhý výraz definuje výstupní (aktivační) funkci: jejím argumentem je vnitřní potenciál a výsledkem výstupní hodnota.

- Každý spoj mezi i -tou vstupní jednotkou a j -tou jednotkou ve skryté vrstvě má váhu c_{ij} , kde $j=1,\dots,h$ (i -tá souřadnice středu c_j u j -té RBF jednotky)
- Výstup j -té RBF jednotky je spojen s výstupní vrstvou pomocí synapse s vahou w_{js} .
- Výstupní jednotky počítají vážený součet svých vstupů.
- RBF síť provádí dvě transformace: první je nelineární transformace realizována RBF jednotkami, druhá je lineární transformace realizována výstupními neurony sítě a vede z prostoru skrytých jednotek do výstupního prostoru.

Výstupní vrstva sítě

$$y = \sum_{i=1}^n w_i y_i^*$$

- Obsahuje neurony perceptronového typu, které váženě sčítají příspěvky od dílčích RBF neuronů.
- Výsledky tohoto součtu jdou na výstupy Y sítě.
- Výstupní neuron si pamatuje váhy w , kterými násobí své vstupy (vstupy jsou výstupy RBF neuronů y^* propojených s výstupním neuronem).

- Neuronové sítě typu RBF jsou sítě s dopředným šířením signálu, tzn., že jde o přímou topologii sítě s minimálně jednou skrytou vrstvou, jako učicí algoritmus využívá zpětné šíření chyby, kdy se po porovnání skutečného a očekávaného výstupu upravují nejdříve váhy v poslední vrstvě, potom v předposlední atd.

Učení neuronových sítí typu RBF

- Učení probíhá na základě trénovací množiny, kterou tvoří páry vektorů sestávající ze vstupů a požadovaných výstupů
- První fáze: učení bez učitele, určení pozice středů RBF jednotek, které jsou reprezentovány vahami mezi vstupní a skrytou vrstvou
- Druhá fáze: nastavení hodnot případných dalších parametrů RBF jednotek, pokud existují (šířky)
- Třetí fáze: učení s učitelem, určují se váhy výstupních neuronů

Využití RBF sítí

- Pro řešení aproximace funkce při znalosti jejího obecného průběhu a konkrétních naměřených hodnot (sít' se nejprve naučí správný průběh funkce a po zadání vstupních vektorů s určitou chybou dává na výstupu aproximované funkční hodnoty)
- Pro klasifikaci (vstupní vektory tvoří shluky a určitá množina shluků tvoří jednu kategorii; sít' se naučí jaké kategorie náleží jakým vstupním vektorům a poté je schopna třídit i vektory, které jí v učení nebyly předloženy)

Použití RBF sítě pro klasifikaci

- Ve fázi učení se síti předkládají na její vstupy vzory a na její výstupy diskrétní informace o kategorii, do které předložené vzory patří (vzory náležící do stejné kategorie jsou sdruženy do shluků)
- RBF síť si ve fázi učení nastaví středy jednotlivých RBF neuronů, šířky a pak i váhy výstupních neuronů

Použití RBF sítě pro aproximaci

- Ve fázi učení se předkládají síti uspořádané dvojice *argument - funkční hodnota*
- Je využito faktu, že dva argumenty ležící ve vstupním prostoru blízko sebe, budou mít i podobnou funkční hodnotu
- Ve fázi učení se nejprve RBF neurony naučí určovat shluky vzájemně blízkých vzorů a pak se výstupní neurony naučí přiřazovat těmto shlukům správnou funkční hodnotu

Modulární NN

- Modulární neuronové sítě jsou tvořeny různými modely neuronových sítí, které jsou sloučeny do jednoho systému
- Každá síť je uspořádána do modulu tak, aby mohla být volně kombinována s ostatními moduly v rámci tohoto systému
- V rámci modulárních NN dochází ke kombinaci technik a učení různých úkolů současně

- Každá neuronová síť v rámci svého modulu pracuje samostatně na určitém dílčím úkolu
- Výstupy jednotlivých modulů se skládají a vytváří výstup sítě jako celku
- Pokud je větší úkol rozčleněný lze dílčí úkoly řešit efektivněji než kdyby se úkol řešil jako celek
- Mezi jednotlivými moduly slouží tzv. zprostředkovatel, který přijímá jejich výstupy a jednotlivé moduly na sebe navzájem nepůsobí

Biologický základ

- Modulární neuronové sítě, jakožto kombinované struktury, mají také biologické pozadí:
Přirozené nervové systémy se skládají z hierarchie sítí složených z prvků specializovaných na různé úkoly. Obecně platí, že kombinované sítě jsou silnější než ty nestrukturované.

Učení

- Každá neuronová síť může být přizpůsobena pro svůj úkol → Pro jednotlivé „podsítě“ může být při učení použit jedinečný tréninkový algoritmus a tréninkové údaje a učení lze provádět mnohem rychleji

- Velké neuronové sítě (at' už biologické nebo umělé) jsou velmi citlivé na chybu v jednom ze svých uzlů
- Při rozčlenění na dílčí úkoly je možné chyby snadněji rozpoznat a jejich vliv v ostatních „podsítích“ je odstraněn, protože jednotlivé sítě jsou navzájem nezávislé

Hammingova NN

- Hammingova síť je typ sítě s učitelem a binárním vstupem
- Je to tzv. třídič dle nejmenší chyby, tzn. Hammingova síť provádí klasifikaci binárních vektorů do tříd na základě chyby, která je definována pomocí Hammingovy vzdálenosti vstupního vektoru od třídy (třídy jsou definovány vzorovými vektory), vstupní vektor je přiřazen do třídy, od níž má nejmenší Hammingovu vzdálenost, tj. počet odlišných vstupů

Příklad

- Máme síť se čtyřmi třídami A, B, C, D a jejich vzorovými vektory:
- A (1 1 1 1 1 1)
- B (1 1 1 -1 -1 -1)
- C (-1 -1 -1 -1 -1 -1)
- D (-1 -1 -1 1 1 1)
- Chceme do některé ze tříd přiřadit vstupní vektor: (1 -1 1 -1 -1 1)

- *Řešení:* budeme zkoumat vzdálenost vstupního vektoru od vzorových vektorů
- Vzhledem k vektoru A má tři rozdílné prvky \rightarrow jeho Hammingova vzdálenost je 3 atd.
- Tedy: $h(A)=3$, $h(B)=2$, $h(C)=3$, $h(D)=4$, kde h je Hammingova vzdálenost
- Vstupní vektor je přiřazen k třídě B, protože má nejmenší Hammingovu vzdálenost od vzorového vektoru

- Hammingova síť má tři vrstvy: vstupní vrstva s N elementy, kde N je počet bitů vstupního vektoru, vrstva kategorií s M elementy, kde M je počet kategorií, výstupní vrstva
- Každý prvek (neuron) ve vrstvě kategorií představuje jinou klasifikační třídu (kategorii), která je reprezentována vektorem zakódovaným do vah jeho vstupů

Učení

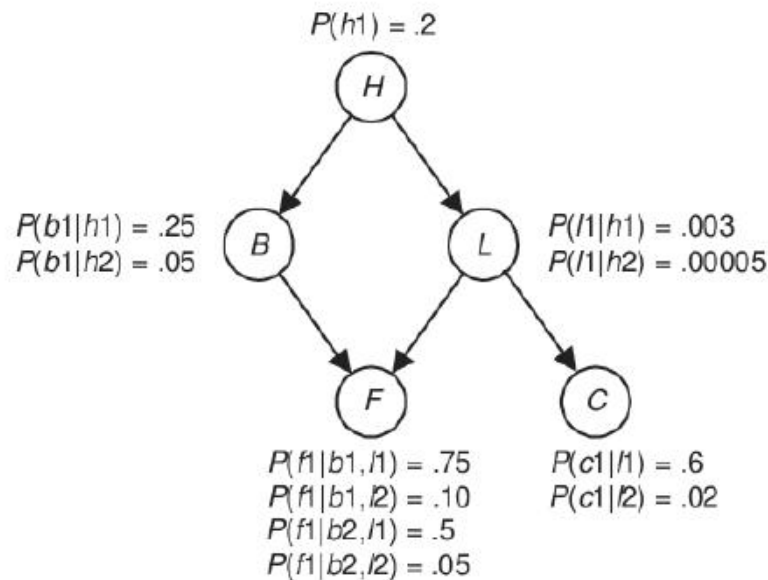
- Vstupní vzor (vektor) je načten a zpracován ve vstupní vrstvě
- Požadovaný výstup je vektor s jedním prvkem rovným 1 a s ostatními prvky rovnými 0 (resp. -1). Každému vstupnímu vektoru odpovídá jiný výstupní vektor (s jinou pozicí prvku rovného 1)
- Chybové pole u každého neuronu ve vrstvě kategorií je nastaveno na 0
- Požadovaný výstup je zpětným šířením načten do vrstvy kategorií tak, aby bylo chybové pole u všech jejích elementů rovno 0 až na jeden, který bude roven 1, tzn., že požadovaný výstup bude uložen v chybovém vektoru vrstvy kategorií

- Bayesův vzorec:
$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- Typický příklad využití Bayesova vzorce (test na TBC):

Test má senzitivitu 90%, specifitu 1% a TBC trpí 5 lidí z 10 000. Jaká je pravděpodobnost, že osoba, které test určil přítomnost TBC, touto chorobou skutečně trpí? [0,043] --> Vidíme, že (ne)přítomnost TBC má vliv na výsledek testu.

- V reálném světě jsou komplikovanější závislosti. Např. fakt zda osoba kouří má vliv na to, zda trpí bronchitidou nebo rakovinou. Každá z těchto chorob má vliv na kondici a navíc (ne)přítomnost rakoviny plic má vliv na výsledky RTG. Otázkou tedy je, jak tuto situaci řešit.

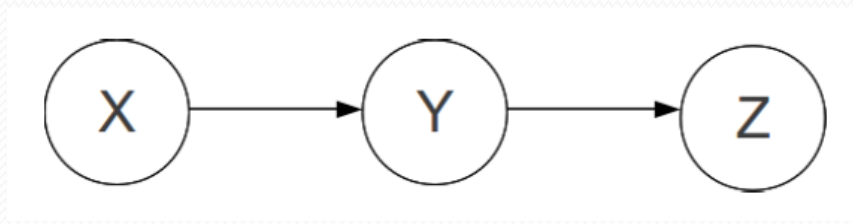


Feature	Value	When the Feature Takes this Value
H	$h1$	There is a history of smoking
	$h2$	There is no history of smoking
B	$b1$	Bronchitis is present
	$b2$	Bronchitis is absent
L	$l1$	Lung cancer is present
	$l2$	Lung cancer is absent
F	$f1$	Fatigue is present
	$f2$	Fatigue is absent
C	$c1$	Chest X-ray is positive
	$c2$	Chest X-ray is negative

Zdroj: Neapolitan, R.E. (2004)

- Pojem Bayesovské sítě jako první použil Judea Pearl v roce 1985.
- Za základní práce na toto téma lze považovat:
 - Pearl, J.: Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems (1988)
 - Neapolitan, R.E.: Probabilistic Reasoning in Expert Systems (1989)

- Formalizmus na podporu rozhodování pod vlivem nejistoty.
 - Reprezentuje sdružené rozdělení pravděpodobnosti vektoru náhodných veličin.
 - Při volbě pravděpodobnosti kombinuje historická data (např. zpoždění vlaku) a názor odborníka (např. kvalita testu).
 - Uplatňují se v Risk managementu v oblastech s nedostatečnými nebo žádnými daty, např. při určování rizika teroristického útoku nebo selhání nového systému.
 - Využití v medicínské diagnostice, vyhodnocování rizika, chyb materiálu, kvality softwaru,...
-
- Komerční software: Agenarisk, BayesLab, BNet,...
 - Freeware/ open source: MSBNx, OpenBayes, Powersoft,...



- Orientovaný acyklický graf (DAG).
- Uzel vyjadřuje náhodnou veličinu (diskrétní nebo spojitou).
- Orientovaná hrana vyjadřuje závislost mezi danými uzly.
- Každý uzel je závislý na svých „rodičích“, jinak jsou uzly navzájem podmíněně nezávislé (D-separované).
- Zjednodušení:
 - z $P(X, Y, Z) = P(X) * P(Y|X) * P(Z|Y, X)$
 - na $P(X, Y, Z) = P(X) * P(Y|X) * P(Z|Y)$
- Pro Y platí: X je jeho „rodič“ (přímý předchůdce)
Z je jeho „dítě“ (přímý následovník)

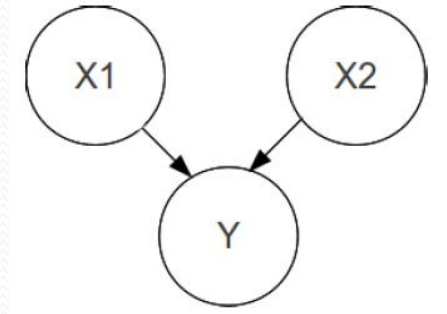
- Sdružené rozdělení pravděpodobnosti vektoru náhodných veličin

$$P_B(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n P_B(X_i | \pi_i) = \prod_{i=1}^n \theta_{X_i | \pi_i}$$

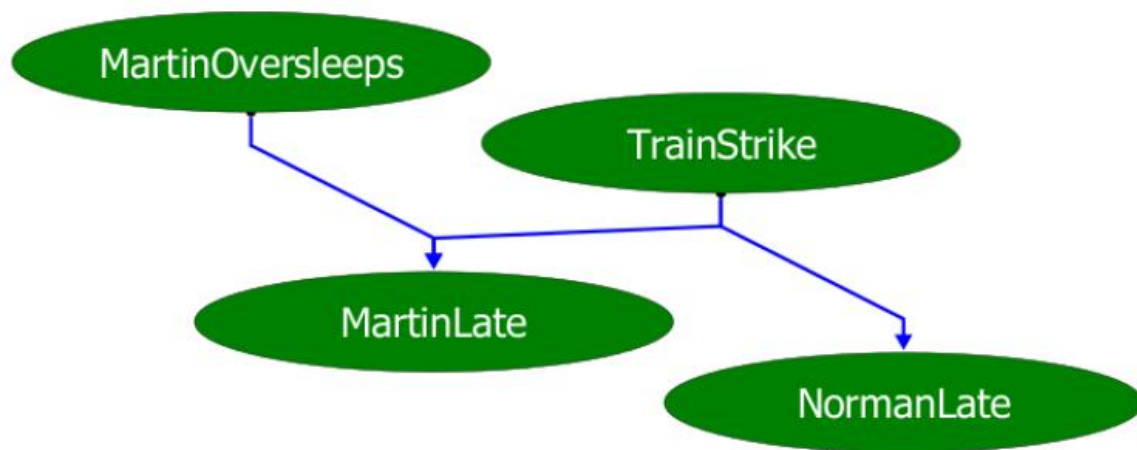
- Síť $B = \langle G, \Theta \rangle$, kde G je DAG s uzly X_1, X_2, \dots, X_n a Θ je množina parametrů $\theta_{X_i | \pi_i}$ pro všechny náhodné veličiny X_i .
- Podmíněné rozdělení pravděpodobnosti každého uzlu X_i je závislé na množině jeho rodičů π_i .
- Diskrétní případ: podmíněné rozdělení pravděpodobnosti (CPD) náhodné veličiny Z obsahuje parametry $\theta_{Z|Y}$ uspořádané v pravděpodobnostní tabulce (NPT, CPT):

Y	$P(Z = z_1 Y)$	$P(Z = z_2 Y)$	$P(Z = z_3 Y)$
y_1	$P(Z = z_1 Y = y_1)$	$P(Z = z_2 Y = y_1)$	$P(Z = z_3 Y = y_1)$
y_2	$P(Z = z_1 Y = y_2)$	$P(Z = z_2 Y = y_2)$	$P(Z = z_3 Y = y_2)$

- Zpětné vyhodnocování podmíněných pravděpodobností při pozorování skutečné hodnoty některé náhodné veličiny.
- Bayesovská síť obsahuje skryté i pozorované uzly



- Máme dané $P(X_1)$, $P(X_2)$ a $P(Y|X_1, X_2)$.
- Při pozorování skutečné hodnoty $Y=y$ se změní $P(X_1)$ na $P(X_1|y)$ a $P(X_2)$ na $P(X_2|y)$.
- Pomocí Bayesova vzorce
$$P(X_1|y) = \frac{P(y|X_1)P(X_1)}{P(y)}$$



MartinOverleeps		
Yes	No	bar charts
0,4	0,6	

TrainStrike		
Yes	No	bar charts
0,1	0,9	

Parent Node(s)		MartinLate		
MartinOverleeps	TrainStrike	Yes	No	bar charts
Yes	Yes	0,8	0,2	
	No	0,6	0,4	
No	Yes	0,6	0,4	
	No	0,3	0,7	

Parent Node(s)		NormanLate		
TrainStrike	Yes	No	bar charts	
Yes	0,8	0,2		
No	0,1	0,9		

O = Martin oversleeps	M = Martin late
T = Train strike	N = Norman late

Node Name	State 0	State 1
Martin late	Yes 0,4460	No 0,5540
Martin oversleeps	Yes 0,4000	No 0,6000
Norman late	True 0,1700	False 0,8300
Train strike	Yes 0,1000	No 0,9000

$$P(N) = P(N|T)P(T) + P(N|\neg T)P(\neg T) = 0.8 * 0.1 + 0.1 * 0.9 = \mathbf{0.17}$$

$$\begin{aligned}
P(M) &= P(M|T, O)P(T)P(O) + P(M|T, \neg O)P(T)P(\neg O) + \\
&\quad + P(M|\neg T, O)P(\neg T)P(O) + P(M|\neg T, \neg O)P(\neg T)P(\neg O) \\
&= 0.8 * 0.1 * 0.4 + 0.6 * 0.1 * 0.6 + 0.6 * 0.9 * 0.4 + 0.3 * 0.9 * 0.6 \\
&= 0.032 + 0.036 + 0.216 + 0.162 = \mathbf{0.446}
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že bude mít Martin zpoždění je 44,6%.

Pravděpodobnost, že bude mít Norman zpoždění je 17%.

Node Name	State 0	State 1
Martin late	Yes	No
	0,5424	0,4576
Martin oversleeps	Yes	No
	0,4000	0,6000
Norman late	Yes	No
	1,0000	0,0000
Train strike	Yes	No
	0,4706	0,5294

Pozorujeme, že Norman měl zpoždění, tj. $P(N)=1$.

$$P(T|N) = \frac{P(N|T)P(T)}{P(N)} = \frac{0.8 * 0.1}{0.17} = 0.471 \text{ (výrazně více než 0.1)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P(M)} &= P(M|(T|N), O)P(T|N)P(O) + P(M|(T|N), \neg O)P(T|N)P(\neg O) + \\ &+ P(M|\neg(T|N), O)P(\neg(T|N))P(O) + \\ &+ P(M|\neg(T|N), \neg O)P(\neg(T|N))P(\neg O) \\ &= 0.8 * 0.471 * 0.4 + 0.6 * 0.471 * 0.6 + 0.6 * 0.529 * 0.4 \\ &+ 0.3 * 0.529 * 0.6 = 0.151 + 0.169 + 0.127 + 0.095 = \mathbf{0.542} \end{aligned}$$

Pokud má zpoždění Norman, roste pravděpodobnost, že bude mít zpoždění i Martin.

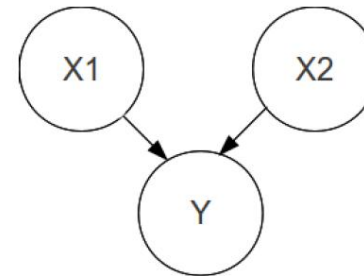
- Objektově orientované BNs.
- Určování NPTs pro rozsáhlé BNs.
- Bayesovské sítě učící se z dat.
- Dynamické bayesovské sítě.
- Hybridní bayesovské sítě.

- V klasické BN je množina uzlů a vazba mezi nimi fixní a použitelná jen pro daný případ.
- Programátorské řešení přes abstraktní datové typy a objektově orientované programování.
- ADT = implementačně nezávislá specifikace struktury dat s operacemi na této struktuře, např. zásobník.
- Objektově orientované programování = organizování ADT.
- Základním prvkem OOBNs je objekt.
- Nejzákladnější objekt je náhodná veličina (jako u klasické BN).
- Např. objekt auto má atributy barva, majitel, motor,.... Barva je tedy základní objekt (nabývá konečného množství hodnot), ale majitel má své další atributy.

- Komplexní objekt je definovaný přiřazením stochastických funkcí každému jeho atributu a propojením atributů pomocí BN, tj. vytvoření pravděpodobnostního modelu.
- „Bayesovská síť bayesovských sítí“.
- Stochastická funkce pro všechny hodnoty vstupů přiřadí rozdělení pravděpodobnosti hodnot vstupů.
- Třída objektů = množina objektů popsaných stejným pravděpodobnostním modelem.
- Třídy umožňují sestavit obecnou strukturu, kterou je možné použít při řešení různých problémů.
- Používají se při modelování dynamických BNs.

- U rozsáhlých sítí je problém s ručním plněním NPTs, především pro uzly s mnoha možnostmi (časová náročnost, riziko překlepu).
- Uspořádané uzly reprezentují kvalitativní proměnné, chápeme je jako diskretizaci intervalu $[0, 1]$.
- Např. $X_1, X_2, Y \in \{\text{velmi nízká, nízká, vysoká, velmi vysoká}\}$

X_1 : kvalita testovacích nástrojů
 X_2 : kvalita testovacích postupů
 Y : efektivnost testu



=> NPT pro Y bude mít přes 125 položek.

- Možnost zjednodušení pomocí Noisy-OR nebo Noisy-MAX modelů.

- Jen pro diskrétní náhodné veličiny.
- Noisy-OR pro binární proměnné, Noisy-MAX je rozšířený model pro vícehodnotové proměnné.
- Předpokládá se, že „rodiče“ jsou navzájem nezávislí při ovlivňování „dítěte“.
- Logaritmická redukce rozsahu NPTs.
- Deterministický OR model předpokládá, že $X_i = \text{True} \Rightarrow Y = \text{True}$ nezávisle na hodnotách ostatních rodičů.
- U Noisy-OR modelu tato implikace nemusí nastat:

$$P(Y_i = \text{True} | X_i = \text{True}) = p_i$$

$$P(Y_i = \text{True} | X_i = \text{False}) = 0$$

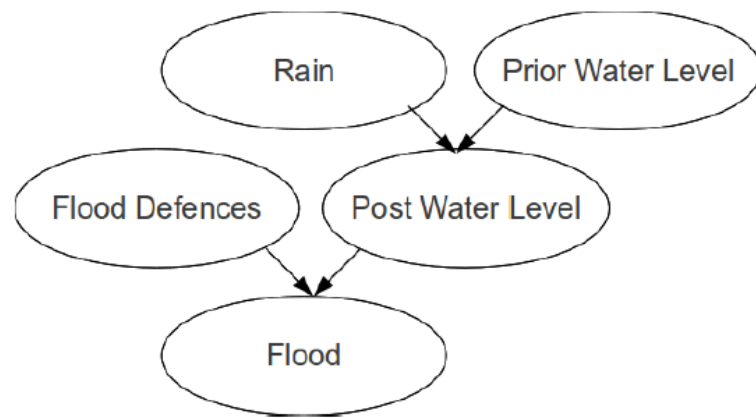
- $\forall i : X_i = \text{False} \Rightarrow Y = \text{False}$ reálně nemusí platit...Leaky Noisy-OR.

- Možnost naučit se kvantitativní, ale i kvalitativní část.
- Naučená pravděpodobnost vyjadřuje relativní četnost (ne subjektivní pravděpodobnost).
- Učení využívá bayesovský princip: $\pi(\theta|y) \propto f(y|\theta)\pi(\theta)$
- Neinformativně apriorní rozdělení – jakákoli pravděpodobnost je stejně možná.
- Informativně apriorní rozdělení – např. Beta rozdělení.
- Vytvoření rozšířené BN s uzly reprezentující naše přesvědčení o relativní četnosti (rodič daného uzlu).

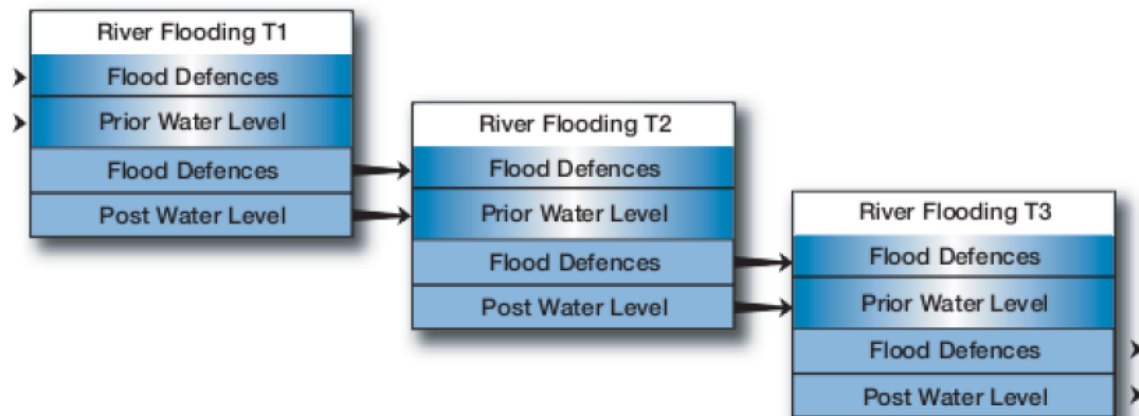
- Rozšíření BNs pro modelování rozdělení pravděpodobnosti nekonečné posloupnosti náhodných veličin Z_1, Z_2, \dots
- Nejčastěji jde o časovou řadu (např. při rozpoznávání hlasu) nebo posloupnost znaků (např. proteiny).
- Stochastické procesy s diskrétním časem.
- Modelace dynamických systémů, samotná BN se v čase nemění.
- DBN je definovaná jako dvojice (B_1, B_{\rightarrow}) , kde B_1 je BN definující apriorní $P(Z_1)$ a B_{\rightarrow} je 2TBN, která definuje $P(Z_t|Z_{t-1})$ jako

$$P(Z_t|Z_{t-1}) = \prod_{i=1}^N P(Z_t^i | \text{Pa}(Z_t^i)),$$

- kde Z_t^i je i -tý bod v čase t a $\text{Pa}(Z_t^i)$ jsou jeho rodiče.



Statická BN, nutnost replikovat celou síť při každé iteraci



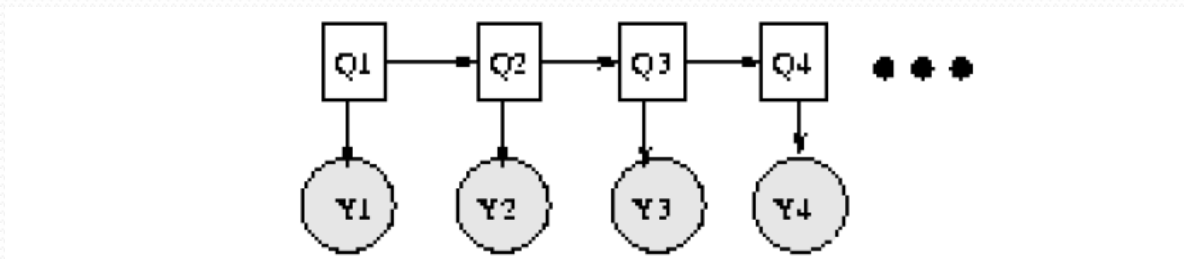
Obr.: Dynamická BN, zdroj: Fenton a Neil

Hybridní Bayesovské sítě:

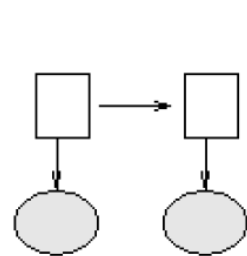
- Obsahují diskrétní i spojité náhodné veličiny.
- Nejčastěji je používán podmíněný lineární Gaussův model: dítě má normální rozdělení se střední hodnotou závislou na spojitéch i diskrétních rodičích a s rozptylem nezávislým na spojitéch rodičích.
- Není možné, aby diskrétní dítě mělo spojité rodiče.
- Je ale možná diskretizace.
- Příklad: cash-flow společnosti (spojitý bod) ovlivní pravděpodobnost kapitálové investice (diskrétní bod).

Skryté Markovské modely (HMMs):

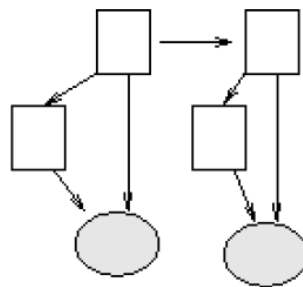
- Nejjednodušší typ dynamických a zároveň hybridních BNs.
- Pro každý časový okamžik má jeden diskretní skrytý bod a jeden diskretní nebo spojitý pozorovaný bod.



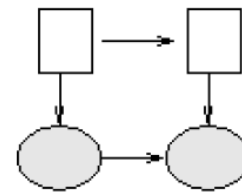
- Kruh je spojitý bod, čtverec bod diskretní. Bílý bod je skrytý, šedý bod pozorovaný.



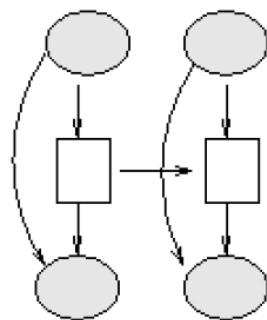
HMM with Gaussian output



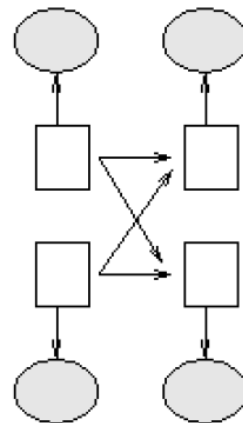
HMM with mixture of Gaussians output



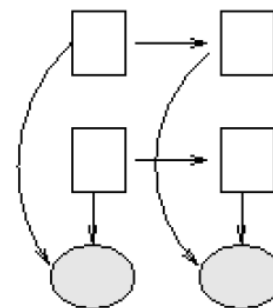
Auto Regressive HMM



Input-output HMM



Coupled HMM

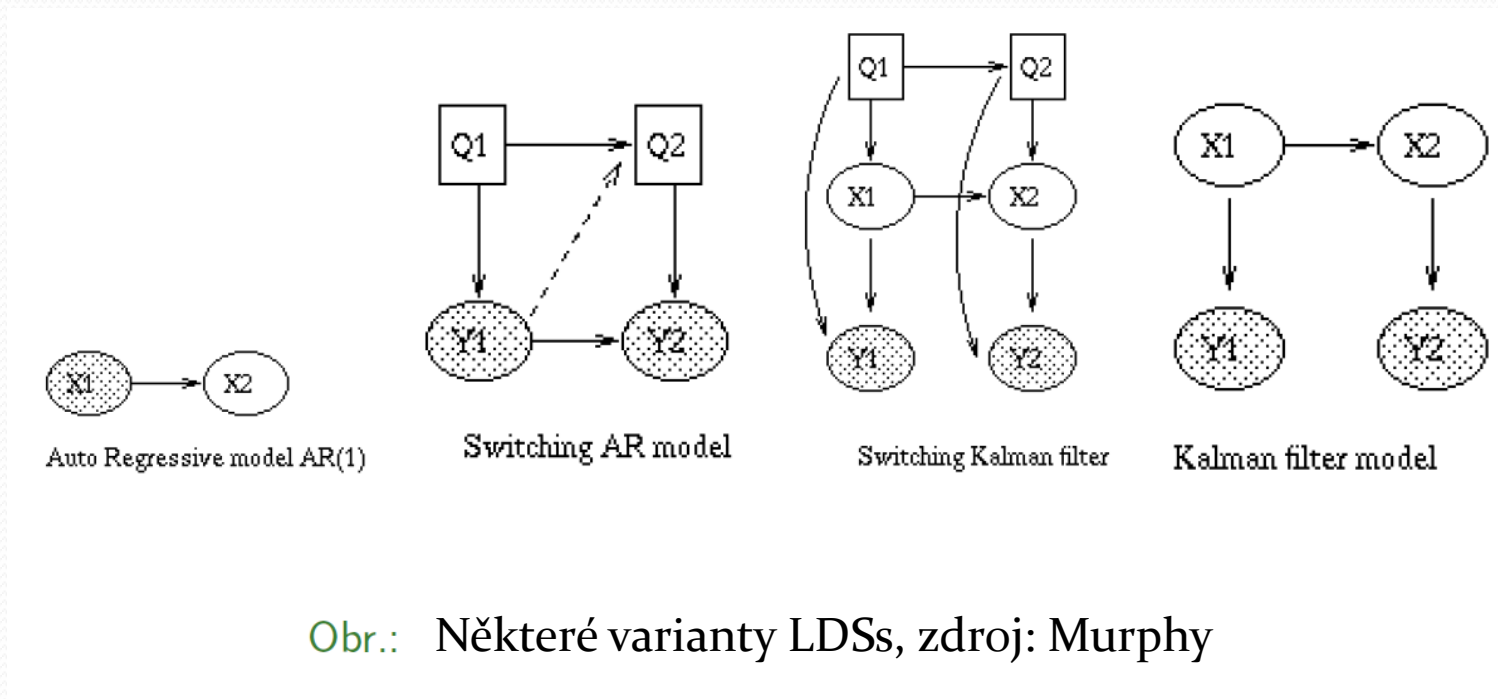


Factorial HMM

Obr.: Některé varianty HMMs, zdroj: Murphy

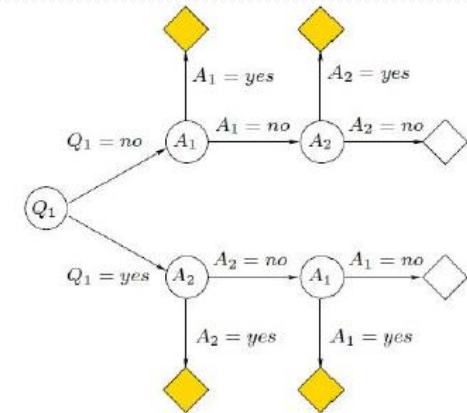
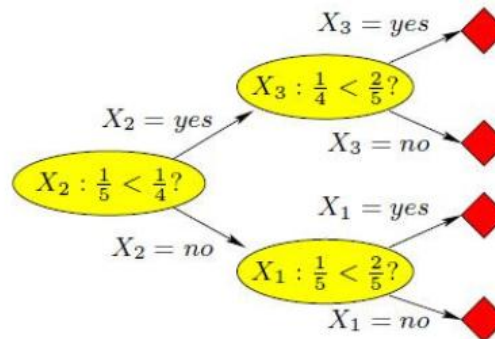
Lineární dynamické systémy (LDSs):

- Další příklad DBNs; stejná topologie jako HMMs.
- Navíc předpoklad lineárního Gaussova rozdělení všech bodů.



6. Bayesovské sítě - aplikace

Sometimes I just popup for no particular reason, like now.



- První pracovní aplikace BNs
 - Období 1988 – 1995
 - Diagnostika
 - Lékařství – MUNIN
HUGIN
 - Diagnostika poruch (závad)

MUNIN

- Dokončen jako systém pro podporu rozhodování lékařů.
- Je těžké odhadnout, do jaké míry byl v té době použit. Lékaři byli vůči němu skeptičtí – nevěřili těmto UI aplikacím.

BNs a Microsoft

- Rok 1996 - "Konkurenční výhodou Microsoftu jsou jeho odborné znalosti v Bayesovských sítích."
- Vysoké investice do výzkumu
 - Eric Horvitz
 - David Heckerman
- Oblasti využití
 - uživatelská podpora
 - automatizovaná diagnostika chyb

Uživatelská podpora

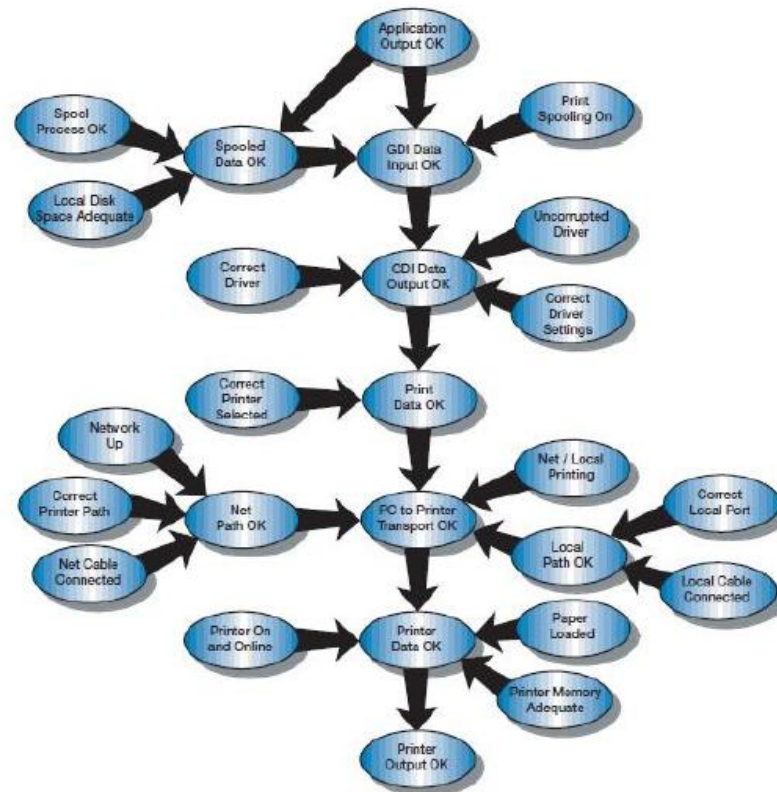
- MS Office – Paperclip
- Jedna z nejslavnějších, ale také nejvíce nepochopených aplikací BNs v Microsoftu.

Sometimes I just popup for no particular reason, like now.



Automatická diagnostika chyb

- Především diagnostický systém selhání tiskáren



Farmaceutické společnosti

- Vysoké využití – možnost vyšší účinnosti a správnosti jejich testů. Snížení nákladů.
- Rok 2006 - FDA (*Food and Drug Administration*) oznámila svou snahu využívat Bayesiánské techniky.
 - Cíl – urychlení procesu schvalování a zvýšení celkové bezpečnosti.

Vývoj softwaru

- Pro nový software je důležité, aby obsahoval co nejméně chyb. Ale i přes mnoho testů, tam stále nějaké chyby budou.
- Cíl – aby uvolněný software obsahoval co nejméně chyb a aby případné chyby měly na koncové uživatele co nejmenší vliv.
- BNs se využívají pro tvorbu předpovědí o zbytkových chybách.
- Důležité především pro bezpečnostní software.

System TRACS

- System pro předpovídání spolehlivosti pozemních vozidel.
- QinetiQ (*Společnost, která poskytuje technické poradenství zákazníkům v celosvětovém letectví, obraně a bezpečnosti trhu*).
- Výběr vozidla pro Ministerstvo obrany (UK)
 - Obtížné, časově náročné a náchylné k chybám
 - Původně: kombinace testování prototypů a modelování analýz – velmi drahé a neuspokojivé
 - Následně vyvinut BNs model.

System TRACS

- Vytvořen na základě šablon bayesovských modelů založených na konkrétních subsystémech architektury dané specifikace vozidla.
- Možnost komunikovat s modelem BNs prostřednictvím jednoduchého dotazníku GUI (*Graphical User Interface*)
- System TRACS šetří čas i peníze – předpovědi jsou přesnější, protože jsou schopné s pevnými daty kombinovat i subjektivní údaje.

Meteorologie

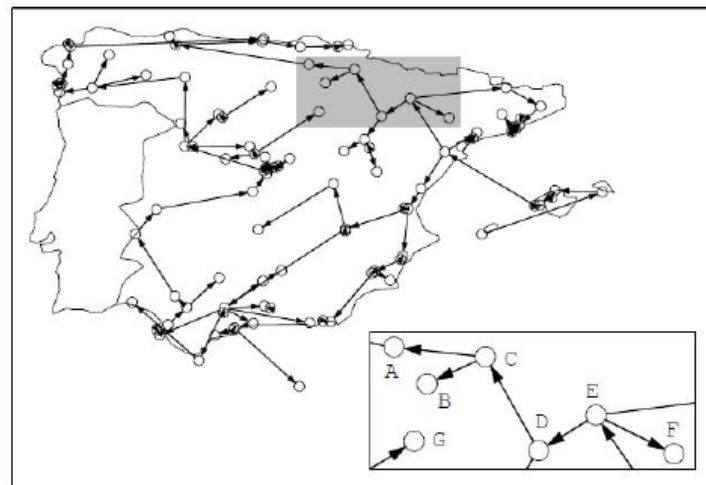
- Místo studie – Pyrenejský poloostrov
 - 100 pozorovacích stanic
 - Vyšší počet dostupných dat – vývoj statistických a data miningových technik



- Zdroj: Cano, R., Sordo, C., Gutiérrez, J.M.: Applications of Bayesian Networks in Meteorology, 2004

Meteorologie

- Proč používat BNs?
 - Jsou schopny podat kompaktní a srozumitelné znázornění pravděpodobnostní informace.
 - Jsou schopny pracovat s velkým počtem proměnných.
 - Uzel = proměnná hrana = závislost



Meteorologie

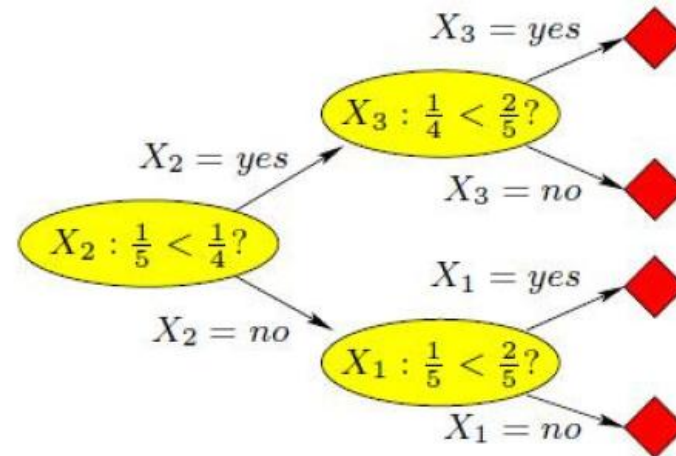
- Využití BNs
 - Doplnování chybějících dat
 - Nutnost úplných údajů
 - Problém s daty s vysokou odchylkou
 - Chybějící údaje musí být nahrazeny při zachování hlavních vlastností původních dat
 - Regresní modely X Gaussovské BNs
 - Možnost využití všech informací

Adaptivní testování

- Adaptivní testy - automaticky se přizpůsobují zjištěné úrovni znalostí zkoušeného.
- Po získání odpovědi na položenou otázku systém automaticky vybere následující otázku s využitím znalosti získané na základě předchozích odpovědí zkoušeného.

Adaptivní testování

- Jednoduchý příklad



Zdroj: Vomlel, J.: Dvě aplikace bayesovských sítí, VŠE Praha

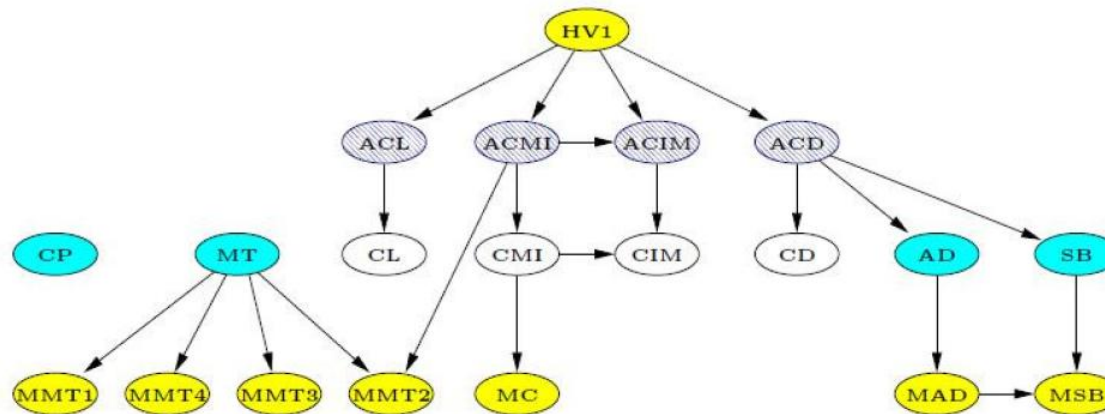
- Nutnost využití počítačů – počítačové adaptivní testování (*computerized adaptive testing*)

Adaptivní testování

- Model složený ze dvou modelů:
 - Model studenta - popisuje vztahy mezi znalostmi a dovednostmi studenta
 - Pozorovací modely - pozorovací model odpovídá jedné otázce
- Testové znalosti a dovednosti: $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_k\}$
- Soubor otázek: $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$
- Model studenta – připravené papírové testy, které řešili studenti prvního ročníku střední školy
 - Testovány čtyři základní dovednosti a čtyři operační dovednosti na zlomcích.
 - Shrnutí výsledků do datových záznamů o jednotlivých studentech.
 - Objeveno několik typických špatných přístupů k řešení některých operací.
 - Pomocí PC-algoritmu vytvořena struktura modelu studenta.
 - Některé vztahy mezi veličinami vysvětleny pomocí latentních veličin.

Adaptivní testování

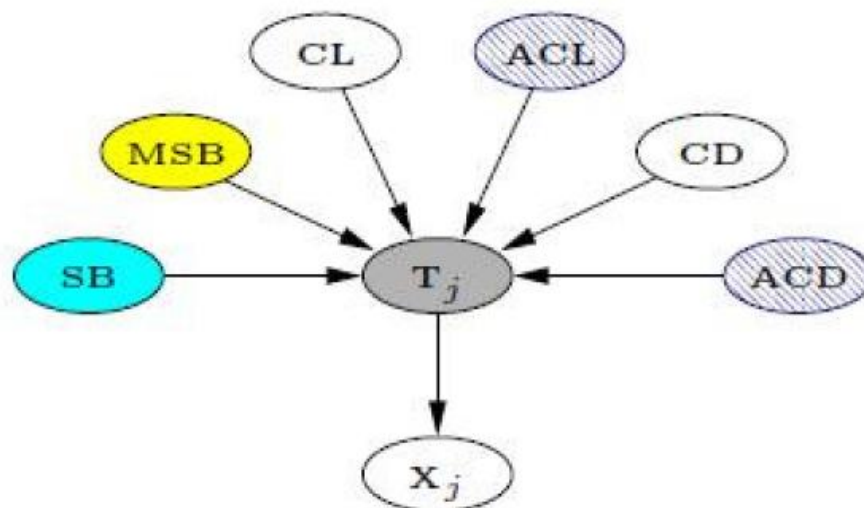
- Výsledný model studenta



Zdroj: Vomel, J.: Dvě aplikace bayesovských sítí, VŠE Praha

Adaptivní testování

- Příklad úlohy: $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$



Adaptivní testování

- Výsledek a porovnání
 - Klasický přístup pro testování znalostí – teorie odezvy (vícerozměrná teorie odezvy) – od 60.let 20.století
 - Není schopen poskytnout podrobnější diagnostiku.
 - Výhody Bayesovských sítí:
 - BN lépe modeluje přemýšlení studenta.
 - Možnost kratší doby testování.
 - Výsledky ukázaly, že testy využívající BNs mají vysokou úspěšnost.
 - Více než 90% dovedností bylo odhadnuto již po 7 otázkách.
 - V papírových testech bylo potřeba 20 otázek.

Technická diagnostika

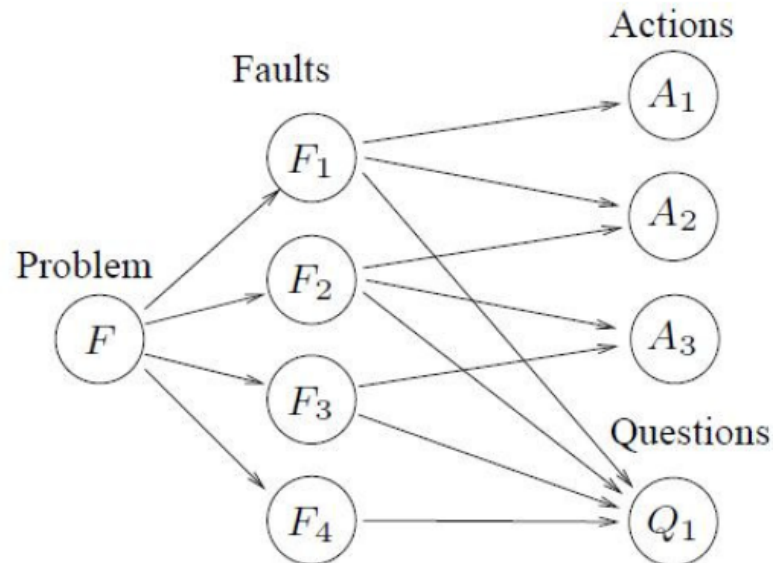
- Diagnostika odhalující technické problémy zařízení.
- Pomocí počítačových systémů může být podstatně urychlena.
- Uvedený příklad má tři typy veličin:
 - Poruchy zařízení: $F \in \mathcal{F}$
 - Akce (opravné kroky): $A \in \mathcal{A}$
 - Pozorování: $Q \in \mathcal{Q}$

Technická diagnostika

- Příklad: Předpokládejme, že tiskárna vytiskne stránku, která je příliš světlá. Tento problém může mít mnoho příčin. Uvažujme zjednodušený model obsahující pouze 4 možné příčiny světlého tisku: F_1 distribuční problém toneru, F_2 vadný toner, F_3 narušený tok dat a F_4 špatné nastavení ovladače. Necht' akce, které mohou vyřešit tento problém jsou: A_1 "vyjměte toner, zatřeste s ním a uložte ho zpět" s cenou $c_1 = 5$, A_2 "zkuste jiný toner" s cenou $c_2 = 15$ a A_3 "vypněte a zase zapněte tiskárnu" s cenou $c_3 = 1$. Pro každou akci expert zadal podmíněnou pravděpodobnost $P(A_i = \text{yes} \mid F_j)$. Například, akce A_2 "zkuste jiný toner" vyřeší distribuční problém toneru a vadný toner s pravděpodobností 0.9, t.j. $P(A_2 = \text{yes} \mid F_i) = 0.9$, $i = 1, 2$, ale nevyřeší špatné nastavení ovladače, t.j. $P(A_2 = \text{yes} \mid F_4) = 0$.

Technická diagnostika

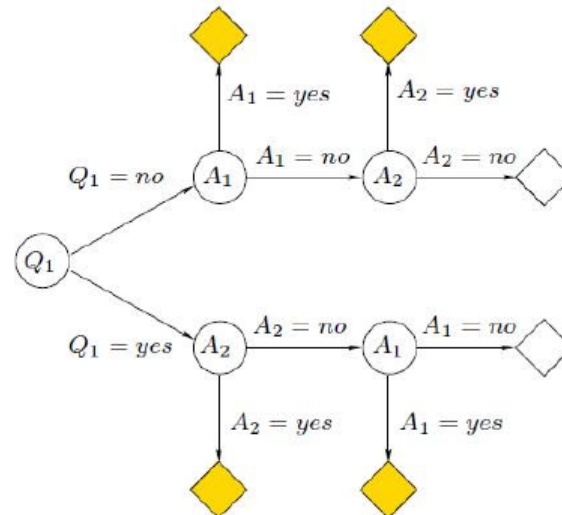
- Můžeme předpokládat dvě věci:
 - Akce a otázky jsou navzájem podmíněně nezávislé je-li známa příčina.
 - Špatnou funkci zařízení způsobuje pouze jedna příčina.



Zdroj: Vomlel, J.: Dvě aplikace bayesovských sítí, VŠE Praha

Technická diagnostika

- Strategie - máme dvě možná řešení problému
 - Problém je vyřešen X Problém zůstane nevyřešen.
 - Definujeme dva typy terminálních uzlů:
 - Úspěšné terminální uzly
 - Neúspěšné terminální uzly



Technická diagnostika

- Mějme hodnotící funkci $CR(e_l)$ a její dvě složky $t(e_l)$ a $c(e_l)$.
- Dostaneme kritérium, které nazýváme očekávaná cena opravy.

$$E_{CR}(s) = \sum_{l \in L(s)} P(e_l) \cdot f(e_l) = \sum_{l \in L(s)} P(e_l) \cdot (t(e_l) + c(e_l))$$

- Základní úlohou pak je najít takovou strategii s , která minimalizuje $E_{CR}(s)$.

Technická diagnostika

- Dosažené výsledky
 - Z důvodu jednoduchosti modelu je možné provádět větší počet výpočtů podmíněných pravděpodobností.
 - Diagnostické strategie byly porovnány s optimálními strategiemi a hodnoty E_{CR} jim byly velmi blízké. Průměrná odchylka byla méně než 2%.

Právní argumentace

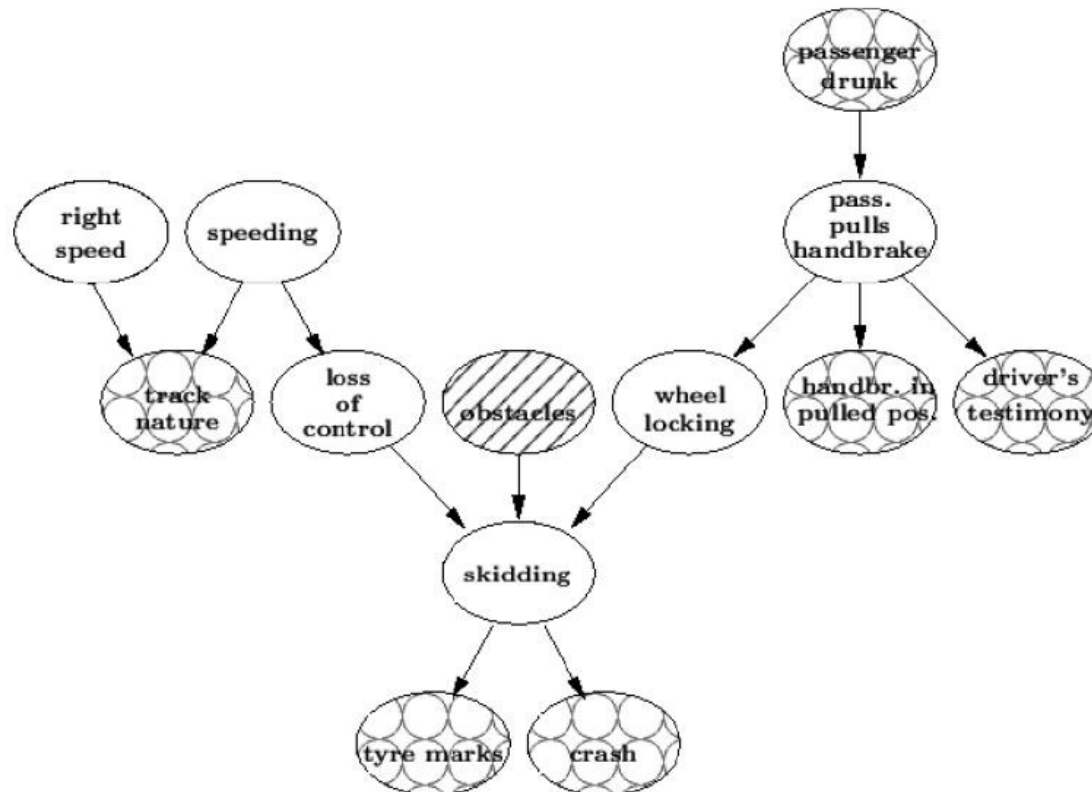
- Uvažujme tento případ – u soudu byly předloženy dva možné scénáře autonehody.
- Fakta: Havárie jednoho automobilu se stala kolem 3:00, kdy auto narazilo do stromu. Policisté, kteří dorazili na místo nehody zjistili následující:
 - Řidička seděla na zemi vedle auta, a uvedla, že „on“ zatáhl ruční brzdu.
 - Těžce zraněný cestující seděl na předním sedadle spolujezdce.
 - Ruční brzda byla v zatažené pozici.
 - Auto projelo správně zatáčku, do chvíle než nabouralo.
 - Na silnici byly stopy brzdění v zatáčce.
 - Byly tam stopy smyku vedoucí k místu nehody.

Právní argumentace

- Co následovalo:
 - Ani jeden si nemohl na nehodu pořádně vzpomenout.
 - Vraceli se z párty a spolujezdec byl opilý.
 - Spolujezdec podal na řidičku žalobu o náhradu škody.
 - Řidička se hájila tím, že ruční brzdu zatáhl spolujezdec.
 - Nizozemské právo: povinností řidiče je, aby měl auto pod kontrolou.
 - Závěr vrchního soudu: vzhledem k pravděpodobnosti s jakou pasažér zatáhl ruční brzdu, nemůže být fakt, že se jedná o nehodu jednoho auta, použit jako důkaz ve prospěch navrhovatele.

Právní argumentace

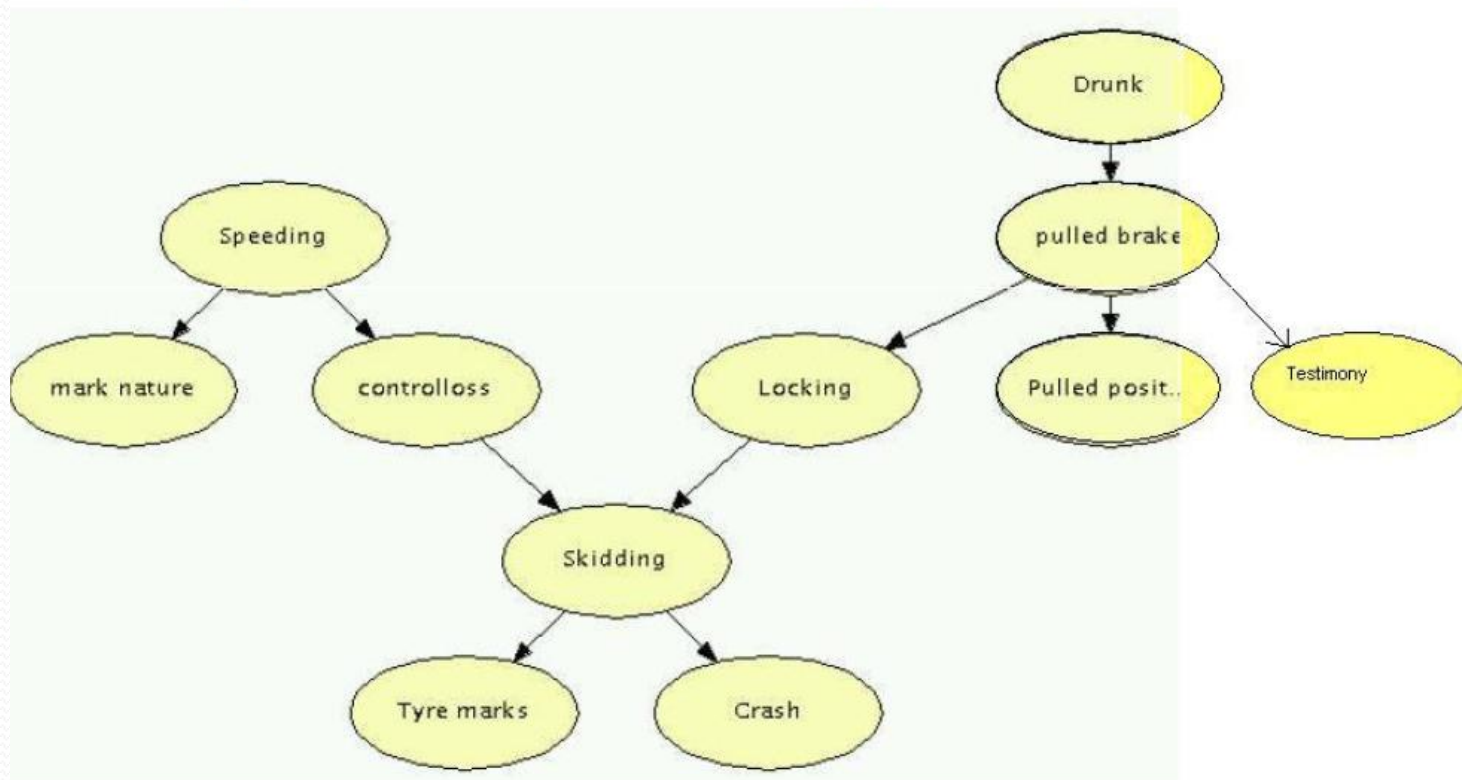
- Kauzální struktura tohoto případu:



Zdroj:P.E.M. Huygen: Use of Bayesian Belief Networks in legal reasoning, 2002,Free University, Amsterdam.

Právní argumentace

- Stejná struktura zakreslena jako BN



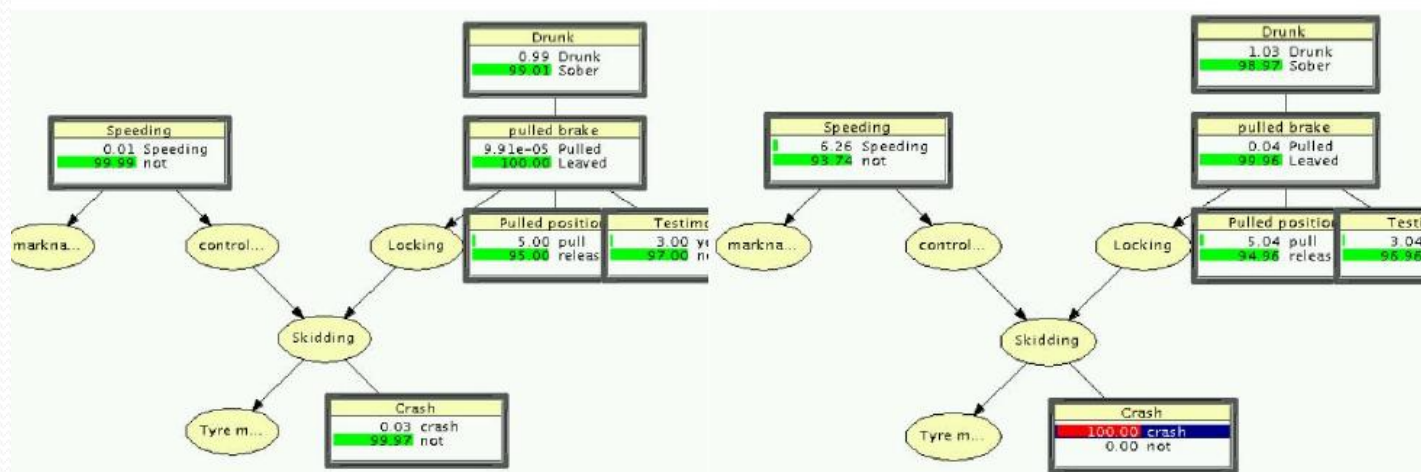
Zdroj:P.E.M. Huygen: Use of Bayesian Belief Networks in legal reasoning, 2002,Free University, Amsterdam.

Právní argumentace

- Počáteční pravděpodobnosti

- Objektivní hodnoty

Zadána skutečnost „crash“



- Zdroj: P.E.M. Huygen: Use of Bayesian Belief Networks in legal reasoning, 2002, Free University, Amsterdam.

Právní argumentace

- Z modelu vyplývá, že je více pravděpodobné, že srážka nastala zatáhnutím ruční brzdy než překročením rychlosti.
- Pokud se zadaly hodnoty výhodné pro žalobce, byly výsledné pravděpodobnosti zavinění srovnatelné.

PATERNITIES SEARCH WITH OBJECT-ORIENTED BAYESIAN NETWORKS

ANDRADE Marina, (PT), FERREIRA, Manuel Alberto M., (PT)

Abstract. Paternity dispute problems are examples of situations in which forensic approach DNA profiles study is a common procedure. To implement this approach an efficient tool the object-oriented Bayesian networks (OOBN). Along this paper are presented the various OOBN adequate to solve the simple paternity dispute and more complex paternity dispute problems with incomplete DNA profiles data about the putative father such as: only putative grandfather information, only putative uncle information, only putative father's uncle information and only simultaneously putative uncle and putative father's uncle information. Here it is exhibited an algebraic treatment, for the simple problem and with those the use of object-oriented Bayesian networks is shown. Then the most complex kind of problems that occur is presented. Although these are not the most common cases there is notice of occurrence at least in Portuguese courts.

2 Simple Paternity Dispute

In a disputed paternity decision problem there are formally two challenging hypotheses (prosecution and defense):

H_P : The true father is the putative father.

vs

H_D : The true father is another individual randomly drawn from the population, and not genetically related with the mother or the putative father.

The court has to decide about the paternity of the child, and so, after Bayes' Law

$$\frac{P(H_P | E)}{P(H_D | E)} = \frac{P(E | H_P)}{P(E | H_D)} \times \frac{P(H_P)}{P(H_D)} \quad (1)$$

with E the vector containing the available evidence, genetic information of the mother (mgf), of the child (cgt) and of the putative father (pgf), being the algebraic approach simple.

It is needed to assess the likelihood function over the hypotheses as to the true father, i.e., to evaluate the likelihood ratio:

$$LR = \frac{P(E | H_P)}{P(E | H_D)} \quad (2)$$

Naturally the court has to answer to the truly paternity of the child. So it has to evaluate the ratio of the hypotheses in dispute. Admitting that $P(H_P) = P(H_D)$ then (1) becomes

$$\frac{P(H_P | E)}{P(H_D | E)} = \frac{P(E | H_P)}{P(E | H_D)} \quad (3)$$

In fact, knowing that the markers are in different chromosomes (*linkage equilibrium*) and assuming random mating (*Hardy-Weinberg equilibrium*) there is independence between and within markers. Thus, it is possible to obtain the *LR* for each marker separately and finally multiply the values to determine the overall likelihood ratio based on the data available for all markers.

To determine algebraically the probability of the triplet E , under the two hypotheses, it is reasonable to consider that before knowing any data on the child it is reasonable to assume that the identity of the true father is independent of the mother's and the putative father's. And supported on that, it is easily seen that it is possible to determine the conditional probability of the child's genotype, given the other two available genotypes. Thus, to determine $P(E | H_p)$ one has only to apply Mendel's laws. But the calculus of $P(E | H_D)$ necessarily demands the knowledge of the population allele frequencies for the considered markers.

If for a certain marker the triplet $E = (mgt, cgt, pfgt)$ is $E = ((A, B); (B, B); (A, B))$, and p_A and p_B are the population allele frequencies then

$$\begin{aligned} P(E | H_p) &= P[(mgt, cgt, pfgt) | (mgt, pfgt)] \\ &= P[cgt | (mgt, pfgt)] \\ &= 0.5 \times 0.5 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} P(E | H_D) &= P[(mgt, cgt, pfgt) | (mgt, rgt)] \\ &= P[cgt | (mgt, rgt)] \\ &= 0.5 \times p_B \end{aligned}$$

where rgt assigns the genotype of a random individual of the population, not related to the mother or the putative father.

Therefore,

$$LR = \frac{0.5}{p_B}$$

The considered problem is, as shown, easily algebraically solved. It is used to illustrate the simplicity and the advantages of this tool in more complex situations. Given the freedom of choice for the variables to include in the graphical approach, different representations can be obtained. Some of them simpler than others. To get a 'good' representation is very important to the efficiency and the viability of the computational routines. These are extremely sensible to the organization of the graphical structure. The first step consists on the identification and definition of the nodes for all the variables of interest to the problem.

Then the graphical representation can be obtained. According to Dawid *et al.* (2002), *in order to maximize the efficiency of the calculations as well as the logical clarity of the representation we chose to disaggregate each individual's genotype into its constituent, unobserved, paternally and maternally inherited genes.*

Figure 1 exhibits the OOBN for a paternity case as the discussed above considering a single marker. Each node (instance) in the network represents itself a Bayesian network.

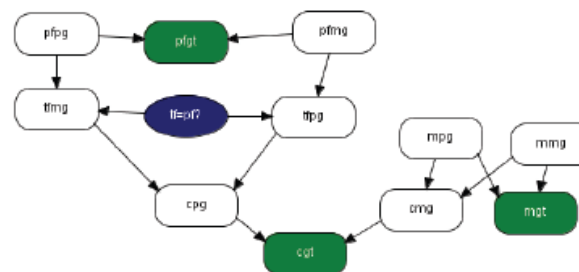


Figure 1: Simple paternity network.

In this simple paternity case instances pfp , $pfgt$, mp and $mfgt$ are all of class *founder*, a single node *gene*, having for its space of states all the possible alleles that can be presented for the specific case, and the correspondent population gene frequencies. Instances mgt , cgt and $pfgt$ are of class *genotype*, an unordered pair of alleles inherited from paternal, pg , and maternal, mg , genes, here represented by $gmin := \min\{pg, mg\}$ and $gmax := \max\{pg, mg\}$, where pg and mg are input nodes identical to the *gene* node of founder. Instances tf and tfp are of class *whom*, describing the true father's allele origin. If $tf = pf$ has true for value then the true father's allele, tfp , will be identical with the putative father's, $pfgt$, otherwise the true father's allele is randomly chosen from another man in the population. And cp and cm instances are of class *inherit*, modelling the Mendel's inheritance in which the child's allele is chosen at random from the two parents, pg and mg , here as the sequence of the observed outcome of a fair coin toss.

For illustration according to Dawid *et al.* (2002), the data for marker FES are child genotype $cgt = \{B, B\}$, mother's genotype $mgt = \{A, B\}$ and putative father's genotype $= \{A, B\}$. The population allele frequencies are $p_A = 0.28425$ and $p_B = 0.25942$.

After specifying the network, put it to run and then insert the evidence. Considering equal prior probabilities for the query node representing the hypotheses, the likelihood is got after inserting the evidence. The likelihood ratio, based on the data for this marker, is obtained from the marginal posterior distribution of the query node. Thus, $P(tf = pf? := true | E) = 0.6584$ and $P(tf = pf? := false | E) = 0.3416$, and $LR = 1.9274$, being these results in agreement with the algebraic approach (note that $0.5/0.25942 \approx 1.9274$).

3 Paternities search in more uncommon situations

When the data E are not in the form $(mgt, cgt, pfgt)$ it is not possible to determine in algebraic form the likelihood function for the various hypotheses, i.e. to determine the weight of the genetic

connection of the child with the putative father ancestor(s). The use of Bayesian networks allow to overcome these problems. These networks are a good tool to compute the likelihood functions. Forwarding and backwarding the information a measure of the “strength” of the information available in each case is obtained.

In the sequence the networks for the uncommon cases described in the introduction are presented each one together with a numerical example.

The data considered are the same for the whole cases and are in Table 1 where five different markers are considered and the respective genotypes for the mother, the child, the grandfather, the uncle and the grandfather brother, where * indicates rare alleles, and (a) signs alleles considered as good discriminate markers, with more than 10 alleles in each marker.

Table 1:

Marker	<i>mgt</i>	<i>cgt</i>	<i>gfgt</i>	<i>ungf</i>	<i>gfbgt</i>
D3S1358	16, 18	13*, 16	13*, 17	13*, 16	13*, 15
VWA	16, 17	13*, 16	13*, 16	16, 18	13*, 15
D16S539	11, 12	12, 12	9, 12	10, 12	12, 13
D8S1179	12, 13	13, 17*	14, 17*	14, 15	12, 17*
D21S11(a)	29, 31.2	29, 31.2	29, 31.2	28, 31.2	29, 30

Genetic profiles

In Table 2 the respective allelic frequencies are presented: p_i is the i allele frequency in the population.

Marker	Frequencies				
	p_{13}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}
D3S1358	p_{13}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}
	0.0032	0.2611	0.2477	0.2065	0.1606
VWA	p_{13}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}
	0.0023	0.1216	0.2300	0.2649	0.1859
D16S539	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}
	0.1431	0.0545	0.3009	0.2876	0.1654
D8S1179	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{17}
	0.1351	0.3028	0.2178	0.1223	0.0031
D21S11(a)	p_{28}	p_{29}	p_{30}	$p_{31.2}$	
	0.1674	0.2136	0.2437	0.1138	

Table 2: Allele frequencies

The allelic frequencies used were collected in www.uni-duesseldorf.de/WWW/MedFak/Serology/dna.htm for Portugal (Azores and Madeira archipelagos not included).

4 Only putative grandfather information

Bayesian networks for more complex problems can be built out of the same fundamental local modules that we have already described for the simple paternity dispute problem, Dawid et al. (2002).

The object-oriented Bayesian network for the “only putative grandfather information” case is shown in Figure 2. Note, for example, the node *gfgt* (grandfather genotype) and the respective connections with the other nodes.

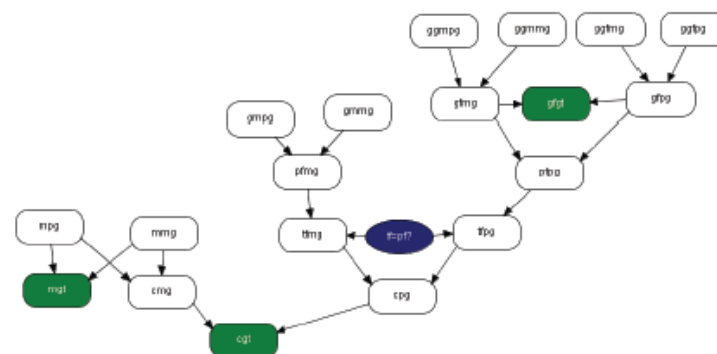


Figure 2: Only putative grandfather network

The results obtained are in Table 3. In the last column Rescaled – corrected so that the sum of the entries is equal to 1 – is presented the result for the 5 markers. Since the markers are independent the final result is obtained by multiplying the result obtained for each marker.

	D3S1358	VWA	D16S539	D8S1179	D21S11	Rescaled
$P(H_1 E)$	0.9874	0.9909	0.5779	0.9878	0.6255	0,999999
$P(H_2 E)$	0.0126	0.0091	0.4221	0.0122	0.3745	6,33E-07

Table 3: Analysis results with only putative grandfather information

5 Only putative uncle information

The object-oriented Bayesian network for the “only putative uncle information” case is shown in Figure 3.

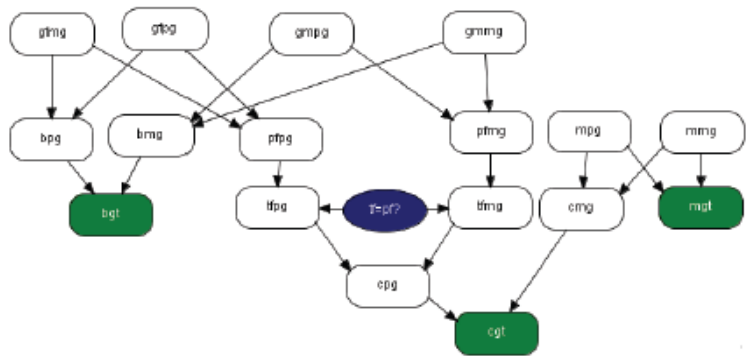


Figure 3: Only putative uncle network

The results obtained are in Table 4 following the same methodology as in section 5.

	D3S1358	VWA	D16S539	D8S1179	D21S11	Rescaled
$P(H_u E)$	0.9874	0.3333	0.5779	0.3333	0.5582	0.97133
$P(H_e E)$	0.0126	0.6667	0.4221	0.6667	0.4418	0.02867

Table 4: Analysis results with only putative uncle information

6 Only putative father 's uncle information

In Figure 4 the object-oriented Bayesian network for the "only putative father 's uncle information" case is shown.

It is a network more complex than the former ones owing to the further parentage relationship considered, that implies more complex genetic connections.

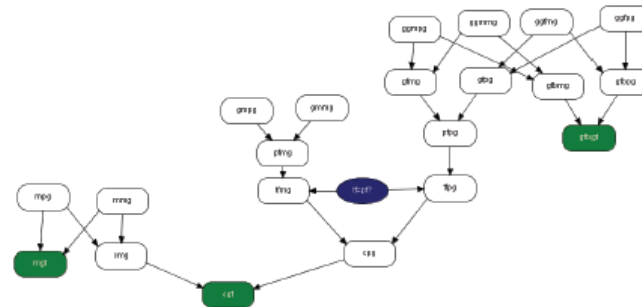


Figure 4: Only putative father 's uncle network

The results obtained are in Table 5.

	D3S1358	VWA	D16S539	D8S1179	D21S11	Rescaled
$P(H_u E)$	0.9755	0.9822	0.5423	0.9762	0.5309	0.999992
$P(H_e E)$	0.0245	0.0178	0.4577	0.0238	0.4691	8.28E-06

Table 5: Analysis results with only putative father 's uncle information

7 Only simultaneously putative uncle and putative father 's uncle information

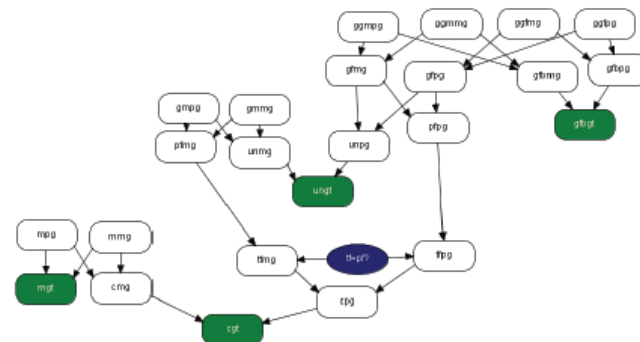


Figure 5: Only simultaneously putative uncle and putative father's uncle

The "only simultaneously putative uncle and putative father's uncle information" case network is the last one presented (in Figure 5) and the results are presented in Table 6.

	D3S1358	VWA	D16S539	D8S1179	D21S11	Rescaled
$P(H_r E)$	0.9875	0.9650	0.5764	0.9536	0.5707	0.999988
$P(H_u E)$	0.0125	0.0350	0.4236	0.0464	0.4293	1.23E-05

Table 6: Analysis results with only simultaneously putative uncle and putative father's uncle information

8 Conclusions

The paternities search in more uncommon cases demands the calculation of probabilities in the context of numerous and complex successive uses of Bayes Law. This situation is impossible to be treated algebraically. It was shown that the object-oriented Bayesian networks are a very powerful tool, very simple to use, that allows the referred calculations in an efficient way.

The major problem is to build the network taking in account the various and complex connections that may occur in parentage relationships. Then the use of an adequate software as Hugin or SPSS makes easy to apply it in practical cases. In this work Hugin was the chosen.

Inspecting the tables of results one can note that, as expected, rare alleles shared lead to greater probabilities of true paternity. On the contrary, more frequent alleles shared lead to lesser probabilities.

With the particular data used the final probabilities for true paternity were in general great.

References

- ABRANTES, D., PONTES, M. L., PINHEIRO, M. F., ANDRADE, M. and FERREIRA, M. A. M.: *Towards a systematic probabilistic evaluation of parentage casework in forensic genetics: A modest attempt to define a general standardized approach to simple and complex cases*. Forensic Science International: Genetics Supplement Series 1, pp. 635-637, 2008.
- ANDRADE, M.: *A Estatística Bayesiana na Identificação Forense – análise e avaliação de vestígios de DNA com redes Bayesianas*. PhD Thesis, ISCTE, Lisboa, 2007.
- ANDRADE, M.: *A Note on Foundations of Probability*. Journal of Mathematics and Technology, vol. 1 (1), pp 96-98, 2010.
- ANDRADE, M., FERREIRA, M. A. M. and FILIPE, J. A.: *Evidence evaluation in DNA mixture traces*. Journal of Mathematics, Statistics and Allied Fields (Scientific Journals International-Published online), vol. 2 (2), 2008.
- ANDRADE, M., FERREIRA, M. A. M., FILIPE, J. A. and COELHO, M.: *Paternity dispute: is it important to be conservative?*. Aplimat – Journal of Applied Mathematics, vol. 1 (2), 2008.

- ANDRADE, M. and FERREIRA, M. A. M.: *Bayesian networks in forensic identification problems*. Aplimat - Journal of Applied Mathematics, vol. 2 (3), pp. 13-30, 2009.
- ANDRADE, M. and FERREIRA, M. A. M.: *Civil Identification Problems with Bayesian Networks Using Official DNA Databases*. Aplimat-Journal of Applied Mathematics, vol. 3 (3), pp. 155-162, 2010.
- ANDRADE, M. e FERREIRA, M. A. M.: *Solving civil identification cases with DNA profiles databases using Bayesian networks*. Journal of Mathematics and Technology, 1(2), pp. 37-40, 2010.
- ANDRADE, M. e FERREIRA, M. A. M.: *Evaluation of Paternities with less usual Data using Bayesian Networks*. IEEE Xplore (BMEI 2010 IEEE Catalog Number CFP1093D-PRT, ISBN: 978-1-4244-6496-8), 2010.
- ANDRADE, M., FERREIRA, M. A. M., ABRANTES, D., PONTES, M. L. e PINHEIRO, M. F.: *Object-oriented Bayesian Networks in the evaluation of paternities in less usual environments*. Journal of Mathematics and Technology, 1(1), pp. 161-164, 2010.
- DAWID, A. P., MORTERA, J., PASCALI, V. L. and van BOXEL, D. W.: *Probabilistic expert systems for forensic inference from genetic markers*. Scandinavian Journal of Statistics vol. 29, pp. 577-595, 2002.
- FERREIRA, M. A. M. and ANDRADE, M.: *A note on Dawnie Wolfe Steadman, Bradley J. Adams, and Lyle W. Konigsberg, Statistical Basis for Positive Identification in Forensic Anthropology. American Journal of Physical Anthropology 131: 15-26 (2006)*. International Journal of Academic Research, vol. 1 (2), pp. 23-26, 2009.
- LAURITZEN, S. L.: *Bayesian networks for forensic identification Problems*. Tutorial 19th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Mexico, 2003.

7. Výpočet pojistného v životním pojištění

Dělení životního pojištění

- pojištění riziková - jedná se o pojištění, u kterých se předem neví, zda dojde k pojistné události a následně výplatě pojistného plnění.
- pojištění rezervotvorná – v případě tohoto druhu pojištění musí pojišťovna počítat s výplatou pojistného plnění vždy. Ať dříve v případě smrti nebo později při dožití konce pojištění.

Pojištění pro případ úmrtí

- rizikové pojištění
- výplata pouze v případě úmrtí

Smíšené životní pojištění

- pojištění pro případ smrti nebo dožití
- pojistná částka je vyplacena vždy
- může být kladen větší důraz na jedno z rizik a podle toho mohou být nastaveny pojistné částky pro každé riziko zvlášť
- může být sjednáno na zvyšující se pojistnou částku při dožití se v průběhu pojistné doby, nebo může být sjednáno pro dvojici osob apod.
- varianty smíšeného pojištění, kdy oprávněným osobám je vyplaceno plnění v případě úmrtí pojištěného a poté ještě jedno plnění v době smlouveného konce pojištění
- bývá rozšiřováno o krytí dalších pojistných rizik neživotního charakteru (úraz, invalidita, vážná nemoc apod.)

Důchodové pojištění

- kryje pouze riziko dožití
- výplata jednorázově nebo pravidelné důchodové splátky
- varianty
 - **Základní doživotní důchod** – vyplácen od data nároku na starobní důchod
 - **Dočasný důchod** – výplata v případě trvalé invalidity

Finanční matematika v pojištění

a) Spojité úročení

b) Hodnota důchodů

- systém opakujících se plateb, jejichž výše zůstává v čase stejná nebo se mění dle určitého schématu

- ocenění důchodu vztažením všech jeho plateb ke stejnému časovému okamžiku s použitím úrokové míry

Pojistné

= úplata za poskytnutou pojistnou ochranu

- a) Netto pojistné
- b) Brutto pojistné

Netto pojistné

- označované taky jako ryzí, představuje hodnotu veškerých závazků pojišťovny, které připadají na všechny klienty vzhledem k jejich předpokládaným pojistným událostem.

Při stanovování výše netto pojistného se přihlíží zejména k následujícím faktorům:

- výši sjednané pojistné částky
- ohodnocení rizika
- výši technické úrokové míry

Faktory ovlivňují výši netto pojistného

- výši sjednané pojistné částky

Platí zde vztah přímé úměry mezi pojistnou částkou a pojistným, tzn. čím vyšší pojistná částka, tím vyšší pojistné. Předcházení jejího znehodnocování by mělo zabránit sjednání dynamizace pojistné smlouvy.

- ohodnocení rizika – riziko úmrtí nebo dožití

Výše pojistného se odvíjí především od pohlaví a věku pojištěného. Do ceny pojištění vstupuje taky zohlednění zdravotního stavu, výše pojistné částky a délka trvání pojištění. Ohodnocování rizika slouží k určení velikosti netto pojistného v životním pojištění, v některých případech může vést k odmítnutí sjednání životního pojištění ze strany pojišťovny. K určení pravděpodobnosti dožití určitého věku a pravděpodobnosti úmrtí před dosažením určitého věku slouží pojišťovnám úmrtnostní tabulky.

Faktory ovlivňují výši netto pojistného

- výše technické úrokové míry

V případě technické úrokové míry se jedná o garantovanou výnosnost pro klienta, se kterou musí pojistní matematici počítat, aby se nestala situace, že v případě pojišťovny, která bude počítat s vyšším zhodnocením rezerv se dostane do nerovnovážné situace v důsledku toho, že od klientů vybírá nižší pojistné. V současné době je horní limita výše technické úrokové míry regulovaná státem vyhláškou č. 303/2004 Sb., kterou se provádí některá ustanovení zákona o pojišťovnictví, ve znění pozdějších předpisů.

- Aktuálně 2,4 % p.a.

Úmrtnostní tabulka

Skládá se ze sloupců a řádků. Ve sloupcích jsou uvedeny jednotlivé veličiny (počet osob, počet žijících osob v daném věku,...). Řádky představují hodnoty veličin uvedených ve sloupcích pro konkrétní věk.

Úmrtnostní tabulka

x	l_x	d_x	p_x	q_x	D_x	C_x	N_x	M_x	S_x	R_x	L_x	T_x	e_x
3	99554	25	0,9997488800	0,0002511200	93 811,96	23,10	3 609 095,24	23 045,38	103 437 600,62	1 580 906,99	99 541	7 208 709	72,41
4	99529	14	0,9998593375	0,0001406625	91 949,41	12,68	3 515 283,28	23 022,29	99 828 505,38	1 557 861,61	99 522	7 109 168	71,43
5	99515	13	0,9998693664	0,0001306336	90 133,80	11,54	3 423 333,87	23 009,61	96 313 222,10	1 534 839,32	99 509	7 009 646	70,44
6	99502	11	0,9998894495	0,0001105505	88 354,93	9,58	3 333 200,07	22 998,06	92 889 888,23	1 511 829,71	99 497	6 910 137	69,45
7	99491	13	0,9998693349	0,0001306651	86 612,90	11,10	3 244 845,14	22 988,49	89 556 688,16	1 488 831,65	99 484	6 810 640	68,45
8	99478	16	0,9998391604	0,0001608396	84 903,52	13,39	3 158 232,24	22 977,39	86 311 843,02	1 465 843,16	99 470	6 711 156	67,46
9	99462	15	0,9998491886	0,0001508114	83 225,35	12,31	3 073 328,72	22 964,00	83 153 610,78	1 442 865,77	99 454	6 611 686	66,47
10	99447	14	0,9998592215	0,0001407785	81 581,18	11,26	2 990 103,37	22 951,70	80 080 282,06	1 419 901,76	99 440	6 512 232	65,48
11	99433	14	0,9998592017	0,0001407983	79 970,29	11,04	2 908 522,19	22 940,44	77 090 178,69	1 396 950,06	99 426	6 412 792	64,49
12	99419	16	0,9998390650	0,0001609350	78 391,20	12,37	2 828 551,91	22 929,40	74 181 656,50	1 374 009,62	99 411	6 313 365	63,50
13	99403	19	0,9998088589	0,0001911411	76 841,75	14,40	2 750 160,70	22 917,03	71 353 104,59	1 351 080,22	99 394	6 213 954	62,51
14	99384	20	0,9997987604	0,0002012396	75 320,65	14,86	2 673 318,95	22 902,63	68 602 943,89	1 328 163,19	99 374	6 114 560	61,52
15	99364	25	0,9997483998	0,0002516002	73 828,92	18,21	2 597 998,30	22 887,77	65 929 624,94	1 305 260,56	99 352	6 015 186	60,54
16	99339	29	0,9997080703	0,0002919297	72 363,08	20,71	2 524 169,38	22 869,56	63 331 626,64	1 282 372,78	99 325	5 915 835	59,55
17	99310	43	0,9995670124	0,0004329876	70 923,48	30,11	2 451 806,30	22 848,85	60 807 457,26	1 259 503,22	99 288	5 816 510	58,57
18	99267	52	0,9994761603	0,0005238397	69 502,72	35,69	2 380 882,82	22 818,74	58 355 650,95	1 236 654,37	99 241	5 717 222	57,59
19	99215	58	0,9994154110	0,0005845890	68 104,23	39,03	2 311 380,10	22 783,05	55 974 768,13	1 213 835,63	99 186	5 617 981	56,62
20	99157	62	0,9993747290	0,0006252710	66 729,82	40,91	2 243 275,87	22 744,02	53 663 388,03	1 191 052,58	99 126	5 518 796	55,66
21	99095	63	0,9993642464	0,0006357536	65 380,48	40,75	2 176 546,05	22 703,11	51 420 112,16	1 168 308,56	99 064	5 419 669	54,69
22	99032	67	0,9993234510	0,0006765490	64 057,76	42,49	2 111 165,57	22 662,36	49 243 566,10	1 145 605,45	98 999	5 320 606	53,73
23	98965	71	0,9992825746	0,0007174254	62 759,24	44,14	2 047 107,81	22 619,87	47 132 400,54	1 122 943,09	98 930	5 221 607	52,76
24	98894	69	0,9993022833	0,0006977167	61 484,52	42,06	1 984 348,57	22 575,73	45 085 292,73	1 100 323,22	98 859	5 122 677	51,80
25	98825	67	0,9993220339	0,0006779661	60 236,89	40,04	1 922 864,04	22 533,67	43 100 944,16	1 077 747,49	98 791	5 023 818	50,84
26	98758	65	0,9993418255	0,0006581745	59 015,74	38,08	1 862 627,15	22 493,63	41 178 080,12	1 055 213,82	98 725	4 925 027	49,87
27	98693	63	0,9993616569	0,0006383431	57 820,48	36,19	1 803 611,42	22 455,55	39 315 452,97	1 032 720,18	98 662	4 826 301	48,90
28	98630	67	0,9993206935	0,0006793065	56 650,56	37,73	1 745 790,93	22 419,37	37 511 841,55	1 010 264,63	98 597	4 727 640	47,93
29	98563	69	0,9992999401	0,0007000599	55 502,04	38,09	1 689 140,37	22 381,64	35 766 050,62	987 845,26	98 528	4 629 043	46,97

Popis úmrtnostní tabulky

q_x je pravděpodobnost úmrtí x -letých (před $x + 1$ narozeninami)

p_x je pravděpodobnost dožití se $x + 1$ narozenin (přežití věku x)

l_x je počet osob dožívajících se věku x (pojištění na doživotní důchod)

d_x je počet zemřelých ve věku x » $l_x - l_{x+1}$ (pojištění na dožití a pro případ úmrtí)

Komutační čísla

Slouží pro zrychlení výpočtů z důvodu často se opakujících součtů a součinů

D_x – diskontovaný počet osob dožívajících se věku x

C_x – diskontovaný počet zemřelých ve věku x

N_x - součet D_x až do konce tabulky

M_x - součet C_x až do konce tabulky

S_x – součet N_x až do konce tabulky

R_x - součet M_x až do konce tabulky

$$N_x = \sum_{K=0}^{\omega-x} D_{x+K} = \sum_{K=0}^{\omega-x} l_{x+K} \cdot v^{x+K}$$

Brutto pojistné

Brutto (celkové) Pojistné		
Netto (ryzí) pojistné		správní náklady
rezervotvorná (spořicí) složka	riziková složka	správní náklady

Brutto pojistné

$$PB = PN + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$

PB – brutto pojistné

PN – netto pojistné

α – jednorázové počáteční náklady

β – běžné správní náklady po celou dobu pojištění

γ – běžné inkasní náklady

δ – běžné správní náklady spojené s výplatou důchodu

Náklady pojištění

- **jednorázové počáteční náklady (α)** – bývají vynakládány pojišťovnou hned na počátku pojistné doby, při sjednání pojistné smlouvy. Těmito náklady pojišťovna pokrývá provize prodejců životního pojištění, výdaje na vystavení pojistné smlouvy, lékařskou vstupní prohlídku apod. a zpravidla bývají úměrné sjednané pojistné částce nebo důchodu ve formě nějaké výše procenta z pojistné částky,
- **běžné správní náklady (β)** – vynakládány během celého trvání pojištění nezahrnuté v ostatních nákladových položkách a jsou spojeny s udržováním daného pojištění, korespondenci s pojištěným, administrativou apod. a udávají se opět jako procenta z pojistné částky nebo důchodu, ale bývají o řád nižší než náklady počáteční
- **inkasní náklady (γ)** – jsou spojené s inkasem běžného pojistného ale tentokrát jsou stanoveny jako procenta z ročního brutto pojistného,
- **náklady při výplatě důchodu (δ)** – týkají se pouze pojištění, kde dochází k výplatě důchodu a tedy souvisí pouze s výplatami důchodu. V současné době dochází ke zmenšování γ a δ nákladů díky bezhotovostním platbám.
- **Bezpečnostní přírážku** si pojišťovna většinou připočítává pro případ nepříznivých výkyvů náhodné povahy v souboru pojištěných, kterými mohou být např. náhlé zvýšení úmrtnosti v některých věkových kategoriích, hromadné rušení pojistných smluv klienty, epidemie atd. Pojišťovna by měla dbát na to, aby se tato bezpečnostní přírážka nestávala dodatečným zdrojem nadměrných zisků pojišťovny.

Principy při výpočtu netto pojistného

Fiktivní soubor

pojišťovna předpokládá, že všechny osoby se narodily 1.1. a zemřeli 31.12.

předpoklad, že počet osob, které ve věku x uzavřou stejný typ pojištění, je lx z použité úmrtnostní tabulky. Tedy, že daný typ pojištění uzavřou všechny osoby, které jsou ve věku x naživu. Ačkoliv je skutečnost zcela jiná, jde o značné zjednodušení, které vede k dostatečně přesným výsledkům a k jeho praktickému využití.

Princip ekvivalence

příjmy a výdaje pojišťovny jsou v rovnováze
zohlednění:

a) časové rozložení příjmů a výdajů – finanční matematika

finanční toky rozložené v čase se vztáhnou diskontováním do jejich počáteční hodnoty nebo naopak

b) náhodný charakter fin. toků – očekávání (stř. hodnota)

Princip ekvivalence

očekávaná počáteční hodnota pojistného
=
očekávaná počáteční hodnota pojistného plnění

Předpoklady:

P – jednorázové pojistné

O – běžné pojistné

$P\check{C} = 1$

v ... Diskontní faktor = $1/(1+i)$

Pojištění pro případ smrti

Pravděpodobnostní vzorec – vznik vydělením l_x

Vzorec
$$P = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_tP_x \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1}$$
 ísel - vznik vynásobením v^x

$$P = \frac{M_x}{D_x}$$

Pojištění pro případ dožití

- X-letá osoba dostane PČ v případě, že bude naživu
- Rovnice ekvivalence
- a) Vzorec pomocí komutačních čísel

$$P = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{l_{x+n} \cdot v^n}{l_x} = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

- b) Pravděpodobnostní vzorec

$$P = {}_n p_x \cdot v^n$$

Doživotní důchod předlhůtní

X-letá osoba dostane vyplacenu PČ v případě, že je vždy na začátku období naživu

- Vzorec pomocí komutačních čísel

- Pravo $P = \frac{N_x}{D_x}$ vzorec

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tP_x \cdot v^t$$

Doživotní důchod polhůtní

Výpočet pomocí komutačních čísel

$$P = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Doživotní důchod s garancí vyplácení n let

x-letá osoba se pojistí tak, že po dobu n let mu bude vyplácena PČ, ať už je na živu nebo ne

$$l_x \cdot v^x \cdot P = 1 \cdot l_x \cdot v^x + 1 \cdot l_x \cdot v^1 \cdot v^x + \dots + 1 \cdot l_x \cdot v^{n-1} \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^n \cdot v^x + \dots + 1 \cdot l_{\omega} \cdot v^{\omega-x} \cdot v^x$$

$$l_x \cdot v^x \cdot P = 1 \cdot l_x \cdot v^x + 1 \cdot l_x \cdot v^1 \cdot v^x + \dots + 1 \cdot l_x \cdot v^{n-1} \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^{x+n} + \dots + 1 \cdot l_{\omega} \cdot v^{\omega}$$

$$D_x \cdot P = D_x \cdot (1 + v + \dots + v^{n-1}) + D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \dots + D_{\omega}$$

$$D_x \cdot P = D_x \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1} + N_{x+n}$$

$$P = \frac{v^n - 1}{v - 1} \cdot \frac{1}{D_x} + \frac{N_{x+n}}{D_x} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + {}_n|\ddot{a}_x$$

Doživotní důchod rostoucí lineárně

x- leté osobě je 1. rok vyplacena 1 p.j., 2.rok 2 p.j.,...

$$l_x \cdot v^x \cdot \mathbf{P} = 1 \cdot l_x \cdot v^x + 2 \cdot l_{x+1} \cdot v^x \cdot v^1 + \dots + n \cdot l_{x+n-1} \cdot v^x \cdot v^{n-1} + \dots + (\omega - x + 1) \cdot l_{\omega} \cdot v^x \cdot v^{\omega-x}$$

$$D_x \cdot \mathbf{P} = 1 \cdot D_x + 2 \cdot D_{x+1} + \dots + n \cdot D_{x+n-1} + \dots + (\omega - x + 1) \cdot D_{\omega}$$

$$D_x \cdot \mathbf{P} = S_x$$

$$\mathbf{P} = \frac{S_x}{D_x}$$

Smíšené pojištění

PČ je vyplacena v případě že kdykoliv do doby $x+n$ zemře nebo se dožije věku $x+n$

$$l_x \cdot v^x \cdot \mathbf{P} = 1 \cdot d_x \cdot v^x \cdot v + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^x \cdot v^2 + \dots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot v^x \cdot v^n + 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^x \cdot v^n$$

$$l_x \cdot v^x \cdot \mathbf{P} = 1 \cdot d_x \cdot v^{x+1} + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \dots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot v^{x+n} + l_{x+n} \cdot v^{x+n}$$

$$D_x \cdot \mathbf{P} = 1 \cdot C_x + 1 \cdot C_{x+1} + \dots + 1 \cdot C_{x+n-1} + 1 \cdot D_{x+n}$$

$$D_x \cdot \mathbf{P} = M_x - M_{x+n} + D_{x+n}$$

$$\mathbf{P} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Běžné netto pojistné

Předpokládáme, že doba placení je kratší než doba trvání pojištění

Pojištění na dožití

$$O = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

Motivační příklad

Jaké bude běžné netto pojistné pokud budete 15 let platit pojistné a chcete od 40. roku prvních 10 let garanci důchodu 12 000 Kč ročně, poté chcete, aby 10 let důchod rostl o 500 Kč, poté chcete opět garanci 10 let ve výši narostlého ročního důchodu a poté chcete, aby od 70. roku života důchod 5 roků klesal o 5 % z výše důchodu, kterou obdržíte v 69. roku života? (výpočet viz tabule)

8. Investování do akcií

Akcie

- Akcie je majetkový cenný papír
- S držením akcie vzniká majiteli
 - Vlastnické právo na určitý podíl firmy,
 - Právo podílet se na chodu společnosti, tj. účastnit se valných hromad,
 - Právo na likvidační zůstatek
- Je to dlouhodobý cenný papír, bez pevné doby splatnosti
- Převoditelný na jinou osobu
- Musí obsahovat:
 - Obchodní jméno a sídlo společnosti
 - Jmenovitou hodnotu
 - Označení formy akcie
 - U akcie na jméno i jméno akcionáře
 - Datum emise

Výnos z akcií

- Dividenda
 - Peněžitý podíl z čistého zisku akciových společností vyplácený akcionářům
 - Není pevně daná
- Prodání akcie na trhu cenných papírů
 - Zisk nebo ztráta je rozdíl mezi cenou, za kterou jsme akcii koupili a cenou, za kterou ji prodáváme

- Cena jednotlivých akcií je dána střetem poptávky a nabídky, nedá se určit její budoucí hodnota
- Jako každá komodita na trhu je i cena akcie tím vyšší, čím větší je poptávka
- Efektivní mechanismus převodu volných finančních prostředků investorů ke společností

Druhy akcií

- Dle formy:
 - Akcie na majitele (doručitele)
 - Na jméno
 - Na řád
- Dle účasti na řízení společnosti
 - Kmenové akcie
 - Prioritní akcie
- Dále specifické akcie
 - Zaměstnanecké akcie
 - Zlaté akcie (zakladatelské)
 - Požitkové akcie
- Další investiční instrumenty, zajišťující nárok na budoucí cash flow jsou finanční investiční instrumenty (např. cenné papíry, finanční deriváty), reálné investiční instrumenty (např. nemovitosti, umělecké sbírky, drahé kovy)

Výhody spojené s akciemi z hlediska emitenta

- Získaný kapitál má společnost na neomezeně dlouhou dobu, akcie jsou nesplacitelné
- Akciová společnost může shromáždit velké množství kapitálu
- Možnost získávat další kapitál emisí nových akcií
- Nemusí vyplácet dividendy, pokud tak rozhodne valná hromada
- Obchodováním na sekundárním trhu je zabezpečena likvidita akcií, snížení nákladů emitenta
- Rostoucí prestiž eminenta, pokud jsou akcie obchodovány na sekundárním trhu
- Obchodováním na sekundárním trhu dochází k dennímu oceňování hodnoty společnosti připadající na jednu akcii
- Emisí akcií dochází k diverzifikaci rizika mezi větší počet akcionářů^[1]

[1] Veselá, Jitka. Investování na kapitálových trzích.

Nevýhody spojené s akciemi z hlediska emitenta

- Akcionáři mají právo zasahovat a podílet se na řízení společnosti
- Informační povinnosti spojené s vysokými informačními náklady
- Vysoké emisní náklady s novými akciemi
- Za porušení závazků ručí celým svým majetkem
- Dividendy vypláceny až ze zisku po zdanění
- Přísná regulace právní formy v podobě akciové společnosti ve snaze zabránit vzniku monopolní či oligopolní tržní struktury
- Společnosti, u kterých jsou akcie veřejně obchodovatelné, musí provádět transparentní a kontinuální dividendovou, investiční a finanční politiku
- Ve společnosti může docházet ke konfliktu zájmů mezi managementem a akcionáři společnosti^[1]

Výhody spojené s akcemi z hlediska akcionáře (investora)

- Investicí do akcie může investor dosáhnout kapitálového zisku
- Inkasuje důchod ve formě dividendy, pokud je vyplácena
- Existuje omezené ručení, akcionář neručí za závazky akciové společnosti
- Má možnost podílet se na řízení akciové společnosti, účastnit se valné hromady a hlasovat
- Má právo na likvidační zůstatek
- Má předkupní právo na nákup nových akcií
- Investování do akcií představuje anonymní investováníNemá právo podílet se na řízení společnostiU obchodovatelných akcií je zajištěna likvidita^[1]

Nevýhody spojené s akcemi z hlediska akcionáře (investora)

- Investicí do akcie může investor dosáhnout kapitálové ztráty
- Získává nulový důchod, pokud dividenda vyplácena není
- Ve společnosti může docházet ke konfliktu zájmů mezi managementem a akcionáři společnosti
- Minoritní vlastník má z praktického hlediska omezenou možnost zasahovat do řízení firmy
- Nemá nárok na vrácení svého vkladu
- Může docházet k vysokému zdanění kapitálových zisků či dividend
- S neobchodovatelnými akcemi je spojena nízká likvidita
- Obchodování s malým počtem kusů akcií je spojeno s vysokými transakčními náklady^[1]

Oceňování akcií

- Spolehlivá metoda stanovení správné hodnoty akcie neexistuje
- Cena akcie je následkem mnoha událostí a nelze ji předvídat
- Nelze pokrýt všechny faktory, které cenu akcie ovlivňují
- Existuje mnoho teorií, které vysvětlují chování cen akcií (např. náhodná procházka)
- Pro oceňování akcií je důležitým parametrem především zisk společnosti

Dlouhodobý vývoj cen akcií

- Odráží trendy fundamentálních veličin a to
 - Makroekonomických (HDP, inflace, zaměstnanost, ...)
 - Odvětvových (dostupnost surovin, vývoj technologií, ...)
 - Individuálních (zadlužení, úroveň vedení, ...)

Metody oceňování akcií

- Fundamentální analýza
- Technická analýza
- Psychologická analýza

Kritéria investičního rozhodování

- Investice je záměrné obětování dnešní hodnoty za účelem získání vyšší hodnoty v budoucnu
 - Výnos plyne z nároku na plynoucí cash flow, nebo cena podkladového aktiva stoupne a prodáme ho za vyšší cenu, než za kterou jsme ho nakoupili
- Existují 3 základní investiční faktory tvořící tzv. magický trojúhelník
 - Výnosnost
 - Rizikovitost
 - Likvidita



[2]

Výnosnost, riziko, likvidita

- Výnosnost udává míru zhodnocení peněžních prostředků
 - ex post (již zrealizovaná)
 - ex ante (očekávaná výnosnost)
- Riziko je nebezpečí, že nedosáhneme očekávaného výnosu. Za vyšší riziko investor zpravidla požaduje vyšší výnos
 - Riziko změn tržní úrokové míry, inflační, měnové, právní, události, ztráty likvidity předmětného finančního instrumentu, ...
 - Riziku lze předcházet diverzifikací portfolia, tj. „nevsázet vše na jednu kartu“
- Likvidita je rychlost, s jakou je možnost přeměnit finanční instrument bez ztráty zpět v hotové peníze

Akciové indexy

- Akciový index je skupina konkrétně vybraných jednotlivých akciových titulů. Jeho hlavní úlohou je okamžitě prozradit investorovi, jak si vedou akciové tituly, jež jsou v indexu zahrnuty, jako celek.
- Při změně vah se vychází z aktuálních cen za tu kterou akcii k danému dni, maximální váha může být vždy maximálně jen 25%, u akcií, které jsou mimo pražskou burzu obchodované i na jiné burze v zahraničí, se počítá dále poměr zobchodovaných akcií Česká republika: zahraničnímu trhu.^[3]

$$PX(t) = K(t) \frac{M(t)}{M(0)} \times 1000$$

- M(t) tržní kapitalizace báze v čase t
- M(0) = 379 786 853 620,0 Kč představuje tržní kapitalizaci báze indexu PX ve výchozím dni 5. 4. 1994
- K(t) faktor zohledňující změny uskutečněné v bázi indexu, s účinností od 19. 3. 2012 hodnota faktoru zřetězení K(t) = 0,4680501949
- Dow Jones Industrial Average (DJIA)
- National Association of Securities Dealers Automated Quotations 100 (NASDAQ)
- S&P 500
- Nikkei 225
- Index PX, což je oficiální index Burzy cenných papírů Praha.

^[3] IHNEDE.CZ [online]. 1998-2011. 2012 [cit. 2012-3-11]. Váha indexu pro výpočet PX. Dostupné z WWW: <<http://byznys.ihned.cz/trhy-a-investice/c1-35147550-akcie-aaa-prestanou-mit-vahu-pro-vypocet-indexu-px>>

Akciové indexy

- Akciové indexy mají za úkol stručně informovat o vývoji celku určitého akciového trhu či jeho části. Indexy se používají jako standard (benchmark), což je měřítko průměrné výnosnosti daného trhu, se kterým se měří úspěšnost či neúspěšnost investování portfoliových manažerů. Je-li výkonnost portfoliového manažera vyšší než růst indexu, říká se, že manažer překonal trh. Indexy představují indikátory akciového trhu, koncentrující pohyby cen akcií do jednoho čísla a vypovídají o vývojových tendencích trhu.

Index PX

- SPAD (Systém pro podporu trhu akcií a dluhopisů) je nejvýznamnější segment BCPP. V rámci tohoto segmentu se obchoduje s cennými papíry vybraných významných podniků – jsou to ty nejlikvidnější a nejobchodovatelnější.
 - Úkolem SPADU je zajistit fungování burzovního trhu na pražské burze.
- Blue chip, blue chip stocks (česky „modrý žeton“) je termín označující akcie největších a nejziskovějších společností, které jsou obchodovány na burze, mají stabilní růst a pravidelně vyplácejí dividendy. V ČR to jsou zejména tituly společností obchodované na hlavním trhu SPAD BCPP tvořící Index PX.

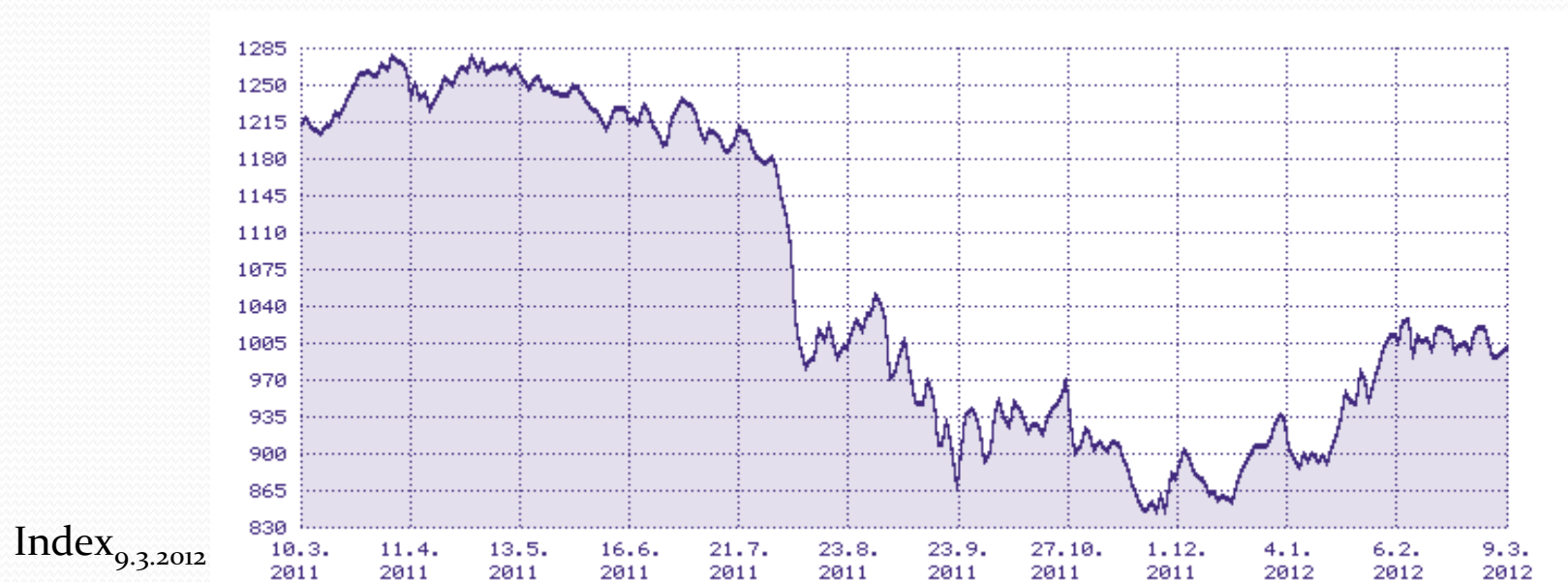
Index PX

- Index sdružuje následující společnosti, v závorkách uvedeny váhy: ^[3]
 - Erste group bank (21,72 %)
 - ČEZ (19,02 %)
 - KB (17,38 %)
 - Telefónica C.R. (15,53 %)
 - VIG (12,55 %)
 - NWR (4,71 %)
 - Unipetrol (3,83 %)
 - Philip Morris ČR (2,68 %)
 - CETV (0,95 %)
 - Fortuna (0,63 %)
 - Pegas Nonwovens (0,51 %)
 - Orco (0,21 %)
 - AAA (0,16 %)
 - Kitd (0,13 %)

^[3]Burza cenných papírů Praha [online]. 1998-2011. 2012 [cit. 2012-3-11]. Báze indexu PX ke dni 11.3.2012. Dostupné z WWW: <<http://www.bcpcz.cz/Statistika/Burzovni-Indexy/>>.

Index PX

- Dlouhodobý vývoj PX indexu [4]



[4] *Burza cenných papírů Praha* [online]. 1998-2011. 2012 [cit. 2012-3-11]. Index PX. Dostupné z WWW: <<http://www.bcpcz.cz/Statistika/Burzovni-Indexy/Detail.aspx?bi=1>>.

Obchodování na sekundárním trhu

- Akcie nejsou prodávány pouze jejich konečným majitelům (primární trh), ale běžně se s nimi obchoduje a to prostřednictvím sekundárního trhu

Burzy

- New York Stock Exchange Euronext
 - V roce 2007 fúze NYSE a Euronext (Francie, Belgie, Holansko, Portugalsko, Luxembursko, Velká Británie)
- Tokyo Stock Exchange (Japonsko)
- National Association of Securities Dealers Automated Quotations (NASDAQ, USA)
- London Stock Exchange (Velká Británie)
- Shanghai Stock Exchange (Čína)
- Frankfurt Stock Exchange (Německo)
- Burza cenných papírů Praha (BCPP, ČR)

^[5]Wikipedie [online]. 2012 [cit. 2012-3-11]. Pohled na obchodování v roce 2008. Dostupné <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3e/NYSE127.jpg/800px-NYS>



[5]

Burza cenných papírů Praha, a. s.

- Založena na členském principu, tj. přístup do burzovního systému a právo obchodovat mají pouze licencovaní obchodníci s cennými papíry, kteří jsou zároveň členy burzy
- 24.11.1992 Vznik BCCP, a.s.
- 5.4.1994 Zahájení výpočtu oficiálního burzovního indexu PX 50, dnes již nahrazeno PX
- 15.3.1996 Zahájení obchodování v systému KOBOS (průběžné obchodování při proměnlivé ceně) s 5 emisemi akcií a 2 emisemi obligací
- 25.5.1998 Zahájení obchodování v systému SPAD (Systém pro podporu trhu akcií a dluhopisů)
- 8.12.2005 Objemy obchodů v průběhu roku poprvé překročili bilionovou hranici, celkový objem obchodů za rok 2005 dosáhl 1041,2 mld. korun^[6]



[6] *Miras.cz* [online]. 2000-2011. 2012 [cit. 2012-3-12]. Burza cenných papírů Praha - historie. Dostupné z WWW: <<http://www.miras.cz/akcie/burza-praha-historie.php>>

[7] *Wikipedie* [online]. 2000-2011. 2012 [cit. 2012-3-12]. Burza cenných papírů Praha v datech. Dostupné z WWW: <<http://cs.wikipedia.org/>>

Investiční doporučení

Titul	Sektor	Doporučení	Cílová cena	Měna
ČEZ	Energetika	akumulovat	970	CZK
NWR	Těžba uhlí	akumulovat	310	CZK
KB	Bankovníctví	koupit	4 150	CZK
TELEFONICA	Telekomunikace	držet	387	CZK
FORTUNA	Sázkové služby	koupit	145	CZK

[8] *Cyrrus* [online]. 1998-2011. 2012 [cit. 2012-3-11]. Aktuální doporučení. Dostupné z WWW: <<http://www.cyrrus.cz/aktualni-doporuceni>>.

Portfolio

Titul	Kupní hodnota ^[9]	Množství	Akcie dohromady
ČEZ	829,00	40	33 160,00
KB	3 782,00	10	37 820,00
NWR	145,60	210	30 576,00
Telefónica O2 C.R.	395,80	51	20 185,80
Fortuna	98,70	300	29 610,00
Hodnota portfolia			151 351,80

Vývoj akcií a příslušného portfolia byl sledován od

24. 2. 2012 do 9. 3. 2012

[9] *Burza cenných papírů Praha* [online]. 1998-2012. 2012 [cit. 2012-3-11]. Index PX. Dostupné z WWW:
<<http://www.bcpcz.cz/Statistika/Burzovni-Indexy/Detail.aspx?bi=1>>.

České energetické závody (ČEZ), a. s.

- Založeny roku 1992
- Hlavním předmětem činnosti je výroba a prodej elektřiny
- Dále se zabývá výrobou, rozvodem a prodejem tepla
- V roce 2003 se ČEZ spojila s distribučními společnostmi SeČ energetika, SeM en., StČ en., VČ en., a ZČ en. a vznikla Skupina ČEZ
- Postupně akvizice v mnoha státy Evropy
- Skupina ČEZ patří do evropské desítky největších energetických koncernů
- V České republice je Skupina ČEZ největším výrobcem elektřiny a tepla

Hlavní akcionáři ČEZ

	stav k 31.12.2007	stav k 31.12.2008	stav k 31.12.2009	stav k 31.12.2010
Česká republika	65,99 %	63,39 %	69,78 %	69,78 %
Ostatní právnické osoby	19,04 %	12,97 %	4,02 %	2,34 %
domácí	10,24 %	11,59 %	2,73 %	1,22 %
zahraniční	8,80 %	1,38 %	1,29 %	1,12 %
Fyzické osoby	4,14 %	4,55 %	5,41 %	5,13 %
domácí	4,04 %	4,43 %	5,26 %	4,43 %
zahraniční	0,10 %	0,12 %	0,15 %	0,70 %

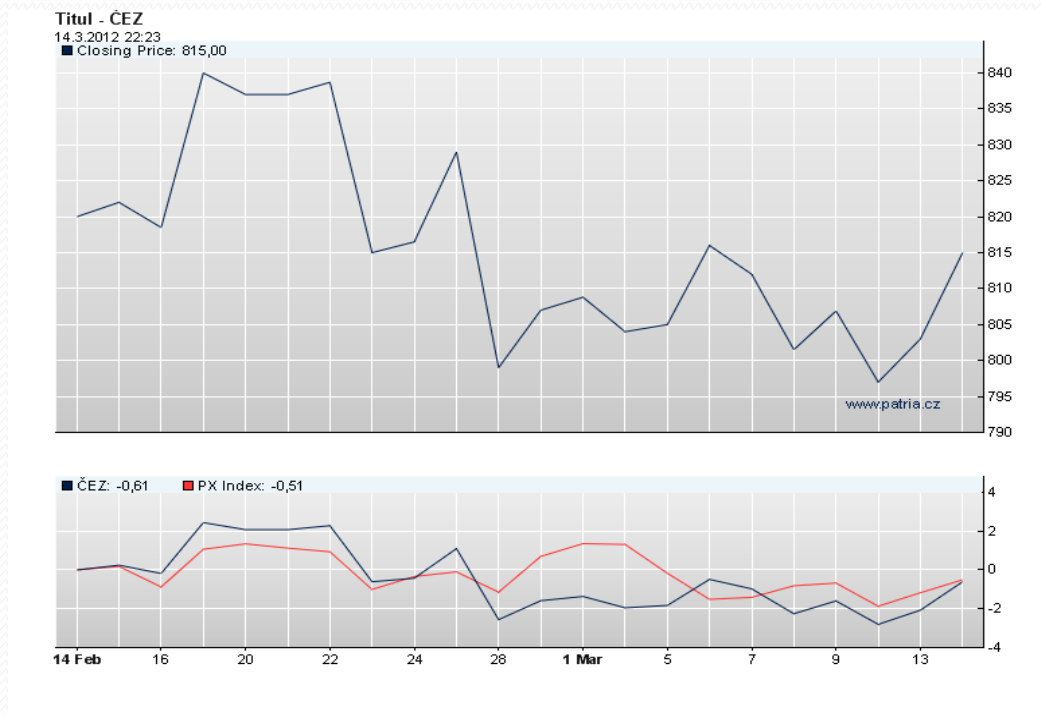
[10] ČEZ, a. s. [online]. 1998-2012. 2012 [cit. 2012-3-11]. Struktura akcionářů. Dostupné z WWW: <<http://www.cez.cz/cs/o-spolecnosti/cez/struktura-akcionaru.html>>

Dlouhodobý vývoj akcií ČEZ



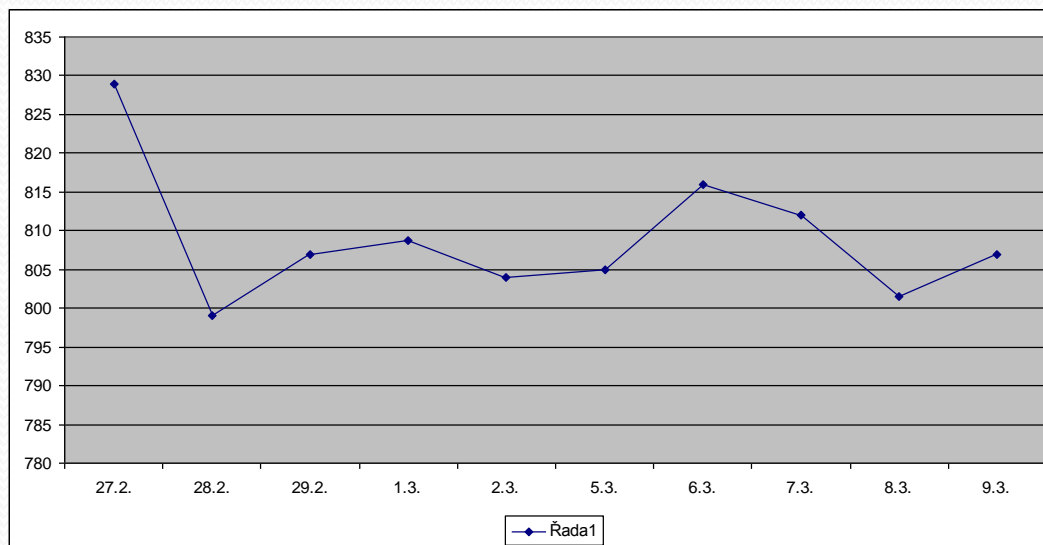
[1] Patria [online]. 1990-2012, 2012 [cit. 2012-3-14]. Detail graf. Dostupné z www.<<http://www.patria.cz/akcie/CEZPsp.PR/cez/graf.html>>

Vývoj akcií ČEZ v průběhu měsíce



[12] Patria [online]. 1998-2012. 2012 [cit. 2012-3-14]. Detail graf. Dostupné z www. <<http://www.patria.cz/akcie/detail/graf.html>>

Vývoj akcií ČEZ v průběhu 14 dní



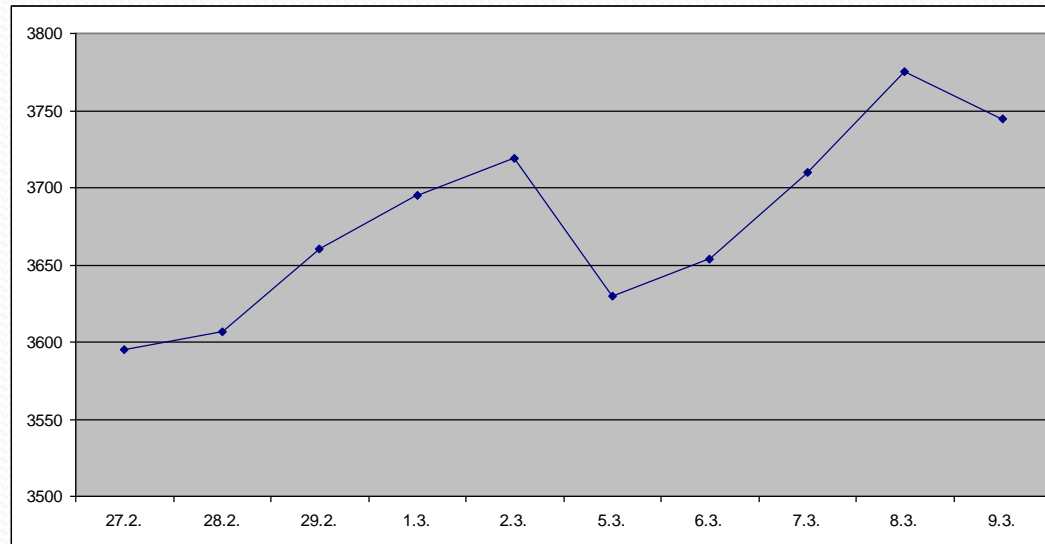
27.2.	829
28.2.	799
29.2.	807
1.3.	808,8
2.3.	804
5.3.	805
6.3.	816
7.3.	812
8.3.	801,5
9.3.	806,9

[13] *Investiční web* [online]. 2012 [cit. 2012-3-14]. Kurzy. Dostupné z WWW:
<<http://www.investicniweb.cz/kurzy/bcpp/charts/detail/cz0005u2300.html>>

KB

- Založena v roce 1990 jako státní instituce
- V roce 1992 byla transformována na akciovou společnost
- KB je univerzální bankou se širokou nabídkou služeb v oblasti podnikového a investičního bankovníctví
- Nabízejí další specializované služby, mezi něž patří penzijní připojištění, stavební spoření, spotřebitelské úvěry a pojištění, dostupné prostřednictvím sítě poboček KB, přímého bankovníctví a vlastní distribuční sítě
- Služby samotné Komerční banky využívá 1,59 milionu zákazníků prostřednictvím 395 poboček a 677 bankomatů po celé České republice

Vývoj akcií KB v průběhu 14 dní

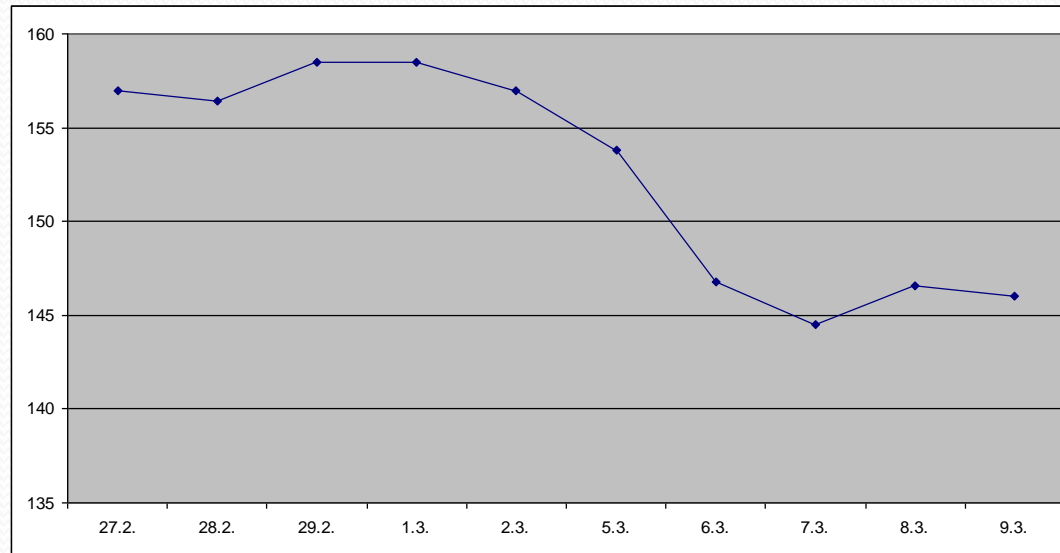


27.2.	3595
28.2.	3607
29.2.	3660
1.3.	3695
2.3.	3719
5.3.	3630
6.3.	3654
7.3.	3710
8.3.	3775
9.3.	3745

NWR

- Společnost NWR je předním středoevropským producentem černého uhlí a koksu
- V současné době společnost těží na území České republiky
- NWR zaměstnává 18 553 lidí
- Společnost NWR sídlí v Nizozemsku a jejím majitelem je jeden z nejbohatších Čechů Zdeněk Bakal

Vývoj akcií NWR v průběhu 14 dní

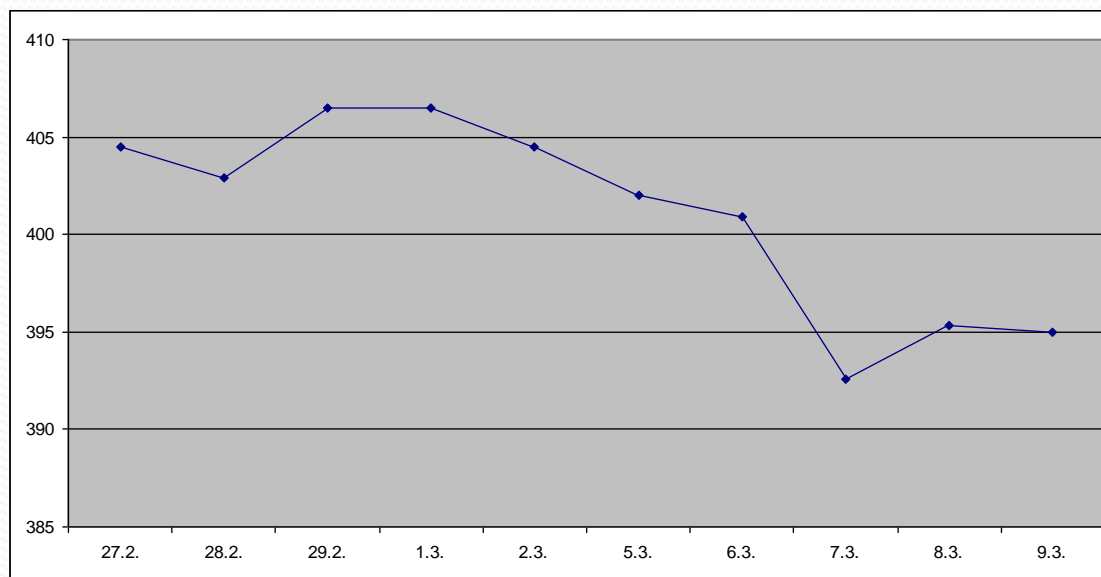


27.2.	157
28.2.	156,4
29.2.	158,5
1.3.	158,5
2.3.	157
5.3.	153,8
6.3.	146,8
7.3.	144,5
8.3.	146,6
9.3.	146

Telefónica C.R.

- Vznikla 1. července 2006 spojením společností ČESKÝ TELECOM, a.s. a Eurotel Praha, spol. s r.o.
- Je předním telekomunikačním operátorem na českém trhu
- V současnosti provozuje téměř 7mil. mobilních a pevných linek

Vývoj akcií Telefónica C.R. v průběhu 14 dní

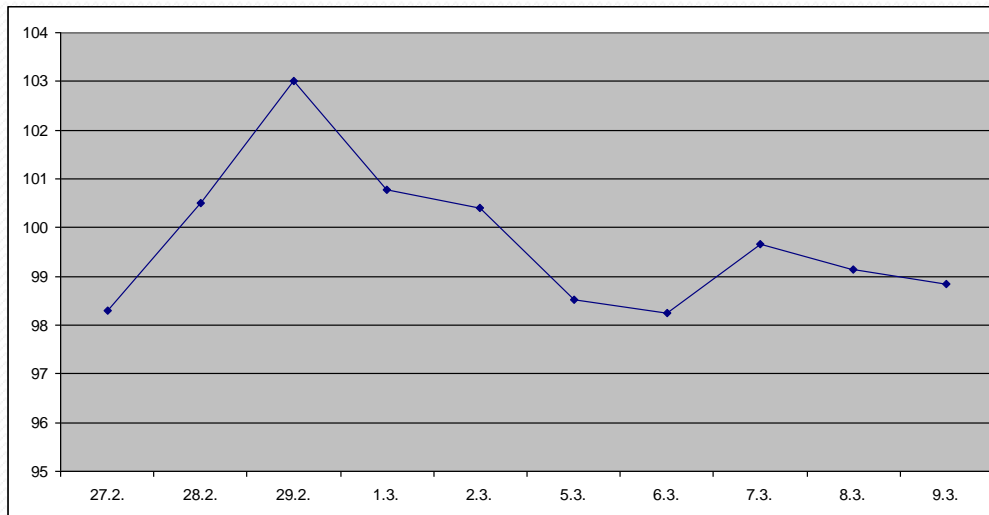


27.2.	404,5
28.2.	402,9
29.2.	406,5
1.3.	406,5
2.3.	404,5
5.3.	402
6.3.	400,9
7.3.	392,6
8.3.	395,3
9.3.	395

Fortuna

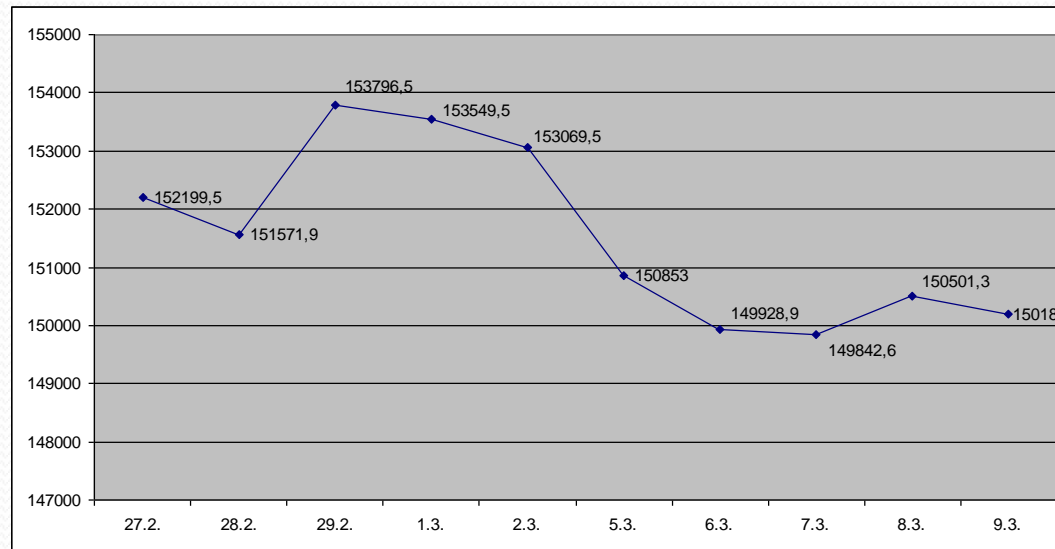
- Zakládající společnost tohoto seskupení Fortuna sázková kancelář, a. s. vznikla v roce 1990 v Praze
- V roce 2009 vznikla Fortuna Entertainment Group a stala se největším středoevropským provozovatelem kurzových sázek
- Vzestup online sázení jak v Česku, tak i na Slovensku

Vývoj akcií Fortuna v průběhu 14 dní



27.2.	98,3
28.2.	100,5
29.2.	103
1.3.	100,77
2.3.	100,4
5.3.	98,51
6.3.	98,25
7.3.	99,65
8.3.	99,15
9.3.	98,85

Vývoj portfolia v průběhu 14 dní

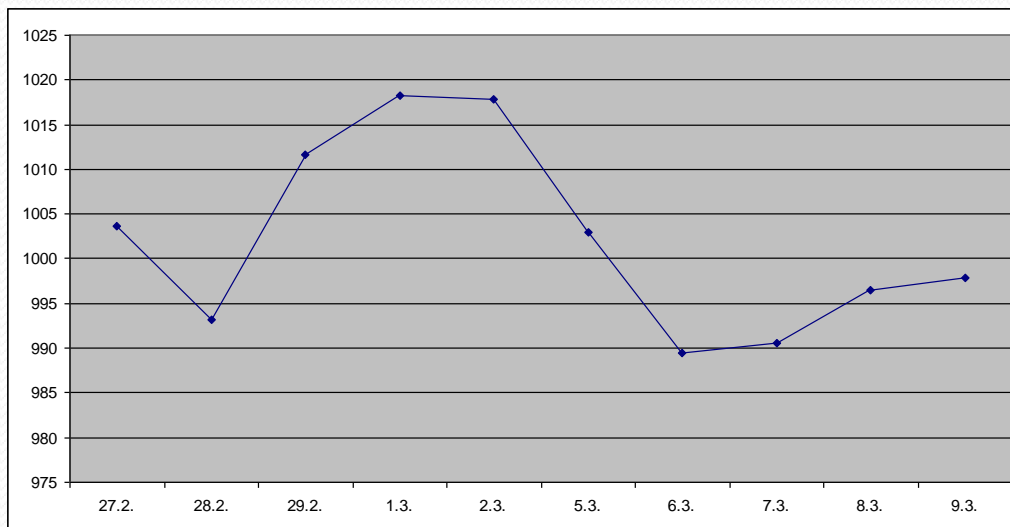


27.2.	152199,5
28.2.	151571,9
29.2.	153796,5
1.3.	153549,5
2.3.	153069,5
5.3.	150853
6.3.	149928,9
7.3.	149842,6
8.3.	150501,3
9.3.	150186

Vyhodnocení portfolia

Titul	Množství	Prodejní hodnota	Změna(%)	Akcie dohromady	Změna v korunách
ČEZ	40	806,9	-2,74	32 276	-884
KB	10	3745	-0,99	37 450	-370
NWR	210	146	-0,41	30 660	-84
Telefónica	51	395	-0,20	20 145	-40,8
Fortuna	300	98,85	-0,15	29 655	-55
Hodnota portfolia				150 186	-1 433,8

Vývoj indexu PX v průběhu 14 dní



27.2.	1003,7
28.2.	993,2
29.2.	1011,7
1.3.	1018,3
2.3.	1017,9
5.3.	1003
6.3.	989,5
7.3.	990,5
8.3.	996,5
9.3.	997,9

9. Fundamentální analýza

Typy analýz:

- Technická analýza
- Psychologická analýza

je založena na předpokladu, že investování je ve značné míře ovlivněno emocemi

- Fundamentální analýza:
 - Globální FA
 - Odvětvová FA
 - Firemní FA

Globální FA

- jde o celkové zhodnocení hospodářské situace na daném trhu a její vliv na vývoj akciového trhu jako celku
- působí zde celá řada faktorů, z nichž za nejdůležitější můžeme považovat zejména:
 - Vývoj HDP
 - Vývoj úrokových měr
 - Změna Inflace
 - Vývoj peněžní zásoby

Vývoj HDP

- vztah HDP a akciových kurzů je kladný
- jedná se o předbíhající faktor, a to o 3 až 9 měsíců
- pokud předpokládáme růst HDP, investoři nakupují akcie, což ve výsledku pozitivně ovlivní reálný výstup ekonomiky

Vývoj úrokových měr

- negativní vztah
- při růstu úrokových měr dochází k poklesu kurzů akcií a naopak, což může být vysvětlováno například jako:
 - změna budoucí vnitřní hodnoty akcií
 - odliv peněžních prostředků z akciových trhů

Změna inflace

- její vliv na vývoj akciových kurzů není zcela zřejmý, avšak spíše budeme mluvit o slabém negativním vztahu
- růst inflace je velice často doprovázen růstem úrokových měr a taktéž v inflačním prostředí roste nejistota v ekonomice, tudíž pro investory stoupá riziko investic do cenných papírů

Vývoj peněžní zásoby

- kladný vztah, hlavně v krátkém období
- předbíhající faktor
- při růstu peněžní zásoby je více peněz investováno do jednotlivých akciových titulů, což způsobuje růst jejich ceny

Odvětвовá FA

- odvětvová analýza zkoumá specifika a vztahy v odvětví, ve kterém daná společnost působí a jejich vliv na kurzy
- důležitou roli zde hrají faktory jako:
 - citlivost odvětví na hospodářský cyklus
 - životní cyklus daného odvětví
 - struktura trhu
 - regulace v odvětví

Citlivost odvětví na hospodářský cyklus

- **Cyklická odvětví**

- firmy produkující statky zbytné spotřeby, tedy výrobky a služby, jejichž spotřeba není nutná a lze ji odložit do budoucna. Cena akcie se poté vyvíjí podobně jako hospodářský cyklus.
- např.: stavebnictví, automobilový průmysl, cestovní ruch, elektrotechnika

- **Neutrální odvětví**

- společnosti produkující statky nezbytné spotřeby (nulová cenová elasticita), či návykové produkty
- např.: potravinářské produkty, farmaceutický průmysl, tabákový průmysl a výroba alkoholických nápojů.

- **Anticyklická odvětví**

- odvětví, která profitují během recese
- firmy z anticyklických odvětví produkují **levnější substituty drahých produktů**,
- např.: levné oděvy, obuv a potraviny nahrazující drahé výrobky

Životní cyklus v odvětví

- **Pionýrská fáze**
 - společnost produkuje nové, či silně inovované produkty
 - po těchto stadiích prudce narůstá poptávka, firmy mohou dosahovat nadprůměrných zisků
 - to způsobuje rostoucí konkurenci a může docházet ke krachu některých podniků
 - investor může dosahovat mimořádných výnosů, avšak za vyššího rizika
 - např.: boom ve výpočetní technice v průběhu 90. let
- **Fáze rozvoje**
 - stabilizace odvětví, firmy, které přečkaly pionýrskou fázi
 - upevňování pozice na trhu
- **Fáze stability**
 - na trhu se nacházejí silné firmy, které mají zavedené jméno
 - stabilní vývoj tržeb, marží a zisku
 - tato fáze se vyznačuje nízkými výnosy a postupně rostoucími náklady, zejména na marketing a propagaci produktů
 - některé společnosti zde již nevidí budoucnost a odvětví postupně opouštějí.
- **Období útlumu**
 - odvětví zastarává, objem produkce pozvolna klesá a firmy zde ukončují činnost

Firemní FA

- věnuje se samotné akciové společnosti
- zkoumá, jak firma hospodaří
- jaký je její očekávaný vývoj v budoucnosti

- zda je příslušný cenný papír správně ohodnocen – pomocí vnitřní hodnoty akcie
- cílem je najít na trhu nadhodnocené a podhodnocené akcie a následně provádět případný nákup či prodej

Vnitřní hodnota

- Vnitřní hodnotu počítáme v různých časových periodách:
 - v delším období - abychom zjistili, jak se mění a jakým směrem můžeme očekávat další pohyb kurzu
 - v krátkém období - je možné považovat vnitřní hodnotu za konstantní a tudíž schopnou porovnání se skutečným kurzem akcie
- Pro budoucí použití označíme aktuální vnitřní hodnotu cenného papíru jako V_o a skutečný tržní kurz P_o .
- $P_o > V_o$ – nadhodnocený cenný papír
- $P_o \approx V_o$ – relativně správně ohodnocený cenný papír
- $P_o < V_o$ – cenný papír je podhodnocený

Metody stanovení vnitřní hodnoty akcie

- Dividendové diskontní modely – DDM
- Ziskové modely
- Cash Flow modely
- Další ohodnocovací modely

Vstupní hodnoty pro modely

- Míra růstu dividend
- Požadovaná výnosová míra

Míra růstu dividend

Historická data

- Průměr hodnot za delší období
 - aritmetický
 - geometrický
- Nevýhoda - nezahrnuje žádné předpoklady do budoucna

$$g = \sqrt[n]{\frac{D_{n+m}}{D_n}} - 1$$

$$g = \sqrt[m]{g_1 \times g_2 \times \dots \times g_m}$$

Míra růstu dividend

Z firemních ukazatelů

- Míra růstu dividend se rovná míře růstu zisku na akcii

$$g = \frac{D_{n+1}}{D_n} - 1 = \frac{e_{n+1}}{e_n} - 1$$

- Budeme vycházet z následujících vztahů:

$$e_{n+1} = ROE_n \times VK_n$$
$$VK_n - VK_{n-1} = b \times e_n$$

- Dosazením získáme:

$$g = \frac{ROE_n \times VK_n - ROE_{n-1} \times VK_{n-1}}{ROE_{n-1} \times VK_{n-1}} = \frac{VK_n - VK_{n-1}}{VK_{n-1}} = \frac{b \times e_n}{VK_{n-1}} \approx ROE \times b$$

Požadovaná výnosová míra

- Nejznámější CAPM
 - (Capital Asset Pricing Model)
 - patří mezi nejpoužívanější modely
 - zahrnuje celou řadu faktorů

$$r = r_f + P_{ri}$$

$$r = r_f + \beta (r_m - r_f)$$

Metody stanovení vnitřní hodnoty akcie

- Dividendové diskontní modely – DDM
- Ziskové modely
- Cash Flow modely
- Další ohodnocovací modely

Dividendové diskontní modely

- nejčastěji používané modely
- diskontováním budoucí očekávané hodnoty akcie i jednotlivých dividendových výnosů v jednotlivých letech

$$VH = \frac{D_1}{(1+r)} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_n + C_n}{(1+r)^n} = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{(1+r)^i} + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

Dividendové diskontní modely

- Modely s nulovým růstem
- Jednostupňové DDM
 - Gordonův model
- Vícestupňové modely

Dividendové diskontní modely

Jednostupňové DDM a Gordonův model

- Jednostupňové

$$VH = \sum_{i=1}^n \frac{D_0(1+g)^i}{(1+r)^i} + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

- Gordonův model

$$VH = \frac{D_0(1+g)}{r-g} = \frac{D_1}{r-g}$$

- Musí být splněn
 - $(r - g) > 0$, tudíž $g < r$

Dividendové diskontní modely

Vícestupňové DDM

$$VH = \sum_{i=1}^n \frac{D_0(1+g_1)^i}{(1+r)^i} + \sum_{j=1}^m \frac{D_0(1+g_2)^n(1+g_2)^j}{(1+r)^{n+m}} + \frac{C_{n+m}}{(1+r)^{n+m}}$$

- **Růstová** nadprůměrná míra růstu dividendy je způsobena růstovými faktory firmy
- **Přechodná** během této fáze je nadprůměrná míra růstu postupně snižována až na normální míru růstu pro dané odvětví
- **Finální** zde již počítáme s průměrnou mírou růstu dividendy v našem odvětví po celou dobu, tedy v našem případě nekonečnou dobu držby akcie

Ziskové modely

- počítají se samotným ziskem – ziskové m.
- bývají považovány za přesnější než dividendové
- zaměřují se na kratší investiční horizont - přibližně tři roky, maximálně pět let

- 3 základní typy:
 - P/E ratio
 - P/BV ratio
 - P/S ratio

Ziskové modely – P/E ratio

- nejčastější ukazatel
- kolika násobek zisku si člověk cení
- porovnává se v rámci odvětví ne napříč trhem

$$\frac{VH}{E_0} = \frac{D_1/E_1}{(1+r)} + \frac{D_2/E_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_n/E_n}{(1+r)^n}$$

$$P/E = \frac{VP_1}{(1+r)} + \frac{VP_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{VP_n}{(1+r)^n}$$

$$VH = E_0 \times \left(\frac{VP_1}{(1+r)} + \frac{VP_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{VP_n}{(1+r)^n} \right)$$

$$VH = E_0 \times \frac{VP(1+g)}{r-g} = E_1 \times \frac{VP}{r-g}$$

Ziskové modely – P/BV ratio

- využívá účetní hodnotu vlastního kapitálu
- P/BV (price-to-book-value ratio)
- očekávaný zisk v příštím roce nahradíme součinem rentability vlastního kapitálu a očekávané účetní hodnoty vlastního kapitálu na akcii
- hodnota vyšší než 1 - tak si investoři cenní akcií více než podílu hodnoty majetku společnosti, který připadá na jednu akcii
- vypovídající schopnost je nízká a často opožděná
- účetnictví jednotlivých společností bývají odlišná

$$VH = P = \frac{E_1 \times VP}{r - g} = \frac{BV_1 \times ROE \times VP}{r - g}$$

Ziskové modely – P/S ratio

- vyjadřuje, jak moc si investor cenní jedné koruny z tržby podniku
- můžeme použít i v případě, kdy podnik dosahuje nízkého zisku či ztráty
- lze lépe porovnávat podniky navzájem

- S_1 - očekávané tržby na akcii v prvním roce

- M_1 - očekávaná zisková marže na akcii v prvním roce

$$VH = \frac{E_1 \times VP}{r - g} = \frac{M_1 \times S_1 \times VP}{r - g}$$

$$\frac{VH}{S} = P/S = \frac{M_1 \times VP}{r - g}$$

Příklad – společnost ČEZ

- České Energetické Závody.
- v roce 2009 byla největší českou firmou podle tržeb
- 32 tisíce zaměstnanců - třetí největší

- Struktura vlastníků:
 - Ministerstvo financí ČR - 69,369 %
 - Ostatní právnické osoby - 4,427 %
 - Fyzické osoby - 5,416 %
 - Správci celkem - 20,788 %

Požadovaná výnosová míra

ČEZ

Bezriziková výnosová míra	r_f	6,55 %
Tržní výnosová míra	r_m	14,25 %
Beta faktor	β	0,73

$$\beta(r_m - r_f) = P_{ri}$$

$$0,73 * (0,1425 - 0,0655) = 0,05621$$

$$r_f + P_{ri} = r$$

$$0,0655 + 0,05621 = 0,12171$$

Míra růstu dividend

Rok	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Dividenda	2,00	2,50	4,50	8,00	9,00	15,0	20,00	40,00	50,00	53,00	50,00
Míra růstu dividendy v %	x	25 %	80 %	78 %	13 %	67%	33%	100%	25 %	6 %	-6%

Aritmetický průměr – 42,06 %

Geometrický průměr – 37,97 %

	Jednot.	Zkratka	Vztahy	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004	2 005	2 006	2 007	2 008	2 009	2 010
Dividend a	Kč	D	Bloomberg	2	3	5	8	9	15	20	40	50	53	50
Čistý zisk	mil. Kč	e	Bloomberg	7 237	9 123	8 421	8 869	13 213	21 438	27 697	41 555	46 510	51 547	47 232
Počet akcií	mil	a	Bloomberg	592,0	590,1	590,3	591,5	592,2	589,8	588,8	541,8	533,0	533,4	533,9
Zisk na akcii		E	E=e/a	12,23	15,46	14,27	14,99	22,31	36,35	47,04	76,69	87,25	96,63	88,47
Vlastní kapitál	mil. Kč	VK	Bloomberg	129 442	136 726	143 675	171 075	178 447	191 289	207 653	184 226	185 410	206 675	227 051
Rentabilit a vl. kapitálu	%	ROE	ROE=(e/VK)*100	5,59	6,67	5,86	5,18	7,40	11,21	13,34	22,56	25,08	24,94	20,80
Div. výplatní poměr	%	VP	VP=(D/E)*100	16,36	16,17	31,54	53,35	40,34	41,27	42,51	52,16	57,30	54,85	56,52
Podíl zadržené ho zisku	%	b	b=100-VP	83,64	83,83	68,46	46,65	59,66	58,73	57,49	47,84	42,70	45,15	43,48
Míra růstu dividend	%	g	g = ROE *b	4,68	5,59	4,01	2,42	4,42	6,58	7,67	10,79	10,71	11,26	9,05

Míra růstu dividend

Způsob výpočtu	Míra růstu dividend
Aritmetický průměr	42,06 %
Geometrický průměr	37,97 %
Udržovací růstový model	7,25 %

DDM

ČEZ		
Požadovaná výnosová míra	r	12,171 %
Míra růstu dividend	g	7,25 %
Poslední vyplacená dividend	D	50

Použijeme Gordonův model

$$VH = \frac{D_0(1 + g)}{r - g} = \frac{50(1 + 0,0725)}{0,12171 + 0,0725} \doteq 1089,72$$

Ziskové modely – P/E ratio

$$VP = \frac{D}{E} = \frac{50}{88,47} = 0,57$$

ČEZ		
Požadovaná výnosová míra	r	12,171 %
Míra růstu dividend	g	7,25 %
Dividendový výplatní poměr	VP	0,57
Očekávaný zisk v dalším roce	E ₁	81,02

$$VH = E_1 \times \frac{VP}{r - g} = E_1 \times P/E$$

$$VH = 81,02 \times \frac{0,57}{0,12171 - 0,0725} = 81,02 \times 11,485 = 930,53$$

Ziskové modely P/BV ratio

ČEZ

Požadovaná výnosová míra	r	12,171 %
Míra růstu dividend	g	7,25 %
Dividendový výplatní poměr	VP	0,57
Rentabilita vlastního kapitálu	ROE	20,8 %
Očekávaná účetní hodnota vlastního kapitálu na akcii	BV	431,43

$$VH = \frac{BV_1 \times ROE \times VP}{r - g} = BV_1 \times P/BV$$

$$VH = \frac{431,43 \times 0,208 \times 0,57}{0,12171 - 0,0725} = 431,43 \times 2,389 = 1030,77$$

Shrnutí

ČEZ

Současný kurz	787,5 Kč	
DDM	1089,72 Kč	KOUPIT
Ziskový model – P/E ratio	930,53 Kč	KOUPIT
Ziskový model – P/BV ratio	1030,77 Kč	KOUPIT
Doporučení	KOUPIT	

10. Metody technické analýzy

Technická analýza

- analytický přístup zabývající se vývojem kurzů cenných papírů či cen komodit. Je to způsob rozhodování o koupích a prodeích finančních instrumentů na základě minulého vývoje jejich tržních cen a objemu obchodů.
- postavena na analýze publikovaných tržních dat, kterými jsou kurzy nebo objemy obchodů.
- Hlavním cílem je prognózování krátkodobých pohybů akcií nebo akciových indexů. Zaměřuje se na změny tržních cen jako na indikátory nabídky a poptávky.
- je založena na předpokladu, že všechno, co potřebuje investor vědět, je obsaženo v tržních cenách. Dává nám doporučení, kdy provést obchod.

Základní předpoklady technické analýzy

- Tržní ceny odrážejí a zahrnují veškeré informace.
- Ceny se pohybují v trendech.
- Historie se opakuje.

DOW THEORY

- odvozena z článků, které publikoval Charles H. Dow ve Wall Street Journal v letech 1900 až 1902 .
- Podle Ch. Dowa se většina akcií chová podobným způsobem. Nemusíme tedy zkoumat každou akcii zvlášť, ale situaci na trhu by měla dostatečně popisovat průměrná tržní cena akcií.
- Vytvořil indexy: Dow-Jones-Rail-Average (DJRA) a Dow-Jones-Industrial-Average (DJIA)

Principy Dowovy teorie I.

- Akciové indexy v sobě zahrnují všechny relevantní informace.
- Pohyby akciových kurzů lze rozložit na tři základní trendové pohyby, kterými jsou primární (1 rok a déle), sekundární (3 týdny až 3 měsíce) a terciární trend (méně než 3 týdny).
- Primární trendy obsahují tři fáze – akumulární, rostoucí a fáze distribuce.
- Akciové indexy se musí navzájem potvrzovat. To, co je vyrobeno, musí být též dopraveno, proto by měl být vývoj obou indexů (DJIA a DJTA) stejný.
- Objem obchodů musí potvrzovat trend. Nastoupený trend na trhu je potvrzen, pokud ho doprovází rostoucí objem obchodů. Oproti tomu klesající objem obchodů naznačuje pravděpodobnou změnu trendu.
- Nastoupený trend trvá až k jasné změně trendu.

Principy Dowovy teorie II.

- Budoucí vývoj kurzů (pokračování trendu nebo jeho změnu) lze odvodit z minulé tržní situace. Býčím, neboli rostoucím trendem (Bull Trend) nazýváme trend, jehož každý vrchol je vyšší než předchozí, a taktéž každé dno je vyšší než dno předchozí. Naopak, pokud je každý vrchol nižší než vrchol předchozí a každé dno je nižší než dno předchozí, mluvíme o medvědí neboli klesajícím trendu (Bear Trend). Změna trendu z býčího na medvědí nastane, pokud nový vrchol nedosáhne úrovně předchozího vrcholu a nové dno leží níž než předchozí dno. Jestliže byl doposud na trhu medvědí trend a nový vrchol leží výše než předchozí vrchol, zatímco nové dno je výš než předchozí dno, značí to změnu trendu na býčí trend.

Kritika Dowovy teorie

- Signály k nákupu a prodeji přicházejí příliš pozdě a můžou být falešné nebo nejednoznačně interpretovatelné.
- Pomáhá pouze při analýze primárního trendu, přičemž na sekundárním a terciárním trendu lze též docílit vysokých zisků.
- Soustředí se pouze na trh jako celek, a proto není schopna umožnit výběr jednotlivých akcií.

Metody technické analýzy

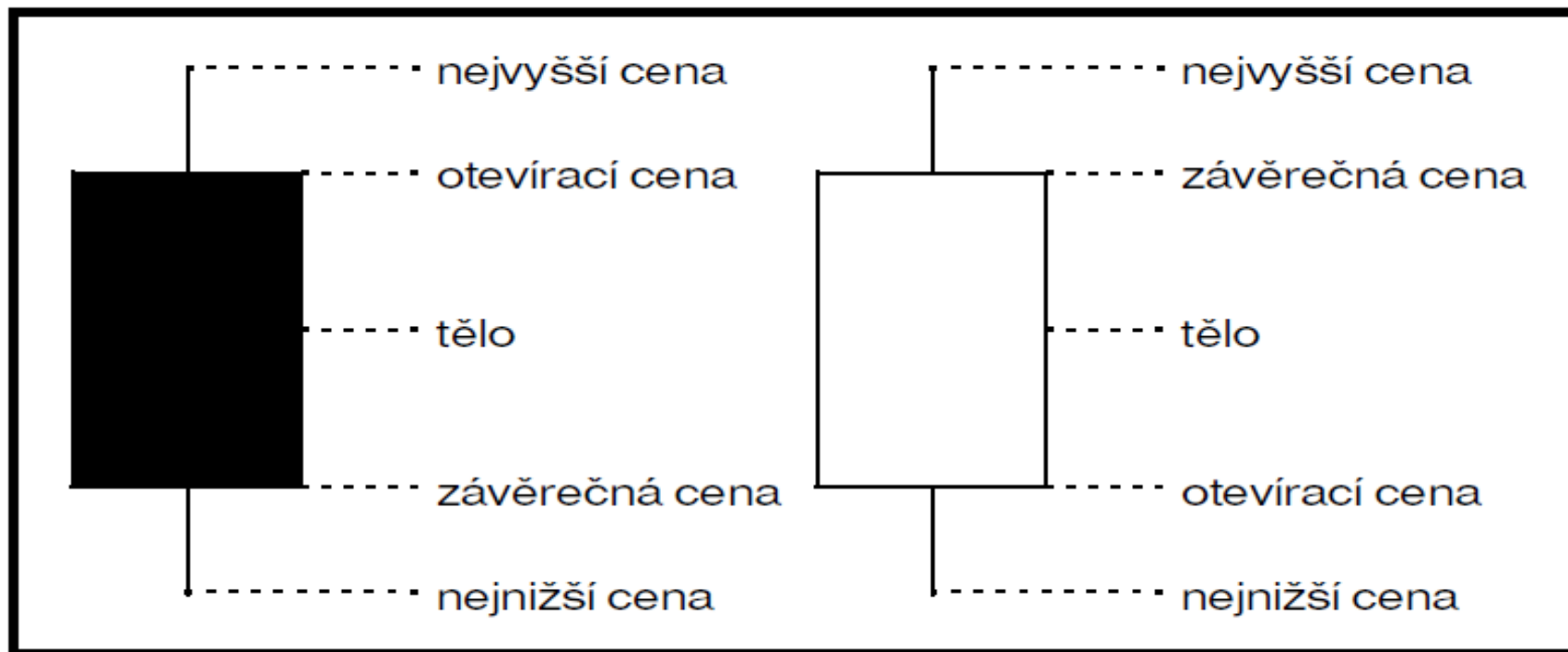
- Grafické metody – hledají opakující se formace, které vznikají na grafech ceny nebo objemu akcie.
- Technické indikátory – Indikátor je funkce času, vektoru parametrů, historických cen a objemů, která konkrétním hodnotám přiřazuje vektor reálných čísel.

Grafické metody

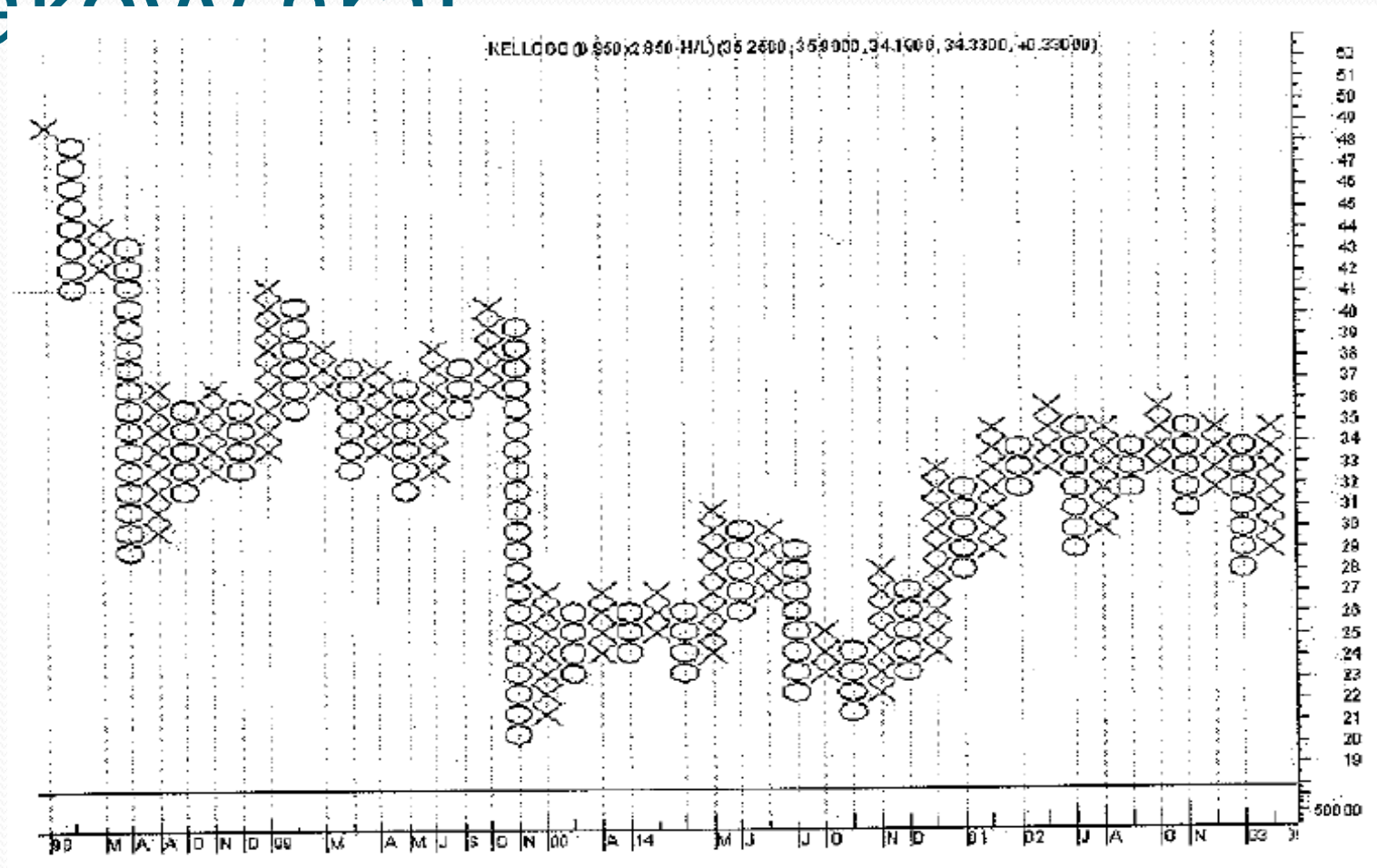
- Grafy – pomocné nástroje technické analýzy
 - Čárový graf
 - Úsečkový graf
 - Graf typu svíce
 - Graf objemu obchodů
 - Znakový graf (Point & Figure)

Grafický znak typu svíce

(Japonské svíčky)



Znakový graf



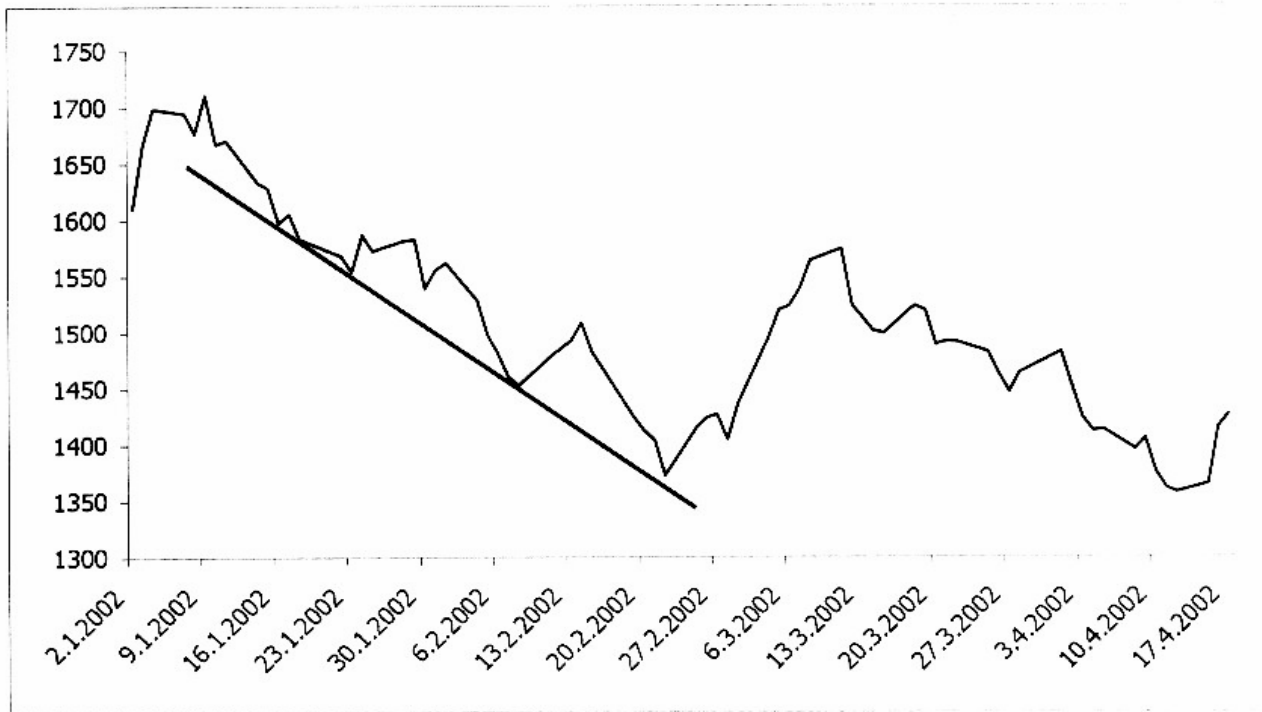
Grafické metody a formace

- Hranice podpory (Support Level) a hranice odporu (Resistance Level)
- Konsolidační formace (signalizují pokračování původního trendu po jeho dočasném přerušení) – trojúhelníky, vlajky, praporky a klíny, atd.
- Reverzní formace (signalizují změnu trendu) – hlava a ramena, vrcholy, dna, atd.
- Trendové kanály
- Mezery

Hranice podpory

- Podpora je taková úroveň ceny akcie, při které je poptávka tak silná, že zastaví pokles ceny.
- Linie podpory znázorňuje hladinu, od které by se měl kurz cenného papíru odrazit směrem vzhůru.
- Pokud kurz linií podpory propadne a vzroste přitom objem, je to známka změny trendu. Prolomená linie podpory se pak stává linií odporu.

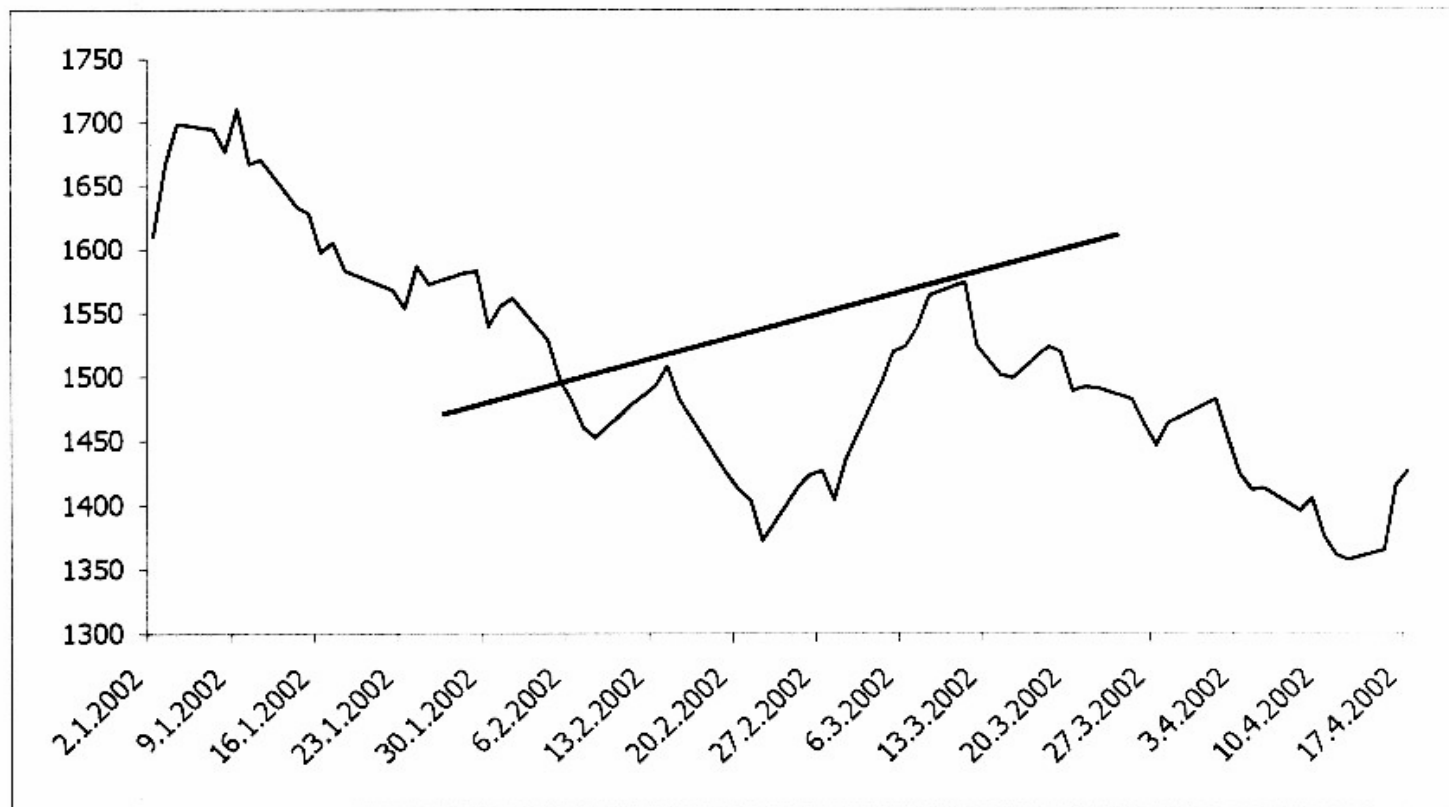
Hranice podpory



Hranice odporu

- Odpor je úroveň ceny akcie, při které je nabídka taková, že zastaví růst ceny.
- Linie odporu znázorňuje hladinu, od které by se měl kurz cenného papíru odrazit směrem dolů.
- Pokud je linie odporu prolomena za rostoucího objemu, je to známka změny trendu a linie odporu se obvykle mění v linii podpory.

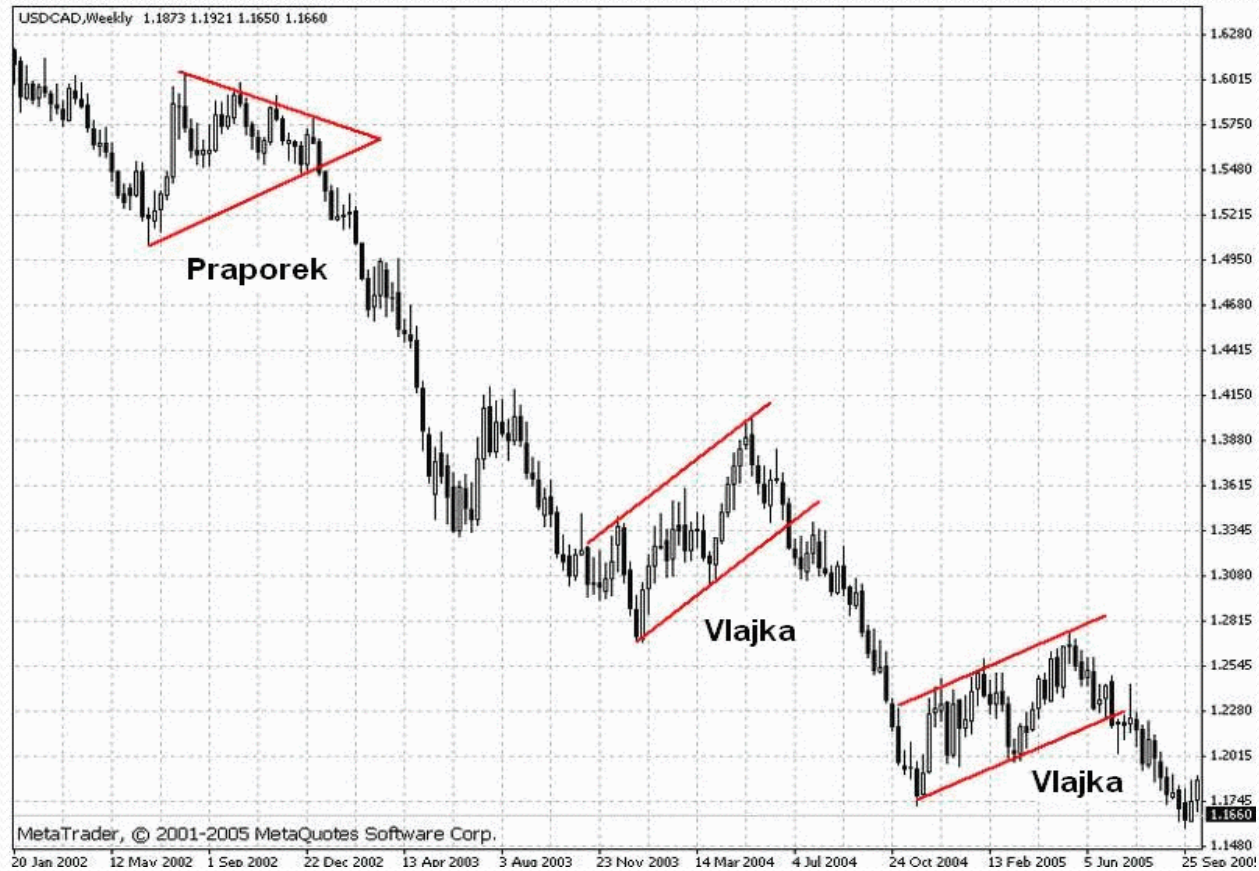
Linie odporu



Trojúhelník

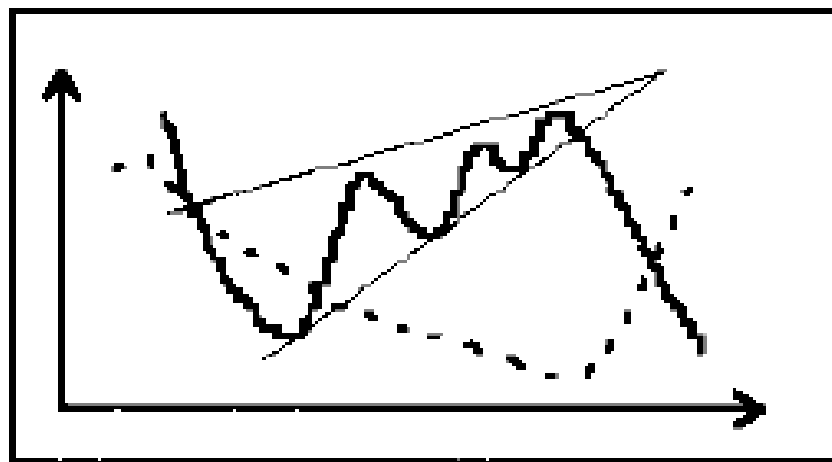


Vlajka a praporek

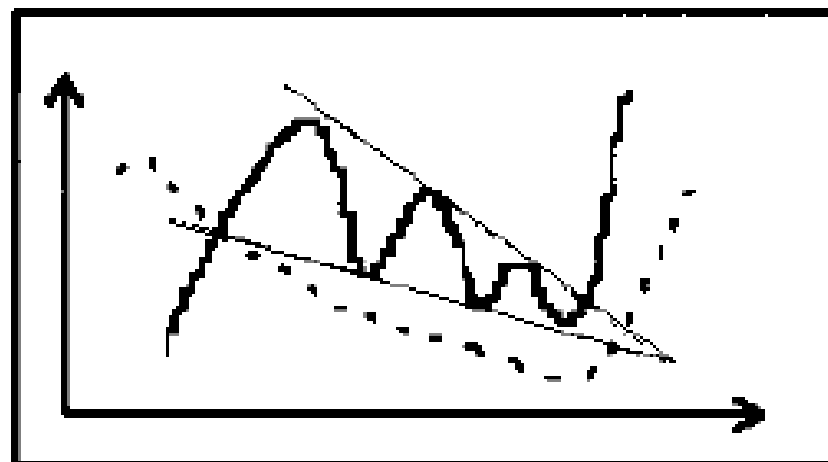


Klíny

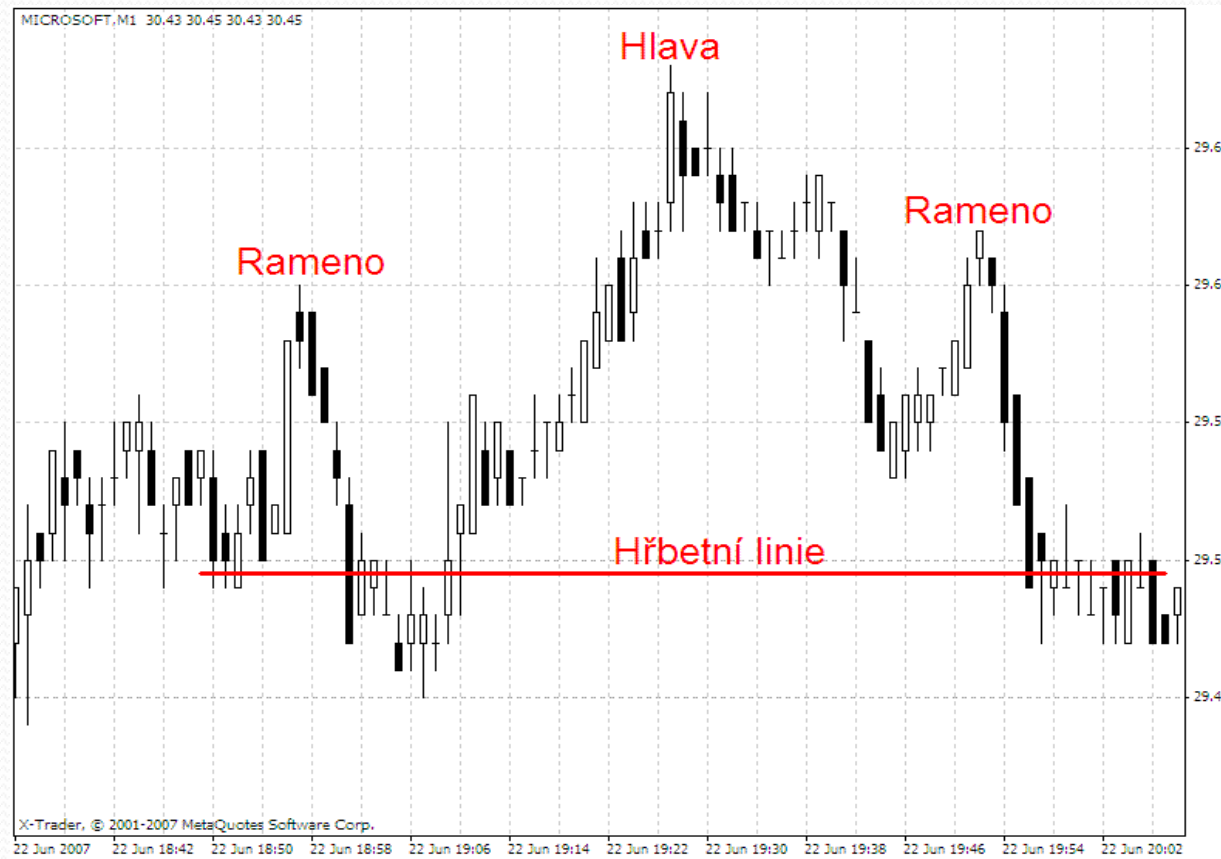
vzestupný klín



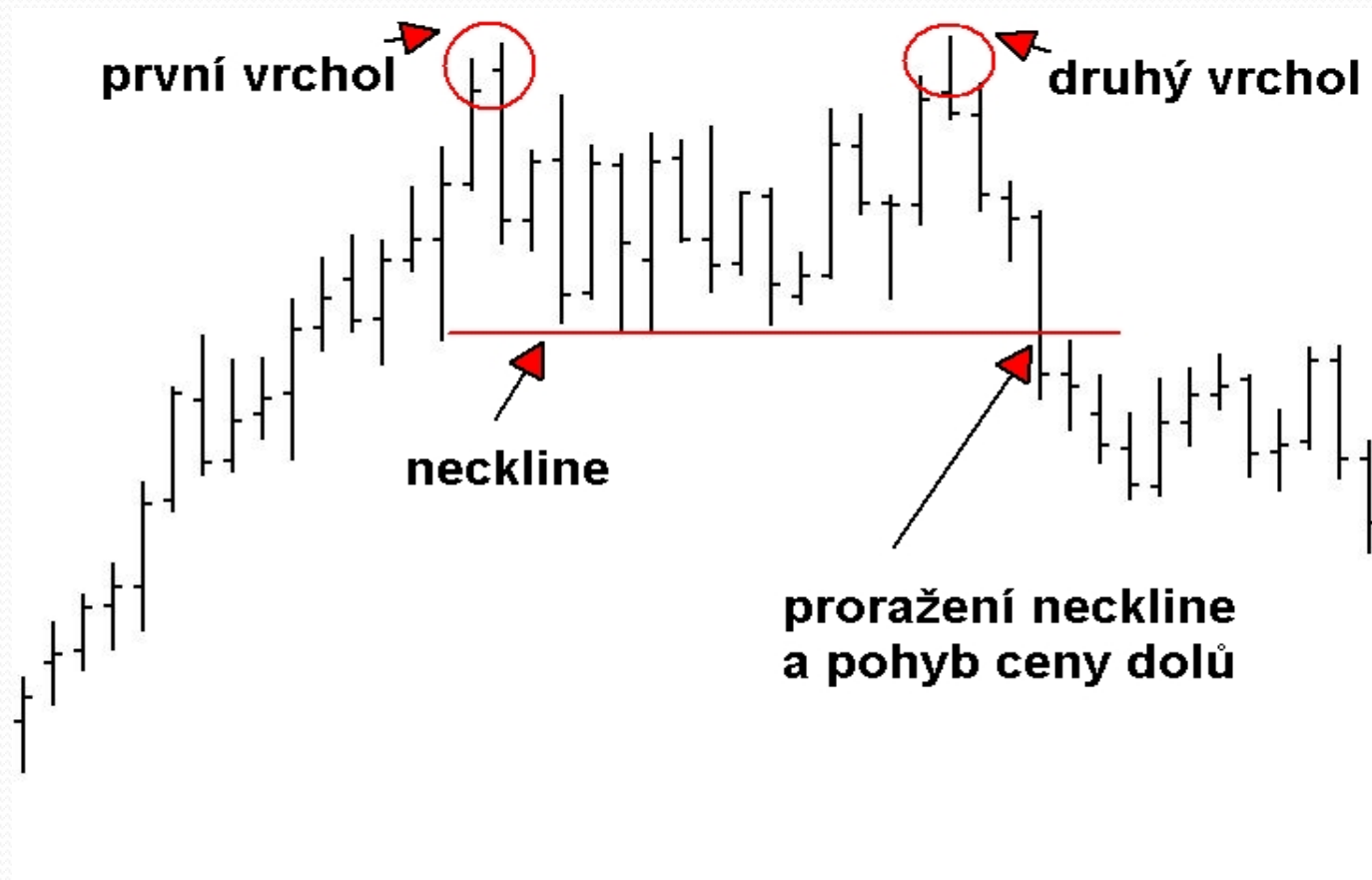
sestupný klín



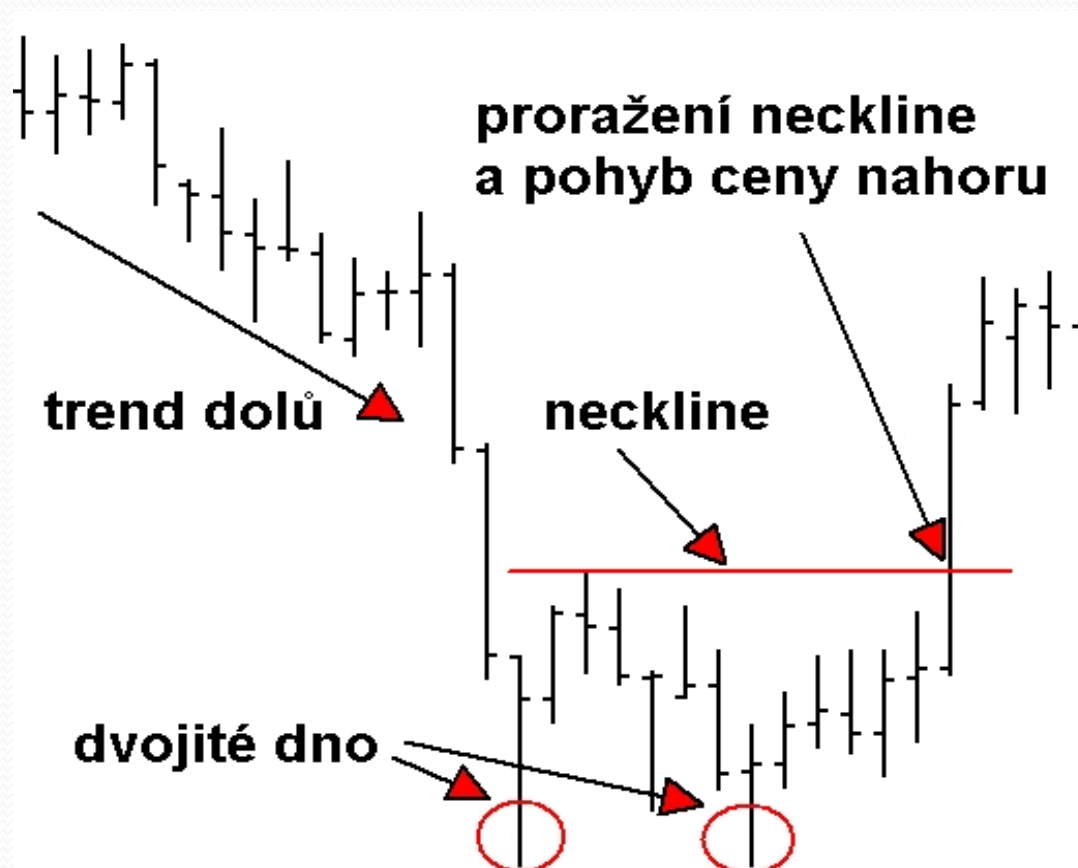
Hlava a ramena



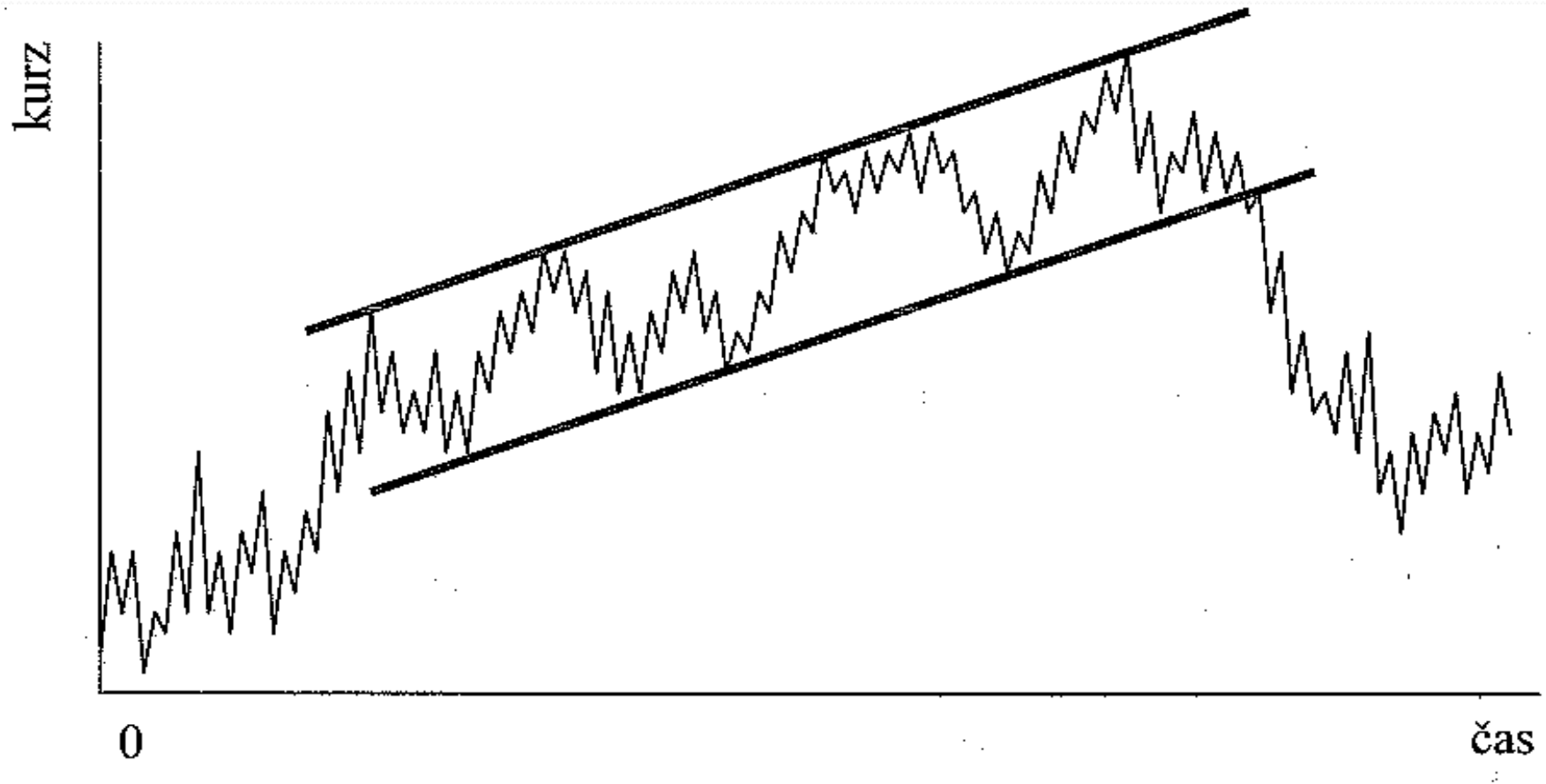
Dvojitý vrchol



Dvojité dno



Trendový kanál



Mezery I.



Mezery II.



Mezery III.



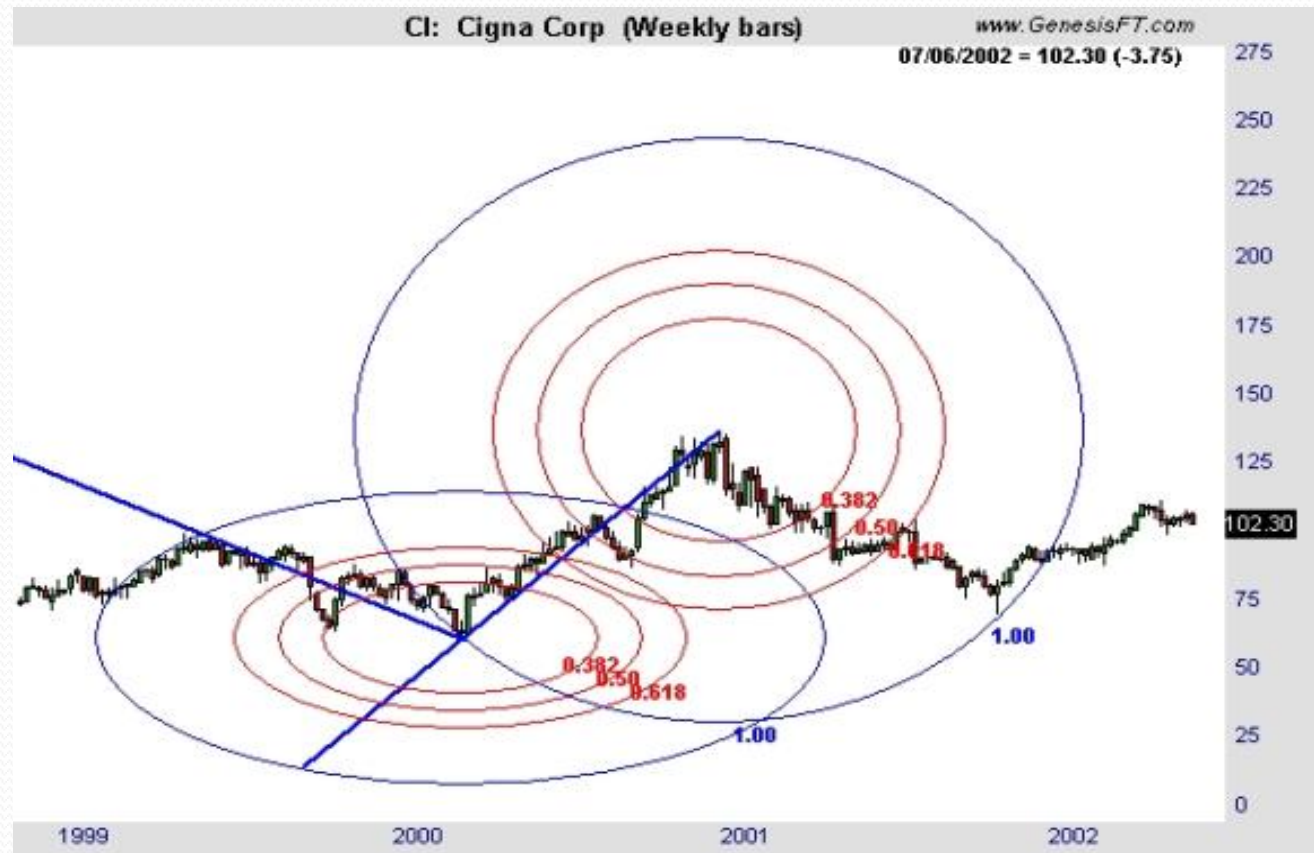
Mezery IV.



Fibonacciho studie

- Fibonacciho řada se skládá z členů, kde každý následující člen je roven součtu dvou předchozích: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...
- Následující člen je vždy přibližně 1,618 násobek předcházejícího a zároveň 0,618 násobek členu následujícího.
- Fibonacciho oblouky – zakreslení trendové linie mezi dva extrémní body a dále zobrazení tří oblouků se středem v druhém extrému o poloměrech 38,2%, 50,0% a 61,8% délky trendové linie.
- Cílem je najít úrovně podpory a odporu v blízkosti Fibonacciho oblouků.
- Používají se i Fibonacciho vějíře, hladiny návratu a časové zóny jako svislé linie zobrazené v intervalech rovnajících se jednotlivým hodnotám Fibonacciho čísel.

Fibonacciho oblouky



Technické indikátory

- Klouzavé průměry a metody na nich založené
- Oscilátory
- Objemové indikátory
- Sentiment indikátory
- Indikátory šíře trhu

Klouzavé průměry a metody na nich založené

- „trend-following metody“ – svými signály a doporučeními zpravidla následují trend.
- Nejlépe fungují v dobře trendujících trzích.
- Nejčastějším vyhodnocováním signálů je sledování situace, kdy se indikátor protne s cenou.
- Protne-li indikátor cenu zezdola nahoru – signál k nákupu.
- Protne-li indikátor cenu shora dolů – prodejní signál.

Klouzavé průměry a metody na nich založené

- Druhy klouzavých průměrů se liší podle váhy přiřazované údajům různého stáří:
 - Jednoduchý
 - Vážený
 - Exponenciální
 - Trojúhelníkový
 - Proměnlivý
- Metody založené na klouzavých průměrech:
 - MACD
 - Obálky
 - Bollingerovy pásy
 - Procentní pásy
 - Klouzavá regrese

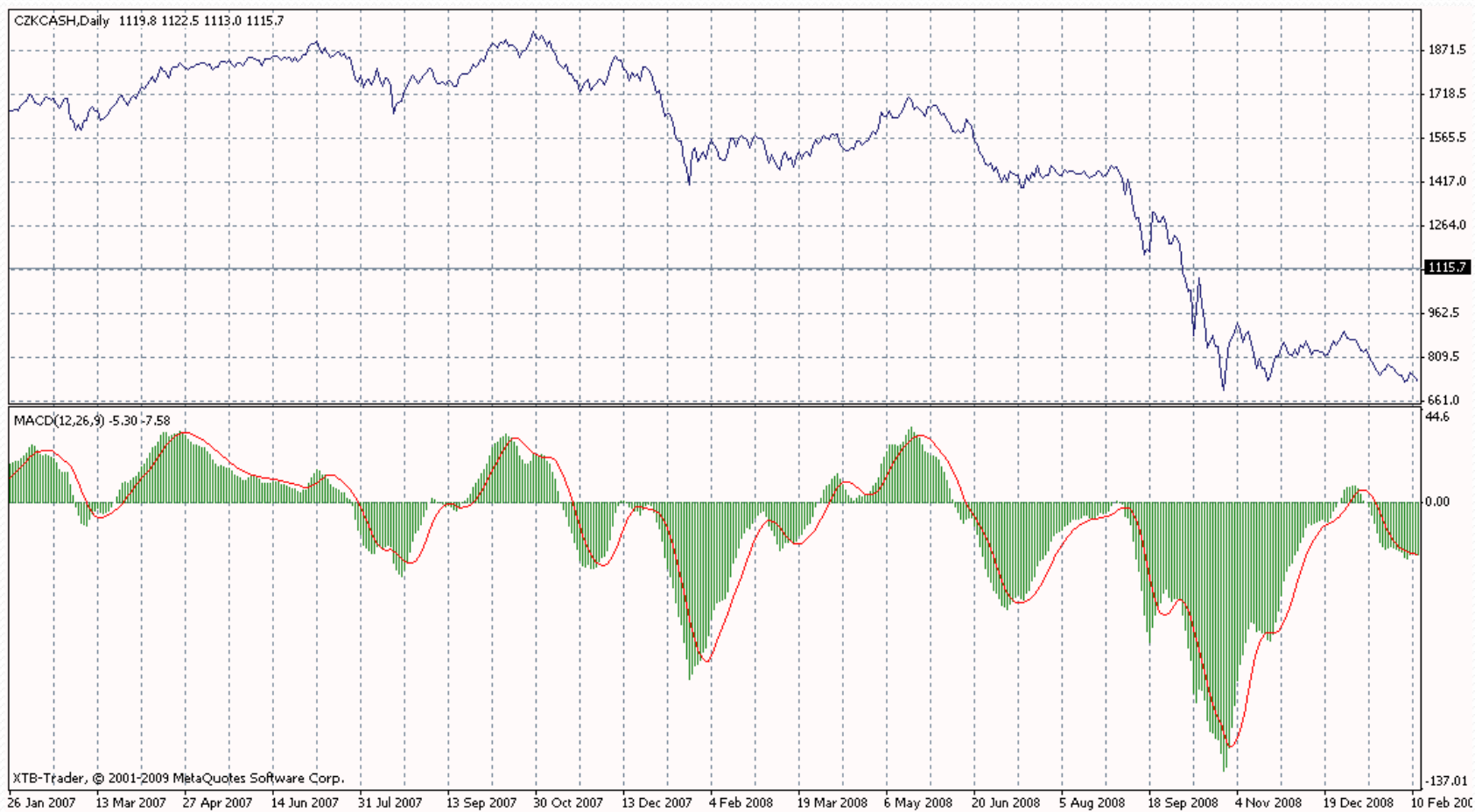
Jednoduchý klouzavý průměr



MACD

- Moving Average Convergence Divergence
- je tvořen dvěma křivkami. První křivku dostaneme po odečtení dlouhodobého exponenciálního klouzavého průměru od krátkodobého exponenciálního klouzavého průměru a označujeme ji jako MACD. Druhou, nebo-li signální křivku získáme vyhlazením MACD pomocí dalšího exponenciálního klouzavého průměru.

MACD



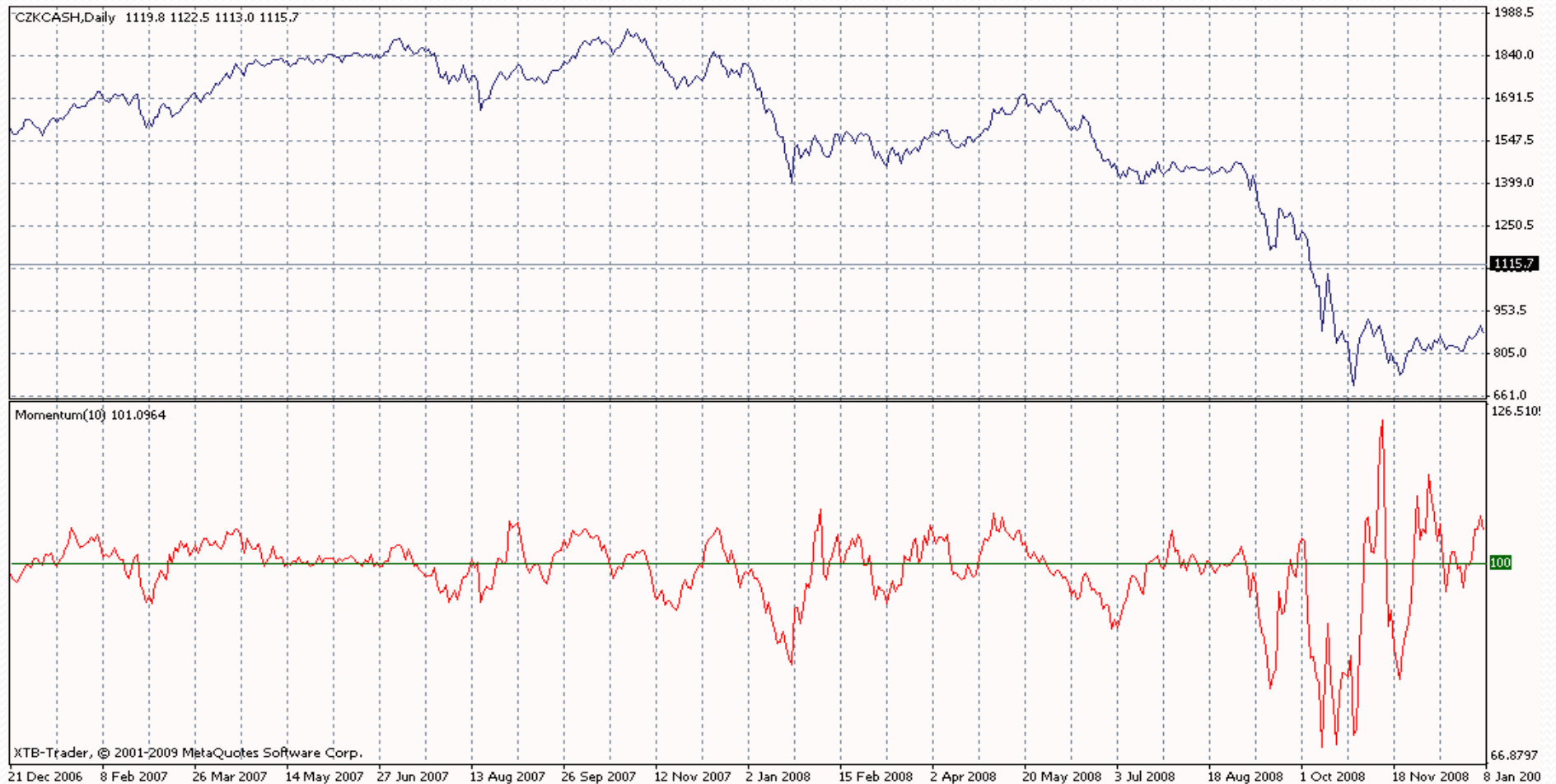
Oscilátory

- Hodnota kolísá zpravidla buď kolem nějaké úrovně nebo v rámci pásma.
 - Momentum
 - Price Rate of Change
 - Moving Average Spread (MAS)
 - Cenový oscilátor (Price Oscillator)
 - Trix
 - Index relativní síly (RSI)
 - Stochastik

Momentum

- Zjišťuje velikost změny kurzu za určité období, čímž měří zrychlení nebo zpomalení trendu.
- Hodnoty indikátoru se pohybují kolem oscilační linie 0 v případě absolutního Momenta nebo kolem oscilační linie 1 (popř. 100) v případě relativního Momenta.
- Protne-li oscilační linii zezdola nahoru – signál k nákupu.
- Protne-li oscilační linii seshora dolů – signál k prodeji.
- Na silně trendujícím trhu může vysílat ukvapené signály.

Momentum

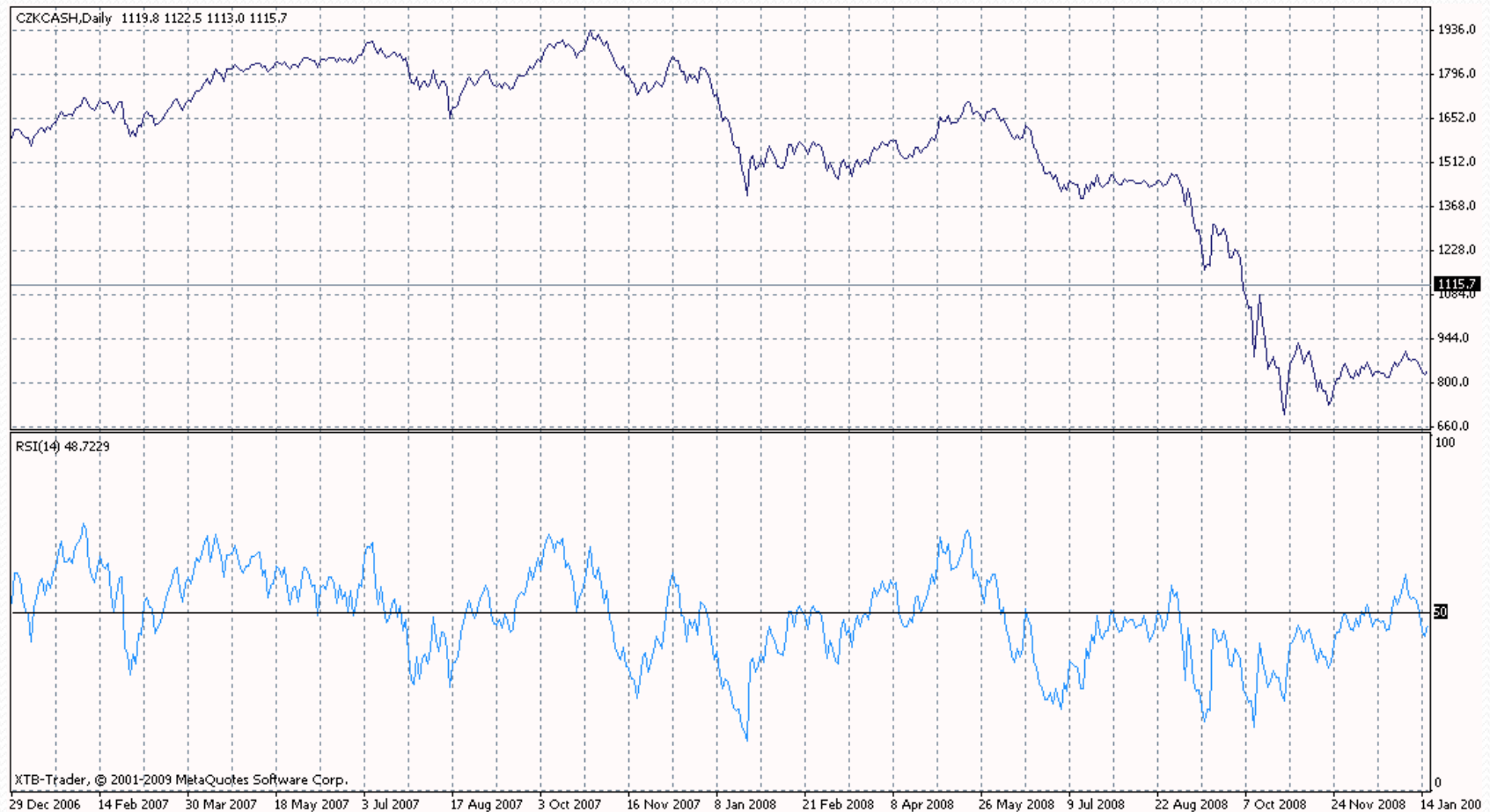


Index relativní síly (RSI)

$$RSI = 100 - \left(\frac{100}{1 + RS} \right)$$

- kde RS je podíl průměrných kladných změn v kurzu a průměrných záporných změn v kurzu během stanovené časové periody.
- RSI vyjadřuje vnitřní sílu jednotlivého cenného papíru.
- Hodnoty RSI se pohybují v intervalu 0 až 100.
- Dá se dobře využít k analýze překoupeného a přeprodaného trhu.

Index relativní síly (RSI)



Objemové indikátory

- Pracují s údaji o objemech obchodů, které jsou doplňovány údaji o vývoji kurzů.
- Pokud objem obchodů roste, značí to větší aktivitu investorů. Při upadající aktivitě na trhu je málo obchodníků ochotných za tuto cenu obchodovat, tudíž můžeme očekávat změnu trendu.
- Využití především na trzích s malou likviditou.

Objemové indikátory

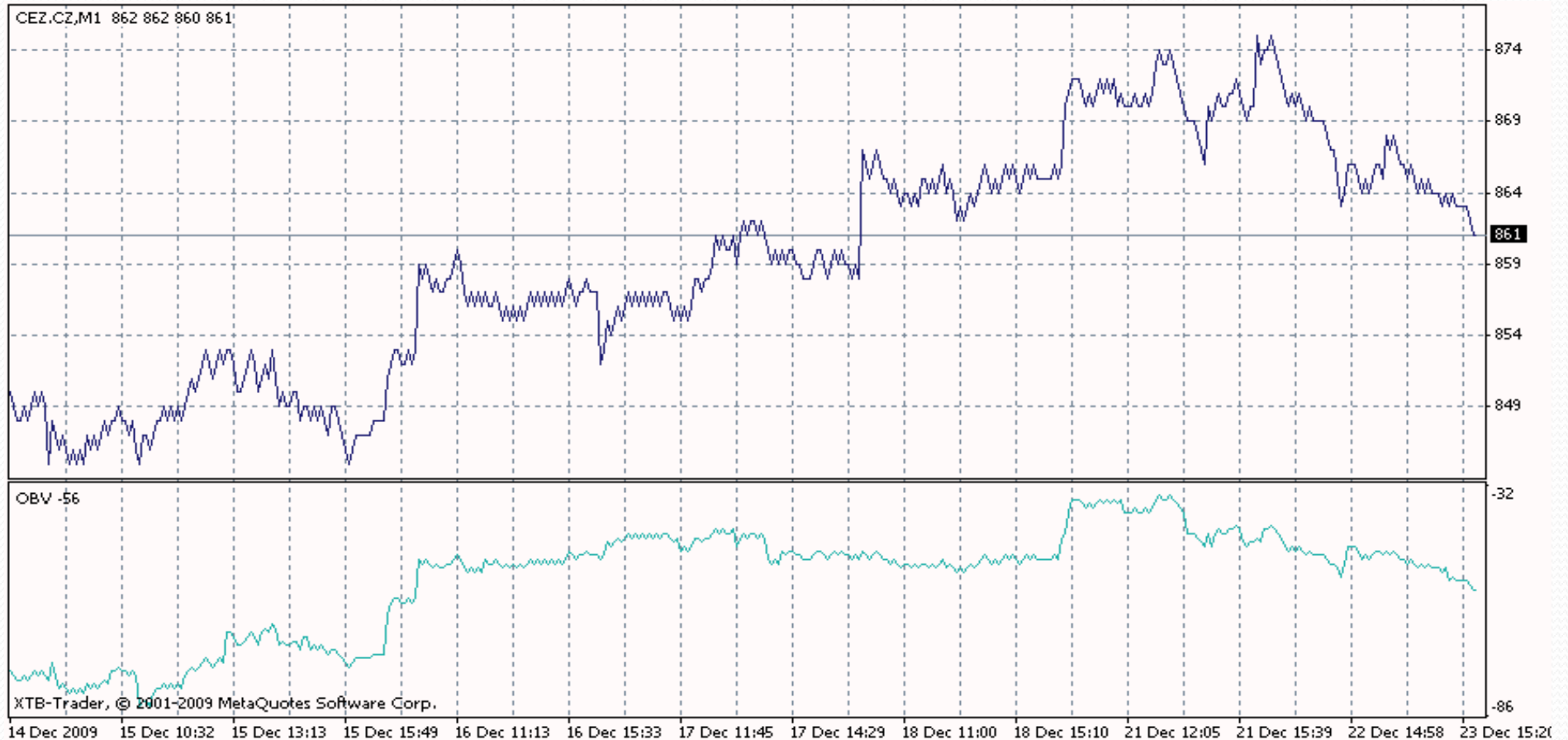
- On Balance Volume (Bilance objemu)
- Price and Volume Trend (PVT)
- Volume Rate-Of-Change (ROC)
- Volume Oscillator (Oscilátor objemu)
- Indexy PVI a NVI (Volume indexes)
- Volume Accumulation/ Distribution Indicator (AD)
- Chaikinův oscilátor
- Money Flow Index (MFI)

On Balance Volume

$$OBV_t = \sum_{p_t > p_{t-1}} v_t - \sum_{p_t < p_{t-1}} v_t$$

- kde p je kurz akcie a v je objem obchodů.
- Vychází z předpokladu, že na trhu obchodují dva typy investorů – smart money (profesionální investoři) a general public.
- Nákupní signál – indikátor začne stoupat, zatímco cena klesá.
- Prodejní signál – indikátor začne klesat, zatímco cena roste.
- Indikátor, který předbíhá trend.

On Balance Volume



Sentiment indikátory

- Mají blízko k psychologické analýze.
- Předmětem jejich zkoumání jsou nálady, očekávání a mínění investorů.
- Investoři jsou ovládáni optimismem či pesimismem a podle toho, která nálada na trhu převládá, kurz roste nebo klesá.
- Podle výkladu se dělí na:
 - Anticyklické
 - Cyklické

Anticyklické sentiment indikátory

- Snaží se zachytit chování široké investorské veřejnosti, která své obchody většinou uzavírá v nevhodné tržní situaci a se zpožděním.
- Proto by investor měl jednat opačně, než signalizuje anticyklický indikátor.
 - Odd-lot Theory
 - Short Sales Ratio
 - Doporučení investičních poradců
 - Put/Call Ratio

Cyklické sentiment indikátory

- Snaží se zmapovat chování profesionálních investorů, kteří představují obzor úspěšného investorského chování.
- Doporučení – chovat se v souladu s indikátory.
 - Barron's Confidence index (BCI) neboli Barronův index důvěry
 - Struktura portfolia fondů

Indikátory šíře trhu

- Sledují kvantitativní pohyb celého trhu, a to na základě údajů o počtu akcií, které klesly a počtu akcií, které stouply.
- Snaha zmapovat výkonnost vybrané akcie, odvětví či jistého tržního segmentu – vždy však k relaci k jinému odvětví či segmentu.
- Dobré pro předpověď pravděpodobné extrémní změny trendu, kterou odhalí s dostatečným předstihem.
- Kvůli svému pohledu na celkový trh nejsou určeny pro analyzování jednotlivých akcií.

Indikátory šíře trhu

- Advance/ Decline Line (A/D)
- Advance-Decline-Ratio
- Advance-All-Ratio
- McClellanův Sumation index (MSI)
- McClellanův oscilátor
- Relativní síla

Advance/ Decline Line (A/D)

$$ADL_t = ADL_{t-1} + (AI - DI)$$

- vyjadřuje číselně kumulativní rozdíl mezi počtem emisí akcií, jejichž kurz stoupá a klesá na dané množině akcií (báze indexu) v čase.
- reaguje na změnu podmínek dříve než akciový index.
- Tržní index roste, zatímco A/D Line již klesá – signál k prodeji.
- Tržní index klesá, zatímco A/D Line již roste – signál k nákupu.

Advance/ Decline Line (A/D)



Advance-Decline-Ratio (ADR)

$$ADR_t = ADR_{t-1} + \left(\frac{AI}{DI} \right)$$

- vyjadřuje číselně kumulativní podíl mezi počtem emisí akcií, jejichž kurz stoupá a klesá na dané množině akcií (báze indexu) v čase.
- reaguje na změnu podmínek dříve než akciový index.
- Tržní index roste, zatímco A/D Line již klesá – signál k prodeji.
- Tržní index klesá, zatímco A/D Line již roste – signál k nákupu.

11. Oceňování nemovitého majetku



Oceňování majetku představuje soubor činností, kdy je určitému předmětu nebo souboru předmětů přiřazována určitá peněžní hodnota

Účel ocenění

- Převod, přechod, dělení nebo navyšování vlastnictví
- Financování a úvěrování
- Škody na majetku
- Účetnictví
- Daně a poplatky
- Investiční, arbitrážní a tržní poradenství
- Pojišťovnictví

Oceňování majetku v ČR

- Oceňování administrativní ze zákona č. 151/1997 Sb., o oceňování majetku, prováděcí vyhlášky Ministerstva financí
- Oceňování tržní

Administrativní ocenění

- Založeno na přesně definovaných postupech a krocích
- Slouží účelům a potřebám státní správy: daňové účely, ocenění majetku investičních a penzijních fondů, vyvlastnění apod.
- Zajištění spravedlivého ocenění
- Striktně dáno zákonem, není zde žádný prostor pro individuální přístup
- Výsledná cena při řádném dodržení metodiky by měla být jednoznačná a pokud možno jediná

Negativum úředního oceňování

Vzniká cena uměle vytvořená, která se skutečnou objektivní hodnotou majetku přijímanou trhem má jen málo společného!

Tržní oceňování

- Systematický, ale zároveň individuální tvůrčí proces, spočívající v hledání cenotvorných faktorů, v jejich analýze a následném vážení všech vlivů, které na hodnotu věci působí
- Neurčujeme cenu, ale pouze její ODHAD!
- Výběr metodiky ocenění je čistě na odborném a zodpovědném uvážení odhadce nebo soudního znalce

Postup při oceňování

- Zadání – přesná charakteristika předmětu a účelu ocenění, datum, místo, kde se nemovitost nachází, identifikace zadavatele, cena posudku a datum jeho plnění
- Ověření existence nemovitosti
- Provedení místního šetření
- Určení a použití oceňovacích metod
- POSUDEK

Příklad posudku

http://www.mmdrazby.cz/data/auctions/8/znalecky-posudek-varvazov_132670241932.040.pdf

Základní dokumenty potřebné k ocenění nemovitosti

- Výpis z katastru nemovitostí
- Kopie příslušné části katastrální mapy
- Výpisy z pozemkové knihy
- Cenová mapa pozemků - pokud je v dané obci vypracovaná
- Výkresová dokumentace
- Stavební povolení, územní rozhodnutí a projektová dokumentace k němu
- Kupní, nájemní a další převodní smlouvy
- Smlouvy či doklady o správě, službách, pojištění, odpisech, nákladech na opravy a údržbu, daních
- Fyzická i právní břemena vztahující se k nemovitosti, přehled a současný stav úvěrů
- Fotodokumentace
- Výsledky místního ohledání nemovitosti provedeného osobně odhadcem

Základní metody oceňování nemovitého majetku

- Nákladová
- Výnosová
- Porovnávací

- Jejich kombinace

Nákladová metoda

- Vychází z vynaložených nákladů na výrobu či sestavení dané věci
- Založena na fyzických a technických vlastnostech oceňovaného předmětu
- Historicky nejstarší a nejpracnější způsob oceňování
- Kolik by stálo postavení této nemovitosti dnes? (započítává se materiál i práce)
- Opotřebení

Metody založené na nákladovém principu

- Individuální cenová kalkulace
- Podrobný položkový rozpočet
- Použitím technicko-hospodářských ukazatelů
- Podle vyhlášky č. 504/2002

Zjištění věcné hodnoty pomocí THU

- Zjistíme základní tabulkovou cenu ZC z katalogu THU
- Vypočítáme základní upravenou cenu ZCU a obestavený prostor

$$ZCU = ZC \times K_v \times K_{pod} \times K_z \times K_m \times K_d$$

$$RC = ZCU \times OP$$

$$VH = RC - OPOTŘ$$

Výnosová metoda

- Ekonomický pohled na nemovitost
- Vlastníkovi nemovitosti patří i veškeré požitky z vlastnictví nemovitosti
- vychází z hrubého nájemného, které je potřeba dále snížit o náklady na jeho dosažení
- Čisté příjmy se diskontují na současnou hodnotu kapitalizační mírou

Věčná renta

- Konstantní výnosy po dlouhou dobu

$$C_v = \frac{Z}{i}$$

Dočasná renta

- V určitém časovém období lze předpokládat totální opotřebení nemovitosti

$$C_v = z \times \left(\frac{q^n - 1}{q^n \times i} \right)$$

Konstantní výnos po určitou dobu, s prodejem na konci

- Je potřeba odhadnout cenu nemovitosti za n let

$$C_v = z \times \left(\frac{q^n - 1}{q^n \times i} \right) + \frac{R}{q^n}$$

Pomocí diskontovaných peněžních toků

- Kalkulováno s příjmy a výdaji

$$C_v = \left(\sum_{t=1}^{n-1} \frac{ZD_t}{q^{t-1}} \right) + \frac{\text{zbytek v roce } n}{q^n}$$

Míra kapitalizace

- Významně ovlivňuje výslednou hodnotu nemovitosti
- Výše úroku je přímo úměrná riziku, které sebou přináší daná investice
- Její určení závisí pouze na úvaze odhadce či soudního znalce

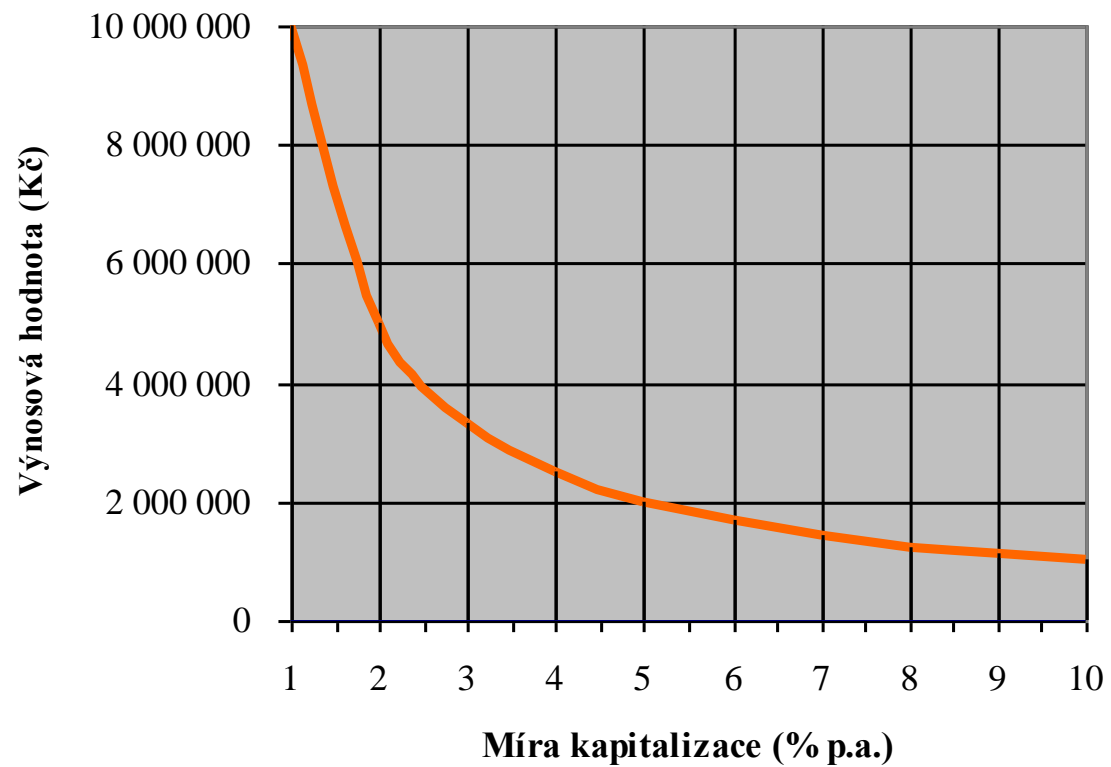
Jak určit míru kapitalizace

- Odvozením od úrokové sazby v bankovních institucích
- Zjištěním z již realizovaných prodejů staveb, které jsou následně pronajímány
- Použitím míry kapitalizace podle cenového předpisu

Míra kapitalizace podle cenového předpisu

Číslo položky	Název položky	Míra kapitalizace %
1	Nemovitosti pro výrobu a garážování	10
2	Nemovitosti pro obchod a administrativu	7
3	Nemovitosti pro hromadné ubytování a stravování	8
4	Nemovitosti pro dopravu, spoje a školství	9
5	Nemovitosti pro kulturu	8
6	Nemovitosti pro zdravotnictví	8
7	Nemovitosti pro zemědělství	7
8	Nemovitosti pro skladování	6
9	Bytové domy	5
10	Ostatní nemovitosti	8
11	Majetková práva	12

Závislost výnosové hodnoty na použité míře kapitalizace



Příklad

Zjistěte výnosovou hodnotu obytného domu

- 6 bytů: 5x byt 1+1 a 1x byt 2+1
- Dobrý technický stav, postaven v roce 1940
- Pozemek pod domem není ve vlastnictví majitele
- Byt 1+1 obývá chronický neplatič, jeden byt 1+1 je volný, ostatní byty jsou pronajímány na základě nájemní smlouvy na dobu neurčitou za regulované nájemné
- Rohový dům, který se nachází v Ostravě Přívozu na ulici Jílová (jedná se o méně atraktivní lokalitu)
- Dům má 3NP a 1PP, sedlovou střechu
- Obestavěný prostor činí 1 991m³, základní cena je 3870Kč/m³.
- Míra kapitalizace činí 5%.

Identifikace výnosů

Jednotka č.	Počet pokojů	Kategorie	Cena za m2	Výměra	Nájem za vyb. bytu (Kč)	Celkem nájem v Kč	Poznámka
1	1+1	II	18,55	49,50	25,-	918,-	
2	1+1	-	50,00*	45,50	-	2275	Volný byt
3	1+1	II	18,55	48,00	50,-	890,-	
4	1+1	II	18,55	44,00	-	-	Neplatič
5	1+1	II	18,55	42,34	45,-	785,-	
6	2+1	II	18,55	63,44	150,-	1177,-	
Celkem měsíční nájem					270,-	6045,-	
Celkem roční nájem z provozu domu					75780,-		

Identifikace nákladů

Položka	Náklad roční	Poznámka
Daň z nemovitostí	1 764,-	
Pojištění stavby	4 506,-	
Provoz a údržba	38 525,-	
Náklady na pronájem pozemku	4 500,-	
Náklady na správu nemovitostí	0,-	neuvažujeme
Odpisy	0,-	neuvažujeme
Celkem	49 295,-	

Výpočet výnosové hodnoty

Položka	Míra kapitalizace v %	Výnosová hodnota
Diskontní sazba	1,25	1 958 800,-Kč
Běžný úrok v bance	2,00	1 324 250,-Kč
Porovnávací způsob č.m.	5,00	529 700,-Kč
Porovnávací způsob h.m.	8,00	947 250,-Kč
Cenový předpis	4,00	757 800,-Kč

Porovnávací metoda

- nejpoužívanější oceňovací princip
- Setkáváme se s ní v každodenním životě
- Nemovitost je výrazně heterogenní věcí
- Předpoklad: shodné fyzické vlastnosti a stejná kombinace vlastnických práv
- Založena na porovnání s již prodanými nemovitostmi - prodány za poslední rok
- nejspolehlivější a nejobektivnější nástroj sloužící k určení tržní hodnoty
- nutné mít k dispozici databázi s dostatečným počtem nemovitostí, u nichž jsou známy základní technické parametry a také cena, za kterou se obchod realizoval

Metody založené na principu porovnání

- Odbornou rozvahou
- Pomocí koeficientu prodejnosti
- Metoda přímého porovnání
- Metoda nepřímého porovnání

Příklad

Zjistěte porovnávací hodnotu bytu

- lokalita: předměstí
- 3+1, výměra je 60m², balkon, cihla
- průměrný technický stav
- osobní vlastnictví
- Byt není zatížen žádnými zástavními ani jinými právy, které by mohly omezovat nové vlastníky v nakládání s bytem

Výpočet porovnávací hodnoty odbornou rozvahou

Číslo bytu	Typ vl.	Pramen	Lokalita bytu	Technický popis	Cena nabídková	Koeficient	Upravená Cena (Kč)
1	<u>osv</u>	inzerce	Centrum	2+1, 65m ² , balkon, panel	650 000	0,90	585 000
2	<u>dr</u>	inzerce	Centrum	1+1, 35m ² , panel	550 000	0,90 * 1,15	569 000
3	id	kupní smlouva	Okrajová oblast	2+1, 55m ² , balkon, cihla	640 000	1,00	640 000
4	<u>osv</u>	inzerce	Předměstí (navazující centrum)	3+1, 70m ² , balkon, panel	900 000	0,90	810 000
5	<u>osv</u>	inzerce	Úpadková oblast	3+1, 100m ² , balkon, cihla	450 000	0,90	405 000
Průměrná hodnota							601 800

Metoda přímého porovnání

Stanovení koeficientů:

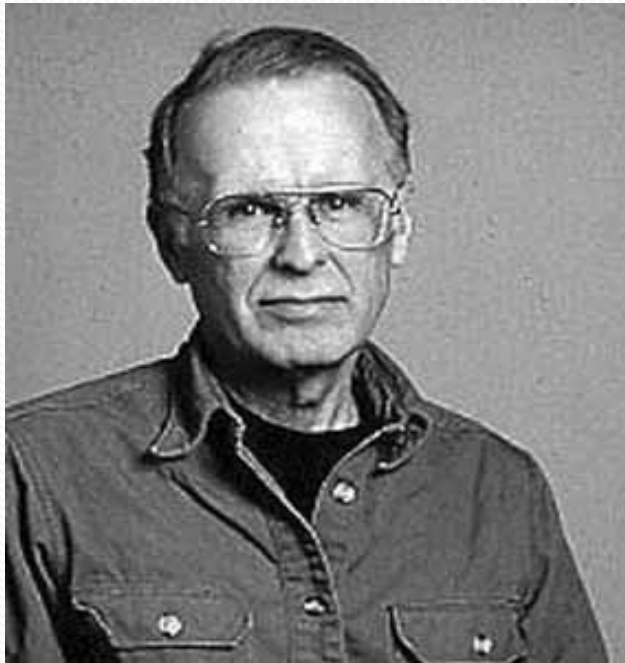
- koeficient polohy K_p
- Koeficient velikosti bytu K_v
- Koeficient konstrukce K_k
- Koeficient balkonu K_b

Výpočet porovnávací hodnoty přímým porovnáním

Byt	Cena	<u>Koef.</u> na pramen ceny	<u>Kor.</u> Vlastnictví	<u>Kor.</u> Cena	<u>Kp</u>	<u>Kv</u>	<u>Kk</u>	Kb	I	Cena (tis. Kč)
1	650	0,90	1,00	585	1,1	1,035	0,9	1,0	1,02465	570
2	550	0,90	1,15	570	1,1	0,825	0,9	0,95	0,7759	734
3	640	1,00	1,05	672	0,9	0,965	1,0	1,0	0,8685	773
4	900	0,90	1,00	810	1,0	1,07	0,9	1,0	0,963	841
5	450	0,90	1,00	405	0,5	1,28	1,0	1,0	0,64	632
Průměr										710

12. Black-Scholesův model, jištění, citlivosti

BS model – otcové myšlenky



Fischer Black (1938-1995)



Myron Scholes (1941-)

BS model - pojmy

= model pro oceňování opcí

- S_T ... cena podkladového aktiva v čase T
- S_0 ... cena podkladového aktiva v čase 0 (spotová)
- K ... realizační cena
- σ ... volatilita
- T ... doba expirace
- r ... bezriziková úroková míra
- c ... cena evropské call opce
- p ... cena evropské put opce

BS model - předpoklady

- neexistence transakčních nákladů
- neměnné zdanění opcí
- úroková míra stejná pro půjčku a výpůjčku
- trhy fungují nepřetržitě (odstraňují arbitráž okamžitě)
- ceny akcií jsou spojitou náhodnou veličinou
- akcie nenesou dividendy
- opce je evropského typu
- akcie lze prodávat i na krátko
- můžeme obchodovat i s částí akcie

BS model - tvar

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

- kde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

- N je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení

Citlivost - Greeks

- Δ ... delta
- θ ... theta
- Γ ... gamma
- V ... vega
- ρ ... rho

Delta a delta-neutrální portfolio

- Delta vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně ceny akcie:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

- Delta-neutrální portfolio: $\Delta = 0$
- Výhoda: Při malých změnách ceny akcie se hodnota celého portfolia nemění.
- Platí: $\Delta c = N(d_1)$, $\Delta p = N(d_1) - 1$, $\Delta_{\text{port.}} = \text{suma}(n_i \Delta_i)$,
 $\Delta(\text{akcie})=1$
- Pozor na vysoké transakční náklady.

Theta

- Theta vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně času:

$$\theta = \frac{\partial c}{\partial T}$$

- Proti času nemá smysl se jistit – víme, jak se mění.
- θ v praxi náhražka za Γ
- θc získáme derivací podle T

Gamma a gamma-neutrální portfolio

- Gamma vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně delta:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

- Čím je Γ větší, tím častěji musíme rebalancovat portfolio.
- Γ -neutrální portfolio: $\Gamma = 0$
- Výhoda: I při velkých změnách ceny akcie se hodnota celého portfolia nemění.
- Platí: $\Gamma(\text{akcie})=0$, Γc dostaneme druhou derivací podle S

Vega

- Vega vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně volatility:

$$v = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

- Platí: V (akcie) = 0
- Obvykle pokud $\Gamma = 0 \leftrightarrow V \neq 0$
- Pro $\Gamma = 0 \wedge V = 0$ potřebuje dva různé deriváty na stejné podkladové aktivum

Rho

- Rho vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně úrokové míry:

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r}$$

- ρc získáme derivací podle r

Jištění – možnosti investora

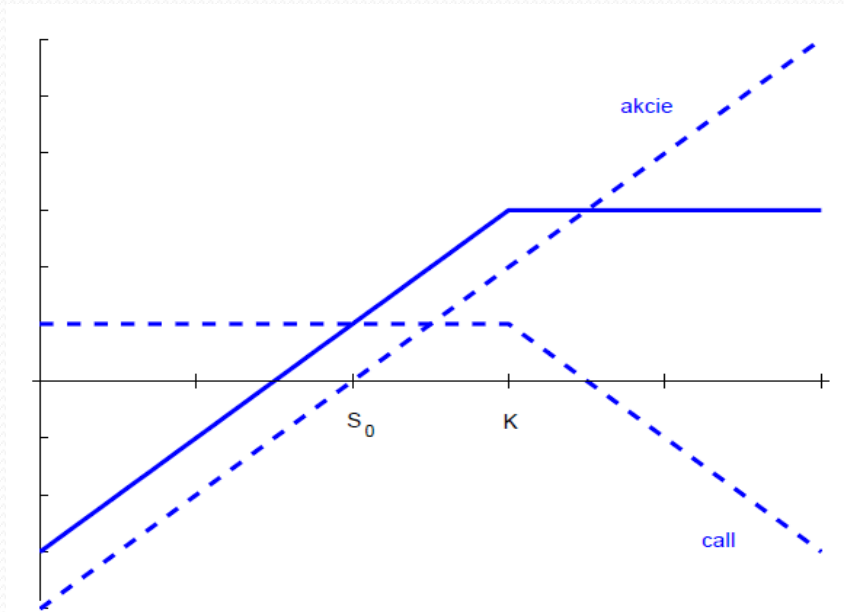
- nicnedělání (naked position)
- prodej akcií

Jištění pomocí opcí:

- krytý call
- ochranný put
- dynamické jištění (delta hedging)

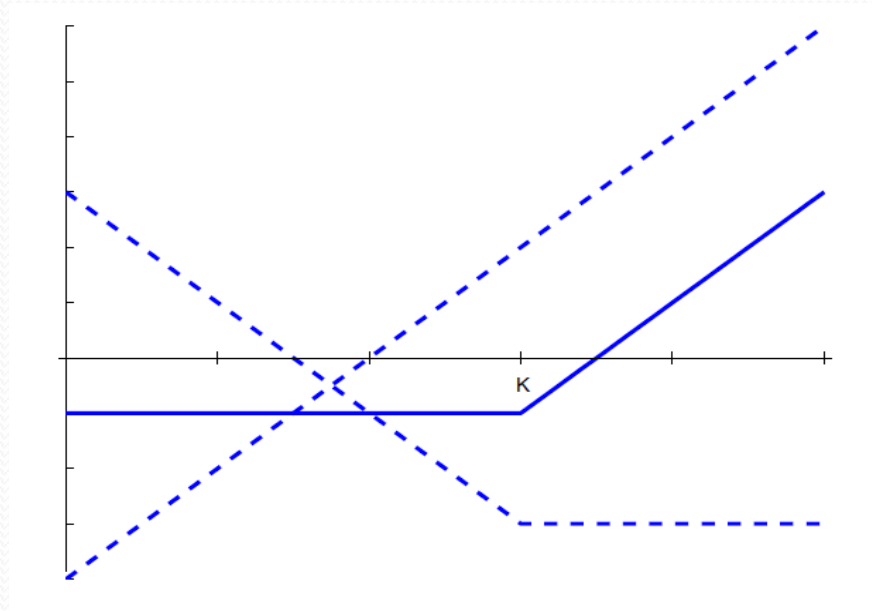
- Jištění = chránění investice v akciích.

Krytý call



- skládá se z short call opce a long akcie
- případná ztráta z akcií je kryta výnosem z opcí

Ochranný put



- skládá se z long put opce a long akcie
- garance minimální hodnoty investice

Dynamické jištění

- utvoříme delta-neutrální portfolio => je imunní vůči malým výkyvům ceny akcie
- za daný časový úsek měníme svou pozici v opcích tak, aby portfolio zůstávalo delta-neutrální
- existuje delta-hedging s call a s put

Příklad

- Vypočítejte cenu evropské call opce pomocí BS vzorce, když znáte:
 - doba expirace 1 rok
 - spotová cena je 2Kč
 - úroková míra 82%,
 - realizační cena je 2Kč
 - volatilita 0,6

- nápověda: $N(1,666)=0,9521$, $N(1,366)=0,9141$, $N(1,066)=0,8569$, $\exp(-0,82)=0,44$
- výsledek $c = 1,15\text{Kč}$

Zdroje

- Hull, J.C. *Options, futures and other derivatives*. 8. vyd. Boston: Pearson, 2012, 847 s. ISBN 9780273759072.
- Ambrož, L. *Oceňování opcí*. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck, 2002, xvi, 313 s. ISBN 8071795313.
- přednášky do MF003

13. Oceňování derivátů, hraniční opce, opce závislé na cestě

Spôsoby oceňování derivátů

Black-Scholesov vzorec a jeho modifikácie

$$c = kS_0N(kd_1) - kXe^{-rT}N(kd_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

c – cena kúpnej opcie

S_0 – cena podkladového aktíva v čas 0

X – realizačná cena

$N()$ – distribučná funkcia normálneho štandardizovaného rozdelenia

k – je 1 pre call opciu a -1 pre put opciu

r – tržná úroková miera

T – doba do expirácie opcie

σ – volatilita podkladového aktíva

Predpoklady:

1. Log-normálne rozdelenie podkladového aktíva
2. Úroková miera sa nemení
3. Nevyplácajú sa dividendy
4. Opcia je európska
5. Žiadne transakčné náklady
6. Nekonečná deliteľnosť podkladového aktíva
7. Obchodovanie je spojité
8. Short-sale je povolený

Spůsoby oceňování derivátů

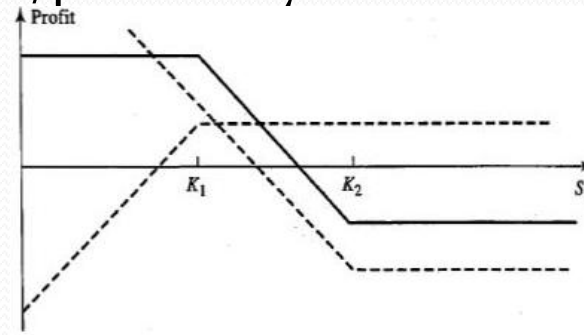
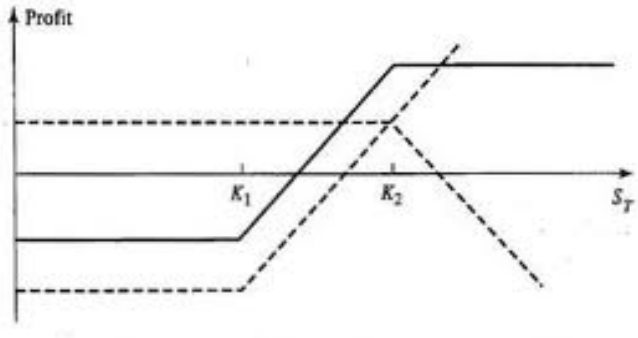
- Risk - neutrálné oceňovanie
- Binomické a trinomické stromy
- 3D binomické a trinomické stromy
 - Spread opcie resp. tam kde sa využívajú 2 procesy súčasne

Spůsoby oceňování derivátů

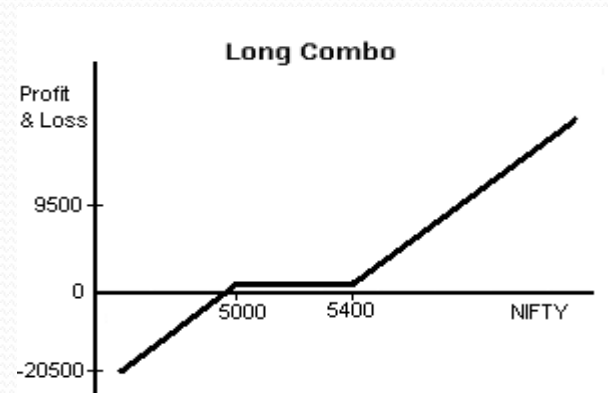
- Simulácia Monte Carlo
 - Určenie strednej hodnoty z určitého počtu náhodných pokusov
 - Vhodná pre path-dependend opcie
 - Opcie s viac podkladovými aktívami
 - Opcie ktoré neboli analyticky ocenené
 - Náchylná na vysoké chyby pri nízkom počte opakovaní

Opční formace

- **Bull a Bear spread** (short a long call/put s rôznými realizačnými cenami)

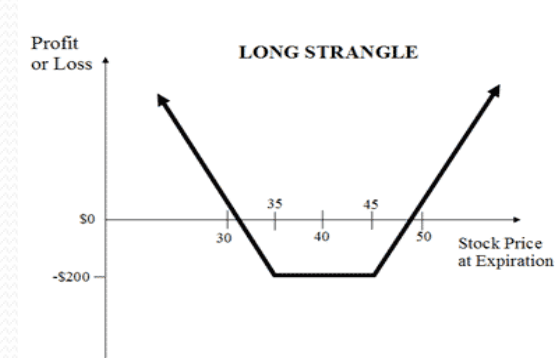
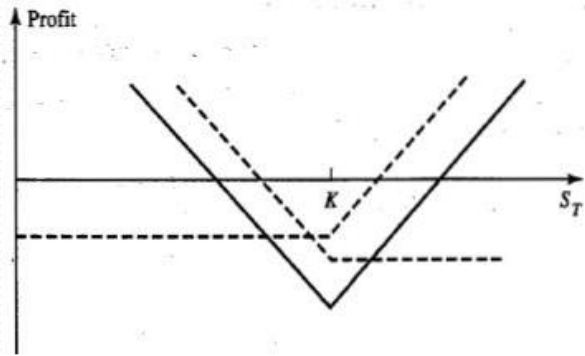


- **Combo** (long OTM call a short OTM put)

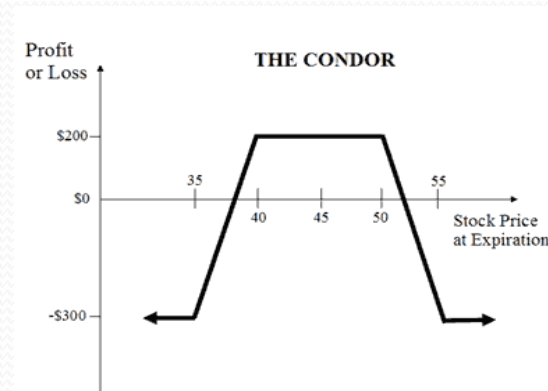
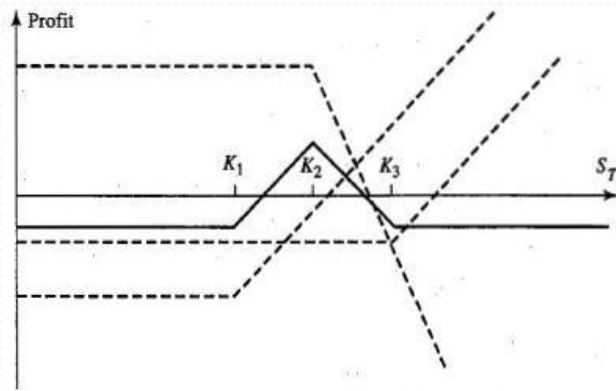


Opční formace

- **Straddle, Strangle** (1 call +1 put)

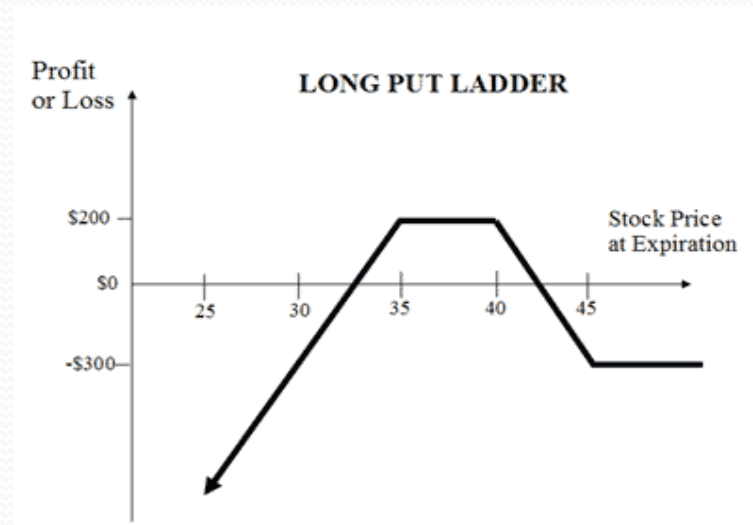
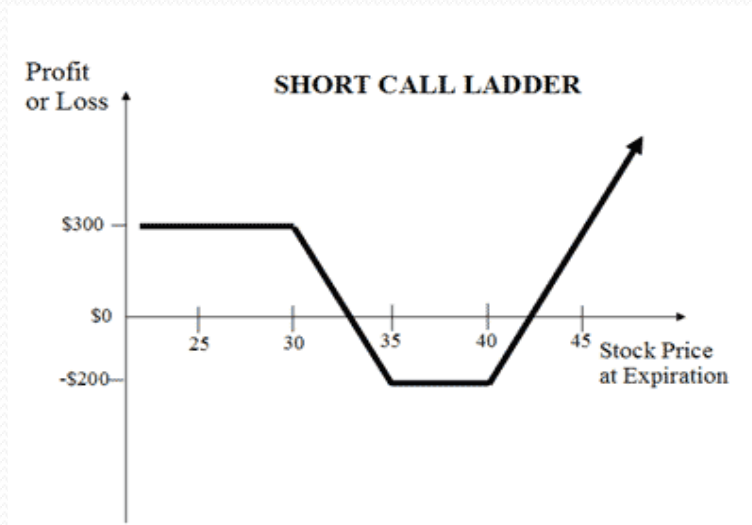


- **Butterfly, Condor** (long call+2 short call+long call) call/put



Opční formace

- Ladder (short call+2 long call) alebo (2 long put+short put)



Exotické opcie

- Path-dependent opcie (závislé na ceste)
 - Ázijské opcie
 - Forward-start opcie
 - One-clique option
 - Barirové opcie
 - Roll-up/Roll-down opcie
 - Lookback opcie
 - Shout opcie
 - Lock-in opcie
- Korelačné opcie
 - Výmenné opcie
 - Best-of/Worst-of and cash opcie
 - Korelačné binárne opcie
 - Kvocientné opcie
 - Produkčné opcie
 - Opcie zahraničného kapiálu
- Quanto opcie
- Rainbow opcie
- Spread opcie
- Dual-strike opcie
- Out-performance opcie
- Basket opcie
- Ostatné
 - Opcie s nelineárnou výplatou
 - Zložené opcie
 - Chooser opcie
 - Opcie s podmienenou prémieou
 - Explodujúce opcie
 - Reset opcie
 - Konvexné opcie

Kombinace

- Kanárské opcie
- Bermudské opcie
- Havajské opcie
- Ruské opcie
- Parížske opcie
- Izraelské opcie
- Napoleonské opcie

Barrierové opcie

- Opcie závislé na ceste, ktoré sa spustia resp. ukončia svoju platnosť pri prerazení vopred stanovenej hranice, ktorá je buď pod alebo nad spotovou cenou v dobe vypísania opcie
- Opcia môže vyplácať rabat, ak nedôjde k spusteniu, alebo zanikne
- Delenie
 - » Put/Call
 - » Knock-In/Knock-Out
 - » Up/Down
- Ocenenie

$$A = \phi S e^{-gT} N(\phi x_1) - \phi X e^{-rT} N(\phi x_1 - \phi \sigma \sqrt{T})$$

$$B = \phi S e^{-gT} N(\phi x_2) - \phi X e^{-rT} N(\phi x_2 - \phi \sigma \sqrt{T})$$

$$C = \phi S e^{-gT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_1) - \phi X e^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{T})$$

$$D = \phi S e^{-gT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_2) - \phi X e^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N(\eta y_2 - \eta \sigma \sqrt{T})$$

Barierové opce

$$E = Ke^{-rT} \left[N(\eta x_2 - \eta\sigma\sqrt{T}) - \left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N(\eta y_2 - \eta\sigma\sqrt{T}) \right]$$
$$F = K \left[\left(\frac{H}{S}\right)^{\mu+\lambda} N(\eta z) + \left(\frac{H}{S}\right)^{\mu-\lambda} N(\eta z - 2\eta\lambda\sigma\sqrt{T}) \right]$$

Kde

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$x_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1 = \frac{\ln\left(\frac{H^2}{SX}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$y_2 = \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$z = \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$\mu = \frac{r-g-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}$$

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + \frac{2(r-g)}{\sigma^2}}$$

S- spotová cena podkladového aktiva pri ocenení

H- úroveň bariery

X- strike

K- rabat

r- tržná úroková miera

g- miera rastu dividend

σ - volatilita

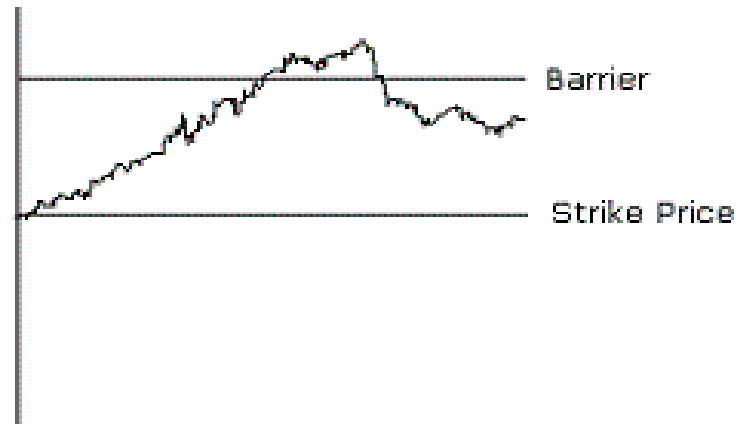
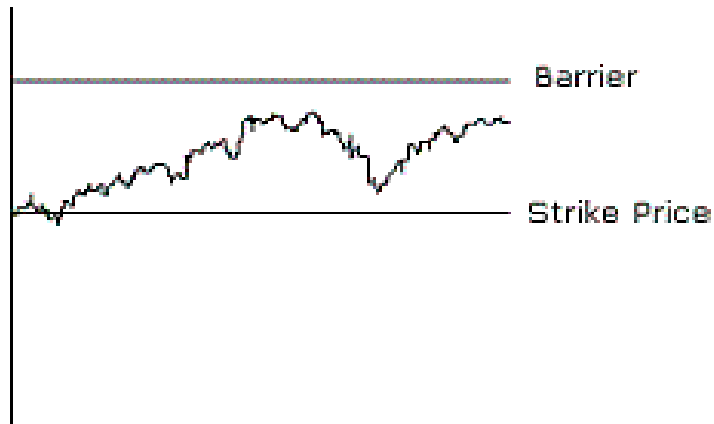
Bariérové opce

$A_k X > H$	Hodnota	η	ϕ
Down-In Call	$C+E$	1	1
Down-Out Call	$A-C+F$	1	1
Up-In Call	$A+E$	-1	1
Up-Out Call	F	-1	1
Down-In Put	$B-C+D+E$	1	-1
Down-Out Put	$A-B+C-D+F$	1	-1
Up-In Put	$A-B+D+E$	-1	-1
Up-Out Put	$B-D+F$	-1	-1

$A_k X < H$	Hodnota	η	ϕ
Down-In Call	$A-B+D+E$	1	1
Down-Out Call	$B-D+F$	1	1
Up-In Call	$B-C+D+E$	-1	1
Up-Out Call	$A-B+C-D+F$	-1	1
Down-In Put	$A+E$	1	-1
Down-Out Put	F	1	-1
Up-In Put	$C+E$	-1	-1
Up-Out Put	$A-C+F$	-1	-1

Bariérové opcie

- Bariérové up opcie



Azijské opcie

- Opcie kde je výplata závislá na rozdiel medzi priemerom cien podkladového aktíva za určité vopred stanovené obdobie a vopred stanovenou realizačnou cenou.
- Môže byť aj rozdiel medzi spotovou cenou a priemerom (fluktuujúca realizačná cena)
- Aritmetický a geometrický priemer
- Výhody: lacnejšie než vanilla opcie, nižšia volatilita
- Ocenenie Geometrickej call opcie:

Geometrický priemer:

$$B^{sa}(0) = 1, \quad B^{sa}(j) = \left(\prod_{i=1}^j \frac{S_i}{S_0} \right)^{\frac{1}{j}}$$

Časové funkcie:

$$T_{r,n-j}^{sa} = \frac{n-j}{n} \quad T_{n-j}^{sa} = \tau \left(\frac{n-j}{n} \right)^2 - \frac{(n-j)(n-j-1)(4n-4j+1)}{6n^3}$$

Pomocné funkcie:

$$A^{sa}(j) = e^{\frac{-r(\tau - T_{r,n-j}^{sa}) - \sigma^2(T_{r,n-j}^{sa} - T_{n-j}^{sa})}{2}} B^{sa}(j) \quad d_{n-j}^{sa} = \frac{\left\{ \ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_{r,n-j}^{sa} + \ln[B^{sa}(j)] \right\}}{\sigma\sqrt{T_{n-j}^{sa}}}$$

Cena opcie:

$$C^{sa} = kS_0 A^{sa}(j) e^{-gT_{r,n-j}^{sa}} N\left(kd_{n-j}^{sa} + k\sigma\sqrt{T_{n-j}^{sa}}\right) - kXe^{-r\tau} N\left(kd_{n-j}^{sa}\right)$$

n – celkový počet prvkov z ktorých sa počíta priemer
j – priebežný počet prvkov z ktorých sa počíta priemer

k – 1 pre call a -1 pre put
τ - doba do expirácie opcie

Lookback opcie

- Opcie závislé na ceste, ktorých payoff je závislí na maxime resp. minime, ktorý vývoj ceny podkladového aktíva dosiahol za určité obdobie.
- **Delenie**
 - Fixný strike – payoff je určený ako rozdiel medzi maximálnou cenou a fixnou realizačnou cenou pre call opciu a rozdielom fixnej realizačnej ceny a minimom podkladového aktíva pre put opciu
 - Pohyblivý strike - payoff je daný rozdielom maxima a spotovej ceny v rozhodný deň pre call a spotovej ceny a minima pre put opciu. Vždy dôjde k realizácii.
- Relatívne drahé, vhodné na komodity
- Ocenenie:

Fixed strike Lookback call ak $X > \text{Max}(S)$

$$C = Se^{-gT} N(a_1) - Xe^{-rT} N(a_2) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-g)} \left[e^{(r-g)T} N(a_1) - \left(\frac{S}{X} \right)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N\left(a_1 - \frac{2(r-g)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right]$$

Fixed strike Lookback call ak $X < \text{Max}(S)$

$$C = Se^{-gT} N(b_1) + e^{-rT} [(S_{MAX} - X) - S_{MAX} N(b_2)] + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-g)} \left[e^{(r-g)T} N(b_1) - \left(\frac{S}{S_{MAX}} \right)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N\left(a_1 - \frac{2(r-g)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right]$$

Lookback opcie

Fixed strike Lookback Put ak $X < \text{Min}(S)$

$$P = Xe^{-rT} N(-a_2) - Se^{-gT} N(-a_1) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-g)} \left[\left(\frac{S}{X} \right)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N\left(-a_1 - \frac{2(r-g)\sqrt{T}}{\sigma}\right) - e^{(r-g)T} N(-a_1) \right]$$

Fixed strike Lookback Put ak $X > \text{Min}(S)$

$$P = e^{-rT} [(X - S_{MIN}) + S_{MIN} N(-c_2)] - Se^{-gT} N(-c_1) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-g)} \left[\left(\frac{S}{S_{MIN}} \right)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N\left(-c_1 + \frac{2(r-g)\sqrt{T}}{\sigma}\right) - e^{(r-g)T} N(-c_1) \right]$$

Kde

$$a_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$b_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{S_{MAX}}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$c_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{S_{MIN}}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

S- spotová cena pri uzatváraní kontraktu

X- realizačná cena

S_{\max} - historicky maximálna cena

S_{\min} - historicky minimálna cena

r - tržná úroková miera

T - doba do maturity opcie

g - miera rastu dividend

σ - volatilita

Lookback opcie

$$C = Se^{-gT}N(c_1) - S_{MIN}e^{-rT}N(c_2) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-g)} \left[\left(\frac{S}{S_{MIN}} \right)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N\left(-c_1 + \frac{2(r-g)\sqrt{T}}{\sigma}\right) - e^{-sT}N(-c_1) \right]$$

- Lookback s pohyblivou realizačnou cenou

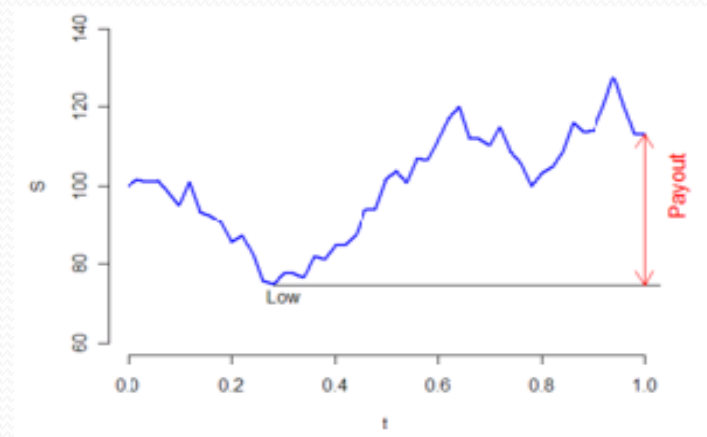
$$P = S_{MAX}e^{-rT}N(d_2) - Se^{-gT}N(-d_1) + Se^{-rT} \frac{\sigma^2}{2(r-g)} \left[-\left(\frac{S}{S_{MAX}} \right)^{\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N\left(d_1 + \frac{2(r-g)\sqrt{T}}{\sigma}\right) + e^{-sT}N(d_1) \right]$$

$$c_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{S_{MIN}}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$c_2 = c_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_{MAX}}{S}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$



Shout opcie

- Sú to modifikácie európskej opcie. Ako bonus má majiteľ opcie právo “zakričať” na vypisovateľa jedenkrát (prípadne viac krát) na vypisovateľa v priebehu životnosti opcie v čase τ , keď predpokladá, že je cena dostatočne vysoko (nízko).
- Payoff je väčšia hodnota z výplaty z európskej vanilla opcie alebo z rozdielu spotovej ceny pri shout-e a realizačnej ceny.
- Podobná lookback opcií, ale lacnejšia
- Kombinácia vlastností lookback a americkej opcie
- Využívajú sa v ako súčasť úrokových produktov a v segregovaných poisťných fondoch
- Payoff: call

	$\max(0, S_T - S_\tau) + (S_\tau - X)$	S_T – cena pri expirácii
put		S_τ – cena pri shout-e
	$\max(0, S_\tau - S_T) + (X - S_\tau)$	X – realizačná cena

- Oceňujú sa simuláciami, napríklad Monte Carlo. Prípadne binomickými a trinomickými stromami. Presné analytické riešenie neexistuje.

Zložené opcie

- Call na call opciu

$$C_C = Se^{-gT_1} M\left(a_1, b_1; \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) - X_1 e^{-rT_1} M\left(a_2, b_2; \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) - e^{-rT_2} X_2 N(a_2)$$

- Call na put opciu

$$C_P = Se^{-gT_1} M\left(a_1, -b_1; -\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) - X_1 e^{-rT_1} M\left(a_2, -b_2; -\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) + e^{-rT_2} X_2 N(a_2)$$

- Put na call opciu

$$P_C = X_1 e^{-rT_1} M\left(-a_2, b_2; -\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) - Se^{-gT_1} M\left(-a_1, b_1; -\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) + e^{-rT_2} X_2 N(-a_2)$$

- Put na put opciu

$$P_P = X_1 e^{-rT_1} M\left(-a_2, -b_2; \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) - Se^{-gT_1} M\left(-a_1, -b_1; \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) - e^{-rT_2} X_2 N(-a_2)$$

$$a_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{S^*}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}$$

$$b_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X_2}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

- Pre kritickú hodnotu S^* musí platiť že hodnota európskej call/put opcie v čase T_2 je X_2
 $C(S^*, X_1, g, r, \sigma, T_1 = T_2) = X_2$

Chooser opcie

- Tieto opcie majú vlastnosť, že v určitom vopred stanovenom čase v budúcnosti T_1 sa držiteľ opcie rozhodne či je daná opcia call alebo put.
- Drahšie ako vanilla opcie
- Lacnejšia alternatíva obchodovania straddlov
- Hodnota v čase T_1 je:

$$\text{Max}(c, p)$$

kde

c – je hodnota kúpnej opcie v čase T_1 s realizáciou v čase T_2

p – je hodnota predajnej opcie v čase T_1 s realizáciou v čase T_2

- Ocenenie:

Na základe call-put parity dostaneme

$$\max(c, p) = \max\left(c, c + Xe^{-r(T_2-T_1)} - S_1 e^{-g(T_2-T_1)}\right) = c + e^{-g(T_2-T_1)} \max(0, Xe^{-(r-g)(T_2-T_1)} - S_1)$$

S_1 je cena podkladového aktíva v čase voľby typu opcie

T_1 doba do voľby typu opcie

T_2 doba do maturity opcie

Chooser opcie

- Cena chooser opcie je určená ako:

$$Ch = Se^{-gT_2} N(d_1) - Xe^{-rT_2} N(d_2) - Se^{-gT_2} N(-e_1) + Xe^{-rT_2} N(-d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

$$e_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + (r - g)T_2 + \frac{1}{2}\sigma^2T_1}{\sigma\sqrt{T_1}} \quad e_2 = e_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

kde

S – cena podkladového aktíva pri oceňovaní opcie

X – realizačná cena opcie

S_1 – je cena podkladového aktíva v čase voľby typu opcie

T_1 – doba do voľby typu opcie

T_2 – doba do maturity opcie

r – tržná úroková miera

σ – volatilita

g – miera rastu dividend

Binárne/Digitálne opcie

- Opcie, ktoré majú binárnu výplatnú funkciu. Ak podkladové aktívum prekročí realizačnú cenu, držiteľ opcie získa podkladové aktívum alebo vopred stanovenú sumu peňazí.
- Relatívne drahé opcie
- **Cash-or-nothing**
 - Call – držiteľ získa sumu K ak cena podkladového aktíva je vyššia ako realizačná cena ($S > X$), inak nezíska nič
 - Put – držiteľ získa sumu K ak cena podkladového aktíva je nižšia ako realizačná cena ($S < X$), inak nič

Ocenenie:

$$C_{con} = Ke^{-rT} N(d)$$

$$P_{con} = Ke^{-rT} N(-d)$$

- **Asset-or-nothing**
 - Call – držiteľ získa podkladové aktívum ak cena podkladového aktíva je vyššia ako realizačná cena ($S > X$), inak nezíska nič
 - Put – držiteľ získa podkladové aktívum ak cena podkladového aktíva je nižšia ako realizačná cena ($S < X$), inak nič

Ocenenie:

$$C_{aon} = Se^{-gT} N(d)$$

$$P_{aon} = Se^{-gT} N(-d)$$

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - g + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

c – cena kúpnej opcie

S_0 – cena podkladového aktíva v čas 0

X – realizačná cena

N() – distribučná funkcia normálneho štandardizovaného rozdelenia

r – tržná úroková miera

T – doba do expirácie opcie

σ – volatilita podkladového aktíva

Ďalšie typy opcií

- **Amortizované/Veľerybie opcie**- rozdiel medzi priemernou cenou podkladového aktíva a realizačnou cenou (určenej percentuálne zo spotovej ceny)
- **Cliquet/Ratchet Options** – opcie s periodickým vysporiadaním, pri prenastavení realizačnej ceny podľa posledného vysporiadania. Zisk sa môže priebežne vyplácať alebo akumulovať.
- **Alfa-kvantilové opcie** – lacnejšia verzia Lookback opcie. Ako rozhodujúca sa berie najnižšia, resp. najvyššia hodnota, kde cena zotrvá aspoň určitú dobu. Neobchoduje sa ešte.
- **Bermudské opcie** – kombinácia amerických a európskych opcií. Majú niekoľko realizačných dní. Využívajú sa na úrokových trhoch a Forexe.
- **Kanárske opcie** – opäť kombinácia amerických a európskych. Opcia sa správa ako európska až do istého vopred stanoveného dátumu a následne funguje ako americká, alebo bermudská opcia.
- **Košíkové opcie** – podkladové aktívum je index, alebo skupina podkladových aktív
- **Instalment opcie** – prémie za opciu sa spláca po častiach. Sériá zložených opcií.
- **Coupe option** – podobné Cliquet opciám, ale po výplate sa nová realizačná cena nastaví na horšiu zo spotovej ceny a pôvodnej realizačnej ceny.

Ďalšie typy opcií

- **Parížske opcie** – kombinácia bariérových a ázijských opcií. Na rozdiel od bariérových knock-in/out je spustený ak podkladové aktívum zotrvá určitú dobu na druhej strane bariéry resp. ak ju pretne priemer cien.
- **Edokko (Tokíjske) opcie** – rozšírenie Parížskych opcií. Redukuje potrebu predaja podkladového aktíva vypisovateľom opcie na krátko ak je opcia ITM tesne pred expiráciou
- **Výmenné opcie** – umožňujú vo vopred stanovený termín výmenu podkladových aktív. Používajú sa najmä na menové páry.
- **Napoleónske opcie** – vyplácajú fixný kupón a najhorší výsledok indexu za určité obdobie.
- **Dúhové opcie** – majú 2 a viac podkladových aktív z ktorých sa vyberá výsledok najlepšieho/najhoršieho/priemer
- **Opcie Spreadu** – Payoff je funkciou 2 alebo viacerých podkladových aktív
- **Extreme spread opcie** – modifikácia lookback opcie. Payof je rozdiel maxima v druhej časti životnosti opcie a maxima v prvej časti životnosti opcie.
- **Predĺžiteľné opcie** – vypisovateľ alebo držiteľ môžu predĺžiť životnosť opcie

Ďalšie typy opcií

- **Havajské opcie** – kombinácia amerických a ázijských opcií. Payoff je rozdiel medzi strikom a priemernou cenou a je možná predčasná realizácia.
- **Pasové (Passport) opcie** – podkladové aktívum je zostatok obchodného účtu bánk. Európsky typ opcie.
- **Dovolenkové (Vacation) opcie** – to isté ako pasové, len majú charakteristiku americkej opcie.
- **Izraelské opcie** – americká opcia s možnosťou vypisovateľa opcie ukončiť jej platnosť kedykoľvek počas jej životnosti. Držiteľ opcie dostane nejaký rabat.
- **Ruské opcie** – kombinácia americkej a lookback opcie. Držiteľ opcie má právo na určité percento z maximálnej hodnoty, ktorú opcia dosiahla. Neobchoduje sa este.

Zdroje

- Higham Desmond J. *An introduction to Financial Option Valuation* 4.th edition. Cambridge University Press: 2004. 273 s. ISBN 978-0-52183884-9
- HULL, J. C. *Options, futures, and other derivatives*. 8.th edition. Harlow: Pearson Edusation, 2012. 845 s. ISBN 0-13-009056-5
- ZHANG, P. G. *Exotic options*. 2nd edition. vyd. Singapore: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1998. 692 s. ISBN 9810234821
- www.global-derivatives.com

14. Reference



- Neapolitan R.E.: *Learning Bayesian Networks*. Prentice Hall. 2004
- Ben-Gal I.: Bayesian Networks. *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*. Wiley. 2007
- Fenton N.E., Neil M.: *Managing Risk in Modern World*. London Mathematical Society. 2007
- Koller D., Pfeffer A.: *Object-oriented Bayesian networks*. Proceedings of 13th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Providence, Rhode Island, pp. 302-313. 1997
- Fenton N.E., Neil M., Caballero J.G.: *Using Ranked Nodes to Model Quantitative Judgments in Bayesian Networks*. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, Vol. 19, No. 10, pp. 1420-1432. 2007
- Charniak E.: *Bayesian Networks without Tears*. In: AI Magazine, vol. 12, pp. 50-63. 1991
- Zagorecki A., Druzdel M.: *An Empirical Study of Probability Elicitation under Noisy-OR Assumption*. Proceedings on the 17th Int'l Florida Artificial Intelligence Research Soc. Conference, 2004, pp. 880-885.
- Murphy K.P.: *Dynamic Bayesian Networks: Representations, Inference and Learning*. University of California, Berkeley, 2002.
- Cobb B.R., Shenoy P.P.: *Inference in Hybrid Bayesian Networks with Mixtures of Truncated Exponentials*. School of Business Working Paper no. 294, 2005
- Murphy K.: *A Brief Introduction to Graphical Models and Bayesian Networks*, 1998.
<http://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Bayes/bnintro.html>
- WIKIPEDIA: Bayesian Network. http://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian_network
- <http://www2.cs.cas.cz/~sima/kniha.pdf>
- <http://www.root.cz/clanky/neuronove-siete-su-ciernou-skrinkou/>

Užitečné zdroje dat

- <http://archive.ics.uci.edu/ml/>
- <http://kdd.ics.uci.edu/>



- <http://sede.neurotech.com.br:443/PAKDD2009/>
- <http://www.dataminingbook.com/>
- http://www.stat.uni-muenchen.de/service/datenarchiv/welcome_e.html