Př. $x - yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$ separace

$\boxed{y' = ky(1-y)}$ (růst populace)

$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int k\,dx = kx + C$ separace

parciální zlomky

$\int \frac{A}{y} - \int \frac{B}{1-y} \quad \left|\frac{y}{1-y}\right| = kx + c$

rychlost chemické reakce: $A + B \to C$

$\boxed{y' = k(y-a)(y-b)}$ separace

$\int \frac{A}{y-a} \quad \int \frac{B}{y-b}$

$\boxed{y' = -2xy} + 2x^3$ lineární 1) homogenní 2) y_p: variace konst

$$x y' = \frac{y}{x+1} + x \quad \Big| : x$$

$$y' = \frac{y}{x(x+1)} + 1$$

lineární

1) $y' = \frac{y}{x(x+1)}$ separace y

2) y_p - variace konst

3) $y = y + y_p$

DR 2. řádu

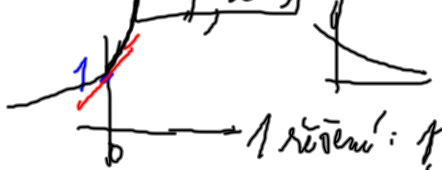
$$y'' + py' + qy = \cancel{f(x)}\ 0 \qquad p, q \text{ – čísla}$$

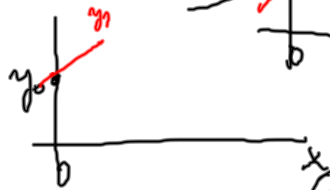
Př. $y' = y$

(1) $\boxed{y'' = y}$ $\qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

$y = e^{x},\ y = e^{-x}$ $\qquad y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

c_1, c_2 – konstanty





1 řešení: počáteční podmínky

$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1$

(2) $\boxed{y'' + y = 0}$ $\qquad y'' = -y$

$y = \sin x$
$y' = \cos x$
$y'' = -\sin x$

$y = \cos x$ $\qquad y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

(3) $y'' = 0$ $\qquad y(x) = c_1 + c_2 x$

1. Homogenní rovnice

(H) $y'' + p y' + q y = 0$

Vlastnosti: y_1, y_2 jsou řešení $\Rightarrow$ $c_1 y_1 + c_2 y_2$ je také řešení

y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé, jestliže

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

y_1, y_2 jsou lin. nezávislé, pak <u>všechna</u> řešení rovnice (H) jsou

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

? <u>dvě</u> lin. nezávislá řešení

Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$? λ tak, aby bylo řešení (H)

$y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

(H): $\lambda^2 e^{\lambda x} + p \lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0$

$$\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 + p\lambda + q) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$$

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE

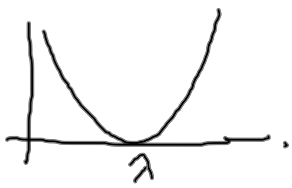
kvadrat. rovnice

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

1) 2 různé reálné kořeny λ_1, λ_2

2) 1 reálný dvojnásobný kořen λ

3) komplexní $\lambda = \alpha \pm i\beta$



$$y'' + py' + q = 0$$

$y = e^{\lambda_1 x}$, $y = e^{\lambda_2 x}$ lin. nezávislá řešení

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$y = e^{\lambda x}$, $y = xe^{\lambda x}$ lin. nezávislá

$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

$y = e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ je řešení =

Eulerův vztah ($e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$)

$$\boxed{e^{ia} = \cos a + i\sin a}$$

$$y = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x \pm i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot \underbrace{e^{\pm i\beta x}}_{\text{Eulerův vztah}} =$$

$$= e^{\alpha x}\left(\cos \beta x + i \sin(\pm\beta x)\right) =$$

$$= \underbrace{e^{\alpha x}\cos\beta x} \pm i\, \underbrace{e^{\alpha x}\sin\beta x}$$ je řešením rovnice (H)

$\Leftrightarrow$ funkce

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

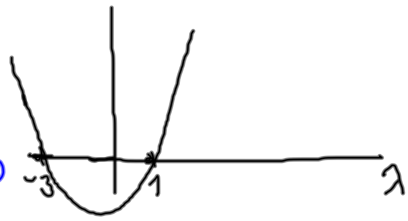
jsou řešení (H). Tato řešení jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Př. 1) $y'' + 2y' - 3y = 0$

$\underbrace{\lambda^2 + 2\lambda - 3}_{} = 0$

$(\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \qquad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -3$



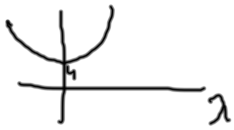
$y = e^{x}, \quad y = e^{-3x}$ jsou řešení lin. nezávislá, tj. $\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-3x} \\ \downarrow & \downarrow \\ e^{x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{x-3x} - e^{x-3x} = -4e^{x-3x} \neq 0$

obecné řešení:

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

Př. 2) $y'' + 4y = 0 \qquad y = e^{\lambda x}$

! $\underbrace{\lambda^2 + 4}_{} = 0$

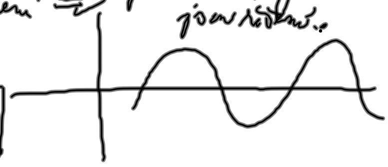


$\lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\,\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = \pm 2i$

$y = e^{\pm 2ix} = \cos 2x \pm i \sin 2x$ je řešení $\Rightarrow$ $y = \cos 2x$, $y = \sin 2x$ jsou řešení.

Euler

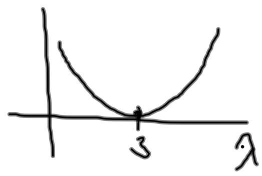
obecné řešení $\boxed{y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}$



Př 3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

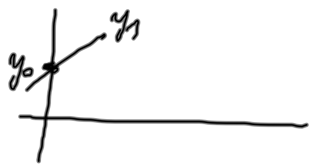
$(\lambda - 3)^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 3$



$y = e^{3x}$ je řešením

druhé (lin. nezáv.) řešení $y = x e^{3x}$

obecné řešení: $\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}$



Nehomogenní DR

$$(N) \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

1) obecné řešení $y'' + py' + qy = 0 \quad \dots \quad y_0(x)$

2) $y_p(x)$ - partikulární řešení rovnice (N)

- variace konst.
- metoda neurčitých koef. v případě, že f je „pěkná"

3) $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

Fce f je „pěkná": a) $f(x)$ je polynom stupně n $(x^n + \dots + 1)$

$y_p(x) = Q(x)$ - polynom st. n, jestliže $\lambda = 0$ není kořen charakt. rovnice

$= x\,Q(x)$ $\qquad \lambda = 0$ je jednoduchý kořen

$= x^2 Q(x)$ $\qquad \lambda = 0$ dvojnásobný —"—

b) $f(x) = P(x)\,e^{\alpha x}$ $\quad P(x)$ - polynom st. n

$(\alpha = 0 \longrightarrow$ případ a))

$y_p(x) = Q(x)\,e^{\alpha x}$, jestliže $\lambda = \alpha$ není kořen

$= x\,Q(x)\,e^{\alpha x}$ $\qquad$ je jednod. kořen

$= x^2 Q(x)\,e^{\alpha x}$

Př: $y'' - 2y' + 2y = 2x^1$

1) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = 2i$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm \frac{2i}{2} = 1 \pm i$

$y = e^{(1+i)x} = e^x e^{ix} = e^x(\cos x + i \sin x) =$

$= \boxed{e^x \cos x} + i \boxed{e^x \sin x}$

$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

2) $y_p(x) = ax + b$ ($\lambda = 0$ není kořen)

$y_p' = a, \quad y_p'' = 0$

$0 - 2a + 2(ax + b) = 2x$

$2ax - 2a + 2b = 2x \quad /:2$

$\boxed{ax - a + b = 1x}$ srovnat polynomy

x^1: $a = 1$

x^0: $-a + b = 0 \Rightarrow b = a = 1$

$y_p(x) = x + 1$

3) VÝSLEDEK: $\boxed{y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + x + 1}$