Parciální derivace

Jak si ji představit?

Parciální derivace – výpočet

Nechť je zadána funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ a naším úkolem je spočítat její parciální derivace.

- **Parciální derivace podle $\boldsymbol{x}$ . . . $\boldsymbol{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$**
  Proměnnou y považujeme za konstantu tj. $y = \text{konst} \rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \rightarrow$ počítáme obyčejnou derivaci funkce jedné proměnné podle x.

obdobně

- **Parciální derivace podle $\boldsymbol{y}$ . . . $\boldsymbol{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$**
  Proměnnou x považujeme za konstantu tj. $x = \text{konst} \rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \rightarrow$ počítáme obyčejnou derivaci funkce jedné proměnné podle y .

Ukažme si vše na konkrétních příkladech. U každého příkladu najdete vždy komentované řešení a interaktivní 3D obrázek.

Doporučujeme především přepínač  pro zobrazení „stromu" modelu – můžete tak postupně zobrazovat či schovávat jednotlivé objekty prostorového obrázku.

Parciální derivace – příklad 1

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^2$ v bodě $[1, 0]$.

Parciální derivace – příklad 1

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^2$ v bodě $[1, 0]$.

Řešení

- **Parciální derivace podle $\boldsymbol{x}$ v bodě $[\mathbf{1}, \mathbf{0}]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

Parciální derivace – příklad 1

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^2$ v bodě $[1, 0]$.

Řešení

- **Parciální derivace podle $\boldsymbol{x}$ v bodě $[\mathbf{1}, \mathbf{0}]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

$$z_x = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

Parciální derivace – příklad 1

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^2$ v bodě $[1, 0]$.

Řešení

- **Parciální derivace podle $\boldsymbol{x}$ v bodě $[\mathbf{1}, \mathbf{0}]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

  $$z_x = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 0]$

  $$z_x(1, 0) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Parciální derivace – příklad 1

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^2$ v bodě $[1, 0]$.

Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1, 0]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

  $$z_x = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 0]$

  $$z_x(1, 0) = 2 \cdot 1 = 2.$$

- **Parciální derivace podle y v bodě $[1, 0]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \longrightarrow x = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle y

Parciální derivace – příklad 1

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^2$ v bodě $[1, 0]$.

Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1, 0]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \rightarrow y = \text{konst} \rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \rightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

  $$z_x = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 0]$

  $$z_x(1, 0) = 2 \cdot 1 = 2.$$

- **Parciální derivace podle y v bodě $[1, 0]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \rightarrow x = \text{konst} \rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle y

  $$z_y = \frac{\partial x^2}{\partial y} = 0,$$

Parciální derivace – příklad 1

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^2$ v bodě $[1, 0]$.

Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1, 0]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \to y = \text{konst} \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \to$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

  $$z_x = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 0]$

  $$z_x(1, 0) = 2 \cdot 1 = 2.$$

- **Parciální derivace podle y v bodě $[1, 0]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \to x = \text{konst} \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle y

  $$z_y = \frac{\partial x^2}{\partial y} = 0,$$

  $$z_y(1, 0) = 0.$$

Geometrický význam výpočtu, popis k obrázku 1

Parciální derivace podle x v bodě $[1, 0]$

- $y = \text{konst}$ $\quad\longrightarrow\quad$ šedá rovina „f_x: rovina“ procházející modře vyznačeným bodem $[1, 0]$
- „f_x: rovina“ protíná graf funkce $\quad\longrightarrow\quad$ žlutá křivka „ f_x: řez “
- V tuto chvíli počítáme obyčejnou derivaci podle x:

  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ $\quad\longrightarrow\quad$ směrnice tečny ke žluté křivce „ f_x: řez “ v bodě $[1, 0]$

  Směrnice tečny = tangens úhlu, který svírá tečna s rovinou xy $\quad\longrightarrow\quad$ tangens úhlu mezi přímkami „f_x: tečna“ a „f_x: průmět tečny“ $\ldots z_x(1, 0) = 2$.

Geometrický význam výpočtu, popis k obrázku 1

Parciální derivace podle x v bodě $[1, 0]$

- $y =$ konst $\quad\rightarrow\quad$ šedá rovina „f_x: rovina“ procházející modře vyznačeným bodem $[1, 0]$
- „f_x: rovina“ protíná graf funkce $\quad\rightarrow\quad$ žlutá křivka „ f_x: řez “
- V tuto chvíli počítáme obyčejnou derivaci podle x:
  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad\rightarrow\quad$ směrnice tečny ke žluté křivce „ f_x: řez “ v bodě $[1, 0]$
  Směrnice tečny = tangens úhlu, který svírá tečna s rovinou $xy \quad\rightarrow\quad$ tangens úhlu mezi přímkami „f_x: tečna“ a „f_x: průmět tečny“ $\ldots z_x(1, 0) = 2$.

Parciální derivace podle y v bodě $[1, 0]$

- $x =$ konst $\quad\rightarrow\quad$ šedá rovina „f_y: rovina“ procházející modře vyznačeným bodem $[1, 0]$
- „f_y: rovina“ protíná graf funkce $\quad\rightarrow\quad$ žlutá přímka, která je již přímo tečnou, proto označení „ f_y: řez = tečna “
- Výpočet obyčejné derivace podle y:
  $\frac{\partial f(x), y}{\partial y} \quad\rightarrow\quad$ směrnice tečny ke žluté křivce „ f_y: řez = tečna “ v bodě $[1, 0]$
  Směrnice tečny = tangens úhlu, který svírá tečna s rovinou $xy \quad\rightarrow\quad$ tangens úhlu mezi přímkami „ f_y: řez = tečna “ a „f_y: průmět tečny“. Tyto přímky jsou rovnoběžky, tedy $z_y(1, 0) = 0$.

Parciální derivace – geometrický význam, příklad 1

Obrázek 1: Funkce $z = x^2$ a její parciální derivace 1. řádu v bodě $[1, 0]$.

Parciální derivace – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$.

Parciální derivace – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$.
Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1, 1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

Parciální derivace – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$.
Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1, 1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

$$z_x = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Parciální derivace – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$.
Řešení

- **Parciální derivace podle $\boldsymbol{x}$ v bodě $[\mathbf{1}, \mathbf{1}]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \rightarrow y = \text{konst} \rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \rightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

  $$z_x = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 1]$

  $$z_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Parciální derivace – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$.
Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1, 1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

  $$z_x = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 1]$

  $$z_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

- **Parciální derivace podle y v bodě $[1, 1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \longrightarrow x = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle y

Parciální derivace – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$.
Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1, 1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

$$z_x = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 1]$

$$z_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

- **Parciální derivace podle y v bodě $[1, 1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \longrightarrow x = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle y

$$z_y = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Parciální derivace – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$.
Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1, 1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \to y = \text{konst} \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \to$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

  $$z_x = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 1]$

  $$z_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

- **Parciální derivace podle y v bodě $[1, 1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \to x = \text{konst} \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle y

  $$z_y = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1, 1]$

  $$z_y(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Parciální derivace – příklad 2

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $[1,1]$.
Řešení

- **Parciální derivace podle x v bodě $[1,1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \to y = \text{konst} \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \to$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x

  $$z_x = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1,1]$

  $$z_x(1,1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

- **Parciální derivace podle y v bodě $[1,1]$**

  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \to x = \text{konst} \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle y

  $$z_y = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  a dosadíme souřadnice bodu $[1,1]$

  $$z_y(1,1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Parciální derivace – geometrický význam, příklad 2

Na obrázku 2 je zobrazena tečná rovina $y = \text{konst}$ (šedá rovina) a její průnik s grafem funkce (žlutá křivka). V modře vyznačeném bodě počítáme parciální derivaci podle x, což je tangens úhlu, který svírá tečná rovina s rovinou xy (úhel mezi černými přímkami).

Obrázek 2: Graf funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a její parciální derivace 1. řádu podle x v bodě $[1, 1]$.

Parciální derivace – příklad 3

Příklad 3. Vypočtěte parciální derivaci 1. řádu funkce $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ podle x.

Parciální derivace – příklad 3

Příklad 3. Vypočtěte parciální derivaci 1. řádu funkce $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ podle x.

Řešení

Parciální derivace podle x

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x (využijeme výsledku z příkladu 2)

Parciální derivace – příklad 3

Příklad 3. Vypočtěte parciální derivaci 1. řádu funkce $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ podle x.

Řešení

Parciální derivace podle x

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x (využijeme výsledku z příkladu 2)

$$z_x = \frac{\partial \ln\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Parciální derivace – příklad 3

Příklad 3. Vypočtěte parciální derivaci 1. řádu funkce $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ podle x.

Řešení

Parciální derivace podle x

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow y = \text{konst} \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow$ derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x (využijeme výsledku z příkladu 2)

$$z_x = \frac{\partial \ln\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Parciální derivace – geometrický význam, příklad 3

Obdobná situace jako u příkladu 2, nyní ovšem počítáme parciální derivace podle x v obecném bodě. Tento obecný bod je na obrázku 3 reprezentován jedním konkrétním (modrým) bodem.

Obrázek 3: Geometrický význam parciální derivace 1. řádu podle x v bodě, graf funkce $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.