Kapitola 1

Diferenciální rovnice prvního řádu

Diferenciální rovnice hrají důležitou roli ve všech přírodních vědách a v technice. Popisují např. průběh chemických reakcí, růst mikroorganismů, pohyb raket.

Aplikace diferenciálních rovnic najdeme také v ekonomii a společenských vědách. Velmi často zde vystupuje jako nezávisle proměnná čas.

Obsahem této a další kapitoly je ukázat, jak se řeší nejdůležitější diferenciální rovnice. V chemii se nejčastěji setkáme s diferenciálními rovnicemi 1. řádu, konkrétně s dvěma typy těchto rovnic, rovnicemi se separovanými proměnnými a lineárními rovnicemi. Důležitým typem rovnic jsou také diferenciální rovnice 2. řádu, s kterými se zase nejčastěji setkáváme ve fyzice.

1.1 Co jsou diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je rovnice, v které roli neznámé hraje funkce a která zároveň obsahuje derivace hledané funkce. Například rovnice

$$\text{a)}\quad y' = y, \qquad\qquad \text{b)}\quad y'' + y = 0$$

jsou diferenciální rovnice.

Řešit diferenciální rovnici znamená nalézt všechny funkce, které jsou definované na nějakém intervalu I a vyhovují dané rovnici. Takovou funkci nazýváme *řešením diferenciální rovnice*.

Řešením první rovnice je funkce $y = \mathrm{e}^x$, protože $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. Snadno ověříme, že řešením jsou všechny funkce tvaru $y = C\mathrm{e}^x$, kde C je libovolná konstanta.

Řešením druhé rovnice je například funkce $y = \sin x$, protože $(\sin x)'' + \sin x = 0$ pro všechna x. Řešením této rovnice je také ovšem funkce $y = \cos x$ a opět lze ověřit, že všechny funkce tvaru $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty, splňují tuto rovnici, tj. jsou jejími řešeními.

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje. Tak například předchozí rovnice byly prvního a druhého řádu. *Obecné řešení* diferenciální rovnice prvního řádu je funkce závisející na jednom parametru C taková, že speciální volbou C lze získat řešení této rovnice, *partikulární řešení* je jedno konkrétní řešení získané z obecného řešení volbou konstanty C.

Průběh nějakého skutečného jevu je popsán jediným řešením. Z množiny všech řešení určíme toto řešení zadáním *počáteční podmínky*. Úloha najít řešení diferenciální rovnice splňující danou počáteční podmínku se nazývá *počáteční úloha* (někdy také Cauchyova počáteční úloha). V praktických aplikacích hraje často roli nezávislé proměnné x čas. Je proto přirozené hledat řešení diferenciálních rovnic pro $x \geq 0$. Například, počáteční úloha

$$y' = -y, \quad y(0) = 100$$

má řešení $y = 100\mathrm{e}^{-x}$.

U rovnic druhého řádu je pro jednoznačnost řešení nutné zadat dvě počáteční podmínky. Například, počáteční úloha

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

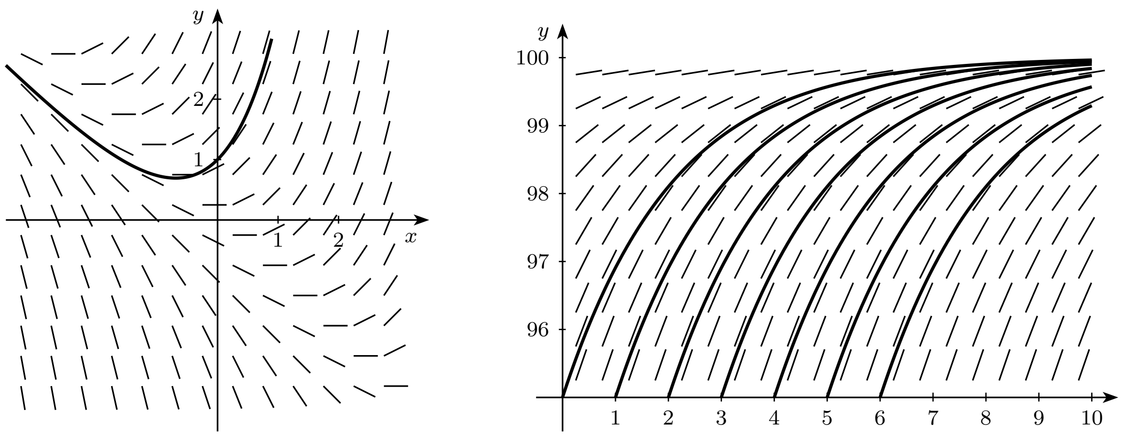
má řešení $y = \sin x$.

V mnoha případech není možné najít explicitní vyjádření hledané funkce. Naštěstí v případě, kdy je daná rovnice tvaru

$$y' = f(x, y),$$

můžeme získat nějaké informace o hledaném řešení díky geometrické interpretaci dané rovnice.

Geometrická interpretace Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ přiřazuje bodu $[x, y]$ v rovině právě jednu hodnotu $y'(x)$, neboli hodnotu derivace hledané funkce. Tuto hodnotu můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem $[x, y]$. Tuto přímku obvykle znázorňujeme jako krátkou úsečkou se středem v daném bodě $[x, y]$ a směrnicí $y'(x)$. Tato úsečka se nazývá *lineární element*. Množinu všech lineárních elementů diferenciální rovnice nazýváme *směrové pole*. Graf každého řešení $\varphi(x)$ dané diferenciální rovnice, tzv. *integrální křivka*, má zřejmě tu vlastnost, že tečna v každém jeho bodě $[x, \varphi(x)]$ obsahuje příslušný lineární element. Směrové pole nám tak pomáhá zobrazit tvar hledaných integrálních křivek tím, že ukazuje směr, v kterém křivka prochází každým bodem.



(a) Směrové pole rovnice $y' = x + y$ a řešení splňující podmínku $y(0) = 1$

(b) Směrové pole rovnice $y' = \frac{1}{2}y\left(1 - \frac{1}{100}y\right)$ a řešení pro různé počáteční podmínky

Na následujících příkladech si ukážeme, jak můžeme ověřit, zda-li je nějaká funkce řešením diferenciální rovnice, případně počáteční úlohy.

Příklad 1.1. Ukažte, že funkce $y = x - \frac{1}{x}$ je řešením rovnice

$$xy' + y = 2x.$$

Řešení. Nejprve určíme derivaci zadané funkce:

$$y' = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Dosadíme-li do levé strany dané rovnice za y a y', dostaneme

$$xy' + y = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x - \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2x.$$

Výraz na levé straně se rovná výrazu na pravé straně, funkce $y = x - \frac{1}{x}$ je proto řešením dané rovnice. ▲

Příklad 1.2. Ověřte, že funkce $y = \sin x \cos x - \cos x$ je řešením počáteční úlohy

$$y' + y\mathrm{tg}\, x = \cos^2 x \qquad y(0) = -1.$$

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladě vypočteme

$$y' = \cos x \cos x - \sin x \sin x + \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x$$

a dosadíme do levé strany rovnice za y a y'

$$\begin{aligned} y' + y\mathrm{tg}\, x &= \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x + \mathrm{tg}\, x(\sin x \cos x - \cos x) = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x + \frac{\sin x}{\cos x}(\sin x \cos x - \cos x) = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x + \sin^2 x - \sin x = \cos^2 x. \end{aligned}$$

Daná funkce je tak řešením zadané rovnice a zbývá ověřit, že pro ni platí i počáteční podmínka:

$$y(0) = \sin 0 \cos 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1.$$

Dohromady je tedy funkce $y = \sin x \cos x - \cos x$ řešením dané počáteční úlohy. ▲

Příklad 1.3. Ověřte, že každá funkce tvaru

$$y = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

je řešením rovnice

$$y' = xy$$

a najděte takové řešení této rovnice, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 5$.

Řešení. Nejprve spočtěme y' s přihlédnutím k tomu, že C je konstanta

$$y' = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' = Cx\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

Dosaďme za y do pravé strany rovnice

$$xy = Cx\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

a vidíme, že opravdu každá funkce daného tvaru je řešením rovnice. Má-li funkce splnit počáteční úlohu $y(0) = 5$, musí platit

$$C\mathrm{e}^0 = 5$$

a tedy $C = 5$. Řešením počáteční úlohy je tak funkce

$$y = 5\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

▲

Řešení nejjednodušších diferenciálních rovnic vede na úlohu nalezení primitivní funkce.

Příklad 1.4. Najděte řešení diferenciální rovnice:

a) $y' = x^3$, b) $y''' = x$.

Řešení. a) Hledaná funkce, která bude řešením rovnice, je vlastně primitivní funkce k funkci na pravé straně, proto platí

$$y = \int x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C.$$

Řešením dané rovnice jsou tak všechny funkce tvaru $y = \frac{x^4}{4} + C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

b) Danou rovnici můžeme řešit opakováním předchozího postupu. Postupně dostáváme

$$y'' = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right) \mathrm{d}x = \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Řešením této rovnice jsou všechny funkce, které dostaneme z předpisu $y = \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ volbou konstant C_1, C_2 a C_3.

▲

V následujících částech ukážeme, jak se řeší dva typy diferenciálních rovnic prvního řádu: Rovnice se separovanými proměnnými a lineární rovnice. Přesto, že se jedná o jedny z nejjednodušších typů rovnic, mají, jak ukážeme na závěr této kapitoly, mnoho praktických aplikací.

1.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Jde o rovnici tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{1.1}$$

kde f a g jsou spojité funkce. Dosadíme $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Nejprve ověříme, zda konstantní funkce určené rovnicí $g(y) = 0$ jsou řešením rovnice (1.1). Za předpokladu $g(y) \neq 0$ *separujeme* proměnné (tj. na jedné straně rovnice máme výraz pouze proměnné y a na druhé výraz pouze proměnné x)

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tuto rovnost zintegrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Nezapomeňme, že primitivní funkce se liší o konstantu, čímž dostaneme množinu řešení rovnice (1.1)! Máme-li zadanou počáteční podmínku, určíme tuto konstantu z počáteční podmínky.

Poznamenejme, že ne vždy se nám podaří z (1.2) vyjádřit explicitní tvar řešení $y = y(x)$.

Příklad 1.5. Řešte diferenciální rovnice

a) $y' = 2xy$, b) $y' = \frac{1}{x}(4y-1)$.

Řešení. a) Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy,$$

a odtud za předpokladu, že $y \neq 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x.$$

Všimněme si přitom, že funkce $y = 0$ je řešením původní rovnice. Integrací dostáváme

$$\ln|y| = x^2 + K.$$

Pomocí pravidel pro počítání s logaritmy můžeme tento výsledek upravit

$$\ln|y| = x^2 + K = \ln \mathrm{e}^{x^2} + \ln \mathrm{e}^K = \ln \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^K$$

a po odlogaritmování

$$|y| = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^K$$

a odtud
$$y = \pm \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{e}^K.$$
Označíme-li $C = \pm \mathrm{e}^K$, kde C je kladné nebo záporné číslo, dostaneme obecné řešení tvaru
$$y = C\mathrm{e}^{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
Poznamenejme, že pro $C = 0$ je v tomto vztahu zahrnuto i řešení $y = 0$.

b) Nejprve vyšetřeme případ $4y - 1 = 0$. Vidíme, že funkce $y = \frac{1}{4}$ je řešením naší rovnice. Za předpokladu $y \neq \frac{1}{4}$ dostáváme
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{4y - 1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
a po integraci
$$\frac{1}{4} \ln |4y - 1| = \ln |x| + \ln K,$$
kde K je kladná konstanta. Odsud užitím pravidel pro počítání s logaritmy
$$\ln |4y - 1| = \ln K^4 x^4.$$
Nahradíme-li po odlogaritmování kladnou konstantu K^4 libovolnou konstantou C, můžeme odstranit absolutní hodnoty a dostaneme
$$4y - 1 = Cx^4,$$
a odtud
$$y = \frac{1}{4} Cx^4 + \frac{1}{4}.$$
Tento vztah zahrnuje i řešení $y = \frac{1}{4}$.

▲

Příklad 1.6. Řešte počáteční úlohu

a) $x + yy' = 0, \quad y(0) = 2,$ b) $(x + 1)\,\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}x = 0, \quad y(0) = 1.$

Řešení. a) Rovnici můžeme přepsat do tvaru
$$x + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$
separujeme proměnné a integrujeme
$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x.$$
Dostáváme
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$
Aby byla splněna počáteční podmínka $y(0) = 2$, musí platit
$$\frac{2^2}{2} = -\frac{0^2}{2} + C.$$
Odtud C $= 2$ a řešení rovnice dostáváme ve tvaru $x^2 + y^2 = 4$, graf řešení je část kružnice
$$y = \sqrt{4 - x^2}, \qquad x \in [-2, 2].$$

b) Separujeme proměnné a za předpokladu $y \neq 0$ máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x+1}.$$

Funkce na pravé straně je neryze lomená funkce. Dělením ji převedeme na polynom a ryze lomenou racionální funkci a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x.$$

Dostáváme tak

$$\ln|y| = x - \ln|x+1| + C.$$

Označme $C = \ln K$, vzhledem k tomu, že platí $x = \ln \mathrm{e}^x$, dostaneme

$$\ln|y| = \ln \mathrm{e}^x - \ln|x+1| + \ln K, \qquad K > 0$$

a užitím pravidel pro počítání s logaritmy

$$\ln|y| = \ln \frac{K\mathrm{e}^x}{|x+1|}.$$

Nyní můžeme odlogaritmovat a uvážíme-li novou konstantu $K^\star \in \mathbb{R}$, můžeme vynechat absolutní hodnoty, dostaneme tak řešení dané rovnice ve tvaru

$$y = \frac{K^\star \mathrm{e}^x}{x+1}.$$

Toto řešení obsahuje i řešení $y = 0$. Aby byla splněna počáteční podmínka musí platit

$$1 = \frac{K^\star \mathrm{e}^0}{0+1} \Rightarrow K^\star = 1.$$

Řešením počáteční úlohy je funkce $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$.

▲

1.3 Lineární diferenciální rovnice

Jde o rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{1.3}$$

kde p a f jsou spojité funkce. Je-li $f(x) \equiv 0$, nazývá se rovnice (1.3) *homogenní.* V opačném případě, tj. $f(x) \not\equiv 0$, se nazývá *nehomogenní.*

Předepíšeme-li počáteční podmínku, pak má lineární rovnice (1.3) právě jedno řešení a to existuje na celém intervalu, kde jsou funkce p, f spojité.

▷ **Homogenní rovnice.** Uvažujme rovnici

$$y' + p(x)y = 0. \tag{1.4}$$

Tato rovnice má vždy tzv. *triviální řešení* $y \equiv 0$. Jde o rovnici se separovanými proměnnými a její obecné řešení najdeme tak, že separujeme proměnné a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odtud

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + k.$$

Po odlogaritmování dostaneme

$$|y| = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x + K} = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{K} = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \quad (C = \mathrm{e}^{K} > 0).$$

Odstraníme-li absolutní hodnotu a uvážíme-li také triviální řešení $y \equiv 0$, dostaneme obecné řešení homogenní rovnice

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad (C \text{ je libovolná konstanta}).$$

Odtud je vidět, že netriviální řešení je buď kladné nebo záporné, nikdy neprotne osu x.

$\triangleright$ **Nehomogenní rovnice.** Pro řešení rovnice (1.3) použijeme následující větu:

Věta 1.7. *Nechť $y_0(x)$ je obecné řešení homogenní rovnice* (1.4)*, tj.*

$$y_0 = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

a $y_p(x)$ je partikulární řešení nehomogenní rovnice (1.3)*. Pak obecné řešení této nehomogenní rovnice je*

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x).$$

Vidíme, že obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice je složeno z obecného řešení příslušné homogenní rovnice a nějakého partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Jelikož homogenní rovnici řešit umíme, zbývá tedy vyřešit úlohu, jak nalézt partikulární (tj. jedno konkrétní) řešení nehomogenní rovnice.

Použijeme tzv. *metodu variace konstanty*. Vyjdeme z řešení homogenní rovnice, nahradíme konstantu C vhodnou funkcí $C(x)$ (odtud název variace konstanty) a hledáme řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C(x)y_0(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Potřebujeme tedy určit neznámou funkci $C(x)$. Vypočteme y_p' (jako derivaci součinu):

$$y_p'(x) = C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x).$$

Dosadíme y_p, y_p' do (1.3) za y, y' a dostaneme tak

$$C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x) + p(x)C(x)y_0(x) = f(x).$$

Protože y_0 je řešení homogenní rovnice, máme z (1.4) vztah $y_0' = -p(x)y_0$ a dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$C'(x)y_0(x) = f(x),$$

odkud plyne

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)} \mathrm{d}x.$$

Shrneme-li celý postup, spočívá v těchto krocích:

(1) určíme obecné řešení y_0 homogenní rovnice

(2) určíme partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice metodou variace konstanty

(3) obecné řešení y nehomogenní rovnice je součet řešení z kroků (1) a (2), tj. $y = y_0 + y_p$.

Je-li zadaná počáteční podmínka, určíme konstantu a najdeme jediné řešení počáteční úlohy.

Příklad 1.8. Najděte obecné řešení rovnice

$$\text{a)} \quad y' = 2y + x, \qquad\qquad \text{b)} \quad y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Řešení. a) Krok 1: Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$y' = 2y.$$

Jde o rovnici se separovanými proměnnými a proto

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2 \, \mathrm{d}x.$$

Odtud $\ln|y| = 2x + K$ a po odlogaritmování a odstranění absolutní hodnoty dostáváme obecné řešení homogenní rovnice

$$y_0 = C\mathrm{e}^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Krok 2: Najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $y_p = C(x)\mathrm{e}^{2x}$. Vypočteme $y_p' = C'(x)\mathrm{e}^{2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{2x}$ a dosadíme za y a y' do původní rovnice

$$C'(x)\mathrm{e}^{2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{2x} = 2C(x)\mathrm{e}^{2x} + x$$

a odtud

$$C'(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Metodou per partes vypočítáme

$$C(x) = \int x\mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice má proto tvar

$$y_p = C(x)\mathrm{e}^{2x} = \left(-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{e}^{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Krok 3: Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

b) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě.
Krok 1. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$y' + 2xy = 0.$$

Opět jde o rovnici se separovanými proměnnými

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int 2x \,\mathrm{d}x.$$

a odtud

$$\ln|y| = -x^2 + K$$

a po odlogaritmování a odstranění absolutní hodnoty dostaneme obecné řešení homogenní rovnice

$$y_0 = C\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Krok 2. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y_p = C(x)\mathrm{e}^{-x^2}$. Vypočteme $y_p' = C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ a dosadíme do rovnice

$$C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2} + 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2} = x\mathrm{e}^{-x^2}$$

a odtud

$$C'(x) = x$$

a po zintegrování

$$C(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice má proto tvar

$$y_p = C(x)\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Krok 3. Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x^2} = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

▲

Příklad 1.9. Řešte počáteční úlohu

a) $x^3y' - 2x^2y = 4, \quad y(1) = -2,$ b) $y'(x^2+1) + 2xy = \dfrac{2x}{x^2+1}, \quad y(0) = -1.$

Řešení. a) Rovnici upravme do tvaru

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{4}{x^3}.$$

Jedná se o lineární rovnici.

Krok 1: Řešíme příslušnou homogenní rovnici

$$y' = \frac{2y}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}.$$

Odtud

$$\ln|y| = 2\ln|x| + K = \ln x^2 + K$$

a odlogaritmováním a odstraněním absolutní hodnoty dostaneme

$$y_0 = Cx^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Krok 2: Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude tvaru $y_p = C(x)x^2$. Vypočteme y_p', dosadíme do rovnice a dostaneme

$$C'(x) = \frac{4}{x^5}$$

a po zintegrování

$$C(x) = -\frac{1}{x^4}.$$

Partikulární řešení je

$$y_p = C(x)x^2 = -\frac{1}{x^4}x^2 = -\frac{1}{x^2}.$$

Krok 3: Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = Cx^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Dosadíme počáteční podmínku a dostáváme

$$-2 = C - 1$$

a odtud $C = -1$. Řešením počáteční úlohy je funkce

$$y = -x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

b) Postupujme obdobně jako v předchozích příkladech. Rovnici upravíme do tvaru

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Jedná se opět lineární rovnici.
Krok 1: Vyřešíme příslušnou homogenní rovnici

$$y' = -\frac{2x}{x^2+1}y.$$

Jde o rovnici se separovanými proměnnými, dostáváme tak

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{-2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Odtud
$$\ln|y| = -\ln(x^2+1) + K = \ln(x^2+1)^{-1} + K$$
odlogaritmováním a odstraněním absolutní hodnoty dostaneme
$$y_0 = \frac{C}{x^2+1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Krok 2: Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude tvaru $y_p = \frac{C(x)}{x^2+1}$. Vypočteme
$$y_p' = \frac{C'(x)(x^2+1) - 2xC(x)}{(x^2+1)^2},$$
dosadíme do rovnice a dostaneme
$$C'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$
a po zintegrování
$$C(x) = \ln(x^2+1).$$
Partikulární řešení je
$$y_p = \frac{C(x)}{(x^2+1)} = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$
Krok 3: Obecné řešení nehomogenní rovnice má tvar
$$y = \frac{C}{x^2+1} + \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{C + \ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$
Dosadíme počáteční podmínku a dostáváme
$$-1 = \frac{C+0}{0+1},$$
odtud $C = -1$. Řešením počáteční úlohy je funkce
$$y = \frac{-1 + \ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$

▲

Poznámka 1.10. Kromě *metody variace konstanty* můžeme použít i *metodu integračního faktoru*. Máme-li nehomogenní lineární rovnici tvaru
$$y' + p(x)y = f(x)$$
můžeme ji řešit tak, že obě strany vynásobíme výrazem $I(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$, tzv. *integračním faktorem*, a poté zintegrujeme.

Například pro rovnici
$$y' + 3x^2y = 6x^2$$

je integrační faktor výraz

$$I(x) = \mathrm{e}^{\int 3x^2\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^3}.$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice výrazem e^{x^3} dostaneme

$$\mathrm{e}^{x^3}y' + 3x^2\mathrm{e}^{x^3}y = 6x^2\mathrm{e}^{x^3}.$$

Všimněme si, že na levé straně stojí rozepsaná derivace součinu. Rovnici lze proto upravit do tvaru

$$\left(\mathrm{e}^{x^3}y\right)' = 6x^2\mathrm{e}^{x^3}.$$

Nyní můžeme obě strany zintegrovat

$$\mathrm{e}^{x^3}y = \int 6x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Integrál na pravé straně vypočteme pomocí substituce $t = x^3, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3x^2}$. Dostaneme

$$\mathrm{e}^{x^3}y = 2\mathrm{e}^{x^3} + C$$

a odtud

$$y = 2 + C\mathrm{e}^{-x^3}.$$

Ještě poznamenejme, že obě metody jsou ekvivalentní a vedou na výpočet stejných integrálů.

1.4 Aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu

Příklad 1.11. (*Model radioaktivního rozpadu*) Uvažme radioaktivní atomy v nějakém izotopu chemického prvku a označme jejich počet v závislosti na čase $N(t)$. Radioaktivita je přirozený nebo uměle navozený samovolný rozpad atomového jádra provázený vysíláním radioaktivního záření. Ernest Rutherford ukázal, že rychlost rozpadu (tedy vlastně změna počtu atomů) je přímo úměrná počtu atomů příslušného prvku. Tento proces můžeme proto popsat diferenciální rovnicí

$$N' = -\lambda N,$$

kde $\lambda > 0$ je tzv. přeměnová konstanta. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kterou můžeme doplnit o počáteční podmínku $N(0) = N_0$, tj. že v jistém čase, v kterém započalo měření byl počet atomů N_0. Rovnici upravíme

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda\,\mathrm{d}t$$

a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N} = \int -\lambda\,\mathrm{d}t.$$

Odtud dostaneme řešení

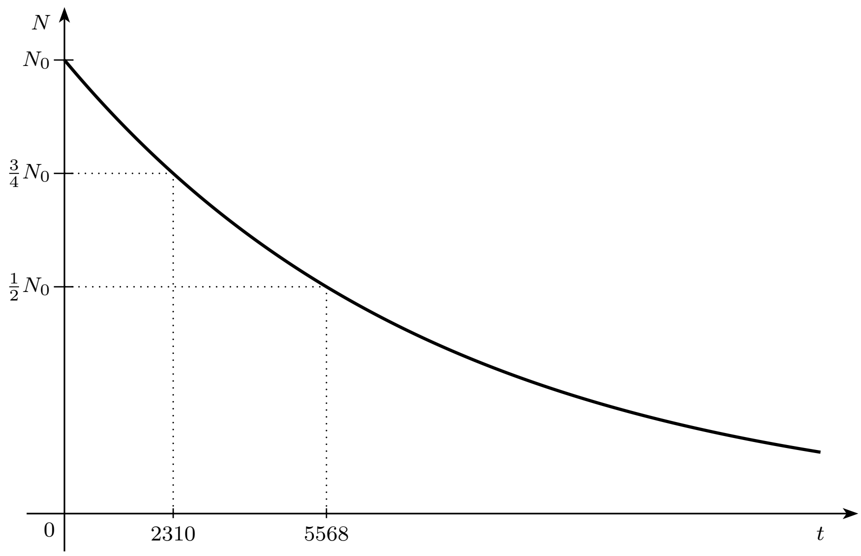
$$N(t) = K\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Aby byla splněna počáteční podmínka musí platit $N_0 = K\mathrm{e}^0$ a řešení počáteční úlohy je tak tvaru

$$N(t) = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Pomocí tohoto výsledku můžeme řešit např. následující úlohu:

Poločas rozpadu radioaktivního izotopu uhlíku ^{14}C *je 5568 let (tj. počáteční množství se za tuto dobu zmenší na polovinu). Určete, za jak dlouho se počáteční množství sníží o 25 %.*



Řešení. Dosadíme-li do předchozího vztahu $N(t) = \frac{1}{2}N_0$ a $t = 5568$, dostáváme

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0\mathrm{e}^{-5568\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-5568\lambda}$$

a po zlogaritmování

$$-\ln 2 = -5568\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{5568}.$$

Pro hledaný čas t za který se množství sníží o 25 % proto platí:

$$\frac{3}{4}N_0 = N_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5568}t} \Rightarrow t = -\frac{5568\ln\frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 2310 \text{ let.}$$

Počáteční množství izotopu uhlíku ^{14}C se sníží o čtvrtinu za 2310 let. ▲

Příklad 1.12. (*Smíchávání*)

a) Nádrž obsahuje 20 kg soli rozpuštěné v 5000 l vody. Solný roztok obsahující 0,03 kg soli na litr přitéká do nádrže rychlostí 25 l/min. Směs v nádrži je rovnoměrně promíchána a vytéká z ní stejnou rychlostí. Jaké množství soli zůstane v nádrži po 30 minutách?

Řešení. Označme $y(t)$ množství soli v nádrži po t minutách. Víme, že $y(0) = 20$ a chceme zjistit $y(30)$. Sestavme proto diferenciální rovnici, kterou bude $y(t)$ splňovat. Zcela jistě pro změnu množství soli platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\text{přítok}) - (\text{odtok}),$$

kde přítokem myslíme množství soli, která se dostane do nádrže a odtokem množství, které z nádrže odejde. Ze zadání úlohy máme

$$(\text{přítok}) = \left(0{,}03\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}\right)\left(25\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\right) = 0{,}75\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}.$$

Nádrž stále obsahuje 5000 l roztoku, proto koncentrace v čase t je $\frac{y(t)}{5000}$ kg/l. Jelikož roztok odtéká rychlostí 25 l/min, dostáváme

$$(\text{odtok}) = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}\right)\left(25\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}.$$

Máme tak rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, kterou umíme řešit. Úpravou a integrováním dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{150 - y} = \int \frac{\mathrm{d}t}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C.$$

Protože má být splněna počáteční podmínka $y(0) = 20$, máme $-\ln 130 = C$ a tak

$$\ln|150 - y| = \ln 130 - \frac{t}{200}$$

$$\ln|150 - y| = \ln 130 - \ln \mathrm{e}^{\frac{t}{200}}$$

a odlogaritmováním dostaneme řešení dané počáteční úlohy ve tvaru

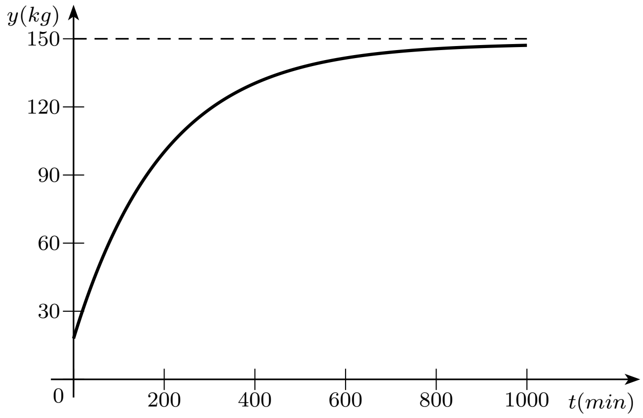
$$y(t) = 150 - 130\mathrm{e}^{-\frac{t}{200}}.$$

Množství soli v nádrži po 30 minutách je

$$y(30) = 150 - 130\mathrm{e}^{-\frac{30}{200}} \doteq 38{,}1\,\mathrm{kg}.$$

▲

b) Jak se změní řešení úlohy, jestliže bude směs vytékat rychlostí 20 l za minutu?



Obrázek 1.1: Graf řešení $y(t) = 150 - 130\mathrm{e}^{-\frac{t}{200}}$

Řešení. Vyjdeme ze stejné rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\text{přítok}) - (\text{odtok}),$$

kde pro přítok bude výraz stejný

$$(\text{přítok}) = \left(0{,}03\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}\right)\left(25\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\right) = 0{,}75\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}.$$

Nyní není ovšem množství roztoku v nádrži konstantní, nýbrž platí, že nádrž obsahuje v čase t zřejmě $5000 + (25-20)t$ litrů roztoku a proto koncentrace v tomto okamžiku bude

$$\frac{y(t)}{5000+5t}.$$

Pro odtok tak dostáváme

$$(\text{odtok}) = \left(\frac{y(t)}{5000+5t}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}\right)\left(20\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\right) = \frac{4y(t)}{1000+t}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}.$$

Máme tak rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}75 - \frac{4y(t)}{1000+t}, \quad y(0) = 20,$$

což je nehomogenní lineární rovnice prvního řádu. Nejprve řešme homogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{4y}{1000+t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{4\,\mathrm{d}t}{1000+t}$$

a po integraci dostaneme

$$\ln|y| = -4\ln(1000+t) + K.$$

Odlogaritmováním a odstraněním absolutní hodnoty dostáváme

$$y_0 = \frac{C}{(1000+t)^4}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme ve tvaru

$$y_p(t) = \frac{C(t)}{(1000+t)^4}.$$

Pak

$$y_p'(t) = \frac{C'(t)(1000+t)^4 - 4C(t)(1000+t)^3}{(1000+t)^8}$$

a po dosazení do rovnice dostáváme

$$C'(t) = 0{,}75(1000+t)^4,$$

odkud

$$C(t) = 0{,}15(1000+t)^5.$$

Partikulární řešení je proto

$$y_p(t) = \frac{0{,}15(1000+t)^5}{(1000+t)^4} = 0{,}15(1000+t)$$

a obecné řešení rovnice je

$$y(t) = \frac{C}{(1000+t)^4} + 0{,}15(1000+t).$$

Dosadíme-li počáteční podmínku $y(0) = 20$, dostaneme

$$20 = \frac{C}{1000^4} + 150$$

a odtud

$$C = -130 \cdot 1000^4.$$

Množství soli je proto dáno funkcí

$$y(t) = 0{,}15(1000+t) - \frac{130 \cdot 1000^4}{(1000+t)^4}$$

a platí

$$y(30) = 0{,}15 \cdot 1030 - \frac{130 \cdot 1000^4}{1030^4} \approx 39\,\mathrm{kg}.$$

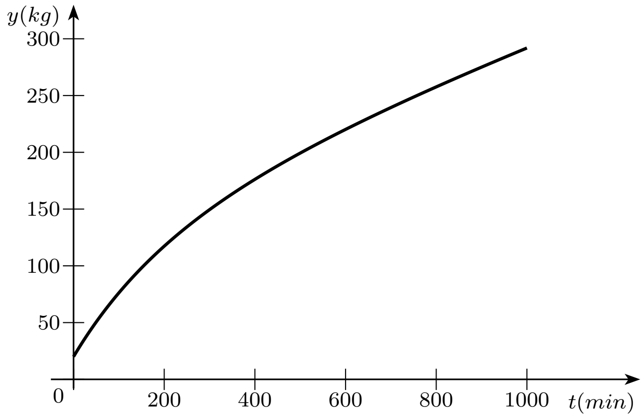
▲

Příklad 1.13. (*Rychlost chemické reakce*) Při jednoduché chemické reakci jednotlivé molekuly dvou reaktantů A a B vytvoří molekulu produktu C:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}.$$

V roce 1864 objevili Cato Maximilian Guldberg a Peter Waage, že rychlost této reakce je přímo úměrná součinu okamžitých koncentrací, neboli

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{C}]}{\mathrm{d}t} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}].$$



Obrázek 1.2: Graf řešení $y(t) = 0{,}15(1000 + t) - \frac{130\cdot 1000^4}{(1000+t)^4}$

a) Odvoďte diferenciální rovnici popisující změnu koncentrace vzniklé látky.
b) Pomocí této rovnice určete rychlost reakce za předpokladu, že počáteční koncentrace obou látek byla shodná.

Řešení. a) Označme $x(t)$, resp. $y(t)$, koncentrace (v molech na litr) v čase t látky A, resp. látky B. Nechť $a = x(0) > 0$, $b = y(0) > 0$ jsou počáteční koncentrace obou látek a $z(t)$ značí úbytek obou látek.
Vzhledem k tomu, že spolu kombinujeme vždy jednu a jednu molekulu látek A a B a vzniká jedna molekula látky C, platí

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Přitom pro samotný úbytek $z(t)$ koncentrace látky A, resp. látky B, platí

$$z(t) = a - x(t), \qquad \text{resp.} \qquad z(t) = b - y(t).$$

Ze zadání víme, že

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = kx(t)y(t)$$

a po dosazení za $x(t)$ a $y(t)$ dostáváme diferenciální rovnici

$$z' = k(z - a)(z - b), \qquad z(0) = 0.$$

b) Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými a navíc předpokládáme, že $a = b$. Úpravou a integrováním dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2} = \int k\,\mathrm{d}t.$$

$$-\frac{1}{z-a} = kt + c$$

Odtud

$$z = -\frac{1}{kt+c} + a \tag{1.5}$$

Z počáteční podmínky dostaneme

$$0 = -\frac{1}{0 + c} + a$$

tedy

$$c = \frac{1}{a}.$$

Dosazením do (1.5) a úpravou získáme řešení

$$z(t) = \frac{a^2kt}{akt + 1}.$$

Pro rychlost reakce pak dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{a^2k}{(akt + 1)^2}.$$

▲

Příklad 1.14. (*Model růstu populace*) Předpokládejme, že rychlost růstu nějaké populace je přímo úměrná její velikosti. To je rozumný předpoklad například pro populace bakterií nebo zvířat v ideálních podmínkách (dostatek potravy, absence predátorů, odolnost vůči nemocem, nelimitované prostředí). Je-li t čas a P je počet jedinců v populaci v čase t, dostaneme pro rychlost růstu populace

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP,$$

kde k je kladná konstanta. Podle tohoto modelu by populace rostla stále rychleji a až do nekonečna. Bylo by tedy jistě rozumné tento model přiblížit realitě například tak, že bychom reflektovali omezené možnosti daného prostředí. Mnoho populací se začne rozrůstat exponenciálně, ale jakmile se počet jedinců přiblíží nosné kapacitě K prostředí (tj. nějaké maximální hodnotě, kterou je dané prostředí schopno uživit) růst se zpomalí, případně velikost populace začne klesat pokud její velikost tuto hodnotu překročí. Pro takovýto model máme tedy tyto předpoklady

- $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \approx kP$ pro malá P, tj. ze začátku populace roste přímo úměrně svojí velikosti
- $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} < 0$, jestliže $P > K$, tj. velikost populace se zmenšuje, jestliže počet jedinců přesáhne kapacitu prostředí.

Oba předpoklady splňuje například následující jednoduchá rovnice

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

která se nazývá *logistická diferenciální rovnice*. Doplňme tuto rovnici o počáteční podmínku $P(0) = P_0$ a vyřešme ji.

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, upravme ji a integrujme

$$\int \frac{K}{P(K-P)}\,\mathrm{d}P = \int k\,\mathrm{d}t.$$

Integrál na levé straně rovnice můžeme rozložit na parciální zlomky a dostáváme tak

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right)\mathrm{d}P = \int k\,\mathrm{d}t$$

$$\ln|P| - \ln|K - P| = kt + C.$$

Upravíme a odlogaritmujeme

$$\left|\frac{K-P}{P}\right| = \mathrm{e}^{-kt-C}.$$

Označíme-li kladnou konstantu $\mathrm{e}^{-C} = A$ a budeme předpokládat, že $A \in \mathbb{R}$, můžeme odstranit absolutní hodnotu

$$\frac{K-P}{P} = A\mathrm{e}^{-kt}.$$

Odtud vyjádříme P a dostaneme tak

$$P = \frac{K}{1 + A\mathrm{e}^{-kt}}.$$

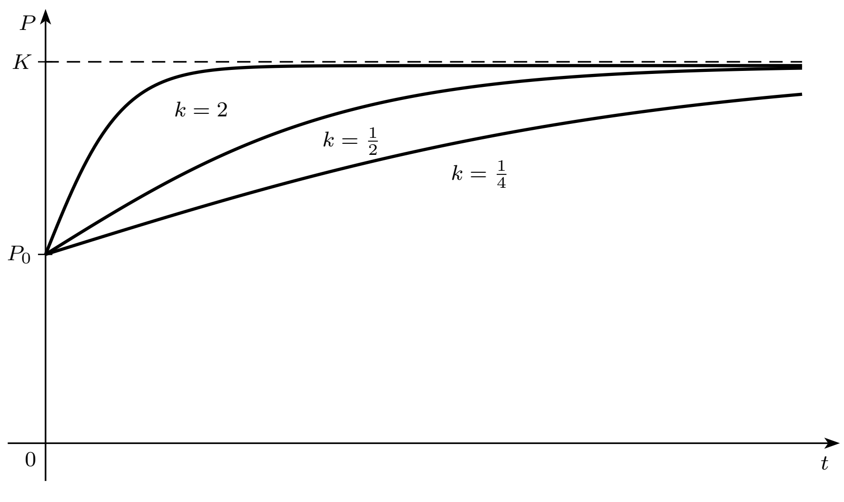
Z počáteční podmínky platí

$$P_0 = \frac{K}{1 + A\mathrm{e}^{0}},$$

odkud

$$A = \frac{K - P_0}{P_0}.$$

▲



Obrázek 1.3: Model růstu populace pro různé volby k

1.5 Numerické řešení počáteční úlohy

V mnoha případech nejsme schopni danou diferenciální rovnici přímo vyřešit a musíme se spokojit pouze s přibližným řešením, kterého můžeme dosáhnout pomocí tzv. *numerických metod*. Nejjednodušší metodou numerického řešení počáteční úlohy je *Eulerova metoda*. Základní myšlenkou této metody je aproximace řešení lomenou čarou.

Uvažujme počáteční úlohu

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Chceme nalézt přibližné řešení $y(x)$ pro $x \in [x_0, x_0+a]$. Postupujeme tak, že interval rozdělíme na n podintervalů délky h_i. Dostaneme tak dělicí body

$$x_1 = x_0 + h_1, \quad x_2 = x_1 + h_2, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n-1} + h_n = x_0 + a,$$

kde $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = a$. Vypočteme $y'_0 = f(x_0, y_0)$ a položíme

$$y_1 = y_0 + h_1 y'_0 = y_0 + h_1 f(x_0, y_0).$$

Podobně určíme $y_2 = y_1 + h_2 f(x_1, y_1)$ atd. a dostaneme přibližné řešení

$$y(x) = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i) \quad \text{pro} \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Nejjednodušším způsobem dělení intervalu je použití stejně vzdálených dělicích bodů. V tomto případě můžeme Eulerovu metodu popsat následovně:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Příklad 1.15. Pomocí Eulerova algoritmu určete přibližné řešení počáteční úlohy

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1 \tag{1.6}$$

s krokem $h = 0{,}1$. Porovnejte tento výsledek s přesným řešením.

Řešení. Máme dáno $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ a $f(x, y) = x + y$. Podle předchozího postupu tak dostáváme

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1, \\ y_2 &= y_1 + h f(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22, \\ y_3 &= y_2 + h f(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,362. \end{aligned}$$

Tedy hodnota řešení v bodě $x = 0{,}3$ je $y(0,3) \approx 1,362$. Pokračovaním v podobných výpočtech dostaneme další hodnoty:

i	x_i	y_i		i	x_i	y_i
1	0,1	1,100000		6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000		7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000		8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200		9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020		10	1,0	3,187485

Přibližné řešení počáteční úlohy (1.6) na intervalu $[0, 1]$ je lomená čára spojující body $[x_i, y_i]$ z předchozí tabulky. Jelikož se jedná o lineární rovnici, můžeme najít přesné řešení, kterým je funkce

$$y(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 1.$$

Porovnáme-li hodnotu tohoto řešení v bodě $x = 1$, tj. $y(1) = 2\mathrm{e} - 2 \approx 3{,}436564$ s řešením pomocí Eulerova algoritmu $y(1) = 3{,}187485$, dostaneme rozdíl 0,249079. ▲

Poznámka 1.16. a) Při použití Eulerovy metody se dopouštíme chyby, která je přímo úměrná velikosti dělicího intervalu, nejjednodušší cestou ke zpřesnění je tak zmenšení dělicího intervalu. Vliv velikosti kroku h na řešení předchozího příkladu v $x = 1$ je vidět v následující tabulce.

Velikost h	Hodnota $y(1)$
$0,500$	$2,500000$
$0,250$	$2,882813$
$0,100$	$3,187485$
$0,050$	$3,306595$
$0,020$	$3,383176$
$0,010$	$3,409628$
$0,005$	$3,423034$
$0,001$	$3,433848$

b) Nelze jednoduše říci, jak velká je chyba, které se dopouštíme při použití Eulerovy metody, snadno však můžeme poznat, zda-li naše přibližné řešení leží pod nebo nad skutečným řešením v okolí nějakého bodu. Dá se ukázat, že v případě, kdy je řešení konvexní (konkávní) v okolí nějakého bodu, pak naše přibližné řešení leží v okolí tohoto bodu pod (nad) skutečným řešením. O tom zda-li je řešení konvexní nebo konkávní se můžeme přesvědčit přímo ze zadání.

Cvičení

1. Rozhodněte, zda je funkce řešením dané diferenciální rovnice:

   a) $y = \frac{1}{x+C}$, $\quad y' = -y^2$, $\qquad$ b) $y = \mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t}$, $\quad y'' + 2y' + y = 0$,

   c) $y = \frac{1}{\sqrt{C-x^2}}$, $\quad y' = xy^3$, $\qquad$ d) $y = \frac{1+C\mathrm{e}^t}{1-C\mathrm{e}^t}$, $\quad y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

   Pro rovnice z části c) a d) najděte funkce, které vyhovují počáteční podmínce $y(0) = 2$.

2. Řešte rovnice se separovanými proměnnými:

   a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$, $\qquad$ b) $2y - x^3y' = 0$,

   c) $1 + y^2 + xyy' = 0$, $\qquad$ d) $y + xy + xy' - xyy' = 0$,

   e) $xyy' = 1 - x^2$, $\qquad$ f) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{t\mathrm{e}^t}{y\sqrt{1+y^2}}$.

3. Řešte dané počáteční úlohy:

a) $\frac{y}{y'} - x = 0, \quad y(1) = 1,$ b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + 1, \quad y(1) = 0,$

c) $xy' + y = y^2, \quad y(-1) = \frac{1}{2},$ d) $\sin y \cos x \mathrm{d}y = \cos y \sin x \mathrm{d}x, \quad y(0) = \frac{\pi}{4},$

e) $2(1 + \mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0,$ f) $y \ln y + xy' = 0, \quad y(1) = 1.$

4. Řešte lineární rovnice:

a) $y' + 2y = 4x,$ b) $y' + 3x^2y = 6x^2,$

c) $y' + 2y = 2\mathrm{e}^x,$ d) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2,$

e) $y' + 4x^3y = x^2\mathrm{e}^{-x^4},$ f) $y'\mathrm{e}^{x^2} + 2xy\mathrm{e}^{x^2} = \cos x.$

5. Řešte počáteční úlohu:

a) $xy' + y - \mathrm{e}^x = 0, \quad y(1) = 0,$ b) $2xy' + x^2 - 6y = 0, \quad y(1) = 1,$

c) $y' + y = x + \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0,$ d) $xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y(1) = 0.$

6. Mějme tzv. monomolekulární reakci prvního řádu. Je to reakce typu $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{X}$, které se zúčastňují molekuly jedné látky a jejíž rychlost je přímo úměrná množství látky (např. inverze cukru, rozpad kysličníku dusičnatého). Vypočtěte množství vznikající látky v čase t a určete, k jaké hodnotě se blíží pro $t \to \infty$.

7. Je experimentálně dokázáno, že rychlost reakce $\mathrm{H}_2 + \mathrm{Br}_2 \longrightarrow 2\mathrm{HBr}$ se řídí rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a - x)(b - x)^{\frac{1}{2}},$$

kde $x = [\mathrm{HBr}]$, $a = [\mathrm{H}_2]$ a $b = [\mathrm{Br}_2]$. Najděte funkci $x(t)$ v případě, že koncentrace obou vstupních látek jsou shodné a víte-li, že $x(0) = 0$.

8. Roztok glukózy je nitrožilně podáván do krevního oběhu konstantní rychlostí r. Jak je glukóza přidávána, tak se mění na další látky a ubývá v krvi rychlostí, která je úměrná její koncentraci. Proto je model pro koncentraci $C = C(t)$ roztoku glukózy v krevním oběhu popsán diferenciální rovnicí:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = r - kC,$$

kde k je nějaká kladná konstanta. Řešením rovnice najděte funkci $C(t)$ víte-li, že $C(0) = C_0$.

Výsledky:

1. a) ano, b) ano, c) ano, $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}$, d) ano, $y = \frac{3+\mathrm{e}^t}{3-\mathrm{e}^t}$
2. a) $y = -\frac{1}{x+C}$ a $y = 0$, b) $y = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, c) $C = (y^2+1)x^2$, d) $\ln|xy| + x - y = C$, e) $y^2 = -x^2 + 2\ln|x| + C$, f) $y^2 = \sqrt[3]{9(t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + C)^2} - 1$.
3. a) $y = x$, b) $y = \mathrm{tg}\,(x-1)$, c) $y = \frac{1}{1-x}$, d) $\sqrt{2}\cos y = \cos x$, e) $y^2 = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$, f) $y = 1$.
4. a) $y = C\mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1$, b) $y = C\mathrm{e}^{-x^3} + 2$, c) $y = C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^x$, d) $y = (C+x)(1+x^2)$, e) $y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\mathrm{e}^{-x^4}$, f) $y = (\sin x + C)\mathrm{e}^{-x^2}$.
5. a) $y = \frac{\mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}}{x}$, b) $y = \frac{1}{2}(x^2 + x^3)$, c) $y = x - 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, d) $y = \frac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$.
6. Návod: Je-li množství dané látky a a množství vznikající látky $x(t)$ v čase t, dostaneme pro funkci $x(t)$ rovnici:
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x) \qquad (k > 0),$$
kde k je rychlostní konstanta a $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ je rychlost vzniku látky.
Výsledek: Množství vznikající látky je $x = a(1 - \mathrm{e}^{-kt})$, pro $t \to \infty$ je $x \to a$.
7. $x(t) = a - \frac{4}{(kt + \frac{2}{\sqrt{a}})^2}$
8. $C(t) = (C_0 - \frac{r}{k})\mathrm{e}^{-kt} + \frac{r}{k}$

Kapitola 2

Diferenciální rovnice druhého řádu

Dalším důležitým typem diferenciálních rovnic jsou lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2.1}$$

kde p, q jsou reálná čísla a $f(x)$ je spojitá funkce. Je-li $f(x) \equiv 0$ (říkáme, že je identicky rovna nule), nazývá se rovnice (2.1) *homogenní.* V opačném případě, tj. $f(x) \not\equiv 0$, se nazývá *nehomogenní.* S těmito rovnicemi se často setkáváme například při použití druhého Newtonova zákona.

Příklad 2.1. Rovnice

$$\text{a)}\quad y'' = y, \qquad\qquad \text{b)}\quad y'' + y = 0, \qquad\qquad \text{c)}\quad y'' = 0$$

jsou diferenciální rovnice druhého řádu.

V případě a) je řešením funkce $y = \mathrm{e}^x$, ale také funkce $y = \mathrm{e}^{-x}$. Navíc můžeme ověřit, že všechny funkce tvaru $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$, kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty, jsou řešeními této rovnice.

V případě b) je řešením rovnice například funkce $y = \sin x$, protože $(\sin x)'' + \sin x = 0$ pro všechna x. Podobně řešením této rovnice je také funkce $y = \cos x$ a opět lze ověřit, že všechny funkce tvaru $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ jsou jejími řešeními.

V případě c) můžeme rovnici řešit postupnou integrací: Integrací rovnice $(y')' = 0$ plyne $y'(x) = C_1$ a odtud další integrací dostaneme $y(x) = C_1 x + C_2$, kde C_1, C_2 jsou konstanty.

2.1 Počáteční úloha

Podobně jako u diferenciálních rovnic prvního řádu potřebujeme v praktických úlohách nalézt řešení diferenciální rovnice pro $x \geq 0$, které splňuje dané počáteční podmínky.

K tomu, aby měla rovnice (2.1) právě jedno řešení, je třeba předepsat dvě počáteční podmínky

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Příklad 2.2. Řešte počáteční úlohu

$$\text{a)}\quad y'' = \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \qquad\qquad \text{b)}\quad y'' = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Řešení. a) Postupně dostáváme

$$y' = \int e^x \, dx = e^x + C_1,$$

$$y = \int (e^x + C_1) \, dx = e^x + C_1 x + C_2.$$

Řešením naší rovnice bez počáteční podmínky jsou všechny funkce, které dostaneme z předpisu $y = e^x + C_1 x + C_2$ volbou konstant C_1 a C_2.
Hledáme-li řešení, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, spočteme $y' = e^x + C_1$ a dosadíme za proměnné x a y do funkčního předpisu a do předpisu pro první derivaci funkce:

$$1 = e^0 + 0 \cdot C_1 + C_2, \qquad 0 = e^0 + C_1.$$

Odtud $C_2 = 0$ a $C_1 = -1$ a řešením počáteční úlohy je funkce $y = e^x - x$.
b) Postupujeme obdobně jako v předchozím případě

$$y' = \int \cos x \, dx = \sin x + C_1,$$

$$y = \int (\sin x + C_1) \, dx = -\cos x + C_1 x + C_2.$$

Proto řešením rovnice bez počáteční podmínky jsou všechny funkce, které dostaneme z předpisu $y = -\cos x + C_1 x + C_2$ volbou konstant C_1 a C_2.
Máme-li nalézt řešení počáteční úlohy, tak podobně jako v předchozím případě, dosadíme do funkčního předpisu a do předpisu pro první derivaci:

$$1 = -\cos 0 + 0 \cdot C_1 + C_2, \qquad 1 = \sin 0 + C_1.$$

Odtud dostáváme $C_1 = 1$ a $C_2 = 2$, řešením počáteční úlohy je funkce

$$y = -\cos x + x + 2.$$

▲

2.2 Homogenní rovnice

Uvažujme rovnici (2.1), kde $f(x) \equiv 0$, tj. rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.2}$$

kde p, q jsou reálná čísla.
▷ **Vlastnosti homogenní rovnice.**
Jsou-li dvě funkce y_1, y_2 řešením rovnice (2.2), pak je také funkce $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ řešením této rovnice. Právě pro tuto vlastnost se rovnice (2.1) nazývá *lineární diferenciální rovnice.*
Dvě řešení y_1, y_2 rovnice (2.2) jsou *lineárně nezávislá*, jestliže determinant

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový, tj. $w(x) \neq 0$. Tento determinant se nazývá *wronskián*. Dá se ukázat, že wronskián dvou řešení je buď identicky nula nebo je různý od nuly pro všechna x. Je-li $p = 0$, pak $w(x)$ je konstanta.

Jsou-li funkce y_1, y_2 lineárně nezávislá řešení rovnice (2.2), pak libovolné řešení této rovnice dostaneme lineární kombinací těchto řešení, tj.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Toto řešení nazýváme *obecné řešení* rovnice (2.2).

Příklad 2.3. Ověřte, že následující funkce jsou lineárně nezávislé

$$\text{a)} \quad \mathrm{e}^x \quad \text{a} \quad \mathrm{e}^{-x}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \cos x \quad \text{a} \quad \sin x.$$

Řešení. a) Vypočteme wronskián těchto funkcí. Dostaneme

$$w(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = -2 \neq 0.$$

V úvodu jsme ukázali, že funkce $y_1 = \mathrm{e}^x$ a $y_2 = \mathrm{e}^{-x}$ jsou řešeními rovnice $y'' - y = 0$. Protože jejich wronskián je různý od nuly, jsou tato řešení dokonce lineárně nezávislá řešení této rovnice a tvoří tak její obecné řešení tvaru $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$.

b) Wronskián těchto funkcí je

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Jelikož je wronskián různý od nuly, jedná se o lineárně nezávislé funkce.

▲

▷ **Nalezení řešení homogenní rovnice.**

Řešení rovnice (2.2) hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde λ je vhodné číslo. Vypočteme

$$y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x},$$

a dosadíme do rovnice (2.2)

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + p\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + q\mathrm{e}^{\lambda x} = 0.$$

Protože $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, musí λ splňovat rovnici

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{2.3}$$

Tato kvadratická rovnice se nazývá *charakteristická rovnice* diferenciální rovnice (2.2).

Mohou nastat tyto případy:

(1) Kvadratická rovnice má *dva reálné různé kořeny* λ_1, λ_2. Pak řešením homogenní rovnice jsou funkce

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

a obecné řešení je
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{2.4}$$

(2) Kvadratická rovnice má *jeden dvojnásobný kořen* λ. Pak řešením homogenní rovnice jsou funkce
$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}$$
a obecné řešení je
$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \tag{2.5}$$

(3) Kvadratická rovnice má *dva komplexně sdružené kořeny* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Pak řešením homogenní rovnice je například funkce
$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$
která je komplexní funkcí. Použijeme-li Eulerův vztah
$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \sin\beta x,$$
dostaneme řešení homogenní rovnice ve tvaru
$$y = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x.$$
Lze ukázat, že tato funkce je řešením homogenní rovnice (2.2) právě tehdy, když je řešením této rovnice reálná a imaginární část této funkce. Proto řešením homogenní rovnice jsou funkce
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$
Obecné řešení pak je
$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{2.6}$$
Všimněme si, že stejný výsledek dostaneme i pro druhý kořen $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

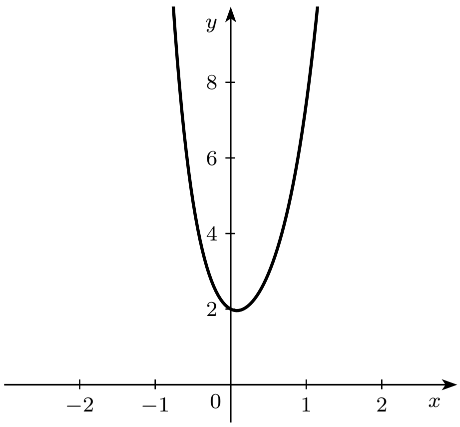
Příklad 2.4. Řešte následující homogenní rovnice

a) $y'' + y' - 6y = 0$ b) $y'' - y' = 0$

c) $y'' + 2y' + 1 = 0$ d) $y'' - 4y' + 85y = 0$

Řešení. a) Napíšeme charakteristickou rovnici
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Její kořeny jsou
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \quad \text{tj.} \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$
Oba kořeny jsou reálné a jednoduché, každému proto přísluší jedno řešení
$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{-3x}$$
a obecné řešení je pak
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$
Zvolíme-li $C_1 = C_2 = 1$, dostaneme řešení $y = e^{2x} + e^{-3x}$, které je znázorněno na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Řešení rovnice $y'' + y' - 6 = 0$ s volbou $C_1 = C_2 = 1$

b) Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$. Oba jsou jednoduché a reálné, řešením jsou funkce

$$y_1 = \mathrm{e}^{0x} = 1 \qquad y_2 = \mathrm{e}^x$$

a obecné řešení rovnice je tak tvaru

$$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^x.$$

c) Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

a má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -1$, kterému odpovídá dvojice řešení

$$y_1 = \mathrm{e}^{-x} \qquad y_2 = x\mathrm{e}^{-x}.$$

Tyto funkce jsou pro $x \geq 0$ znázorněny na obrázku 2.2. Obecné řešení rovnice je tvaru

$$y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2x\mathrm{e}^{-x}.$$

d) Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 85 = 0.$$

Její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 340}}{2} = \frac{4 \pm 18i}{2} = 2 \pm 9i.$$

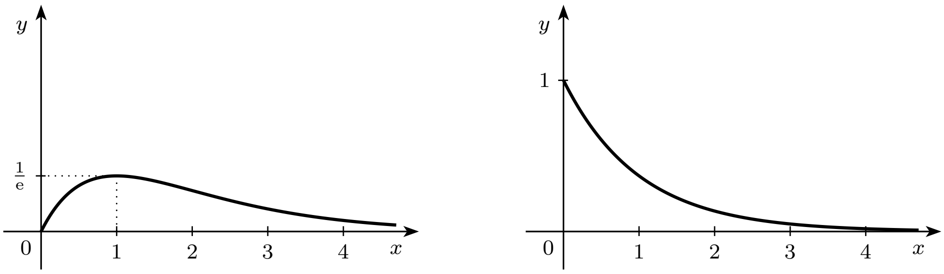
K této dvojici komplexně sdružených kořenů ($\alpha = 2, \beta = 9$) přísluší řešení

$$y_1 = \mathrm{e}^{2x} \cos 9x \qquad y_2 = \mathrm{e}^{2x} \sin 9x.$$

Funkce $y = \mathrm{e}^{2x} \sin 9x$ je znázorněna na obrázku 2.3. Obecné řešení je

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} \cos 9x + C_2\mathrm{e}^{2x} \sin 9x.$$

▲



(a) Řešení $y = x\mathrm{e}^{-x}$ (b) Řešení $y = \mathrm{e}^{-x}$

Obrázek 2.2: Různá řešení rovnice $y'' + 2y' + 1 = 0$

Příklad 2.5. Napište lineární diferenciální rovnici druhého řádu, která má řešení

$$\text{a) } y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-3x}; \qquad \text{b) } y_1 = e^x \sin x.$$

Řešení. a) Z podoby řešení plyne, že charakteristická rovnice hledané diferenciální rovnice musí mít za kořeny čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -3$. Charakteristická rovnice je tak například rovnice tvaru

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Tato rovnice je příslušná diferenciální rovnici

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

b) Z tvaru řešení plyne, že charakteristická rovnice musí mít kořen $\lambda_1 = 1+i$. Jelikož se jedná o kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, druhé řešení musí být komplexně sdružené, proto $\lambda_2 = 1 - i$. Dostáváme tak charakteristickou rovnici tvaru

$$(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0.$$

Roznásobením, případně úpravou podle vzorce $a^2 - b^2$, a využitím $i^2 = -1$ dostaneme

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Tato rovnice je příslušná diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 2 = 0.$$

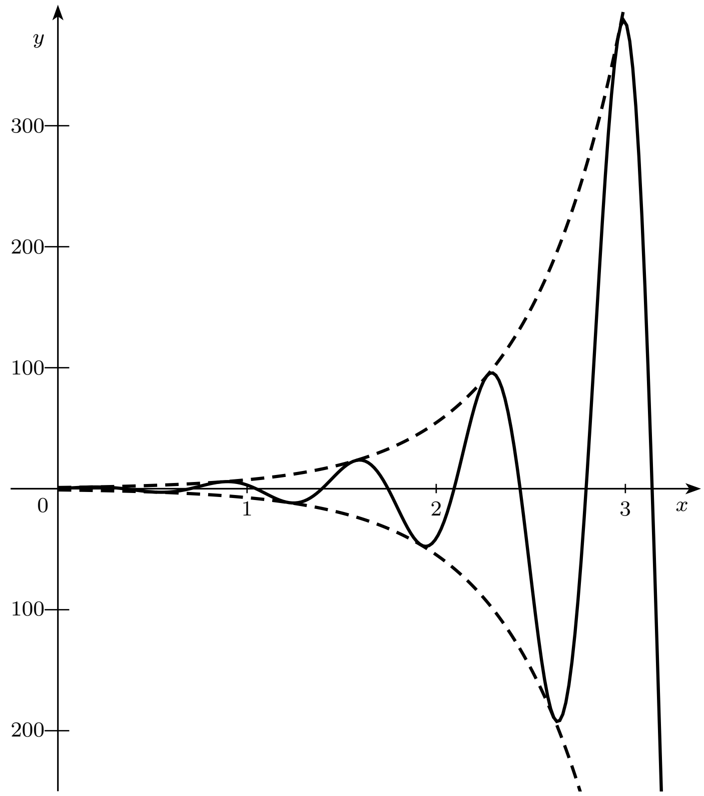
▲

2.3 Nehomogenní rovnice

Uvažujme nehomogenní diferenciální rovnici

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{2.7}$$

Podobně jako u diferenciální rovnice prvního řádu platí následující věta:



Obrázek 2.3: Graf funkce $y = \mathrm{e}^{2x} \sin 9x$

Věta 2.6. *Nechť* $y_0(x)$ *je obecné řešení homogenní rovnice* (2.2) *a* $y_p(x)$ *je partikulární řešení nehomogenní rovnice* (2.7)*. Pak obecné řešení této nehomogenní rovnice je*

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x).$$

Otázkou tedy je, jak najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Univerzální metodou je metoda variace konstanty, která je však u rovnic druhého řádu složitější (podrobnosti viz [**?**]). Ve speciálních případech, kde je funkce $f(x)$ „jednoduchá", je výhodná metoda neurčitých koeficientů, kdy hledáme řešení v předepsaném tvaru. Ukažme si dva případy:

1) Funkce $f(x)$ je polynom stupně n.
   a) Jestliže číslo 0 není kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty. Tyto koeficienty určíme dosazením tohoto polynomu a jeho derivací do rovnice.
   b) Jestliže číslo 0 je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = xQ(x)$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty.
   c) Jestliže číslo 0 je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = x^2Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty.
2) Funkce $f(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde $P(x)$ je polynom stupně n.

a) Jestliže číslo α není kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty. Tyto koeficienty určíme dosazením tohoto polynomu a jeho derivací do rovnice.
b) Jestliže číslo α je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = xQ(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty. Podobně pro dvojnásobný kořen uvažujeme řešení $y_0 = x^2Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$

Příklad 2.7. Najděte obecné řešení rovnice

a) $y'' - 2y' + 2y = 2x$ b) $y'' - y' = 2(1 - x)$

c) $2y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^x$ d) $y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^{-x}$

Řešení. a) Homogenní rovnice je

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

má dvojici komplexních kořenů $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Obecné řešení homogenní rovnice je tak

$$y_0 = \mathrm{e}^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

Jelikož 0 není kořenem charakteristické rovnice, předpokládáme partikulární řešení $y_p(x)$ ve tvaru $y_p(x) = P(x)$, kde $P(x)$ je polynom stejného stupně jako polynom na pravé straně nehomogenní rovnice, proto platí

$$y_p(x) = Ax + B, \qquad y_p'(x) = A, \qquad y_p''(x) = 0.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$0 - 2A + 2(Ax + B) = 2x$$

$$2Ax - 2A + 2B = 2x.$$

Porovnáním koeficientů u x^1 a x^0 dostaneme $A = 1$ a $B = 1$. Odtud $y_p(x) = x + 1$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = \mathrm{e}^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + x + 1.$$

b) Homogenní rovnice je

$$y'' - y' = 0$$

K ní příslušná charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Tato rovnice má dva reálné jednoduché kořeny $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$. Obecné řešení homogenní rovnice je tak

$$y_0 = C_1 + C_2\mathrm{e}^x.$$

Jelikož je 0 řešením charakteristické rovnice předpokládáme partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = xP(x)$, kde $P(x)$ je polynom stejného stupně jako polynom na pravé straně nehomogenní rovnice, proto platí

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx, \qquad y_p'(x) = 2Ax + B, \qquad y_p''(x) = 2A.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$2A - (2Ax + B) = -2x + 2$$

$$-2Ax + 2A - B = -2x + 2.$$

Porovnáním koeficientů u x^1 a x^0 dostaneme $A = 1$ a $B = 0$. Odtud $y_p(x) = x^2$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + x^2.$$

c) Příslušná homogenní rovnice je

$$2y'' + y' - y = 0.$$

Její charakteristická rovnice má tvar

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0,$$

a kořeny jsou $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Obecné řešení homogenní rovnice je proto

$$y_0 = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

Protože číslo 1 není řešením charakteristické rovnice, předpokládáme partikulární řešení ve tvaru $y(x) = A\mathrm{e}^x$. Platí

$$y_p(x) = A\mathrm{e}^x, \qquad y_p'(x) = A\mathrm{e}^x, \qquad y_p''(x) = A\mathrm{e}^x.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$2A\mathrm{e}^x + A\mathrm{e}^x - A\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$$

$$2A\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x.$$

Vidíme, že $A = 1$, odtud $y_p(x) = \mathrm{e}^x$ a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^x.$$

d) Homogenní rovnice je tvaru

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

příslušná charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

a má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Obecné řešení homogenní rovnice je proto

$$y_0 = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x}.$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha = -1$ není řešením charakteristické rovnice, hledáme partikulární řešení $y_p(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{-x}$. Platí

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (Ax + B)\mathrm{e}^{-x}, \\ y_p'(x) &= A\mathrm{e}^{-x} - (Ax + B)\mathrm{e}^{-x} = (-Ax + A - B)\mathrm{e}^{-x}, \\ y_p''(x) &= -A\mathrm{e}^{-x} - (-Ax + A - B)\mathrm{e}^{-x} = (Ax - 2A + B)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$(Ax - 2A + B)\mathrm{e}^{-x} - 3(-Ax + A - B)\mathrm{e}^{-x} + 2(Ax + B)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$$

a po úpravě

$$6Ax - 5A + 6B = x.$$

Porovnáním koeficientů u x^1 a x^0 dostaneme $A = \frac{1}{6}$ a $B = \frac{5}{36}$. Odtud

$$y_p(x) = \frac{1}{36}(6x + 5)\mathrm{e}^{-x}$$

a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{36}(6x + 5)\mathrm{e}^{-x}.$$

▲

Příklad 2.8. Najděte řešení počáteční úlohy

a) $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ b) $y'' - 3y' + 2y = 3\mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Řešení. a) Charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Obecné řešení je tak

$$y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}.$$

Abychom mohli dosadit počáteční podmínky spočítáme

$$y' = 2C_1 \mathrm{e}^{2x} - 2C_2 \mathrm{e}^{-2x}.$$

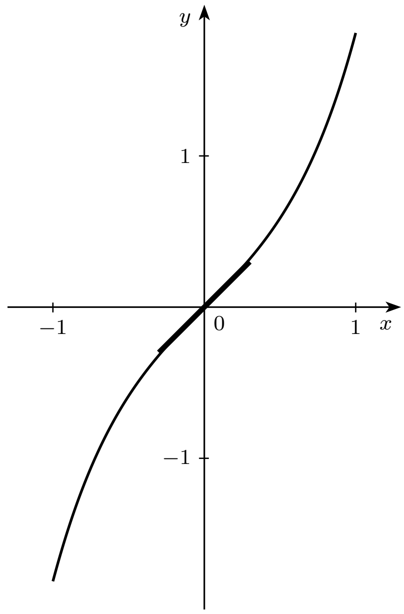
Dosadíme počáteční podmínky a dostaneme soustavu rovnic

$$0 = C_1 + C_2 \qquad 1 = 2C_1 - 2C_2,$$

jejíž řešení je $C_1 = \frac{1}{4}$ a $C_2 = -\frac{1}{4}$. Řešením počáteční úlohy je tak funkce

$$y = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}.$$

Graf tohoto řešení včetně znázornění počáteční podmínky je na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Graf funkce $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$

b) Nejprve určeme obecné řešení homogenní rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Obecné řešení homogenní rovnice je

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Protože $\alpha = 2$ je řešením charakteristické rovnice, hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $y_p(x) = Axe^{2x}$. Platí

$$y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = (A\ + 2Ax)e^{2x}, \quad y_p''(x) = 2Ae^{2x} + 2(A + 2Ax)e^{2x}.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 3(A + 2Ax)e^{2x} + 2Axe^{2x} = 3e^{2x}$$

a po roznásobení a sečtení

$$Ae^{2x} = 3e^{2x}.$$

Odtud vidíme, že $A = 3$, a proto $y_p(x) = 3xe^{2x}$. Obecné řešení nehomogenní rovnice pak je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

Nyní vypočítáme

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 3e^{2x} + 6xe^{2x}$$

a dosadíme počáteční podmínky

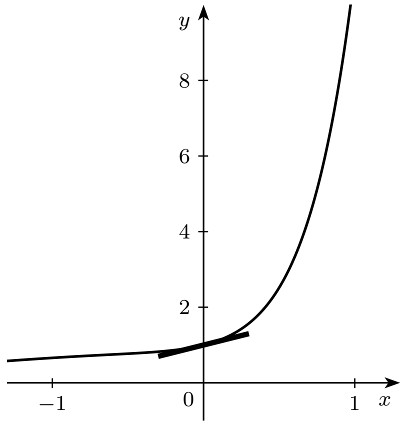
$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 0, \quad \text{tj.} \quad C_1 + C_2 = 1,$$

$$1 = C_1 e^0 + 2C_2 e^0 + 3e^0 + 0, \quad \text{tj.} \quad C_1 + 2C_2 = -2.$$

Řešení této soustavy rovnic je $C_1 = 4$ a $C_2 = -3$. Řešením dané počáteční úlohy je tak funkce

$$y = 4e^x - 3e^{2x} + 3xe^{2x}$$

▲



Obrázek 2.5: Graf funkce $y = 4e^x - 3e^{2x} + 3xe^{2x}$

2.4 Okrajová úloha

V praxi někdy potřebujeme nalézt řešení tzv. *okrajové úlohy*, tj. chceme nalézt řešení diferenciální rovnice splňující jisté podmínky v krajních bodech intervalu. Například, řešení okrajové úlohy

$$y'' + \alpha y = 0, \qquad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2.8}$$

kde α je vhodné číslo, hledáme analogicky jako při řešení počáteční úlohy, tj. nalezneme obecné řešení rovnice a z okrajových podmínek určíme hodnotu α a řešení y. Na rozdíl od počáteční úlohy nemáme zajištěno, že bude existovat právě jedno řešení $y \not\equiv 0$. Okrajová úloha může mít i nekonečně mnoho řešení, případně jen *triviální řešení* $y \equiv 0$.

Dá se ukázat, že v případě, kdy má okrajová úloha nekonečně mnoho řešení, tvoří tato řešení posloupnost funkcí $y_n(x)$. Tyto funkce se nazývají *vlastní funkce* a odpovídající hodnoty α_n se nazývají *vlastní čísla*.

Řešme nyní úlohu (2.8). Obecné řešení rovnice $y'' + \alpha y = 0$ vypadá následovně

$$\begin{aligned} \alpha < 0: &\qquad y = C_1 e^{\sqrt{\alpha} x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha} x}, \\ \alpha = 0: &\qquad y = C_1 x + C_2, \\ \alpha > 0: &\qquad y = C_1 \cos \sqrt{\alpha} x + C_2 \sin \sqrt{\alpha} x. \end{aligned}$$

Pro $\alpha \leq 0$ existuje zřejmě jen triviální řešení úlohy (2.8). Uvažujme tedy $\alpha > 0$ a dosaďme do obecného řešení okrajové podmínky, dostaneme tak soustavu rovnic

$$0 = C_1, \qquad 0 = C_2 \sin \sqrt{\alpha}\pi.$$

Protože hledáme netriviální řešení, musí být $C_2 \neq 0$. Druhá rovnice bude splněna pouze v případě, že

$$\sin \sqrt{\alpha}\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha}\pi = k\pi \Rightarrow \alpha = k^2.$$

Tedy čísla

$$\alpha_k = k^2, \qquad k \in \mathbb{N}$$

jsou vlastní čísla okrajové úlohy a pro každé α_k má úloha nekonečně mnoho řešení

$$y_k = \sin kx, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 2.9. Vlastní čísla okrajové úlohy úzce souvisí s řešitelností nehomogenní okrajové úlohy

$$y'' + \alpha y = f(x), \qquad y(0) = y(a) = 0.$$

Dá se ukázat, že tato úloha je jednoznačně řešitelná právě tehdy, když α není vlastní číslo příslušného homogenního problému. V případě, že α je vlastní číslo příslušného homogenního problému, má úloha nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když pro vlastní funkci $y(x)$ platí

$$\int_0^a y(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pokud toto neplatí nemá okrajová úloha žádné řešení.

Využití můžeme ilustrovat na příkladu z kvantové mechaniky.

Příklad 2.10. Podle kvantové mechaniky je pohyb částice za jistých omezení popsán okrajovou úlohou

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha^2\psi, \qquad \psi(0) = \psi(a) = 0,$$

kde ψ je vlnová funkce částice, x je prostorová proměnná, $a > 0$ je konstanta, $\alpha^2 = \left(\frac{2m}{h^2}\right)E$, $m > 0$ je hmotnost, h je Planckova konstanta a $E > 0$ energie částice.

Najděte netriviální řešení ψ této okrajové úlohy. Pro které hodnoty E tato řešení existují?

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\alpha i.$$

Obecné řešení je tvaru

$$\psi(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x,$$

kde A, B jsou konstanty. Nyní najdeme konstanty A, B tak, aby byly splněny okrajové podmínky. Pro $x = 0$ dostaneme

$$A\sin 0 + B\cos 0 = 0 \quad \text{tj.} \quad B = 0.$$

Pro $x = a$ dostaneme

$$A \sin \alpha a + B \cos \alpha a = 0 \quad \text{tj.} \quad A \sin \alpha a = 0.$$

Kdyby $A = 0$, pak také $\psi(x) \equiv 0$ a rovnice by měla jen triviální řešení. Proto

$$\sin \alpha a = 0 \Rightarrow \alpha a = \pm n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dostáváme tak vlastní čísla

$$\alpha_n = \pm \frac{n\pi}{a}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

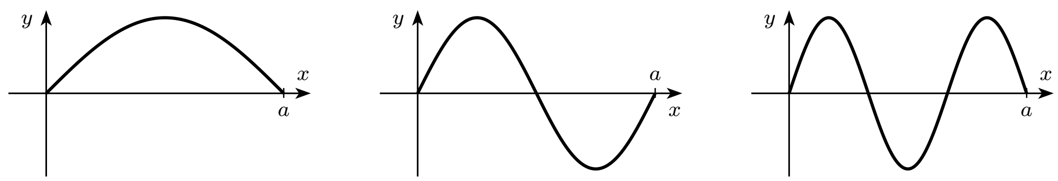
Řešením okrajové úlohy je posloupnost funkcí

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \qquad n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathbb{R}.$$

Tato řešení odpovídají energii

$$E_n = \alpha^2 \frac{h^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \frac{h^2}{2m}.$$

▲



(a) Řešení pro $n = 1$ (b) Řešení pro $n = 2$ (c) Řešení pro $n = 3$

Obrázek 2.6: Různá řešení okrajové úlohy 2.10

Cvičení

1. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ b) $y'' + 16y = 0$

c) $y'' + 8y' + 16y = 0$ d) $y'' - 6y' + 13y = 0$

e) $y'' - 16y = 0$ f) $y'' - 4y' + 5y = 0$

2. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $y'' + 4y' - 5y = 1,$ b) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-2x},$

c) $y'' + y = x^3,$ d) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1,$

e) $y'' + 3y' + 2y = (20x + 29)\mathrm{e}^{3x},$ f) $y'' + 4y' + 4 = x\mathrm{e}^{2x}.$

3. Najděte řešení počáteční úlohy:

   a) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1,$

   b) $3y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1,$

   c) $y'' - 4y' + 4y = 2 - x, \quad y(0) = y'(0) = 1,$

   d) $y'' - 2y' + y = 1 + x, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -3.$

4. Působíme-li elektrickým polem na roztok elektrolytu, začnou se ionty působením elektrostatických sil pohybovat směrem k elektrodám. Zároveň je však rychlost pohybu iontů brzděna přímo úměrně třecími silami. Podle Druhého Newtonova zákona je pohyb kationtu s elektrickým nábojem $q > 0$ a hmotností $m > 0$ podél osy x popsán následující počáteční úlohou
$$x''(t) + \frac{k}{m}x'(t) = \frac{q}{m}E, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$
kde $t \geq 0$ je čas, $k \geq 0$ je koeficient úměrnosti třecích sil, $E \geq 0$ je síla homogenního elektrického pole a x_0, v_0 jsou počáteční pozice a rychlost iontu. (Poslední 4 hodnoty považujeme za konstanty.) Najděte řešení počáteční úlohy pro $0 \leq t \leq \infty$.

5. Určete řešení okrajové úlohy
$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha^2\psi, \qquad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(0) = 0, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Výsledky:

1. a) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x}$, b) $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$,
   c) $y = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2x\mathrm{e}^{-4x}$, d) $y = \mathrm{e}^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$,
   e) $y = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-4x}$, f) $y = C_1\mathrm{e}^{2x}\cos x + C_2\mathrm{e}^{2x}\sin x$.
2. a) $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-5x} - \frac{1}{5}$, b) $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}$,
   c) $y = C_1\sin x + C_2\cos x + x^3 - 6x$, d) $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$,
   e) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + (x+1)\mathrm{e}^{3x}$, f) $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-2x} + \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32}\right)\mathrm{e}^{2x}$.
3. a) $y = 2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$, b) $y = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}$,
   c) $y = \frac{1}{4}(3\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x} - x + 1)$, d) $y = x + 3 - \mathrm{e}^{x}(1 + 3x)$.
4. $x(t) = x_0 + \frac{qE}{k}t + \left(\frac{mv_0}{k} - \frac{qmE}{k^2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$
5. Řešením jsou funkce $\psi_n(x) = A_n\cos(2n+1)x$ pro $\alpha_n = (2n+1)^2$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$.