Tyto nové souřadnice jsou v bázi $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tato báze není ortonormální a ani ortogonální. $\langle u_1, u_2 \rangle \neq 0$.

<u>Nalezení ortonormální báze</u> : Najdeme vl. čísla a vl. vektory symetrické matice A

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 =$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad v_1 = \left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^T \qquad \langle v_1, v_2 \rangle = 1 - 1 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad v_2 = \left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^T$$

Jordanův kanonický tvar (JKT)

Unitární a samoadjungované operátory mají tu vlastnost, že v daném prostoru existuje báze tvořená vlastními vektory. My jsme si na několika příkladech ukázali, že to není obecně pravda (v těchto příkladech je alg. násobnost vl. čísla > geom násobnost) Jordanův kanonický tvar matice je jakýsi obecný a přitom jednoduchý tvar s vlastností, že každý operátor má nad $\mathbb{C}$ bázi, v níž ~~A~~ matice tohoto operátoru ~~A~~ v JKT.

Jordanova buňka $J_k(\lambda)$ je matice $k \times k$ tvaru

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Předpokládejme, že $\varphi : U \to U$ má bázi $\alpha = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ takovou, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\varphi(v_1) = \lambda v_1$ $\quad$ v_1 je vl. vektor k λ_1

(1) $\quad \varphi(v_2) = v_1 + \lambda v_2$

$\varphi(v_3) = v_2 + \lambda v_3$

$\vdots$

$\varphi(v_k) = v_{k-1} + \lambda v_k$

<u>Obrácené tvrzení</u> Nechť $v_1 \neq \vec{0}$, $v_2, \ldots v_k$ tvoří řetězec operátoru $\varphi: U \longrightarrow U$ pro vlastní číslo λ. Pak $v_1, v_2, \ldots v_k$ jsou lin. nezávislé, $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ je invariantní vůči φ a v bázi $\alpha = (v_1, v_2, \ldots v_k)$ prostoru V je

$$\left(\varphi / V\right)_{\alpha,\alpha} = J_k(\lambda).$$

<u>Důkaz</u>: Důkaz lin. nezávislosti je indukcí. $v_1 \neq \vec{0}$ je lin. nezávislý. Předp. že nejaký řetězec $v_1, v_2, \ldots v_j$ jsou LN. Dokažeme, že i $v_1, \ldots, v_{j+1}$ jsou lin. nezávislé.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_{j+1} v_{j+1} = \vec{0}$$

Na tuto rovnost aplikujeme $\varphi - \lambda id$

$$a_1(\varphi - \lambda id) v_1 + a_2 (\varphi - \lambda id) v_2 + \ldots + a_{j+1}(\varphi - \lambda id) v_{j+1} = 0$$

① Věta o Jordanově kanonickém tvaru

Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor na prostoru dim n nad $\mathbb{K}$. Nechť charakteristický polynom operátoru φ má v $\mathbb{K}$ n kořenů včetně násobností. Potom v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Matice J je určena jednoznačně až na pořadí bloků.

3 Maticová verze Nechť A je komplexní matice $n \times n$. Potom je podobná matici J v JKT. Matice J je určena jednoznačně, až na pořadí buněk.

2 $\Rightarrow$ 3 Zvolme $V = \mathbb{C}^n$ a $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = Ax$.

Podle 2 existuje v $\mathbb{C}^n$ báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J.$$

Platí

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \underbrace{(id)_{\alpha\varepsilon}}_{P^{-1}} \underbrace{(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}}_{A} \underbrace{(id)_{\varepsilon,\alpha}}_{P} = P^{-1} A P$$

Matice A je podobná matici J.

Príklad 1a $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = (1, -2, 3)^T$

$\lambda_2 = 1 \qquad v_2 = (3, 6, -8)^T$

$v_3 = (1, -1, 1)^T$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (v_1, v_2, v_3) \quad J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

$$P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}$$

V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

Příklad 2 $\quad \varphi(x) = Ax : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$ geom. násobnost 1

$\lambda_1 = 2$ alg. násobnost 3 $\quad u_1 = (2,1,2)^T$

Příklad 3 $\varphi(x) = A\,x : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$$

$\lambda = 2$ alg. nás. 3 geom nás. 2

$$u = (2, -1, 0)^T$$

$$v = (0, 0, 1)^T \quad \text{vl. vektory}$$

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{1}{|c}{2} & 1 \\ 0 & \multicolumn{1}{|c}{0} & 2 \end{array}\right)$$

Chceme najít řetězec délky 2.

$$w \xmapsto{A-2E} au + bv \xmapsto{A-2E} 0$$

Řešení hádáním: chceme řetězec délky 2

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{A-2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{nevhodná volba}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{A-2E} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1} \xmapsto{A-2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_3 vlastní vektor nezávislý na v_1, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B = (v_1, v_2, v_3) \qquad (\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$