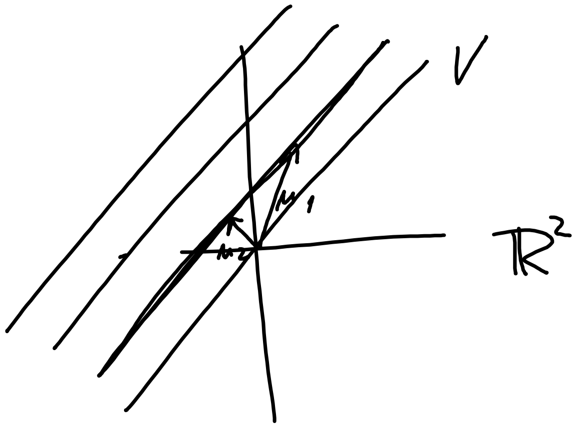
Důkaz věty o JKT

Uvažujme prostor $U/[u_1]$

Kvocient vekt. prostoru

U vekt prostor, $V \subseteq U$ jeho podprostor

$$U/V = \{ \underbrace{u+V}_{\text{množina}} , u \in U \}$$



Tato množina má strukturu vekt. prostoru

$$(u+V) + (v+V) \underset{\text{def}}{=} (u+v) + V$$

$$a(u+V) \underset{\text{def}}{=} au + V$$

Tyto definice jsou korektní.

$\|$ $u_1 + V = u_2 + V \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in V$

$u_1 \sim_V u_2$ jestliže $u_1 - u_2 \in V$

$$U/V = U/\sim_V$$

Uvažujme prostor $U/[u_1]$ $\quad$ $\dim U/[u_1] = \dim U - \dim [u_1]$ $\quad$ Důkaz za DU.

U/V $\quad$ $c(v_1, \ldots v_k)$ báze V $\quad$ $v_1, \ldots v_k, v_{k+1}, \ldots v_n$ báze U

Dokáže se, že $v_{k+1}+V, v_{k+2}+V, \ldots v_n+V$ je báze U/V

[illegible] definujme $\tilde{\varphi} : U/[u_1] \longrightarrow U/[u_1]$

$$\tilde{\varphi}(u+[u_1]) \underset{def}{=} \varphi(u)+[u_1]$$

$$u-v \in [u_1] \qquad \varphi(u)-\varphi(v) = \varphi(au_1) \subseteq [u_1]$$

Definice je korektní. Jaká vl. čísla má $\tilde{\varphi}$?

$\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ $\quad$ ~~[illegible]~~ char. polynom φ $= (\lambda-\lambda_1)$ char polynom $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi}(u_3+[u_1]) = b_1(u_2+[u_1]) + \lambda_3(u_3+[u_1])$$

$$= b_1u_2+\lambda_3u_3+[u_1]$$

$$\varphi(u_3)+[u_1] = b_1u_2+\lambda_3u_3+[u_1]$$

$$\varphi(u_3) = b_1u_2+\lambda_3 \cdot w + a_2u_1$$

Nilpotentni operator $\varphi: U \to U$ je takšen operator, ki eksistuje $k \in \mathbb{N}$, že $\varphi^k = \underbrace{\varphi\circ\varphi\circ\dots\circ\varphi}_{k\times} = 0$

$$J = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{matrix} & & \\ & \begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1\\ & & & \lambda\end{matrix} & \\ & & \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\varphi(x) = Jx$$

$$(\varphi-\lambda\,id)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \ddots\end{matrix} & \\ & \begin{matrix}\ddots & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$$\varphi^k = 0$$

(4) $\varphi - \lambda id|_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je nilpotentní

Dk: (1) $u_1 \in R_\lambda$, $u_2 \in R_\lambda$ $\quad \exists k_1, k_2 \; (\varphi - \lambda id)^{k_1} u_1 = 0 \quad (\varphi - \lambda id)^{k_2} u_2 = 0$

$k = \max(k_1, k_2) \qquad (\varphi - \lambda id)^k u_1 = 0 = (\varphi - \lambda id)^k u_2$

$'\Lambda\ \dot{-}E')^k A$

Pak $(\varphi - \lambda id)^k (u_1 + u_2) = (\varphi - \lambda id)^k (u_1) + (\varphi - \lambda id)^k u_2 = 0 + 0$
$= 0$

$u_1 + u_2 \in R_\lambda$

(2) $\exists k$ takové, že $\forall u \in R_\lambda \quad (\varphi - \lambda id)^k u = 0.$

$u \in R_\lambda$, ~~$\varphi(u)$~~ dokážeme, že $\varphi(u)$ je také v R_λ

$$(\varphi - \lambda id)^k \varphi(u) = \varphi \circ (\varphi - \lambda id)^k u = \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(u) \in R_\lambda$$

Věta (1 krok k důkazu Jordanovy věty)

[illegible], dim $U = n$, součet alg násobností čísel $\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_k$ je n.
$\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$. Pak součet kořenových podprostorů je přímý

$$R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots + R_{\lambda_k} = \{ u_1 + u_2 + \dots + u_k \in U,\ u_i \in R_{\lambda_i} \}$$

(platí $u_1 + u_2 + \dots + u_k = \vec{O} \Rightarrow u_i = \vec{O}$ pro $u_i \in R_{\lambda_i}$)

($\Leftrightarrow (R_{\lambda_1} + \dots + \widehat{R_{\lambda_i}} + \dots R_{\lambda_k}) \cap R_{\lambda_i} = \{0\}$)

a navíc dim R_{λ_i} = alg. násobnost λ_i, proto

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}.$$

Součet $U_1 + U_2$ je direktní podle definice když [illegible].

$\Longleftrightarrow$ jestliže $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ [illegible]

$u_1 + u_2 = \vec{o}$ [illegible]

Ve vhodné bázi α je $(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & * & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & 0 & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & & & \lambda_3 \ \ddots \end{pmatrix}$

$(\varphi - \lambda_1 \, id)\, u$

R_{λ_1} má bázi $v_1, v_2, \dots v_{n_1}$ .... n_1 = násobnost λ_1

a $v_1 .. v_{n_1}$ je prvních n_1 vektorů v bázi α

$$\begin{pmatrix} 0 & * & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \begin{array}{|l} \hline \lambda_2 - \lambda_1 \\ \quad \ddots \end{array} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix}^2$$

$\dim R_{\lambda_1} = \cancel{k} = n_1$.

Cyklický operátor: $\varphi : V \to V$ je cyklický, jestliže existuje báze $u_1, u_2, \dots u_k$ ve V taková, že $\varphi(u_k) = u_{k-1}, \varphi(u_{k-1}) = u_{k-2}, \dots \varphi(u_1) = \vec{o}$

$$u_k \xrightarrow{\varphi} u_{k-1} \xrightarrow{\varphi} \dots \xrightarrow{\varphi} u_1 \xrightarrow{\varphi} o$$

Věta (2. krok k důkazu Jord. věty)

Jestliže φ je nilpotentní na prostoru V, pak lze V rozložit

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_\ell$$

tak, že $\varphi(V_i) \subset V_i$ a φ je cyklický na V_i pro každé i.

$\varphi : V \to V$ nilpotentní $\quad \varphi^k = 0 \quad \varphi^{k-1} \neq 0$

Řetězy ve V

$$\begin{tikzcd} \{\vec{0}\} = P_k \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & P_{k-1} \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & P_{k-2} \arrow[l, bend right, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & P_1 \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & P_0 = V \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 & & 0 \\ e_1^{k-1} \arrow[u] & \ldots & e_{p_{k-1}}^{k-1} \arrow[u] \\ e_1^{k-2} \arrow[u] & \ldots & e_{p_{k-1}}^{k-2} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$P_i = \operatorname{im} \varphi^i$, $e_1^{k-1}, \ldots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$ báze P_{k-1}

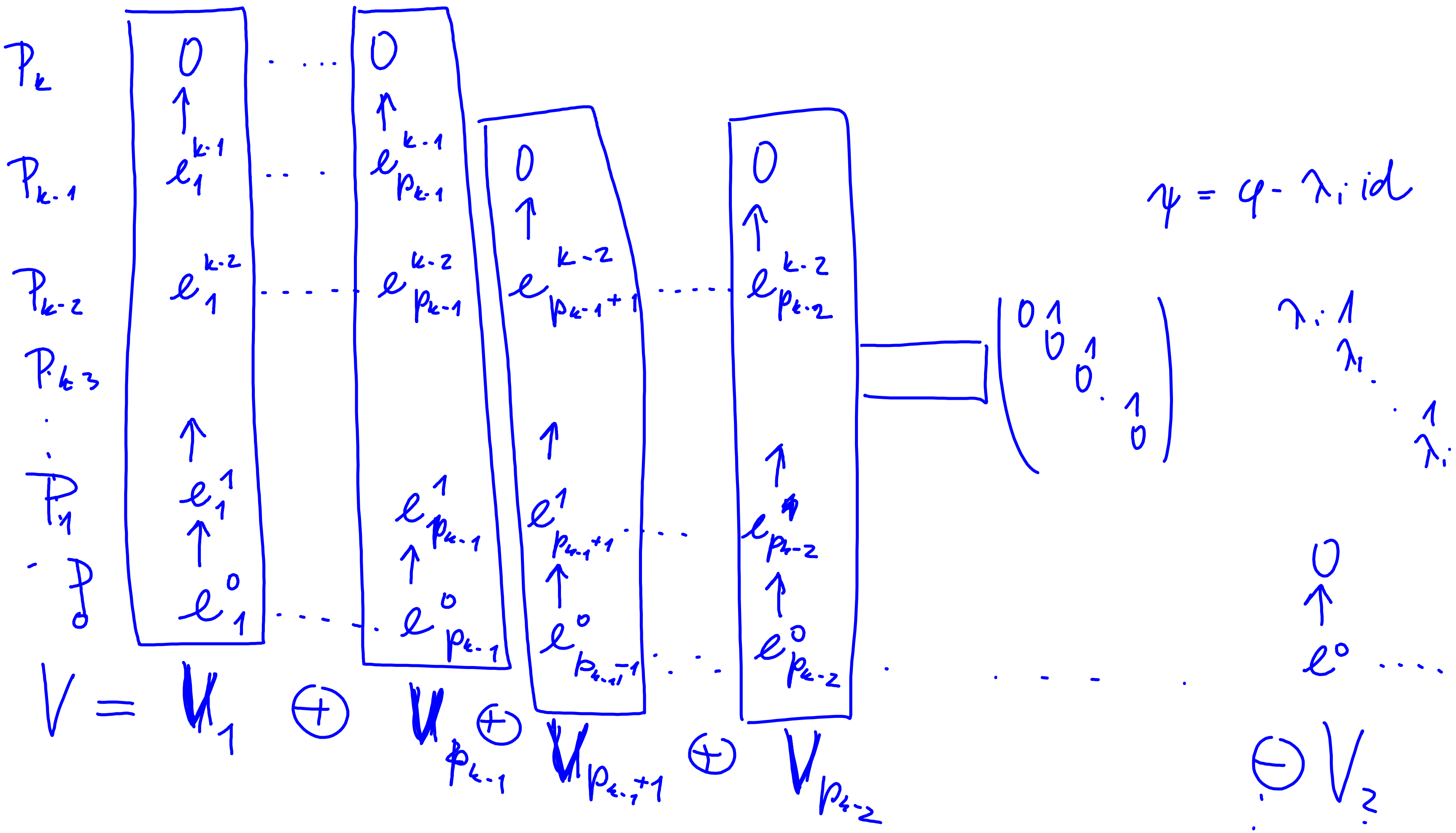
$e_1^{k-2}, \ldots, e_{p_{k-1}}^{k-2} \in P_{k-2} \qquad \varphi(e_i^{k-2}) = e_i^{k-1}$

Tyto $e_1^{k-1}, \ldots, e_{p_{k-1}}^{k-1}, e_1^{k-2}, \ldots, e_{p_{k-1}}^{k-2}$ jsou LN. Dokazujeme

$$\begin{tikzcd} P_0 & P_1 & P_2 & \\ u_3 \arrow[r] & u_2 \arrow[r] & u_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\sum a_i e_i^{k-1} + \sum b_i e_i^{k-2} = \vec{0} \quad / \text{aplikujeme } \varphi$$

$$0 + \sum b_i e_i^{k-1} = \vec{0}$$


P_k
P_{k-1}
P_{k-2}
P_{k-3}
P_1
P
0
e_1^{k-1}
e_1^{k-2}
e_1^1
e_1^0
$e_{p_{k-1}}^{k-1}$
$e_{p_{k-1}}^{k-2}$
$e_{p_{k-1}}^1$
$e_{p_{k-1}}^0$
$e_{p_{k-1}+1}^{k-2}$
$e_{p_{k-1}+1}^1$
$e_{p_{k-1}+1}^0$
$e_{p_{k-2}}^{k-2}$
$e_{p_{k-2}}^1$
$e_{p_{k-2}}^0$
$\psi = \varphi - \lambda_i \, id$
$\lambda_i \; 1$
λ_i
e^0
$V = V_1 \oplus V_{p_{k-1}} \oplus V_{p_{k-1}+1} \oplus V_{p_{k-2}} \oplus V_2$