ÚLOHA

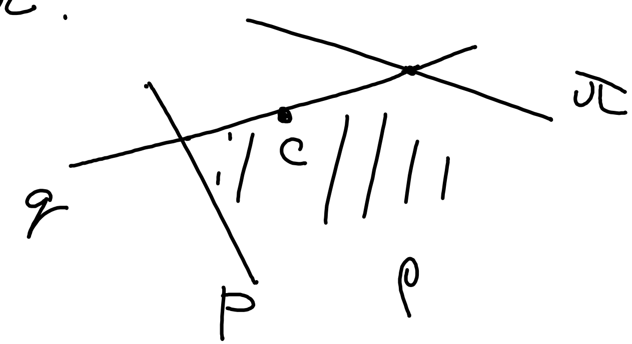
$\mathbb{R}^4$,

Rovina π : $X = A + t u_1 + s u_2$

Přímka p mimoběžná s π $\quad p : Y = B + r v$

Bod C ležící mimo π a p

Najděte přímku q procházející bodem C a protínající přímku p a rovinu π.



$\rho \cap \pi = q \cap \pi = \{D\}$

Známe-li tento průsečík

Výpočet průniku parametricky zadaných afinních podprostorů

π : $\longrightarrow$ Soustava 2 rovnic x_1, x_2, x_3, x_4

ρ : $Y = B + r v_1 + k v_2$ $\longrightarrow$ Soustava 2 rovnic x_1, x_2, x_3, x_4

Soustava 4 rovnic v neznámých x_1, x_2, x_3, x_4

$X \in \pi \cap \rho$: $\boxed{X} = A + t u_1 + s u_2 = B + r v_1 + k v_2$

$$t u_1 + s u_2 - r v_1 - k v_2 = B - A$$

Řešení dává souřadnice průniku.

Jsme v $\mathbb{R}^4$

Porovnáním souřadnic dostaneme soustavu 4 rovnic o 4 neznámých t, s, r, k

$k = 3$, $r = 2$ Řešení

Potom v průniku leží bod $X = B + 3 v_1 + 2 v_2$

2. Lineární formy a duální vektorový prostor

$\mathcal{U}$ vektorový prostor nad K

Definice Lineární forma je lineární zobrazení $f: \mathcal{U} \to K$.

Lineární znamená, že $f(a\vec{u} + b\vec{v}) = a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})$

Příklady: všechna lin. zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$

Definice Nechť U je vektorový prostor. Potom množina U^* všech lineárních forem na U má strukturu vektorového prostoru a nazývá se duální vektorový prostor.

Sčítání: $f, g \in U^*$ $\quad (f+g)(u) = f(u) + g(u)$

$u \in U$

$a \in K, f \in U^*$ $\quad (af)(u) = a \cdot f(u)$

Věta o duální bázi

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je báze prostoru U. Potom v prostoru U^* existuje báze $\alpha^* = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$ taková, že

Potom platí $u_i = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 1 \cdot u_i + 0\, u_{i+1} + \dots + 0 \cdot u_n$

$$f^j(u_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$f^1, f^2, \dots, f^n$ tvoří bázi

(1) jsou lin. nezávislé

(2) každé $f \in U^*$ je jejich lin kombinací

(1) Nechť $a_1 f^1 + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n = 0$. Do obou stran dosadíme vektor u_i

$$a_1 \underset{\substack{\| \\ 0}}{f^1(u_i)} + a_2 \underset{\substack{\| \\ 0}}{f^2(u_i)} + \dots + a_i \underbrace{f^i(u_i)}_{1} + \dots + a_n \underbrace{f^n(u_i)}_{0} = 0(u_i)$$

$a_i = 0$

Tedy $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, lin. kombinace $f^1, f^2, \dots, f^n$ jsou LN.

Poučení z důkazu

Máme bázi $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ v prostoru U

a duální bázi $\alpha^* = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$ prostoru U^*

j-tá souřadnice vektoru u v bázi α je $f^j(u)$

i-tá souřadnice lin formy f v bázi α^* je $f(u_i)$

Příklad

$U = \mathbb{R}^n$ a prvky $\mathbb{R}^n$ ztotožníme se sloupci velikosti n

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ lineární} \qquad f \in (\mathbb{R}^n)^*$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n =$$

$$= (a_1 \; a_2 \ldots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lin. formy jsou reprezentovány řádkovými maticemi. Tedy $(\mathbb{R}^n)^*$ si ZJEDNODUŠENĚ můžeme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "g\circ\varphi"'] & \mathcal{V} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

lin forma

$g \in \mathcal{V}^*$ $\quad g\circ\varphi \in \mathcal{U}^*$

Definice $\varphi^*(g) = g\circ\varphi$

$\forall u \in \mathcal{U} \quad [\varphi^*(g)](u) = g(\varphi(u))$

<u>Příklad</u> $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \quad \varphi(u) = 2u$

$\varphi^* : \mathcal{U}^* \to \mathcal{U}^* \quad [\varphi^*(g)](u) = g(\varphi(u)) = g(2u) = 2g(u)$

$\varphi^*(g) = 2g$

Věta o matici lin. zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory s bázemi α a β. Nechť U^* a V^* jsou jejich duály s duálními bázemi α^* a β^*.

Jestliže je $\varphi : U \to V$ lineární, pak matice duálního zobrazení $\varphi^* : V^* \to U^*$ v bázích β^* a α^* je

$$(\varphi^*)_{\alpha^*\beta^*} = (\varphi)_{\beta\alpha}^{T}$$

$\to$ transponovaná

Důkaz: $(\varphi^*)_{\alpha^*\beta^*} = B \qquad (\varphi)_{\beta\alpha} = A$

$\beta^* = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ V^*

$\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ U

Příklad

Báze $\mathbb{R}_2[x]$ $\quad \alpha = \left(\overset{u_1}{x+2},\ \overset{u_2}{2x+1},\ \overset{u_3}{x^2+x} \right)$

Chceme najít duální bázi

$$f(at^2+bt+c) = Aa + Bb + Cc$$

$$f^1, f^2, f^3 \qquad f^j(u_i) = \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{matrix}$$

$$f^2(u_1) = A_2 \cdot 0 + B_2 \cdot 1 + C_2 \cdot 2 = \cancel{1} \quad 0$$

$$f^2(u_2) = A_2 \cdot 0 + B_2 \cdot 2 + C_2 \cdot 1 = \cancel{0} \quad 1$$

$$f^2(u_3) = A_2 \cdot 1 + B_2 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f'(ax^2+bx+c) = A_1 a + B_1 b + C_1 c$$
$$= \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c$$