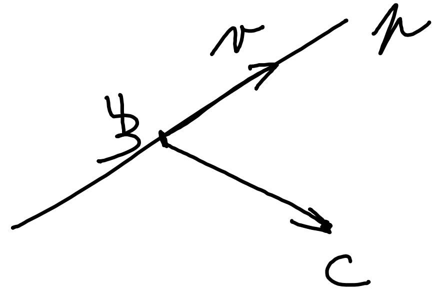
Lin. forma

pak $q = \overleftrightarrow{DC}$

1. Přímka p a bod určují rovinu ρ $\rho = p \sqcup C$



Hledaná přímka q leží v této rovině.

$$\rho : Z = B + r v + k(C - B)$$

2. Najdeme průnik $\rho \cap \pi = \{D\}$.

Bod D leží na q. Proto je $q = \overleftrightarrow{CD}$

3. $q : C + \alpha(D - C)$

Lin. forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima obecni izraz $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$= (a_1\ a_2 \ldots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

② $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ $\quad f(ax^2 + bx + c) = 3a - b + 2c$

③ $f: \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\quad f(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ (sled matrike)

④ $U = C[a,b]$ $\quad f: C[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f(\alpha) = \alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\alpha \in C[a,b]$

$g: C[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad g(\alpha) = \int_a^b \alpha(x)\,dx$

$$f^j(u_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Báze α^* se nazývá duální bází k bázi α.

<u>Důkaz:</u> Definice lin. forem f^j:

Nechť $u \in U$, pak existuje právě jedna n-tice čísel $a_1, a_2, \dots a_n$ tak, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

jsou to souřadnice vektoru v dané bázi α

Definujeme $f^j(u) = a_j$ j.tá souřadnice vektoru u

(2) $f \in U^*$ Chceme najít $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, že

$$f = \underline{a}_1 f^1 + \underline{a}_2 f^2 + \dots + \underline{a}_n f^n \quad (f)_{\alpha^*} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ukážeme si, že platí

$$f = f(u_1) f^1 + f(u_2) f^2 + \dots + f(u_n) f^n$$

Stačí, když předchozí rovnost dokážeme pro vektory báze α.

$$f(u_i) = f(u_1) \underbrace{f^1(u_i)}_{0} + \dots + f(u_i) \underbrace{f^i(u_i)}_{1} + \dots + f(u_n) \underbrace{f^n(u_i)}_{0}$$

$$f(u_i) = f(u_i)$$

C představovat jako řádky, zatímco $\mathbb{R}^n$ jsou sloupce

Vyjádřit $f(u)$ je maticové násobení

$$(a_1 \ldots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definice Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení.

Potom duální zobrazení φ^* k φ je zobrazení

$$\varphi^* : V^* \longrightarrow U^*$$

definované předpisem $\quad \varphi^*(g) = g \circ \varphi$

kde $g \in V^*$.

Opakování: matice lin. zobrazení v daných bázích

$\varphi : U \to V \qquad \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ báze U, $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ báze V

$$(\varphi)_{\beta\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta \; \dots \; (\varphi(u_n))_\beta \Big)$$

matice φ v bázích α, β

Platí
$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta\alpha} (u)_\alpha$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\,)_\alpha"'] & V \arrow[d, "(\,)_\beta"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k \\
x \arrow[r, mapsto] & Ax
\end{tikzcd}$$

$$A = (\varphi)_{\beta\alpha}$$

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \varphi(u) \arrow[d] \\
(u)_\alpha \arrow[r, bend right] & (\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta\alpha}(u)_\alpha
\end{tikzcd}$$

$$B^A_{ij} \stackrel{B}{=} i\text{-tá složka } (\varphi^*(g_j))_{\alpha^*} \stackrel{\bullet}{=} (\varphi^*(g_j))(u_i)$$

$$\stackrel{\text{definice}}{=} g_j(\varphi(u_i)) \stackrel{\bullet}{=} j\text{-tá souřadnice vektoru } \varphi(u_i) \text{ v bázi } \beta$$

$$= A_{ji} = j\text{-tá složka } (\varphi(u_i))_\beta$$

$$B = A^T$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$