Příklady $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f\left((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T\right) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_2y_1 - 5x_2y_2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + \bar{x}_1 \\ x_2 + \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2(x_1 + \bar{x}_1)y_1 - 3(x_1 + \bar{x}_1)y_2$$

$$+ 4(x_2 + \bar{x}_2)y_1 - 5(x_2 + \bar{x}_2)y_2 = \underbrace{2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_2y_1 - 5x_2y_2}_{} +$$

$$+ \underbrace{2\bar{x}_1y_1 - 3\bar{x}_1y_2 + 4\bar{x}_2y_1 - 5\bar{x}_2y_2}_{} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

<u>Příklad</u> Bilineární forma na $\mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(\underset{\mathbb{R}^n}{x}, \underset{\mathbb{R}^n}{y}) = \sum_{j,i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \right) y_j = (x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x^T A y$$

Matice f ve stand. bázi

$A_{11} = f(e_1, e_1) = 2 \quad A_{12} = f(e_1, e_2) = -3 \quad A_{21} = f(e_2, e_1) = 4$

$A_{22} = f(e_2, e_2) = -5 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Tvrzení: Nechť $A = a_{ij}$ je matice bilin formy $f: U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi $\alpha = (u_1, u_2 \ldots u_n)$. Potom pro každé dva vektory $u, v \in U$ platí

$$f(u,v) = (u)_\alpha^T \, A \, (v)_\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, (v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\underline{(u)_\beta^T B (v)_\beta} = f(u,v) = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha \overset{(*)}{=} \left((id)_{\alpha\beta}(u)_\beta\right)^T A \left((id)_{\alpha\beta}(v)_\beta\right)$$

$$= \underline{(u)_\beta^T \underbrace{(id)_{\alpha\beta}^T A (id)_{\alpha\beta}}_{C} (v)_\beta}$$

$$(CD)^T = D^T C^T$$

$x^T B y = x^T C y$ plati po vsedna $x, y \in K^n$

Trdim, že $B = C$.

$x = (0, 0, \ldots \underset{i}{1} \ldots 0)$ $y = (0, 0 \ldots \underset{j}{1} \ldots 0)$

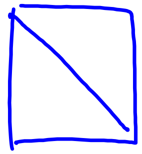
$x^T B y = B_{ij}$ $x^T C y = C_{ij}$ $B_{ij} = C_{ij} \Rightarrow B = C$.

<u>Symetrická bilin. forma</u> je bilineární forma taková, že

$$\forall u, v \in U \quad f(u,v) = f(v,u).$$

Matice sym bilin formy v bázi α je rovněž symetrická

$$A_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = A_{ji}$$



$$A = A^T$$

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$P^T = P$ $\qquad A \longmapsto AP^T$ výměna 1. a 2 sloupce

2) Vynásobení 1 řádku číslem $a \neq 0$

$$A \longmapsto PA \qquad P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \qquad P = P^T$$

$A \longmapsto AP$ ~~výměna~~ vynásobení 1 sloupce číslem a

3) K 1. řádku přičtem a-násobek 2. řádku

$$A \longmapsto PA \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

Ke každé symetrické matici A umíme pomocí stejné řádkové a sloupcové operace tak, že matici převedeme na diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} b_{11} & & & 0 \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Ukážeme si to na příkladu.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{a ESO}]{\text{stejné ERO}} \left(\begin{array}{c|c} B=P^TAP & P^TE \\ \hline EP & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -6 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A|E) \sim \dots \sim (B|P^T)$$

Důkaz: Nechť má f v nějaké bázi α matici A.
Podle předchozího algoritmu existuje matice P tak, že

$$B = P^T A P \quad \text{je diagonální}$$

jestliže $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$, pak bázi β zvolíme tak, aby matice P byla maticí přechodu $(id)_{\alpha\beta}$

$\beta = (v_1, v_2, \ldots v_n)$

$$(v_1, v_2 \ldots v_n) = (u_1, u_2, \ldots u_n)(id)_{\alpha\beta} = (u_1, u_2 \ldots u_n)P$$

$$v_1 = (u_1, u_2 \ldots u_n)\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} = p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \ldots + p_{n1}u_n$$

Báze $B = (v_1, v_2, v_3)$

$$(v_1, v_2, v_3) = \underbrace{(e_1, e_2, e_3)}_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

V bázi $B = (v_1, v_2, v_3)$ má f vyjádření

$$f(u,v) = 4\bar{x}_1\bar{y}_1 - 4\bar{x}_2\bar{y}_2 - 96\bar{x}_3\bar{y}_3$$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ souřadnice u v bázi B

$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ ——— " — v — " ———