Středa 30/3 v 18^{00} přednáška místo 29/3

Bilineární forma $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$, U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$$f(au + bv, w) = a\, f(u,w) + b\, f(v,w)$$

$f(-, w) : U \longrightarrow \mathbb{K}$ je lin forma

$f(u, -) : U \longrightarrow \mathbb{K}$ je lin forma

Sym. bilin. forma

$$f(u,v) = f(v,u)$$

<u>Definice</u>: Kvadratická forma na vekt. prostoru U je zobrazení

$$g : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

Matice kvadr. formy $\underbrace{\ }_{\text{(v bázi } \alpha)}$ $g : U \to K$ je matice příslušné symetrické bilineární formy f takové, že $g(u) = f(u,u)$.

Předchozí příklad Matice g je matici f a ta pro stand bázi $\mathbb{R}^3$ je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -6 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Věta: K dané kvadr. formě g existuje právě jedna sym. bilin. forma f s vlastností

$$g(u) = f(u,u).$$

Věta: Pro každou kvadratickou formu $g : U \to \mathbb{K}$ existuje báze B v U taková, že vyjádření kvadr. formy v jejích souřadnicích je diagonální, tj

$$g(u) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\, x_i^2$$

kde $(x_1, x_2, \ldots x_n)^T = (u)_B$.

Důkaz: Existuje sym. bilin. forma $f : U \times U \to \mathbb{R}$ tak, že $g(u) = f(u,u)$.

Podle věty z minulé přednášky existuje báze B tak, že

$$f(u,v) = (u)_B^T \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} (v)_B = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\, x_i y_i$$

$$B = P^T A P \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (id)_{\varepsilon\beta}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left((v_1)_\varepsilon \; (v_2)_\varepsilon \; (v_3)_\varepsilon \right)$$

$$\beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

V této bázi:

$$g(x) = 4y_1^2 - 4y_2^2 + 96y_3^2$$

$$(A_1+A_2+\dots+A_n)^2 = \underline{A_1^2} + \underbrace{A_2^2+\dots+A_n^2} + \underline{2A_1A_2+2A_1A_3+\dots+2A_1A_n} + \sum_{2\le i<j\le n} 2A_iA_j$$

$$A_1^2 + 2A_1A_2 + \dots + 2A_1A_n = (A_1+A_2+\dots+A_n)^2 - A_2^2 - A_3^2 - \dots - A_n^2 - \sum_{2\le i<j\le n} 2A_iA_j$$

aplikujeme pro $A_1 = x_1$, $A_2 = \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2$, $A_3 = \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3$. $A_n = \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$

$$= a_{11}\left\{\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 - \dots - \left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - \sum_{2\le i<j\le n} 2\,\frac{a_{1i}\,a_{1j}}{a_{11}\cdot a_{11}}\,x_ix_j\right\}$$

$$+ h(x_2, x_3, \dots x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \dots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2$$

$$- \sum_{2\le i<j\le n} 2\,\frac{a_{1i}\,a_{1j}}{a_{11}}\,x_ix_j + h(x_2, \dots x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \underline{k}(x_2, \dots x_n)$$

③ Pro všechna i je $a_{ii}=0$. Pokud $g(u)=0$, není co dělat.
Pokud $g(u)\neq 0$, existuje $a_{ij}\neq 0$. Potom zaměníme souřadnice

$$y_i = x_i - x_j \qquad\qquad x_i = y_i + x_j = y_i + y_j$$

$$y_j = x_j \qquad y_k = x_k \text{ pro } k\neq i \qquad x_k = y_k$$

$$g(u) = \dots + 2a_{ij}\,x_i x_j + \dots = \dots + 2a_{ij}\,(y_i + y_j)\,y_j + \dots$$

$$= \underline{\underline{2a_{ij}\,y_j^2}} + 2a_{ij}\,y_i y_j$$

$$2a_{ij}\neq 0$$

Lze pokračovat podle ② a ①.

Chyba ze začátku přednášky

$$f(u,v) = (u)_\alpha^T \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} (v)_\alpha^{\cancel{T}}$$

Příklad $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3$

$y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$, $x_1 = y_1 + y_2$

$$g(u) = 4(y_1+y_2)y_2 + 8(y_1+y_2)y_3 + 12y_2y_3 = \underline{4y_2^2} + 4y_1y_2 + 8y_1y_3 + 8y_2y_3$$

$$+ 12y_2y_3 = 4\left(y_2^2 + y_1y_2 + 5y_2y_3\right) + 8y_1y_3 =$$

$$= 4\left\{\left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{25}{4}y_3^2 - \frac{10}{4}y_1y_3\right\} + 8y_1y_3 =$$

Obecně $x_1 \dots x_n$ souřadnice v bázi α

$z_1 \dots z_n$ souřadnice v bázi β (kterou neznáme)

$$g(u) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots = b_{11}z_1^2 + b_{22}z_2^2 + \dots + b_{nn}z_n^2$$

β je hledaná polární báze

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(u)_\beta = (id)_{\beta\alpha}(u)_\alpha$$

$\beta = (v_1, \dots v_n)$ $\quad \alpha = (u_1 \dots u_n)$

V našem příkladě

$y_1 = x_1 - x_2$
$y_2 = x_2$
$y_3 = x_3$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\beta\varepsilon} \quad (u)_\varepsilon$$

$$(v_1, v_2, \dots v_n) = (u_1 \dots u_n)\,(id)_{\alpha\beta}$$
$$= (u_1 \dots u_n)\, Q^{-1}$$

Věta Sylvestrův zákon setrvačnosti

Nechť $g: U \longrightarrow \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Potom existuje báze B taková, že v souřadnicích této báze je

$$g(u) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_q^2 + 0 \cdot y_{q+1}^2 + \dots + 0 \cdot y_n^2$$

přičemž počet $+1$, -1 a 0 nezávisí na bázi B.

Definice: Signatura kvadr. formy g je trojice čísel (s_1, s_{-1}, s_0) které udávají počet $1, -1,$ a 0 v diagonálním tvaru.

Nechť v bázi $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je

$$g(u) = y_1^2 + y_2^2 + \dots y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots$$

v bázi $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ je

$$g(w) = z_1^2 + z_2^2 + \dots z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots$$

Předp. $p > s$. V prostoru U vezmu podprostory

$V = [v_1, v_2, \dots, v_p]$ $\qquad$ $W = [w_{s+1}, \dots, w_n]$

$v \in V$ $\quad (v)_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$ $\quad v \neq \vec{o}$ $\quad g(u) = y_1^2 + \dots + y_p^2 > 0$

$w \in W$ $\quad (w)_{\mathcal{C}} = (0, 0, \dots, z_{s+1}, \dots)$ $\quad g(w) = -z_{s+1}^2 - \dots \leq 0$

Kongruentní matice $B = P^T A P$, A, B kongruentní

Kritérium kongruence dvou sym. reálných matic

A sym. reálná matice zadává kvadr. formu $q(x) = x^T A x$

Signatura reálné symetrické matice je signatura této kvadratické formy.

Kritérium 2 sym. reálné matice A, B typu $n \times n$ jsou kongruentní právě když ~~jestliže~~ mají stejnou signaturu.

$\Leftarrow$ A, B mají stejnou signaturu. Potom existují P, Q tak, že

$g: U \to \mathbb{R}$ je kvadr. forma, $\dim U = n$

(1) pozitivně definitní: $\forall u \neq \vec{0}$ $g(u) > 0$ $\qquad s_1 = n,\ s_{-1} = 0,\ s_0 = 0$

(2) negativně definitní: $\forall u \neq \vec{0}$ $g(u) < 0$ $\qquad s_1 = 0,\ s_{-1} = n,\ s_0 = 0$

(3) pozitivně semidefinitní: $\forall u$ $g(u) \geq 0$ $\qquad s_{-1} = 0$

(4) negativně semidefinitní $\forall u$ $g(u) \leq 0$ $\qquad s_1 = 0$

(5) indefinitní $\exists u$ $g(u) > 0$ $\exists v$ $g(v) < 0$ $\qquad s_1 > 0,\ s_{-1} > 0.$

Sylvestrovo kritérium

Kvadr. forma $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je pozitivně definitní, jestliže

$$\det A_i > 0 \quad \text{pro všechna } i.$$

Kvadr. forma $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je negativně definitní, je. tehdy

$$(-1)^i \det A_i > 0.$$

$$g(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad |A_1| = -1, \quad |A_2| = 2, \quad |A_3| = -8$$