Opakování

V je nekonečný prostor se skalárním součinem

$U \subseteq V$ je jeho podprostor

Ortogonální doplněk $U^\perp = \{v \in V;\ \forall u \in U\ \langle v, u \rangle = 0\}$

$U^\perp$ je podprostor

Kolmá projekce $P_U : V \to U$

Existuje právě jedno zobrazení $P_U : V \to U$ s vlastností

$$\forall v \in V \qquad v - P_U v \perp U$$

Důkaz: Nechť $(u_1, \dots u_k)$ je ortonormální báze podprostoru U. Tuto bázi doplníme na ortonormální bázi celého prostoru V, ta bude $(u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$.

Hledejme $P_U v$ ve tvaru

$$P_U v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$

tak, aby platilo $v - P_U v \perp u_i$ pro $i \in \{1, 2, \dots k\}$.

Tedy $\langle v - (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k), u_i \rangle = 0$

$$\langle v, u_i \rangle - a_1 \underbrace{\langle u_1, u_i \rangle}_{0} - \dots a_i \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{1} - a_k \underbrace{\langle u_k, u_i \rangle}_{0} = 0$$

Odtud $a_i = \langle v, u_i \rangle$.

Proto $$P_U v = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i \in U.$$

Protože $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j$ je

$$v - P_U v = \langle v, u_{k+1} \rangle u_{k+1} + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n \in U^\perp$$

Tedy $v - P_U v \perp U$. ∎

Ukážeme, že P_U je lineární.

Nechť máme $P_U v_1$ a $P_U v_2$. Chceme spočítat $P_U(v_1+v_2)$. Platí

pro $1 \le i \le k$: $v_1 - P_U v_1 \perp u_i \iff \langle v_1 - P_U v_1, u_i \rangle = 0$

$v_2 - P_U v_2 \perp u_i \iff \langle v_2 - P_U v_2, u_i \rangle = 0$

Sečtením obou rovnic dostaneme

$$\langle v_1 + v_2 - P_U v_1 - P_U v_2, u_i \rangle = 0$$

Tedy $v_1 + v_2 - (P_U v_1 + P_U v_2) \perp U$,

proto nutně bylo

$$P_U(v_1+v_2) = P_U v_1 + P_U v_2 .$$

Obdobně pro násobek. ■

Minule jsme dokázali

$$V = U \oplus U^\perp$$

$$v = \underbrace{P_U v}_{\in U} + \underbrace{v - P_U v}_{\in U^\perp}$$

Dále $U \cap U^\perp = \{o\}$.

$\boxed{\text{VĚTA: Vlastnosti kolmé projekce}}$

Nechť V je prostor a $U \subseteq V$ jeho podprostor. Nechť $v \in V$ je pevný vektor.

(a) $P_U v$ je jediný vektor z U takový, že

$$\|v - P_U v\| = \min\{\|v - u\|, u \in U\}$$

(b) Pro $v \neq \vec{o}$ je $P_U v$ jediný (až na násobek) vektor z U takový, že

$$\frac{\|P_U v\|}{\|v\|} = \max\left\{ \frac{|\langle v, u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|}, u \in U \setminus \{\vec{o}\} \right\}.$$

Důkaz (a) Pro pevné v a libovolné $u \in U$ platí

$$\|v-u\|^2 = \|P_U v + v - P_U v - u\|^2 = \|\underbrace{P_U v - u}_{\in U} + \underbrace{v - P_U v}_{\perp U}\|^2$$

Pyth. věta $\|P_U v - u\|^2 + \|v - P_U v\|^2 \geq \|v - P_U v\|^2$

Rovnost nastane, právě když $u = P_U v$.

Tím jsme dokázali

$$\|v-u\| \geq \|v - P_U v\|$$

s rovností pro $u = P_U v$. $\blacksquare$

(b)

$$\frac{|\langle v, u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} = \frac{|\langle v - P_U v + P_U v, u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} =$$

$$= \frac{|\overbrace{\langle v - P_U v, u\rangle}^{=0} + \langle P_U v, u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} = \frac{|\langle P_U v, u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} \leq$$

Cauchyova nerovnost $\leq$

$$\frac{\|P_U v\|\,\|u\|}{\|v\|\,\|u\|} = \frac{\|P_U v\|}{\|v\|}$$

Dokázali jsme požadovanou nerovnost. Rovnost nastane jen tehdy, když $P_U v$ a u jsou lineárně závislé. $\blacksquare$

EUKLIDOVSKÁ GEOMETRIE

Budeme pracovat v euklidovském prostoru V (tj. nad $\mathbb{R}$).

Definice vzdálenosti dvou bodů

$$\operatorname{dist}(A, B) = \|A - B\|$$

Definice vzdálenosti bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{M}$:

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{M}) = \min\{\|A-X\|,\ X\in\mathcal{M}\}$$

$\boxed{\text{Věta}}$

(a) Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru

$$\mathcal{M} = B + U, \quad U\subseteq V \text{ podprostor},$$

je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $U^\perp$, tj.

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{M}) = \|P_{U^\perp}(A-B)\|.$$

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro $M\in\mathcal{M}$:

(1) $\operatorname{dist}(A,\mathcal{M}) = \|A-M\|$

(2) $A-M \perp U$

(3) $M = B + P_U(A-B)$

<u>Důkaz</u> (a) Nechť $X\in\mathcal{M}$, $X = B+u$, $u\in U$.

$$\|A-X\| = \|\underbrace{A-B}_{\text{vektor}}-\underset{\substack{\wedge\\ U}}{u}\| \underset{\text{podle předchozí věty}}{\geq} \|A-B-P_U(A-B)\| =$$

$$= \|P_{U^\perp}(A-B)\|$$

neboť platí $P_{U^\perp}v = v - P_U v$. Toto aplikujeme na $v = A-B$. ∎

<u>Důkaz (b)</u> (1) ⇒ (3) Vzdálenost pro $M = B+u\in\mathcal{M}$

$$\|A-M\| = \|A-B-u\|$$

nabývá podle předchozí věty svého minima pro $u = P_U(A-B)$. Proto

$$M = B + u = B + P_U(A-B),$$

což je (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) jestliže $M = B + P_U(A-B)$, pak

$$A - M = (A-B) - P_U(A-B) \perp U$$

podle definice kolmé projekce.

(2) $\Rightarrow$ (1) Nechť $A - M \perp U$. Potom pro všechna $u \in U$ platí

$$\| \underbrace{A-M}_{\in U^\perp} - \underset{U}{u} \|^2 \overset{\text{Pyth.}}{\underset{\text{věta}}{=}} \|A-M\|^2 + \|u\|^2 \geq \|A-M\|^2$$

Protože každý bod z $\mathcal{M}$ musí být tvaru $M + u$ platí

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{M}) = \min\{\|A-M-u\|, u \in U\} = \|A-M\|,$$

což je (1). ■

<u>Příklad</u> Odvodíme, čemu se rovná vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny

$$\mathcal{M} = \{y \in \mathbb{R}^4;\ ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 + e = 0,\ d \neq 0\}$$

<u>Řešení podle (a) předchozí věty</u>

$B \in \mathcal{M}$ zvolíme $B = (0, 0, 0, -\frac{e}{d})$

$$A - B = (x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d})$$

$$Z(\mathcal{M}) = U = \{y \in \mathbb{R}^4;\ ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0\}$$

$$Z(\mathcal{M})^\perp = U^\perp = [(a, b, c, d)], \quad v = (a, b, c, d)$$

$$\mathrm{dist}\,(A, \mathcal{M}) = \| P_{U^\perp}\,(A-B)\|.$$

Výpočet $P_{U^\perp}\,(A-B)$:

$$P_{U^\perp}\,(A-B) = \alpha v$$

$$\langle A-B-\alpha v, v\rangle = 0$$

$$\alpha \langle v, v\rangle = \langle A-B, v\rangle$$

$$\alpha = \frac{\langle A-B, v\rangle}{\|v\|^2} = \frac{\langle (x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d}), (a, b, c, d)\rangle}{a^2+b^2+c^2+d^2} =$$

$$= \frac{a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 + e}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$\mathrm{dist}\,(A, \mathcal{M}) = \| P_{U^\perp}\,(A-B)\| = \|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$$

$$= \frac{|a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 + e|}{a^2+b^2+c^2+d^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$= \frac{|a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 + e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

Vzdálenost dvou afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

$$\mathrm{dist}\,(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \min\{\|M-N\|;\ M \in \mathcal{M},\ N \in \mathcal{N}\}$$

Věta

(a) Vzdálenost afinních podprostorů $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$ a $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{M})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^\perp$.

tj. $\operatorname{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \| P_{(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N}))^\perp}(A-B)\|$.

(b) Pro body $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \|M-N\|$

(říkáme, že vzdálenost $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ se realizuje v bodech M a N)

(2) $M-N \perp Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})$

(3) $M-N = P_{(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N}))^\perp}(A-B)$

<u>Důkaz (a)</u> Nechť $M = A+v \in \mathcal{M}$, $N = B+u \in \mathcal{N}$

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \min\{\|M-N\|,\ M\in\mathcal{M}, N\in\mathcal{N}\}$$

$$= \min\{\|A+v-B-u\|,\ v\in Z(\mathcal{M}), u\in Z(\mathcal{N})\}$$

$$= \min\{\|A-(B+u-v)\|,\ v\in Z(\mathcal{M}), u\in Z(\mathcal{N})\}$$

$$= \min\{\|A-X\|,\ X\in B+Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})\}$$

$$\underset{\text{předchozí věty (a)}}{\overset{\text{podle}}{=}} \| P_{(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N}))^\perp}(A-B)\|.$$

(b) Dokazuje se obdobně jako u předchozí věty. ∎

Příklad $V = \mathbb{R}^4$, přímka p : $X = A + \alpha u$
rovina ρ : $Y = B + \beta v_1 + \gamma v_2$

Chceme spočítat vzdálenost:

$$\operatorname{dist}(p, \rho) = \| P_{[u, v_1, v_2]^\perp} (A - B) \|$$

1. Spočítáme ortogonální doplněk

$$[u, v_1, v_2]^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^5, \ \langle x, u\rangle = 0, \ \langle x, v_1\rangle = 0, \ \langle x, v_2\rangle = 0 \}$$

Zjistíme, že $[u, v_1, v_2]^\perp = [z_1, z_2]$

2. Počítáme kolmou projekci $A - B$ do $[z_1, z_2]$

$$P_{[z_1, z_2]} (A - B) = a z_1 + b z_2$$

$$A - B - (a z_1 + b z_2) \perp z_1, z_2$$

Řešíme soustavu o neznámých a, b

$$\langle A - B, z_1 \rangle - a \langle z_1, z_1 \rangle - b \langle z_2, z_1 \rangle = 0$$

$$\langle A - B, z_2 \rangle - a \langle z_1, z_2 \rangle - b \langle z_2, z_2 \rangle = 0$$

V maticovém tvaru vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} \langle z_1, z_1 \rangle & \langle z_2, z_1 \rangle \\ \langle z_1, z_2 \rangle & \langle z_2, z_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A - B, z_1 \rangle \\ \langle A - B, z_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Grammova matice. Vyřešíme soustavu, tj. najdeme $a, b \in \mathbb{R}$ a z nich spočítáme

$$P_{[z_1,z_2]}(A-B) = a z_1 + b z_2$$

3. Spočítáme

$$\operatorname{dist}(p,\rho) = \| P_{[z_1,z_2]}(A-B) \| = \| a z_1 + b z_2 \|$$

Výpočet bodů $M \in p$ a $N \in \rho$ takových, že $\operatorname{dist}(p,\rho) = \|M-N\|$.

1. možnost Předpokládáme, že jsme provedli předchozí výpočet, tedy že známe

$$P_{[u,v_1,v_2]^\perp}(A-B) = P_{[z_1,z_2]}(A-B).$$

Použijeme z předchozí věty (b) (3), které tvrdí, že

$$M-N = P_{[z_1,z_2]}(A-B)$$

Dále víme, že $M = A + \alpha u$, $N = B + \beta v_1 + \gamma v_2$

Tedy hledáme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\underbrace{A + \alpha u}_{M} \underbrace{- B - \beta v_1 - \gamma v_2}_{-N} = P_{[z_1,z_2]}(A-B)$$

To je soustava o neznámých α, β, γ.

Nalezené hodnoty dosadíme do

$$M = A + \alpha u, \quad N = B + \beta v_1 + \gamma v_2$$

2. možnost Nepočítáme $P_{[Z_1, Z_2]}(A-B)$, ale rovnou hledáme $M \in p$, $N \in \rho$, které realizují vzdálenost. Použijeme větu (b)(2)

$$M - N \perp Z(p) + Z(\rho)$$

$$(A + \alpha u) - (B + \beta v_1 + \gamma v_2) \perp u, v_1, v_2$$

Tím dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých α, β, γ:

$$\langle A + \alpha u - B - \beta v_1 - \gamma v_2, u \rangle = 0$$

$$\langle A + \alpha u - B - \beta v_1 - \gamma v_2, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle A + \alpha u - B - \beta v_1 - \gamma v_2, v_2 \rangle = 0$$

Tu vyřešíme a spočítáme

$$M = A + \alpha u, \quad N = B + \beta v_1 + \gamma v_2$$

Na závěr spočítáme

$$\operatorname{dist}(p, \rho) = \|M - N\|.$$