$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E \right)$$

Věta

kde α je báze v U. $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je matice φ v této bázi. Takto polynom je nezávislý na výběru báze α

Polynom stupně n s koeficienty v $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

Kořen polynomu je číslo $x_0 \in \mathbb{K}$ takové, že

$$p(x_0) = 0$$

Věta: x_0 je kořenem polynomu p, právě když

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x),$$ kde q je polynom stupně $n-1$.

Věta pro hledání kořenů polynomů stupně ≥ 3

Nechť $p(x) = \pm x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$

Potom platí: má li $p(x)$ ~~[illegible]~~ kořen x_0 v racionálních číslech pak je tento kořen celočíselný a x_0 dělí koeficient a_0.

$$\underbrace{0}_{\text{je dělitelné } x_0} = p(x_0) = \underbrace{\pm x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0}_{\text{dělitelný } x_0} + a_0$$

$\Rightarrow a_0$ dělitelné x_0

Hledání kořene – vyzkoušíme dělitele a_0.

Protože $\vec{0} \neq u \in \ker(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id})$ Tedy pro λ_0 vlastní číslo je

$$\dim(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id}) \geq 1.$$

Příklad: Geometrická a algebraická násobnost mohou ale nemusí být stejné

① $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Char. polynom $\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2$

2 je vl. číslo alg. násobnosti 2.

$\ker\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [e_1, e_2]$ geom násobnost vl. čísla 2 je také 2

<u>Věta</u> Algebraická násobnost vlastního čísla λ_0 je větší nebo rovna geometrické násobnosti

<u>Důkaz.</u> Předp. že geometrická násobnost λ_0 je k, tj.

$$\dim \ker (\varphi - \lambda_0 \, id) = k$$

Nechť vektory $u_1, u_2, \ldots u_k$ tvoří bázi tohoto jádra

Rozšiřme tuto bázi na bázi $\alpha = (u_1, \ldots u_k, u_{k+1}, \ldots u_n)$ celého prostoru. $\ker(\varphi - \lambda_0 \, id)$ je invariantní podprostor neboť platí

$$\forall u \in \ker(\varphi - \lambda_0 \, id) \quad \varphi(u) = \lambda_0 u \in \ker(\varphi - \lambda_0 \, id)$$

Podle věty z minulé přednášky, je

Tím jsme dokázali, že geom násobnost $\leq$ alg násobnost $\square$

Věta: Nechť $\varphi : U \longrightarrow U$ je lin operátor. Potom existuje v U báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

právě když součet geom násobností vlastních čísel je roven dim U.

Navíc $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ jsou všechna vlastní čísla, každé tolikrát, kolik činí jeho geom násobnost.

Vezmeme báze jednotlivých podprostorů

$$\ker(\varphi - \lambda_i \, id)$$

(Tyto podprostory se nazývají VLASTNÍ)

$$\underbrace{\underbrace{u_1, u_2, \ldots u_{k_1}}, \underbrace{u_{k_1+1}, \ldots, u_{k_2}}, \underbrace{u_{k_2+1}, \ldots u_{k_3}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}}_{\dim U}$$

Tyto báze dávají dohromady bázi prostoru U. K tomu je potřeba dokázat, že všechny tyto vektory jsou lin. nezávislé. ∎

Předpokládejme, že věta platí pro k vlastních vektorů.

Mějme vl. vektory $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}$ k vl. číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$

Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$ (*)

(1) Vynásobíme tuto rovnici λ_{k+1}.

$$a_1 \lambda_{k+1} u_1 + \dots + a_k \lambda_{k+1} u_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$$

(2) Aplikujme φ

$$a_1 \varphi(u_1) + \dots + a_k \varphi(u_k) + a_{k+1} \varphi(u_{k+1}) = \vec{o}$$

$$a_1 \lambda_1 u_1 + \dots + a_k \lambda_k u_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$$

Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme

Příklad $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x) = Bx$, $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Char. polynom φ je

$$\det(B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ jsou vlastní čísla matice B, tj operátoru φ.

Vlastní vektor u_1 k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je řešením homogenní soustavy

$$Bx - \lambda x = 0$$

$$(B - \lambda E)x = 0 \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$t \cdot u_1$ jsou vlastní pro $t \neq 0$

$\lambda_2 = 2$ $\quad u_2 = (1,0,1)^T$, $\quad \lambda_3 = 3$ $\quad u_3 = (1,2,2)^T$

Hledáme vlastní čísla operátoru φ.

Char. polynom

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3$$

Tento polynom má kořen 0 alg. násobnosti 3

Geometrická násobnost.

$$\operatorname{Ker}(\varphi - 0\,id) = \{p \in \mathbb{R}_2[x],\ p' = 0\} = [1]$$

Geometrická násobnost $= 1$. Neexistuje taková báze tvořená vlastními vektory, tedy v žádné bázi B není $(\varphi)_{B,B}$ diagonální matice.

(3) φ převede ortonormální bázi $u_1, u_2, \dots u_n$ na ortonormální bázi $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$

Dk (1) $\|\varphi(u)\| = \sqrt{\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|$

Pozn. je-li $\varphi : U \to U$ lineární a $\|\varphi(u)\| = \|u\|$, pak φ zachovává skalární součin.

(2) $\varphi(u) = \vec{o} \Rightarrow \|u\| = \|\varphi(u)\| = 0 \Rightarrow u = \vec{o}$

Tedy φ je prosté $\varphi : U \to U \Rightarrow \dim \operatorname{im} \varphi = \dim U - \dim \ker \varphi = n - 0 = n = \dim U$

$\Rightarrow \operatorname{im} \varphi = U$. Tedy φ je na a je to lin izomorfismus.

(3) $(u_1, \dots u_n)$ $\quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ $\quad \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$\varphi(u_1), \dots \varphi(u_n)$ je ortonormální