ORTOGONÁLNÍ A UNITÁRNÍ OPERÁTORY

U vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem

$\varphi : U \to U$ lineární s vlastností

$$\forall u,v \in U \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

se nazývá ortogonální, jsme li na $\mathbb{R}$,
unitární, jsme-li na $\mathbb{C}$

<u>Věta:</u> Operátor $\varphi : U \to U$ je unitární (ortogonální) právě když v nějaké ortonormální bázi α má matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = A$ takovou, že $A^{-1} = \overline{A}^{T}$ $\left(A^{-1} = A^{T} \right)$.

$$(u)_\alpha^T \, \underline{A^T \cdot \bar{A}} \, \overline{(v)_\alpha} = (u_\alpha)^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = (u_\alpha)^T \underline{E} \, \overline{(v)_\alpha}$$

Platí pro všechna $u, v \in U$. Proto je tato rovnost ekvivalentní s tím, že

$$A^T \cdot \bar{A} = E$$

Opruhujeme

$$\bar{A}^T \, \bar{\bar{A}} = \bar{E}$$

$$\bar{A}^T \cdot A = E$$

Tedy $\bar{A}^T = A^{-1}$.

<u>Příklady</u> Ortogonální matice 2×2

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = E$$

Determinant ortogonální matice

$$A \cdot A^T = E$$

$$\det(A \cdot A^T) = \det E = 1$$

$$\det A \cdot \det A^T = 1$$

$$(\det A)^2 = 1$$

$$\det A = \pm 1$$

Determinant unitární matice

$$A \cdot \bar{A}^T = E \quad \Rightarrow \quad |\det A|^2 = 1$$

$$\det A \cdot \det \bar{A} = 1 \qquad |\det A| = 1$$

$$\det A \cdot \overline{\det A} = 1$$

Důkaz: (1) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $u \neq \vec{o}$.

$$\lambda\bar{\lambda}\langle u,u\rangle = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle = \langle u\, u\rangle = \|u\|^2$$

$$|\lambda|^2 \; \|u\|^2 = \|u\|^2 \neq 0$$

Proto

$$|\lambda| = 1$$

$$\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

(2) Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a nechť $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$, $\varphi(u_2) = \lambda_2 u_2$, $u_1 \neq \vec{o}$, $u_2 \neq \vec{o}$.

$$\lambda_1\bar{\lambda}_2\langle u_1, u_2\rangle = \langle \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \langle \varphi(u_1), \varphi(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$$

Kdyby $\langle u_1, u_2\rangle \neq 0$, pak by $\lambda_1\bar{\lambda}_2 = 1 \Longrightarrow \overbrace{\lambda_1\bar{\lambda}_2}^{1}\lambda_2 = \lambda_2$ Proto

$\lambda_1 = \lambda_2$. $\langle u_1, u_2\rangle = 0$.

Uvažujme $S|_V : V \longrightarrow V$. pak $\bar{\lambda} = a - ib$

To je opět unitární operátor, tentokrát na prostoru dimenze $n-1$

Použijeme indukční předpoklad: ve V je ortonormální báze $u_2, u_3, \dots u_n$ tvořená vlastními vektory. Protože $u_1 \perp u_2, u_3, \dots u_n$ je $u_1, u_2, \dots u_n$ ortonormální báze prostoru U tvořená vlastními vektory, což jsme chtěli dokázat.

pak $\bar{\lambda} = a - ib$ je rovněž vlastním číslem s vlastním vektorem

$$\bar{u} = u_1 - i u_2 \in \mathbb{C}^n$$

Dk: Nechť $Au = \lambda u$.

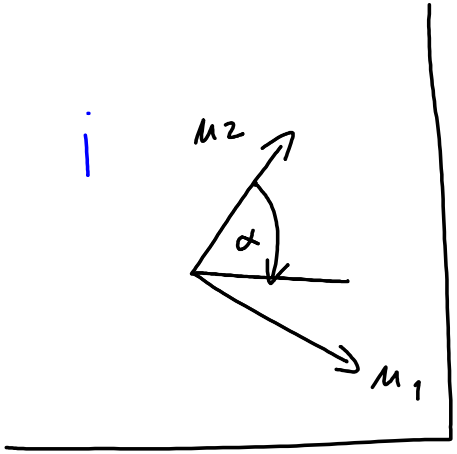
Provedeme komplexní sdružení

$$\overline{Au} = \overline{\lambda u}$$

$$\bar{A}\,\bar{u} = \bar{\lambda}\,\bar{u}$$

A je reálná $\quad A\,\bar{u} = \bar{\lambda}\,\bar{u}$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta},\ \overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta})$



Důkaz. $\tilde{\varphi}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad \tilde{\varphi}(x) = Ax$

je unitární zobrazení, neboť

$$\bar{A}^T = A^T = A^{-1}. \quad (A \text{ je unitární})$$

Pokud je vlastní číslo λ tvaru $\cos\alpha + i\sin\alpha = a + ib$, $b \neq 0$

Pak $\bar{\lambda} = a - ib$ je rovněž vlastní číslo s vlastním vektorem

$$\bar{u} = u_1 - iu_2$$

$\lambda \neq \bar{\lambda}$, pak z věty o vlastních číslech unitárních operátorů máme, že

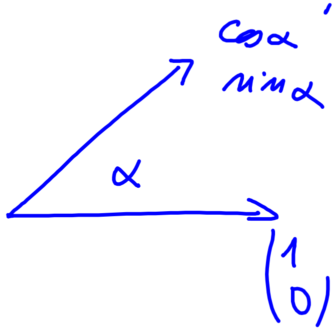
$$\langle u, \bar{u} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u_1 + iu_2, u_1 - iu_2 \rangle = 0$$

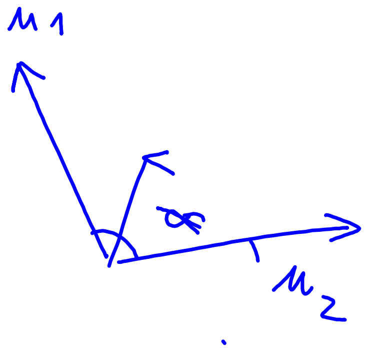
$$\langle u_1, u_1 \rangle - i\bar{i}\langle u_2, u_2 \rangle + i\langle u_2, u_1 \rangle - \bar{i}\langle u_1, u_2 \rangle = \left(\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2\right) + i\langle u_1, u_2 \rangle = 0$$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad x \longmapsto \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} x$$

Toto zobrazení je otočení o úhel α.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 1\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$





$- \ldots \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$u_1 \ldots \begin{pmatrix}\\1\end{pmatrix}$

α odpovídají podle předchozí věty 2-dim invariantní podprostory v $\mathbb{R}^n$.

Specifikace pro $n=3$

Každé ortogonální zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má ve vhodné bázi matici tvaru

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

To znamená, že je to otočení o úhel α kolem osy $[u_1]$ nebo je to složení tohoto otočení a reflexe podle roviny kolmé k u_1.
u_1 je vlastní vektor k vl. číslu ± 1.

$$\alpha = (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right)$$ je ortonormální báze

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

φ je otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ kolem osy $[(1,1,1)^T]$

ve směru od u_2 k u_3.

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = v_3$$
$$\varphi(v_3) = -v_2$$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha} = (id)^{T}_{\varepsilon,\alpha}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

neboť $(id)_{\varepsilon,\alpha}$ je ortogonální

toto je ortogonální matice