Faktorgrupy - opakování

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa, H její podgrupa. Každý prvek $a \in G$ určuje svou **levou třídu** $a \cdot H = \{a \cdot h;\ h \in H\}$. Přitom
$\forall a, b \in G: \quad (a \cdot H = b \cdot H \ \Leftrightarrow\ a \in b \cdot H \ \Leftrightarrow\ b^{-1} \cdot a \in H)$.
Rozklad grupy G podle podgrupy H je množina všech levých tříd $G/H = \{a \cdot H;\ a \in G\}$. Předpokládejme, že podgrupa H je **normální podgrupa** grupy G, tj. pro každé $h \in H$ a každé $a \in G$ platí $a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$. Pak lze na rozkladu G/H zavést operaci pomocí reprezentantů, tj. pro libovolné $a, b \in G$ definovat **součin levých tříd** $a \cdot H$ a $b \cdot H$ předpisem $(a \cdot H) \cdot (b \cdot H) = (a \cdot b) \cdot H$.
Touto operací na rozkladu G/H vznikne **faktorgrupa** $(G/H, \cdot)$.
Definujme zobrazení $\pi : G \to G/H$ předpisem $\pi(a) = a \cdot H$ pro libovolné $a \in G$ (tedy každý prvek grupy G je zobrazen na třídu, do níž patří). Zřejmě je π surjektivní. Dokázali jsme, že π je homomorfismus grup, jehož jádro $\ker \pi = H$.

Definice. Tento surjektivní homomorfismus $\pi : G \to G/H$ se nazývá **projekce grupy G na faktorgrupu G/H**.

Faktorgrupy a homomorfismy

<u>Věta.</u> Nechť $f : G \to K$ *je homomorfismus grup,* $\ker f$ *jeho jádro. Pak pro libovolné* $a, b \in G$ *platí* $f(a) = f(b)$*, právě když* $a^{-1} \cdot b \in \ker f$*, tj. právě když* $a \cdot (\ker f) = b \cdot (\ker f)$. Část důkazu.

<u>Věta (Hlavní věta o faktorových grupách).</u> Nechť $f : G \to K$ *je homomorfismus grup,* H *normální podgrupa grupy* G *splňující* $H \subseteq \ker f$. *Zdůvodnění předpokladu.* *Nechť* $\pi : G \to G/H$ *je projekce grupy* G *na faktorgrupu* G/H*. Pak existuje, a to jediné, zobrazení* $\overline{f} : G/H \to K$ *splňující* $\overline{f} \circ \pi = f$. *Důkaz.*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & K \\
& G/H \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Navíc platí:

- $\overline{f}$ *je homomorfismus grup,*
- $\overline{f}$ *je injekce, právě když* $H = \ker f$, *Důkaz.*
- $\overline{f}$ *je surjekce, právě když* f *je surjekce.*

<u>Důsledek.</u> Je-li $f : G \to K$ *homomorfismus grup, pak platí* $G/(\ker f) \cong f(G)$*, kde* $f(G) = \{f(a);\ a \in G\} \subset K$ *je obraz* G. Důkaz.

<u>Důsledek.</u> Je-li $f : G \to K$ *surjektivní homomorfismus grup, pak platí* $G/(\ker f) \cong K$.

Příklady

Příklad. Zobrazení abs : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, určené předpisem $\mathrm{abs}(x) = |x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^*$, je homorfismus grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ do sebe s jádrem $\ker \mathrm{abs} = \{1, -1\}$ a obrazem $\mathrm{abs}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^+$, proto faktorgrupa $(\mathbb{R}^*/\{1, -1\}, \cdot) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$.

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Zobrazení parity $p : \mathcal{S}_n \to \{1, -1\}$ je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je normální podgrupa všech sudých permutací $\mathcal{A}_n = \ker p$, proto faktorgrupa $(\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n, \circ) \cong (\{1, -1\}, \cdot)$.

Příklad. Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ s předpisem $f(x) = \cos x + i \sin x$ je homomorfismus grupy $(\mathbb{R}, +)$ do grupy $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, neboť platí $\cos(x + y) + i \sin(x + y) = (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y)$ pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$. Jádrem je podgrupa $\ker f = \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ všech celočíselných násobků 2π. Obrazem $f(\mathbb{R}) = \{\cos x + i \sin x;\ x \in \mathbb{R}\} = \{a \in \mathbb{C};\ |a| = 1\}$ je podgrupa všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1. Proto $(\mathbb{R}/\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, +) \cong (\{a \in \mathbb{C};\ |a| = 1\}, \cdot)$.

Součin grup

<u>*Věta.*</u> *Nechť* $(G_1, \cdot)$ *a* $(G_2, \cdot)$ *jsou grupy. Definujme na kartézském součinu* $G_1 \times G_2$ *novou operaci* $\cdot$ *po složkách, tj. definujeme* $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2)$ *pro libovolné* $g_1, h_1 \in G_1$ *a* $g_2, h_2 \in G_2$*. Pak* $(G_1 \times G_2, \cdot)$ *je grupa.* Důkaz.

<u>*Definice.*</u> Výše popsaná grupa $(G_1 \times G_2, \cdot)$ se nazývá <u>**součin grup**</u> $(G_1, \cdot)$ a $(G_2, \cdot)$. Zobrazení

$$p_1 : G_1 \times G_2 \to G_1 \qquad \text{a} \qquad p_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$$

určená předpisy

$$p_1((a, b)) = a, \qquad p_2((a, b)) = b$$

pro libovolné $(a, b) \in G_1 \times G_2$ se nazývají <u>**projekce**</u> (ze součinu).

<u>*Věta.*</u> Nechť $(G_1 \times G_2, \cdot)$ je součin grup $(G_1, \cdot)$ a $(G_2, \cdot)$. Pak obě projekce p_1 a p_2 jsou surjektivní homomorfismy.

Cayleyho věta

<u>*Věta.*</u> *Nechť* $(G, \cdot)$ *je grupa, zvolme libovolně* $a \in G$*. Pak zobrazení* $r_a : G \to G$*, určené předpisem* $r_a(g) = a \cdot g$ *pro každé* $g \in G$*, je bijekce, tedy* $r_a \in \mathcal{S}(G)$*.* Důkaz.