Úkoly domácí

jaro 2011, M3722

1. Uvažujte sférický trojúhelník JBC, kde J označuje jižní pól, B Brno a C nějaký bod na stejné rovnoběžce jako B. Určete vrchol C tak, aby JBC byl nejmenší sférický trojúhelník, v němž neplatí věta o vnějším úhlu (I.16).

2. Dokažte, že pátý Eukleidův postulát je ekvivalentní s tvrzením, že součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je konstantní.

3. V rámci absolutní geometrie dokažte, že v libovolném Saccheriho čtyřúhelníku $ABCD$ ($\angle DAB = \angle CBA = R$ a $|AD| = |BC|$) platí:

- $\angle ADC = \angle BCD$,
- osa úsečky AB je i osou úsečky CD.

4. Dokažte, že každé dvě rozběžky v hyperbolické rovině mají společnou kolmici.

5. Dokažte, že pro každé $AM \simeq BN$ osa úsečky AB patří do (zobecněného) svazku určeného přímkami AM, BN.

6. Najděte nějakou chybu v zápiscích z r. 2009 a ostatních učebních materiálech.

7. Uvažujte libovolnou mezní kružnici $\mathcal{L}$, dvě její osy AM, BN ($A, B \in \mathcal{L}$, $AM \simeq |||BN$), tečnu k $\mathcal{L}$ z bodu A a její průsečík s BN ozn. D. Dále označte s' délku oblouku AB a t délku úsečky AD. Dokažte, že platí

$$s' = \kappa \cdot \cos \Pi(t),$$

kde Π je Lobačevského funkce a κ je stejná konstanta jako na přednášce.

8. V pravoúhlém hyperbolickém trojúhelníku (s přeponou c, odvěsnami a, b a odpovídajícími protilehlými úhly α, β) odvoďte některou z následujících rovností:

$$\cos \alpha \cdot \cos \Pi(c) = \cos \Pi(b),$$
$$\tan \alpha \cdot \cot \Pi(b) = \cos \Pi(a).$$

9. V obecném sférickém trojúhelníku (se stranami a, b, c a úhlem α mezi b a c) dokažte, že platí

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \alpha.$$

10. Na hyperboloidu $H^2 = \{x^2 + y^2 - z^2 = -k^2\} \subset \mathbb{E}^{2,1}$ ozn. g geodetiku určenou bodem $p \in H^2$ a vektorem $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{p}^{\perp} = T_p H^2$. Dokažte, že pokud $||\overrightarrow{v}|| = k$, pak g je právě (hlavní) hyperbola s parametrizací $g(t) = \cosh t \cdot \overrightarrow{p} + \sinh t \cdot \overrightarrow{v}$, $t \in \mathbb{R}$.

11. Charakterizujte všechny typy (zobecněných) cyklů v polorovinovém modelu hyperbolické roviny.

Finální verze (22. května 2011); všechny příklady za 0–3 body; vstupenkou ke zkoušce je zisk aspoň **11** bodů.

Nápady **1.** Nepomůže nějaká úhlojevná projekce do roviny? **2.** Součet = konst. $\Longrightarrow$ konst. $= 2R$. **3.** SÚS. **4.** Např. každé dvě polopřímky mají společnou souběžku... **6.** Čím těžší chyba, tím lepší. **7.** Všechny mezní kružnice jsou shodné a mezní sféra je modelem rovinné eukleidovské geometrie. **8.** Vhodně modifikujte důkaz $\sin \alpha \cdot \cot \Pi(c) = \cot \Pi(a)$. **10.** $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. **11.** Tento model je konformní s $\mathbb{E}^2$ a každá zobecněná kružnice protíná kolmo všechny přímky z určujícího svazku.