

# Obsah

<b>Motivační úlohy</b>	<b>1</b>
Vymírání populace	1
Advekce a difúze	2
Kmitání struny	5
<b>1 Metody charakteristik</b>	<b>9</b>
1.1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu	9
1.2 Klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu	15
1.3 Kanonický tvar parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných	16
1.4 Počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných	19
Cvičení	25
<b>2 Metody integrálních transformací</b>	<b>27</b>
2.1 Fourierova transformace	27
2.2 Laplaceova transformace	31
Cvičení	33
<b>3 Metoda separace proměnných (Fourierova)</b>	<b>35</b>
3.1 Hyperbolické rovnice	35
3.2 Parabolické rovnice	40
3.3 Eliptické rovnice	43
Cvičení	54
<b>4 Metody řešení eliptické rovnice</b>	<b>57</b>
4.1 Integrace per partes a Greenovy vzorce	57
4.2 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici	58
4.3 Laplaceova rovnice a harmonické funkce	58
4.4 Metoda potenciálů	66
4.5 Greenova funkce Laplaceova operátoru	72
4.6 Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru	79
Cvičení	81
<b>5 Schrödingerova rovnice</b>	<b>83</b>
5.1 Řešení za zjednodušujících předpokladů	84
<b>Dodatky</b>	<b>89</b>
<b>A Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice</b>	<b>91</b>
A.1 Formulace úloh	91
A.2 Řešení nehomogenní okrajové úlohy	96
Cvičení	99

<b>B Speciální funkce</b>	<b>101</b>
B.1 Legendreovy polynomy . . . . .	101
B.2 Čebyševovy-Laguerreovy polynomy . . . . .	106
B.3 Čebyševovy-Hermiteovy polynomy . . . . .	110
B.4 Funkce $\Gamma$ . . . . .	113
B.5 Besselovy funkce . . . . .	120
<b>C Distribuce</b>	<b>129</b>
Cvičení . . . . .	133
<b>D Laplaceův operátor v křivočarém souřadném systému</b>	<b>135</b>

Následující text není ničím více, než zápisem přednášky předmětu M4010 Rovnice matematické fyziky. Má sloužit především k tomu, aby student-ky/i nebyl-y/i během přednášky nucen-y/i si dělat podrobné poznámky, přepisovat často komplikované formule z tabule do svých papírů (což je natolik intenzivním zdrojem chyb, že se jim prakticky nelze vyhnout). Poté může posloužit jako rychlá připomínka toho, co člověk již zná. V žádném případě nemůže být považován za zdroj, z něhož se lze rovnicím matematické fyziky naučit. Sám o sobě bez komentářů během přednášky je málo srozumitelný až nesrozumitelný (aby byl s komentáři srozumitelný, je mým přáním a snahou; nakolik se to skutečně zdaří, nechám k posouzení laskavým student-kám/ům).

V textu asi zůstaly nějaké nedůslednosti, formulační nejasnosti nebo dokonce chyby. Budu vděčný každému, kdo mě na ně upozorní.

Zdeněk Pospíšil  
únor 2011

V češtině existuje několik učebnic parciálních diferenciálních rovnic (rovnic matematické fyziky):

1. A. N. Tichonov, A. A. Samarskij: *Rovnice matematické fyziky*, ČSAV, Praha 1955, 765 stran.  
Důkladná učebnice, v podstatě encyklopedie klasických metod řešení parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.
2. R. Rychnovský, J. Výborná: *Parciální diferenciální rovnice a jejich některá řešení*, SNTL, Praha 1963, 167 stran.  
Stručný úvod do problematiky parciálních diferenciálních rovnic. Pěkně jsou zpracovány rovnice prvního řádu.
3. S. Míka, A. Kufner: *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XIX, SNTL, Praha 1981, 88 stran.
4. S. Míka, A. Kufner: *Parciální diferenciální rovnice I. Stacionární rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XX, SNTL, Praha 1983, 181 stran.
5. J. Barták, L. Herrmann, V. Lovicar, O. Vejvoda: *Parciální diferenciální rovnice II. Evoluční rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XXI, SNTL, Praha 1988, 220 stran.
6. J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, VUT, PC-DIR Real s.r.o., Brno 2000, 155 str.  
Přehledná a srozumitelná skripta. Jejich rozsah se zhruba shoduje s rozsahem předmětu M4010.
7. P. Čihák a kol.: *Matematická analýza pro fyziky (V)*, Matfyzpress, Praha 2001, 320 str.  
Skripta, podle nichž se učí na spřátelené fakultě.
8. J. Kopáček a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky [V]*, Matfyzpress, Praha 2003, 306 str.  
Užitečná sbírka úloh.



# Motivační úlohy

## Vymírání populace

Uvažujme nějakou populaci, například obyvatele nějakého izolovaného ostrova. Předpokládejme, že známe složení této populace v nějakém čase a zajímá nás, jak se bude vyvíjet velikost této části populace (tj. tvořené jedinci, kteří byli živi již na počátku, jedince, kteří se v průběhu času narodili, neuvažujeme). K popisu velikosti populace můžeme používat dvě veličiny. Můžeme ji vyjadřovat jako množství jedinců, kteří mají v čase  $t$  věk v rozmezí od  $a$  do  $a + \tau$ , tj. jedince, kteří mají v čase  $t$  věk z intervalu  $[a, a + \tau)$ ; tuto veličinu označíme  $N(t, a, \tau)$ . Velikost populace však můžeme vyjádřit také jako tzv. *hustotu populace věku  $a$  v čase  $t$* , kterou označíme symbolem  $u(t, a)$ . Hustota populace  $u$  a velikost populace  $N$  jsou vázány vztahem

$$N(t, a, \tau) = \int_a^{a+\tau} u(t, \xi) d\xi.$$

O hustotě  $u$  budeme předpokládat, že je to spojitě diferencovatelná funkce. Změna velikosti vymezené části populace je dána umíráním. Označme proto symbolem  $D(t, a, \tau)$  množství jedinců, kteří zemrou během časového intervalu  $(t, t + \tau]$  a v čase  $t$  mají věk v rozmezí  $[a, a + \tau)$ . Jedinci, kteří během časového intervalu délky  $\tau$  nezemřeli, zestárlí o  $\tau$ . Tuto triviální skutečnost (zákon zachování) vyjádříme rovností

$$N(t + \tau, a + \tau, \tau) = N(t, a, \tau) - D(t, a, \tau). \quad (1)$$

Pomocí substituce  $\eta = \xi - \tau$  vyjádříme levou stranu této rovnosti,

$$N(t + \tau, a + \tau, \tau) = \int_{a+\tau}^{a+2\tau} u(t + \tau, \xi) d\xi = \int_a^{a+\tau} u(t + \tau, \eta + \tau) d\eta,$$

takže s využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkce dvou proměnných můžeme psát

$$\begin{aligned} N(t + \tau, a + \tau, \tau) - N(t, a, \tau) &= \int_a^{a+\tau} (u(t + \tau, \xi + \tau) - u(t, \xi)) d\xi = \\ &= \int_a^{a+\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \tau, \xi + \tau) \tau + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi + \vartheta_2 \tau) \tau \right) d\xi = \tau \int_a^{a+\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \tau, \xi + \tau) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi + \vartheta_2 \tau) \right) d\xi, \quad (2) \end{aligned}$$

kde  $\vartheta_1, \vartheta_2$  jsou nějaká čísla z intervalu  $[0, 1]$ . K vyjádření množství umírajících jedinců budeme předpokládat, že podíl zemřelých jedinců jistého věku za krátký časový interval délky  $\Delta t$  mezi všemi jedinci téhož věku je přímo úměrný trvání  $\Delta t$  procesu umírání,

$$\frac{D(t, a, \Delta t)}{N(t, a, \Delta t)} = \mu(a) \Delta t.$$

Koeficient úměrnosti  $\mu(a)$ , který závisí na věku  $a$ , nazýváme *specifická úmrtnost (mortalita) ve věku  $a$* . Z uvedeného předpokladu dostaneme vyjádření množství umírajících jedinců ve tvaru

$$\Delta t = \mu(a) \int_a^{a+\Delta t} u(t, \xi) d\xi. \quad (3)$$

Položíme  $\tau = \Delta t$  a dosadíme rovnosti (2) a (3) do relace (1). Dostaneme

$$\int_a^{a+\Delta t} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \Delta t, \xi + \Delta t) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi + \vartheta_2 \Delta t) + \mu(a)u(t, \xi) \right) d\xi = 0.$$

Tato rovnost má platit pro libovolná  $a \geq 0$ ,  $t \geq 0$  a  $\Delta t > 0$ . To je možné jen tak, že pro všechna přípustná  $a, t, \Delta t$  platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \Delta t, a + \Delta t) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, a + \vartheta_2 \Delta t) + \mu(a)u(t, a) = 0$$

a odtud limitním přechodem  $\Delta t \rightarrow 0$  dostaneme *McKendrickovu-von Foersterovu rovnici*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, x) = -\mu(a)u(t, x). \quad (4)$$

Znamé složení populace na počátku vyjádříme *počáteční podmínkou*

$$u(0, a) = \varphi(a). \quad (5)$$

Část populace, která od času  $t = 0$  vymírá, je popsána hustotou  $u(t, a)$  definovanou na oblasti

$$\{(t, a) : t \leq a\}. \quad (6)$$

Zvolíme libovolné  $a_0 \geq 0$  a pro  $a \geq a_0$  položíme

$$x(a) = u(a - a_0, a).$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet derivací složené funkce a podle rovnice (4) platí

$$\begin{aligned} x'(a) &= \frac{d}{da} u(a - a_0, a) = \frac{\partial u}{\partial t}(a - a_0, a) \frac{\partial(a - a_0)}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}(a - a_0, a) \frac{\partial a}{\partial a} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(a - a_0, a) + \frac{\partial u}{\partial a}(a - a_0, a) = -\mu(a)u(a - a_0, a) = -\mu(a)x(a). \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (5) dostaneme

$$x(a_0) = u(a_0 - a_0, a_0) = \varphi(a_0). \quad (7)$$

Funkce  $x$  je tedy řešením obyčejné lineární homogenní rovnice

$$x'(a) = -\mu(a)x(a)$$

s počáteční podmínkou (7). To znamená, že

$$x(a) = \varphi(a_0) e^{\int_{a_0}^a \mu(\xi) d\xi}$$

a poněvadž  $u(t, a) = u(a - (a - t), a)$ , můžeme psát řešení rovnice (4) s počáteční podmínkou (5) na oblasti (6) ve tvaru

$$u(t, a) = \varphi(a - t) e^{\int_{a-t}^a \mu(\xi) d\xi}.$$

## Advekce a difúze

Uvažujme tenký dlouhý válec, v němž proudí kapalina. Poloměr válce je vzhledem k jeho výšce (délce) tak malý, že válec s kapalinou můžeme považovat za jednorozměrný objekt a jeho jediný rozměr (délku) za nekonečný. Osu válce ztotožníme se souřadnou osou  $x$ . Představme si, že v proudící kapalině je nějaká látka, která je jednak unášena proudem, jednak v kapalině difunduje. Označme  $u = u(t, x)$  koncentraci látky v čase  $t$  a v místě

o souřadnici  $x$ . Tímto označením a terminologií se míní skutečnost, že množství látky, které se v časovém okamžiku  $t$  nachází v úseku válce od souřadnice  $\alpha$  do souřadnice  $\beta$  je dáno integrálem

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(t, \xi) d\xi.$$

Chceme najít koncentraci látky v každém bodě válce v každém čase, pokud známe koncentraci na začátku děje, tj. v čase  $t = 0$ .

Označme rychlost proudící kapaliny symbolem  $v$ . Tato rychlost může být v každém místě jiná a může se měnit s časem, tj.  $v = v(t, x)$ . Pokud kapalina proudí v kladném směru osy  $x$ , je  $v > 0$ , pokud v záporném směru, je  $v < 0$ .

Zavedeme dále *difúzní tok* jako veličinu  $g = g(t, x)$ ; tato veličina představuje rychlost částice látky způsobenou difúzí, znaménko určujeme podle stejné konvence jako v případě rychlosti  $v$ . Difúzní tok vyjadřuje, že množství látky, které se dostane difúzí přes levou hranici úseku válce  $\alpha$  do tohoto úseku za krátký časový interval  $[t, t + \Delta t]$  je rovno

$$g(t, \alpha)\Delta t,$$

a množství látky, které se dostane přes pravou hranici  $\beta$  z tohoto úseku za stejný časový interval je rovno

$$g(t, \beta)\Delta t;$$

tato interpretace předpokládá, že  $g(t, \alpha) > 0$ ,  $g(t, \beta) > 0$ , kdyby tyto nerovnosti nebyly splněny, odpovídajícím způsobem bychom vyměnili slova „do úseku“ za „z úseku“ a naopak.

Množství částic, které je unášeno rychlostí  $v$  přes bod o souřadnici  $\alpha$  do úseku  $(\alpha, \beta)$ , resp. přes bod o souřadnici  $\beta$  z úseku  $(\alpha, \beta)$ , je rovno

$$u(t, \alpha)v(t, \alpha)\Delta t, \quad \text{resp.} \quad u(t, \beta)v(t, \beta)\Delta t.$$

Ze zákona zachování hmoty a následnou úpravou s využitím Newtonovy-Leibnizovy formule dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} u(t + \Delta t, \xi) d\xi &= \int_{\alpha}^{\beta} u(t, \xi) d\xi + g(t, \alpha)\Delta t - g(t, \beta)\Delta t + u(t, \alpha)v(t, \alpha)\Delta t - u(t, \beta)v(t, \beta)\Delta t = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} u(t, \xi) d\xi - \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} (g(t, \xi) + u(t, \xi)v(t, \xi)) d\xi \right) \Delta t. \end{aligned}$$

Tuto rovnost upravíme na tvar

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{u(t + \Delta t, \xi) - u(t, \xi)}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} g(t, \xi) + \frac{\partial}{\partial x} v(t, \xi)u(t, \xi) \right) d\xi = 0.$$

Úsek válce od souřadnice  $\alpha$  do souřadnice  $\beta$  byl vybrán libovolně, stejně tak i časový okamžik  $t$ . To znamená, že pro všechna  $x$  a všechna  $t$  musí platit

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial x} g(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} v(t, x)u(t, x).$$

Odtud dostaneme limitním přechodem  $\Delta t \rightarrow 0$  relaci

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} g(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} v(t, x)u(t, x). \quad (8)$$

Tato relace váže neznámou funkci  $u$  (hustotu) a neznámou funkci  $g$  (difúzní tok). Potřebujeme tedy ještě nějak funkci  $g$  určit. Předpokládejme tedy, že difúzí se částice přesunuje z místa s větší koncentrací na místo s koncentrací menší (to je předpoklad celkem přirozený) a že rychlost difundující částice je přímo úměrná rozdílu (gradientu) koncentrací (tento předpoklad bývá nazýván *Fickův zákon*). Tedy

$$g(t, x) = -D \frac{\partial}{\partial x} u(t, x).$$

Kladný koeficient úměrnosti  $D$  se nazývá *difuzivita*; může se měnit s časem i s místem, tedy  $D = D(t, x)$ . Dosazením do rovnosti (8) dostaneme *rovnici advekce-difúze*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right) - \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) u(t, x). \quad (9)$$

Tato rovnice má být splněna pro každý čas  $t > 0$  a každý bod  $x \in \mathbb{R}$ . K rovnici přidáme *počáteční podmínku* vyjadřující koncentraci difundující látky v počátečním čase  $t = 0$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (10)$$

která má platit pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

Pokud je kapalina homogenní, v čase se nemění, tj.  $D(t, x) \equiv a^2 = \text{const}$ , a proudí konstantní rychlostí  $v(t, x) \equiv \text{const}$ , můžeme obecnou rovnici advekce-difúze (9) zjednodušit na tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - v \frac{\partial}{\partial x} u(t, x). \quad (11)$$

V tomto případě můžeme prostorovou souřadnici transformovat — zavést novou souřadnou soustavu, která je „unášena rychlostí  $v$ “. Zavedeme tedy novou prostorovou souřadnici  $\xi$  vztahem

$$\xi = x - vt.$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet parciálních derivací složených funkcí platí

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi(t, x)) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi(t, x)) \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} u(t, \xi(t, x)) \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi) - v \frac{\partial}{\partial \xi} u(t, \xi)$$

a analogicky a stručněji (bez psaní nezávisle proměnných)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u.$$

Dosazením do rovnice (9) dostaneme *rovnici difúze*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Uvažujme jednoduchou situaci: v jednom bodě (který můžeme považovat za počátek souřadnic) do kapaliny v počátečním okamžiku „umístíme“ nějaké množství  $A$  látky, která se bude v neproudící kapalině šířit difúzí. Vývoj koncentrace difundující látky bude popsán rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Na počátku je všechna difundující látka koncentrována v jediném bodě. To znamená, že pro její koncentraci v čase  $t = 0$  musí platit

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, \xi) d\xi.$$

Tato podmínka bude splněna, pokud počáteční podmínku pro rovnici (12) napíšeme ve tvaru

$$u(0, x) = A\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

kde  $\delta$  je Diracova distribuce, sr. dodatek C. Ze zákona zachování hmoty plyne, že musí být splněna podmínka

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, \xi) d\xi = A \quad \text{pro všechna } t > 0. \quad (14)$$



Pokusíme se „uhodnout“ řešení rovnice (12) s počáteční podmínkou (13). Můžeme si představovat, že difúze probíhá tak, že jednotlivé molekuly látky se náhodně pohybují a že pravděpodobnost pohybu nalevo je stejná jako pravděpodobnost pohybu napravo. Koncentrace látky po jistém čase by tedy mohla mít tvar normálního (Gaussova) rozložení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0. Rozptyl se však s časem mění — na počátku je nulový a s postupem času se zvětšuje. Pro rozptyl  $\sigma^2 = \sigma(t)^2$  tedy platí

$$\sigma(0) = 0. \quad (15)$$

Řešení rovnice (12) s počáteční podmínkou (13) tedy budeme hledat ve tvaru

$$u(t, x) = A \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}.$$

Z vlastností rozložení pravděpodobnosti je vidět, že při této volbě v každém čase  $t$  platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, \xi) d\xi = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma(t)^2}} d\xi = A,$$

takže podmínka (14) je splněna. Má být splněna také rovnice (12). Proto vyjádříme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{\sigma(t)^2} \sigma'(t) + \frac{1}{\sigma(t)} \left( -\frac{x^2}{2} (-2\sigma(t)^{-3}) \sigma'(t) \right) \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \sigma'(t) \left( \frac{x^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2} \right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} (x^2 - \sigma(t)^2) \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \left( -\frac{2x}{2\sigma(t)^2} \right) \right) = -\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( x e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \right) = \\ &= -\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)^3} \left( 1 + x \left( -\frac{2x}{2\sigma(t)^2} \right) \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \frac{1}{\sigma(t)^5} (x^2 - \sigma(t)^2). \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (12) a jednoduché úpravě dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci  $\sigma$

$$\sigma'(t) = \frac{a^2}{\sigma(t)}.$$

Řešení této rovnice se separovanými proměnnými, které splňuje počáteční podmínku (15) je  $\sigma(t) = \sqrt{2a^2 t}$ . Dostáváme tedy řešení počáteční úlohy (12), (13) ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{A}{2\sqrt{a^2 \pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

## Kmitání struny

Uvažujme tenkou strunu napjatou podél osy  $x$  silou  $T$ . Chceme popsat malé kmity této struny, tj. odchylku každého bodu struny od rovnovážné polohy v každém čase. Aby tento problém byl relativně snadno zvládnutelný, přijmeme několik zjednodušujících předpokladů:

- Výchyly struny jsou tak malé, že její délku můžeme považovat za konstantní.
- Struna neklade odpor vůči ohýbání, je dokonale pružná.
- Každý bod vykonává pohyb pouze ve směru kolmém na osu  $x$ , tj. kmity jsou příčné.

Označme  $u(t, x)$  výchylku bodu o souřadnici  $x$  v časovém okamžiku  $t$ . Uvažujme síly, které působí na úsek struny mezi body  $\alpha$  a  $\beta$ .

Na strunu může působit nějaká vnější síla. Vzhledem ke třetímu předpokladu stačí uvažovat její složku  $F_e$  kolmou na osu  $x$ . Tato síla může být v každém bodě struny jiná a také se může měnit s časem. Proto ji vyjádříme

pomocí její hustoty  $g = g(t, x)$ ; hustota síly je definována tak, že vnější síla  $F_e(t)$  působící na uvažovaný úsek struny v čase  $t$  je rovna

$$F_e(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, \xi) d\xi.$$

Tahová síla  $T$  působí v bodě  $\alpha$  ve směru tečny ke struně v tomto bodě. Její složka  $F_{\alpha}$  kolmá na osu  $x$  má velikost  $-T \sin \varphi_{\alpha}$ , kde  $\varphi_{\alpha}$  je úhel, který svírá osa  $x$  s tečnou ke struně v bodě  $\alpha$ . Poněvadž ale kmity považujeme za malé, je úhel  $\varphi_{\alpha}$  také malý, takže  $\sin \varphi_{\alpha} \approx \text{tg } \varphi_{\alpha}$ . Hodnota  $\text{tg } \varphi_{\alpha}$  je současně směrnici tečny k funkci  $u(t, \cdot)$  v bodě  $\alpha$ . Sílu  $F_{\alpha}$  v čase  $t$  tedy můžeme vyjádřit jako

$$F_{\alpha}(t) = -T \frac{\partial}{\partial x} u(t, \alpha).$$

Podobně složku tahové síly působící na strunu v bodě  $\beta$  vyjádříme jako

$$F_{\beta}(t) = T \frac{\partial}{\partial x} u(t, \beta).$$

Celková síla působící na úsek struny mezi body  $\alpha$  a  $\beta$  je tedy dána součtem  $F_e + F_{\beta} + F_{\alpha}$ , který upravíme s využitím Newtonovy-Leibnizovy formule:

$$\begin{aligned} F(t) = F_e(t) + F_{\beta}(t) + F_{\alpha}(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} g(t, \xi) d\xi + T \left( \frac{\partial}{\partial x} u(t, \beta) - \frac{\partial}{\partial x} u(t, \alpha) \right) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} g(t, \xi) d\xi + T \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, \xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \left( T \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, \xi) + g(t, \xi) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Sílu působící na uvažovaný úsek struny však můžeme také vyjádřit pomocí zákona síly. K tomu označíme  $\varrho = \varrho(x)$  lineární hustotu struny v bodě  $x$ . Lineární hustota je definována tak, že hmotnost úseku struny mezi body  $\alpha$  a  $\beta$  je dána integrálem

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\xi) d\xi.$$

Hmotnost krátkého úseku struny mezi body  $x$  a  $x + \Delta x$  je tedy podle věty o střední hodnotě integrálního počtu rovna

$$\Delta m = \int_x^{x+\Delta x} \varrho(\xi) d\xi = \varrho(x + \vartheta \Delta x) \Delta x,$$

kde  $\vartheta \in [0, 1]$  je nějaké číslo. Zrychlení bodu struny o souřadnici  $x + \vartheta \Delta x$  je rovno

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x + \vartheta \Delta x).$$

Sílu působící na uvažovaný krátký úsek struny tedy můžeme vyjádřit jako součin tohoto zrychlení a hmotnosti  $\Delta m$ ,

$$\varrho(x + \vartheta \Delta x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x + \vartheta \Delta x) \Delta x$$

a celkovou sílu působící na úsek struny mezi body  $\alpha$  a  $\beta$  jako součet

$$\sum \varrho(x + \vartheta \Delta x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x + \vartheta \Delta x) \Delta x,$$

kde sčítáme přes všechny úseky struny mezi body  $\alpha, \beta$ . Tento součet je integrálním součtem funkce  $\varrho(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, \cdot)$ , takže pro  $\Delta x \rightarrow 0$  dostaneme sílu  $F(t)$ , působící v čase  $t$  na úsek struny mezi body  $\alpha$  a  $\beta$ , vyjádřenu Riemannovým integrálem

$$F(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, \xi) d\xi. \quad (17)$$

Porovnáním (16) a (17) dostaneme

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, \xi) - T \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(t, \xi) - g(t, \xi) \right) d\xi = 0.$$

Tato rovnost může být pro libovolné hodnoty  $\alpha$  a  $\beta$  splněna jen tak, že integrovaná funkce je nulová, tedy

$$\varrho(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = T \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + g(t, x).$$

Nyní položíme

$$a = a(x) = \sqrt{\frac{T}{\varrho(x)}}, \quad f = f(t, x) = \frac{g(t, x)}{\varrho(x)}$$

a dostaneme rovnici kmitání struny

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = a(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x).$$

Uvažujme nejjednodušší případ — struna je homogenní, tj.  $\varrho(x) \equiv \text{const}$  a nepůsobí na ni žádná vnější síla, tj.  $g(t, x) \equiv 0$ . Je tedy také  $a(x) = a = \text{const}$  a  $f(t, x) \equiv 0$ . Rovnice kmitání struny nyní nabývá tvaru

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x). \quad (18)$$

Označme délku struny  $\ell$  a uvažujme, že struna je v krajních bodech 0 a  $\ell$  upevněna, nevykonává v těchto bodech žádný pohyb. K rovnici (18) tak dostáváme *okrajové podmínky*

$$u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 \quad (19)$$

pro každý čas  $t \geq 0$ . Strunu rozkmitáme tak, že ji v počátečním okamžiku  $t = 0$  vychýlíme z její rovnovážné polohy a vypustíme. Struna má tedy v čase  $t = 0$  nějaký tvar a nulovou rychlost, tj. funkce  $u$  splňuje *počáteční podmínky*

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = 0 \quad (20)$$

pro každý bod  $x \in [0, \ell]$ . Počáteční funkce  $\varphi$  samozřejmě musí splňovat podmínku  $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$ .

Řešení rovnice (18) s podmínkami (19), (20) „slyšíme“: zní základní tón a tóny alikvotní. Struna tedy vykonává harmonický pohyb o nějaké základní frekvenci  $\omega$  a také harmonické pohyby s frekvencemi, které jsou násobky základní. Můžeme proto hádat, že řešení by mělo být tvaru

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \sin(n\omega t + c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) (\sin c_n \cos n\omega t + \cos c_n \sin n\omega t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) \cos n\omega t + b_n(x) \sin n\omega t); \end{aligned}$$

Označili jsme  $a_n(x) = \alpha_n(x) \sin c_n$ ,  $b_n(x) = \alpha_n(x) \cos c_n$ ; sčítáme pro  $n$  až do nekonečna, abychom nějak uměle neomezovali počet alikvotních tónů. Pokud budeme předpokládat, že

$$a_n(0) = a_n(\ell) = b_n(0) = b_n(\ell) = 0, \quad (21)$$

budou splněny okrajové podmínky (19). Funkce  $u$  musí splňovat rovnici (18), tedy

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) n^2 \omega^2 \cos n\omega t + b_n(x) n^2 \omega^2 \sin n\omega t) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n''(x) \cos n\omega t + b_n''(x) \sin n\omega t)$$

neboli

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} [(a^2 a_n''(x) + n^2 \omega^2 a_n(x)) \cos n\omega t + (a^2 b_n''(x) + n^2 \omega^2 b_n(x)) \sin n\omega t].$$

Poněvadž funkce  $\cos n\omega t$  a  $\sin n\omega t$  jsou lineárně nezávislé, musí platit

$$a^2 a_n'' + n^2 \omega^2 a_n = 0, \quad a^2 b_n'' + n^2 \omega^2 b_n = 0$$

pro všechna  $n = 1, 2, 3, \dots$ . První z těchto obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu upravíme na tvar

$$a_n'' + \left(\frac{n\omega}{a}\right)^2 a_n = 0.$$

Tato lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty má řešení

$$a_n(x) = C_1 \cos \frac{n\omega}{a} x + C_2 \sin \frac{n\omega}{a} x.$$

Chceme, aby byla splněna první z podmínek (21), tedy

$$0 = a_n(0) = C_1.$$

Odtud dále dostaneme

$$0 = a_n(\ell) = C_2 \sin \frac{n\omega}{a} \ell.$$

Tato rovnost je splněna pro  $\omega = \frac{\pi a}{\ell}$  a libovolnou konstantu  $C_2$ . Označíme  $C_2 = A_n$  a funkci  $a_n$  zapíšeme ve tvaru

$$a_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi a}{a\ell} x = A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Podobně dostaneme

$$b_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Tyto funkce dosadíme do vyjádření funkce  $u$  a dostaneme

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Tato funkce formálně splňuje rovnici (18) a okrajové podmínky (19). Ještě určíme konstanty  $A_n$  a  $B_n$  tak, aby byly splněny počáteční podmínky (20). Má platit

$$\varphi(x) = u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Tuto rovnost můžeme chápat jako vyjádření funkce  $\varphi$  ve tvaru sinové řady. Je tedy

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi$$

pro každé  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dále platí

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Odtud a z věty o jednoznačnosti Fourierových řad dostaneme, že  $B_n = 0$  pro všechna  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Řešení rovnice (18) s podmínkami (19) a (20) tímto způsobem dostáváme ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \cos \frac{n\pi a}{\ell} t \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \left( \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi a}{\ell} t \right) d\xi.$$

Ještě poznamenejme, že základní frekvence kmitající struny nám vyšla jako

$$\omega = \frac{\pi a}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

# Kapitola 1

## Metody charakteristik

### 1.1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

#### 1.1.1 Lineární homogenní parciální diferenciální rovnice ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Řešením je funkce  $u = u(x, y)$ .

Hledáme vrstevnice funkce  $u$ . Nechť mají parametrické vyjádření  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ . Pak  $u(x(s), y(s)) = \text{const}$  a tedy

$$\frac{d}{ds} u(x(s), y(s)) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0.$$

Porovnáním s (1.1) vidíme, že pokud funkce  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  jsou řešeními systému autonomních obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y), \\ y' &= b(x, y), \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde  $'$  označuje obyčejnou derivaci podle nezávisle proměnné  $s$ , pak jsou parametrickými rovnicemi vrstevnic řešení rovnice (1.1). Systém (1.2) se nazývá *charakteristická soustava rovnic rovnice (1.1)*, jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice (1.1)*.

Nechť rovnice  $\varphi(x, y) = c$  je implicitním popisem charakteristik rovnice (1.1), tj. vrstevnic řešení této rovnice, a  $\Phi$  je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Pak  $u = u(x, y) = \Phi(\varphi(x, y))$  je obecným řešením rovnice (1.1).

**D.:** Podle „řetězového pravidla“ pro parciální derivaci složené funkce je  $\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi' \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi' \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , na charakteristikách  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  platí  $\varphi(x(s), y(s)) = c$  a tedy

$$\begin{aligned} a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= \Phi'(\varphi(x, y)) \left( a \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right) = \\ &= \Phi'(\varphi(x, y)) \left( \frac{dx}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \Phi'(\varphi(x, y)) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = \Phi'(\varphi(x, y)) \frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s)) = 0. \end{aligned}$$

□

#### 1.1.2 Okrajová úloha pro lineární homogenní parciální diferenciální rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Nechť  $x = \varphi(\sigma)$ ,  $y = \psi(\sigma)$  je parametrický popis rovinné křivky, která protíná každou z charakteristik rovnice (1.1) právě jednou, a nechť  $f$  je funkce se stejným definičním oborem jako  $\varphi$  a  $\psi$ . Podmínka

$$u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma) \quad (1.3)$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici (1.1)*.

**Heuristická úvaha:** Podmínku (1.3) si lze představit jako prostorovou křivku. Dále si lze představit, že máme vrstevnice řešení, tj. charakteristiky, vytvořené např. z drátu. Tyto vrstevnice umísťujeme na křivku vyjadřující okrajovou podmínku.

Nechť charakteristiky rovnice (1.1), tj. trajektorie systému (1.2), mají obecné parametrické vyjádření

$$\begin{aligned}x &= x(s, c_1, c_2), \\y &= y(s, c_1, c_2),\end{aligned}\tag{1.4}$$

kde  $c_1, c_2$  jsou integrační konstanty. Dále nechť okrajová podmínka je parametricky vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= \varphi(\sigma), \\y &= \psi(\sigma), \\u &= f(\sigma).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Pro jednu hodnotu parametru  $s$ , řekněme pro  $s = 0$ , vrstevnice protíná křivku, na níž je zadána okrajová podmínka, tedy

$$\begin{aligned}x(0, c_1, c_2) &= \varphi(\sigma), \\y(0, c_1, c_2) &= \psi(\sigma).\end{aligned}$$

Z těchto rovnic vypočítáme konstanty  $c_1, c_2$  v závislosti na parametru  $\sigma$ , tedy  $c_1 = c_1(\sigma), c_2 = c_2(\sigma)$ . Toto vyjádření dosadíme do (1.4) a dostaneme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé  $s$  a  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}x &= x(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma)), \\y &= y(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma)).\end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme; zejména vyjádříme  $\sigma$  pomocí  $x$  a  $y$ , tj.  $\sigma = \sigma(x, y)$  a dosadíme do poslední z rovnic (1.5). Tím dostaneme řešení úlohy (1.1), (1.3) ve tvaru  $u(x, y) = f(\sigma(x, y))$ .

### 1.1.3 Quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u).\tag{1.6}$$

Řešením je opět funkce  $u = u(x, y)$ . Předpokládejme, že toto řešení je implicitně dáno rovnicí  $F(x, y, u) = 0$ , tedy

$$F(x, y, u(x, y)) = 0.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{d}{dx} F(x, y, u(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dy} F(x, y, u(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

První z těchto rovnic vynásobíme funkcí  $a$ , druhou z nich funkcí  $b$ , sečteme je a upravíme s využitím (1.6):

$$0 = a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) = a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} + c \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Pokud funkce  $x = x(s), y = y(s)$  a  $u = u(s)$  jsou řešením následující *charakteristické soustavy rovnic rovnice (1.6)*

$$\begin{aligned}x' &= a(x, y, u), \\y' &= b(x, y, u), \\u' &= c(x, y, u),\end{aligned}\tag{1.7}$$

pak podle předchozí rovnosti platí

$$\frac{d}{ds} F(x(s), y(s), u(s)) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial y} b + \frac{\partial F}{\partial u} c = 0.$$

Trajektorie systému autonomních obyčejných diferenciálních rovnic (1.7) — prostorové křivky — se nazývají *charakteristiky rovnice* (1.6). Z provedeného výpočtu plyne, že podél charakteristik je funkce  $F$  konstantní.

Nechť rovnice  $\varphi_1(x, y, u) = c_1$  a  $\varphi_2(x, y, u) = c_2$  jsou implicitním popisem charakteristik rovnice (1.6) (jednorozměrné variety v třírozměrném prostoru) a  $\Phi$  je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. Pak funkce  $u = u(x, y)$  implicitně zadaná rovnicí

$$\Phi(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = 0 \quad (1.8)$$

je obecným řešením rovnice (1.6).

**D.:** Rovnici (1.8), v níž  $u$  považujeme za funkci proměnných  $x$  a  $y$ , derivujeme parciálně podle proměnné  $x$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Označíme-li  $A = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}$ , dostaneme z předchozí rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right).$$

Analogickým postupem bychom dostali

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right).$$

Poněvadž na charakteristikách platí

$$\frac{d}{ds} \varphi_1(x(s), y(s), u(s)) = 0, \quad \frac{d}{ds} \varphi_2(x(s), y(s), u(s)) = 0$$

dostaneme vzhledem k (1.7):

$$\begin{aligned} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} b \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} b \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \left( \frac{d}{ds} \varphi_1(x(s), y(s), u(s)) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{du}{ds} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \left( \frac{d}{ds} \varphi_2(x(s), y(s), u(s)) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{du}{ds} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{A} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right) \frac{du}{ds} = c. \end{aligned}$$

□

Nechť  $x = \varphi(\sigma)$ ,  $y = \psi(\sigma)$  je parametrický popis nějaké rovinné křivky, a nechť  $f$  je reálná funkce se stejným definičním oborem jako funkce  $\varphi$ ,  $\psi$ . Podmínka

$$u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma) \quad (1.9)$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici* (1.6). Okrajovou úlohu řešíme analogicky jako okrajovou úlohu (1.1), (1.3):

Nechť charakteristiky rovnice (1.6) mají parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x(s, c_1, c_2, c_3), \\ y &= y(s, c_1, c_2, c_3), \\ u &= u(s, c_1, c_2, c_3), \end{aligned} \quad (1.10)$$

kde  $c_1, c_2, c_3$  jsou nějaké konstanty. Má-li soustava rovnic

$$\begin{aligned}x(0, c_1, c_2, c_3) &= \varphi(\sigma), \\y(0, c_1, c_2, c_3) &= \psi(\sigma), \\u(0, c_1, c_2, c_3) &= f(\sigma)\end{aligned}\tag{1.11}$$

pro neznámé  $c_1, c_2, c_3$  řešení  $c_1 = c_1(\sigma), c_2 = c_2(\sigma), c_3 = c_3(\sigma)$ , dosadíme je do prvních dvou rovnic soustavy (1.10):

$$\begin{aligned}x &= x(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma), c_3(\sigma)), \\y &= y(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma), c_3(\sigma)).\end{aligned}$$

Má-li tato soustava rovnic řešení  $\sigma = \sigma(x, y), s = s(x, y)$ , dosadíme je do třetí z rovnic (1.10). Tím dostaneme řešení úlohy (1.6), (1.9) ve tvaru

$$u = u\left(s(x, y), c_1(\sigma(x, y)), c_2(\sigma(x, y)), c_3(\sigma(x, y))\right).$$

#### 1.1.4 Obecná parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných

Jedná se o rovnici

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,\tag{1.12}$$

kde  $F$  je reálná funkce pěti proměnných,  $u$  je (hledaná) funkce dvou proměnných,  $x, y$  jsou nezávisle proměnné. Označme

$$p = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = u_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pak rovnici (1.12) můžeme zapsat ve tvaru

$$F(x, y, u, p, q) = 0.$$

Autonomní soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}x &= F_p(x, y, u, p, q), \\ \frac{d}{ds}y &= F_q(x, y, u, p, q), \\ \frac{d}{ds}u &= pF_p(x, y, u, p, q) + qF_q(x, y, u, p, q), \\ \frac{d}{ds}p &= -F_x(x, y, u, p, q) - pF_u(x, y, u, p, q), \\ \frac{d}{ds}q &= -F_y(x, y, u, p, q) - qF_u(x, y, u, p, q),\end{aligned}\tag{1.13}$$

nazýváme *charakteristická soustava rovnic* (1.12), trajektorie jejího řešení (křivky v prostoru  $\mathbb{R}^5$ ) nazýváme *charakteristický pruh rovnice* (1.12).

Nechť funkce  $x = x(s), y = y(s), u = u(s), p = p(s), q = q(s)$  jsou řešením charakteristické soustavy (1.13). Pak platí

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F &= \frac{d}{ds}F(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)) = xF_x \frac{dx}{ds} + yF_y \frac{dy}{ds} + uF_u \frac{du}{ds} + pF_p \frac{dp}{ds} + qF_q \frac{dq}{ds} = \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_u (pF_p + qF_q) - F_p (F_x + pF_u) - F_q (F_y + qF_u) = 0.\end{aligned}$$

To znamená, že na charakteristickém pruhu je funkce  $F$  konstantní. Pokud tedy počáteční hodnoty řešení charakteristické soustavy (1.13) splňují podmínku

$$F(x(0), y(0), u(0), p(0), q(0)) = 0,$$



pak křivka  $(x(s), y(s), u(s))$  leží na grafu řešení rovnice (1.12).

Nechť  $x = \varphi(\sigma)$ ,  $y = \psi(\sigma)$  je parametrický popis nějaké rovinné křivky a  $f$  je reálná funkce se stejným definičním oborem, jako funkce  $\varphi$ ,  $\psi$ . Rovnost

$$u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma) \quad (1.14)$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici (1.12)*. Derivováním okrajové podmínky dostaneme rovnost, kterou na ní musí splňovat funkce  $p$  a  $q$ ,

$$\frac{df(\sigma)}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = p(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} + q(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma}.$$

Nechť nyní  $p_0 = p_0(\sigma)$ ,  $q_0 = q_0(\sigma)$  je řešením soustavy dvou rovnic pro dvě neznámé

$$\begin{aligned} F(\varphi(\sigma), \psi(\sigma), f(\sigma), p_0, q_0) &= 0, \\ p_0 \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} + q_0 \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} &= \frac{df(\sigma)}{d\sigma}. \end{aligned}$$

Řešení charakteristické soustavy (1.13), které splňuje počáteční podmínky

$$x(0) = \varphi(\sigma), \quad y(0) = \psi(\sigma), \quad u(0) = f(\sigma), \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0$$

označíme

$$(x(s; \sigma), y(s; \sigma), u(s; \sigma), p(s; \sigma), q(s; \sigma)).$$

Je-li  $s = s(x, y)$ ,  $\sigma(x, y)$  řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x &= x(s; \sigma), \\ y &= y(s; \sigma), \end{aligned}$$

tj. parametry  $s$ ,  $\sigma$  vyjádříme pomocí souřadnic  $x$ ,  $y$ , pak funkce  $u$  definovaná vztahem

$$u(x, y) = u(s(x, y); \sigma(x, y))$$

je řešením rovnice (1.12) s okrajovou podmínkou (1.14).

### 1.1.5 Quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnici

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u), \quad (1.15)$$

kde  $a_1, \dots, a_n, f$  jsou funkce  $n + 1$  proměnných a  $u$  je (hledaná) funkce  $n$  proměnných, nazýváme *quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu*; v případě  $f \equiv 0$  *homogenní*, v opačném *nehomogenní*. Pokud funkce  $a_1, \dots, a_n$  nezávisí na poslední proměnné a funkce  $f$  závisí na poslední proměnné lineárně, nazýváme tuto rovnici *lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu*.

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}x_1(s) &= a_1(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)), \\ &\vdots \\ \frac{d}{ds}x_n(s) &= a_n(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)), \\ \frac{d}{ds}u(s) &= f(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)), \end{aligned}$$

nazýváme (*rozšířená*) *charakteristická soustava rovnice (1.15)*. Trajektorie  $(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s))$  řešení charakteristické soustavy (křivky v prostoru  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) nazýváme *charakteristiky rovnice (1.15)*.

Buď  $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  otevřená množina a

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, x_n = \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in D\}$$

regulární  $(n-1)$ -rozměrná nadplocha v  $n$ -rozměrném prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Dále buď  $u_0 = u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$  spojitá funkce definovaná na  $D$ . Podmínka

$$u(\varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})) = u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in D \quad (1.16)$$

se nazývá *okrajová podmínka* pro rovnici (1.15).

Jsou-li funkce  $a_1, \dots, a_n, f$  diferencovatelné, pak charakteristická soustava s Cauchyovými podmínkami

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_n(0) &= \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \\ u(0) &= u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \end{aligned}$$

má pro každé  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in D$  jediné řešení (podle Picardovy-Lindelöfovy věty, viz např. Kalas J., Ráb M.: Obyčejné diferenciální rovnice, MU 2001, str. 64). Označme toto řešení

$$(\psi_1(s, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, \psi_n(s, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \psi_{n+1}(s, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})).$$

Platí

$$\begin{aligned} \psi_1(0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) &= \varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, \psi_n(0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) = \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \\ \psi_{n+1}(0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) &= u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \sigma_j}(0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma_j}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{pro každé } (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in D$$

a dále

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial s}(0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) = a_i(\varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), u_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})).$$

Funkcemi  $\psi_1, \dots, \psi_n$  je určeno zobrazení  $\Psi : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Jacobián  $J = J(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$  zobrazení  $\Psi$  v bodě  $(0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$  je

$$\begin{vmatrix} a_1(\varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})) & \dots & a_n(\varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, \varphi_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_1}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \sigma_1}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_{n-1}}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \sigma_{n-1}}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Je-li  $J(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \neq 0$  pro každé  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in D$ , existuje inverzní zobrazení  $\Psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times D$  (podle věty o existenci inverzního zobrazení, viz např. Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU 1999, str. 84).

Položme  $u(x_1, \dots, x_n) = \psi_{n+1}(\Psi^{-1}(x_1, \dots, x_n))$ . Pak  $u$  je řešení úlohy (1.15), (1.16):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{dx_k}{ds} \left( \frac{du}{ds} \frac{\partial s}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_k} \right) = \frac{du}{ds} \sum_{k=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \sigma_j} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} = \\ &= \frac{du}{ds} \frac{\partial s}{\partial s} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial s} = \frac{du}{ds} = f. \end{aligned}$$

Toto řešení je jediné.

### 1.1.6 Kanonický tvar parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných lineární v prvních derivacích

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u), \quad (1.17)$$

funkce  $a, b$  jsou definovány na množině  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ , funkce  $f$  je definována na množině  $G \times \mathbb{R}$ , pro funkce  $a, b$  platí  $a(x, y) \neq 0 \neq b(x, y)$  pro  $(x, y) \in G$ . Parciální rovnici (1.17) přiřadíme její obyčejnou *charakteristickou rovnici*

$$y' = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \quad (1.18)$$

kde  $'$  označuje obyčejnou derivaci podle  $x$ . Předpokládejme, že charakteristická rovnice (1.18) má řešení, které lze implicitně zapsat ve tvaru

$$\varphi(x, y) = C, \quad (1.19)$$

kde  $C$  je integrační konstanta. Pak je  $\varphi_x(x, y) + y' \varphi_y(x, y) = 0$ , tj.

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0. \quad (1.20)$$

Poznamenejme, že charakteristická rovnice lineární homogenní rovnice ve dvou nezávisle proměnných (1.1) je podílem jednotlivých rovnic charakteristické soustavy (1.2) této rovnice a tedy rovnost (1.19) vyjadřuje charakteristiky rovnice (1.1) také ve smyslu oddílu 1.1.1.

Položme

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = y.$$

Pak  $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \varphi_x(x, y)$ , tedy na množině  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_x(x, y) \neq 0\} \subseteq G$  je zobrazení  $(\xi, \eta) : H \rightarrow \mathbb{R}^2$  prosté. Toto zobrazení na množině  $H$  transformuje rovnici (1.17) na rovnici

$$a u_\xi \varphi_x + b(u_\xi \varphi_y + u_\eta) = f.$$

Tuto rovnici lze upravit na tvar

$$(a\varphi_x + b\varphi_y) u_\xi + b u_\eta = f,$$

takže vzhledem k (1.20) a předpokládané nenulovosti funkce  $b$  platí

$$u_\eta(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, u),$$

kde  $F = f/b$ . Tato rovnice je *kanonickým tvarem* rovnice (1.17). Poněvadž se v ní vyskytuje pouze jedna parciální derivace, lze ji považovat za rovnici obyčejnou takovou, že hledaná funkce  $u$  je funkcí jedné nezávisle proměnné  $\eta$  a závisí na parametru  $\xi$ .

## 1.2 Klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu

Rovnici

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (1.21)$$

kde  $u$  je (hledaná) funkce a  $a_{ij}, b_i, c, f, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$  jsou funkce  $n$  proměnných takové, že jejich definiční obory mají neprázdný průnik  $D$ ,  $a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x})$  pro všechna  $\mathbf{x} \in D$  a existuje dvojice indexů  $i, j$ , pro něž  $a_{ij} \neq 0$  nazýváme *lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu*; v případě  $f \equiv 0$  *homogenní*, v opačném *nehomogenní*.

Pro homogenní rovnici platí *princip superpozice*: Je-li  $\alpha$  libovolná konstanta a  $u_1, u_2$  jsou řešení rovnice

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0,$$

pak také  $\alpha u_1$  a  $u_1 + u_2$  jsou řešením této rovnice. (Platnost tohoto tvrzení lze ověřit přímým dosazením.) Funkce  $u \equiv 0$  je zřejmě také řešením této rovnice. Odtud plyne, že množina všech řešení homogenní rovnice tvoří vektorový prostor.

Buď  $\mathbf{x}_0 \in D$  libovolný bod. Pak  $A = (a_{ij}(\mathbf{x}_0))$  je symetrická matice typu  $n \times n$ . Touto maticí je definována kvadratická forma  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_n) = (r_1, r_2, \dots, r_n) A (r_1, r_2, \dots, r_n)^T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}_0) r_i r_j.$$

Platí Sylvesterův [1814 – 1897] zákon setrvačnosti kvadratických forem: Existuje regulární matice  $B$  typu  $n \times n$  a jednoznačně určená přirozená čísla  $k, m, 0 \leq k \leq m \leq n$  taková, že po transformaci

$$(r_1, r_2, \dots, r_n)^T = B (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$$

má kvadratická forma  $\Psi$  tvar  $\sum_{i=1}^k s_i^2 - \sum_{i=k+1}^m s_i^2$ . (Přitom klademe  $\sum_{i=p}^q \alpha_i = 0$  pro  $p = q + 1$ .)

Rovnice (1.21) se nazývá

<i>eliptická</i>	$m = n$ a $k \in \{0, n\}$ ,
<i>hyperbolická</i>	$m = n$ a $k \in \{1, n - 1\}$ ,
<i>ultrahyperbolická</i>	$m = n$ a $2 \leq k \leq n - 2$ ,
<i>parabolické</i>	$m < n$ ,
<i>parabolická v užším smyslu</i>	$m = n - 1$ a $k = 0$ , nebo $k = m = n - 1$ .

Rovnice (1.21) se nazývá *eliptická, hyperbolická, ... v otevřené množině  $G \subseteq D$* , je-li eliptická, hyperbolická, ... v každém bodě  $\mathbf{x} \in G$ .

### 1.3 Kanonický tvar parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných lineární ve druhých derivacích

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1.22)$$

pro funkce  $A, B, C$  platí  $|A(x, y)| + |B(x, y)| + |C(x, y)| > 0$  pro všechna  $(x, y) \in D = \text{Dom } A \cap \text{Dom } B \cap \text{Dom } C$ . Uvažujme kvadratickou formu  $\Psi(r, s) = Ar^2 + 2Brs + Cs^2$ .

Pokud  $A \neq 0$ , platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 = A \left( r + \frac{B}{A}s \right)^2 - \frac{B^2}{A}s^2 + Cs^2 = A \left( r + \frac{B}{A}s \right)^2 - \frac{1}{A}(B^2 - AC)s^2,$$

pokud  $C \neq 0$ , platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 = C \left( s + \frac{B}{C}r \right)^2 - \frac{B^2}{C}r^2 + Ar^2 = C \left( s + \frac{B}{C}r \right)^2 - \frac{1}{C}(B^2 - AC)r^2,$$

pokud  $A = C = 0$ , pak  $B \neq 0$  a platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 = 2Brs = \frac{B}{2}(r + s)^2 - \frac{B}{2}(r - s)^2.$$

Odtud plyne: Je-li pro každé  $(x, y)$  z otevřené množiny  $G \subseteq D$

$(B(x, y))^2 - A(x, y)C(x, y) > 0$	hyperbolická
$(B(x, y))^2 - A(x, y)C(x, y) = 0$	parabolická
$(B(x, y))^2 - A(x, y)C(x, y) < 0$	eliptická

pak rovnice (1.22) je v  $G$

#### 1.3.1 Transformace rovnice (1.22)

Buďte  $\varphi, \psi : G \rightarrow \mathbb{R}$  takové funkce, že  $\varphi_x(x, y)\psi_y(x, y) - \varphi_y(x, y)\psi_x(x, y) \neq 0$  pro všechna  $(x, y) \in G$ . Pak transformace

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (1.23)$$

bijektivně zobrazí množinu  $G$  na otevřenou množinu a rovnici (1.22) transformuje na tvar (využíváme formule pro druhé parciální derivace složené funkce)

$$a(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2b(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + c(\xi, \eta)u_{\eta\eta} = \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.24)$$

kde

$$\begin{aligned} a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = \varphi_y^2 \left( A \left( -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2B \left( -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + C \right), \\ b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y, \\ c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = \psi_y^2 \left( A \left( -\frac{\psi_x}{\psi_y} \right)^2 - 2B \left( -\frac{\psi_x}{\psi_y} \right) + C \right); \end{aligned} \quad (1.25)$$

naznačenou úpravu výrazu pro funkce  $a$  nebo  $c$  lze samozřejmě provést pouze v případě, že  $\varphi_y \neq 0$  nebo  $\psi_y \neq 0$ .

Při hledání inverzní transformace k transformaci (1.23) řešíme soustavu rovnic (1.23) pro neznámé  $x$ ,  $y$ . Přitom první z rovnic je implicitně dána funkce  $y_1 = y_1(x)$ , pro jejíž derivaci platí  $y_1' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ , a druhou z rovnic

je implicitně dána funkce  $y_2 = y_2(x)$ , pro jejíž derivaci platí  $y_2' = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$  (podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce, viz např. Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU 1999, str. 96).

### 1.3.2 Charakteristiky rovnice (1.22)

Obyčejná diferenciální rovnice v implicitním tvaru (nerozřešená vzhledem k derivaci)

$$A(x, y)y'^2 - 2B(x, y)y' + C(x, y) = 0 \quad (1.26)$$

se nazývá *charakteristická rovnice parciální diferenciální rovnice (1.22)*. Její řešení se nazývají *charakteristiky*.

Z předchozích úvah je vidět, že platí: Je-li rovnice (1.22) hyperbolická, má dvě jednoparametrické množiny charakteristik, které jsou řešeními obyčejných diferenciálních rovnic

$$y' = \frac{B(x, y) + \sqrt{(B(x, y))^2 - A(x, y)C(x, y)}}{A(x, y)} \quad \text{a} \quad y' = \frac{B(x, y) - \sqrt{(B(x, y))^2 - A(x, y)C(x, y)}}{A(x, y)}. \quad (1.27)$$

Je-li rovnice (1.22) parabolická, má jednu jednoparametrickou množinu charakteristik, která je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}. \quad (1.28)$$

Je-li rovnice (1.22) eliptická, nemá reálné charakteristiky.

### 1.3.3 Kanonický tvar hyperbolické rovnice

Jsou-li  $\varphi(x, y) = C_1$  a  $\psi(x, y) = C_2$  implicitní popisy řešení rovnic (1.27) (tedy charakteristiky rovnice (1.22), pak  $-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$  a  $-\frac{\psi_x}{\psi_y}$  jsou kořeny charakteristické rovnice (1.26), takže v (1.25) dostaneme  $a = c = 0$ . Kanonický tvar hyperbolické rovnice (1.22) je

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

### 1.3.4 Kanonický tvar parabolické rovnice

Je-li  $\varphi(x, y) = x$  a  $\psi(x, y) = C_1$  je implicitní popis řešení rovnice (1.28), pak  $\varphi_x = 1$ ,  $\varphi_y = 0$ ,  $-\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{B}{A}$  a  $-\frac{\psi_x}{\psi_y}$  je kořenem charakteristické rovnice (1.26), takže v (1.25) dostaneme  $c = 0$ ,  $a = A$  a

$$b = A\psi_x + B\psi_y = \psi_y \left( A \frac{\psi_x}{\psi_y} + B \right) = \psi_y(-B + B) = 0.$$

Kanonický tvar parabolické rovnice (1.22) je

$$u_{\xi\xi} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

### 1.3.5 Kanonický tvar eliptické rovnice

Eliptická rovnice (1.22) nemá reálné charakteristiky. Pro její transformaci zavedeme nejprve označení

$$\mu(x, y) = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}, \quad \nu(x, y) = \frac{\sqrt{A(x, y)C(x, y) - (B(x, y))^2}}{A(x, y)}.$$

Dále necht'  $\Phi(x, y) = C_1$ , resp.  $\Psi(x, y) = C_2$ , je implicitní popis řešení rovnice

$$y' = \mu(x, y) + i\nu(x, y), \quad \text{resp. } y' = \mu(x, y) - i\nu(x, y).$$

To znamená, že

$$-\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = \mu + i\nu, \quad -\frac{\Psi_x}{\Psi_y} = \mu - i\nu.$$

Položíme

$$\xi = \varphi = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi), \quad \eta = \psi = \frac{1}{2i}(\Phi - \Psi).$$

Pak platí

$$\varphi_x = \frac{1}{2}(\Phi_x + \Psi_x) = \frac{1}{2}(-\mu\Phi_y - i\nu\Phi_y - \mu\Psi_y + i\nu\Psi_y) = \frac{1}{2i}\nu(\Phi_y - \Psi_y) - \frac{1}{2}\mu(\Phi_y + \Psi_y) = \nu\psi_y - \mu\varphi_y,$$

$$\psi_x = \frac{1}{2i}(\Phi_x - \Psi_x) = \frac{1}{2i}(-\mu\Phi_y - i\nu\Phi_y + \mu\Psi_y - i\nu\Psi_y) = -\frac{1}{2i}\mu(\Phi_y - \Psi_y) - \frac{1}{2}\nu(\Phi_y + \Psi_y) = -\mu\psi_y - \nu\varphi_y.$$

Dosažením těchto vyjádření do rovností (1.25) dostaneme

$$\begin{aligned} a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = A(\nu^2\psi_y^2 - 2\nu\mu\varphi_y\psi_y + \mu^2\varphi_y^2) + 2B(\nu\varphi_y\psi_y - \mu\varphi_y^2) + C\varphi_y^2 = \\ &= (A\mu^2 - 2B\mu + C)\varphi_y^2 + A\nu^2\psi_y^2 + 2\nu(B - A\mu)\varphi_y\psi_y = \\ &= \left(\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C\right)\varphi_y^2 + \frac{AC - B^2}{A}\psi_y^2 + 2\nu(B - B)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}(\varphi_y^2 + \psi_y^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y = \\ &= -A(\nu\mu\psi_y^2 - \mu^2\varphi_y\psi_y + \nu^2\psi_y\varphi_y - \mu\nu\varphi_y^2) + B(\nu\psi_y^2 - \mu\varphi_y\psi_y - \mu\varphi_y\psi_y - \nu\varphi_y^2) + C\varphi_y\psi_y = \\ &= (A\mu - B)\nu\varphi_y^2 + (B - A\mu)\nu\psi_y^2 + (A\mu^2 - A\nu^2 - 2B\mu + C)\varphi_y\psi_y = \\ &= (B - B)(\nu\varphi_y^2 - \nu\psi_y^2) + \left(\frac{B^2}{A} - \frac{AC - B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + \frac{AC}{A}\right)\varphi_y\psi_y = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = A(\mu^2\psi_y^2 + 2\mu\nu\psi_y\varphi_y + \nu^2\varphi_y^2) - 2B(\mu\psi_y^2 + \nu\varphi_y\psi_y) + C\psi_y^2 = \\ &= A\nu^2\varphi_y^2 + (A\mu^2 - 2B\mu + C)\psi_y^2 + 2\nu(A\mu - B)\varphi_y\psi_y = \\ &= \frac{AC - B^2}{A}\varphi_y^2 + \left(\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C\right)\psi_y^2 + 2\nu(B - B)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}(\varphi_y^2 + \psi_y^2), \end{aligned}$$

tedy  $a = c$ ,  $b = 0$ . Kanonický tvar eliptické rovnice (1.22) je

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

### 1.3.6 Kanonický tvar lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných s konstantními koeficienty

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = du_x + eu_y + fu + g(x, y), \quad (1.29)$$

kde  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  a  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Výše popsané transformace převedou tuto rovnici na některý z tvarů

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= d_1 u_\xi + e_1 u_\eta + f_1 u + g_1(\xi, \eta), & \text{pokud } b^2 - ac > 0, \\ u_{\xi\xi} &= d_2 u_\xi + e_2 u_\eta + f_2 u + g_2(\xi, \eta), & \text{pokud } b^2 - ac = 0, \\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} &= d_3 u_\xi + e_3 u_\eta + f_3 u + g_3(\xi, \eta), & \text{pokud } b^2 - ac < 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Zavedeme novou neznámou funkci  $v$  vztahem

$$u = v e^{\lambda\xi + \mu\eta},$$

kde  $\lambda, \mu$  jsou zatím neurčené konstanty. Pak je

$$\begin{aligned} u_\xi &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(\lambda v + v_\xi), & u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(\lambda^2 v + 2\lambda v_\xi + v_{\xi\xi}), \\ u_\eta &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(\mu v + v_\eta), & u_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(\lambda\mu v + \mu v_\xi + \lambda v_\eta + v_{\xi\eta}), \\ & & u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta}(\mu^2 v + 2\mu v_\eta + v_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnic (1.30) a vykrátíme výrazem  $e^{\lambda\xi + \mu\eta} \neq 0$ :

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} &= (d_1 - \mu)v_\xi + (e_1 - \lambda)v_\eta + (d_1\lambda + e_1\mu - \lambda\mu + f_1)v + \tilde{g}_1(\xi, \eta) & \text{pro hyperbolickou rovnici,} \\ v_{\xi\xi} &= (d_2 - 2\lambda)v_\xi + e_2 v_\eta + (d_2\lambda + e_2\mu - \lambda^2 + f_2)v + \tilde{g}_2(\xi, \eta) & \text{pro parabolickou rovnici,} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} &= (d_3 - 2\lambda)v_\xi + (e_3 - 2\mu)v_\eta + (d_3\lambda + e_3\mu - \lambda^2 - \mu^2 + f_3)v + \tilde{g}_3(\xi, \eta) & \text{pro eliptickou rovnici.} \end{aligned}$$

Konstanty  $\lambda, \mu$  zvolíme tak, aby pravé strany byly co nejjednodušší. Konkrétně:

- Pro hyperbolickou rovnici  $\mu = d_1, \lambda = e_1$ . Dostaneme

$$v_{\xi\eta} = (e_1 d_1 + f_1)v + \tilde{g}_1(\xi, \eta).$$

- Pro parabolickou rovnici  $\lambda = \frac{d_2}{2}, \mu = -\frac{4f_2 + d_2^2}{4e_2}$ . Dostaneme

$$v_{\xi\xi} = e_2 v_\eta + \tilde{g}_2(\xi, \eta).$$

- Pro eliptickou rovnici  $\lambda = \frac{d_3}{2}, \mu = \frac{e_3}{2}$ . Dostaneme

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{d_3^2 + e_3^2 + 4f_3}{4}v + \tilde{g}_3(\xi, \eta).$$

## 1.4 Počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

### 1.4.1 Řešení počáteční úlohy pro homogenní hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (kmity nekonečné struny)

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \quad (1.31)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.32)$$

kde  $a > 0$ , funkce  $\varphi$  je dvakrát diferencovatelná a funkce  $\psi$  je diferencovatelná.

Charakteristická rovnice parciální rovnice (1.31) je  $x'^2 - a^2 = 0$ , tedy  $x' = \pm a$ , z čehož  $x(t) = \pm at + const$ . Transformací

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

přejde rovnice (1.31) na tvar

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0.$$

Odtud plyne, že  $u_\xi$  nezávisí na  $\eta$ , tedy

$$u_\xi(\xi, \eta) = f(\xi).$$

Tuto rovnici zintegrujeme podle  $\xi$  a dostaneme

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

kde  $F$  je funkce primitivní k  $f$  a  $G$  je libovolná funkce. Zpětnou transformací tedy dostaneme řešení rovnice (1.31) ve tvaru

$$u(t, x) = F(x - at) + G(x + at), \quad (1.33)$$

kde  $F, G$  jsou libovolné dvakrát diferencovatelné funkce. Určíme je tak, aby byly splněny počáteční podmínky (1.32), tedy

$$F(x) + G(x) = \varphi(x), \quad -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x).$$

Druhou z těchto rovností přepíšeme na tvar  $(F(x) - G(x))' = -\frac{\psi(x)}{a}$  a integrujeme. Dostaneme

$$F(x) - G(x) - (F(x_0) - G(x_0)) = -\frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi,$$

kde  $x_0$  je nějaké číslo. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= \varphi(x), \\ F(x) - G(x) &= F(x_0) - G(x_0) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

a dostaneme

$$F(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + F(x_0) - G(x_0), \quad G(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - F(x_0) + G(x_0).$$

Dosazením do (1.33) nyní dostaneme řešení úlohy (1.31), (1.32) ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

Poslední formule se nazývá *d'Alembertův vzorec*.

#### 1.4.2 Řešení počáteční úlohy pro homogenní hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných s obecným počátkem

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (\sigma, \infty) \times (-\infty, \infty), \quad (1.34)$$

$$u(\sigma, x) = \varphi(x), \quad u_t(\sigma, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.35)$$

kde  $a > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ , funkce  $\varphi$  je dvakrát diferencovatelná a funkce  $\psi$  je diferencovatelná.

Transformací  $\tau = t - \sigma$  tato úloha přejde na

$$\begin{aligned} u_{\tau\tau}(\tau, x) &= a^2 u_{xx}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \\ u(0, x) &= \varphi(x), \quad u_\tau(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Podle 1.4.1 má tato úloha řešení

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2} (\varphi(x - a\tau) + \varphi(x + a\tau)) + \frac{1}{2a} \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} \psi(\xi) d\xi,$$



takže řešení úlohy (1.34), (1.35) je

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - a(t - \sigma)) + \varphi(x + a(t - \sigma))}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \psi(\xi) d\xi.$$

### 1.4.3 Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní hyperbolickou rovnici ve dvou proměnných s homogenní počáteční podmínkou (buzené kmity nekonečné struny)

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \quad (1.36)$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.37)$$

kde  $a > 0$  a funkce  $f$  je spojitá.

Řešení hledáme ve tvaru  $u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \sigma) d\sigma$ . Platí

$$u(0, x) = 0, \quad \text{a} \quad u_t(t, x) = w(t, x, t) + \int_0^t w_t(t, x, \sigma) d\sigma.$$

Ke splnění podmínky  $u_t(0, x) = 0$  stačí, aby pro všechna  $\sigma > 0$  funkce  $w = w(t, x, \sigma)$  splňovala

$$w(\sigma, x, \sigma) = 0. \quad (1.38)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( w(t, x, t) + \int_0^t w_{|1}(t, x, \sigma) d\sigma \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( 0 + \int_0^t w_{|1}(t, x, \sigma) d\sigma \right) = \\ &= w_{|1}(t, x, t) + \int_0^t w_{|1,1}(t, x, \sigma) d\sigma, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) &= \int_0^t w_{|2,2}(t, x, \sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Má platit  $u_{tt}(t, x) - a^2 u_{xx}(t, x) = f(t, x)$ , tedy  $f(t, x) = w_{|1}(t, x, t) + \int_0^t (w_{|1,1}(t, x, \sigma) - a^2 w_{|2,2}(t, x, \sigma)) d\sigma$ .

Poslední rovnice bude splněna například pro funkci  $w = w(t, x, \sigma)$ , která splňuje pro každé  $\sigma > 0$

$$w_{tt}(t, x, \sigma) = a^2 w_{xx}(t, x, \sigma), \quad (t, x) \in (\sigma, \infty) \times (-\infty, \infty), \quad (1.39)$$

$$w_t(\sigma, x, \sigma) = f(\sigma, x), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (1.40)$$

Podle 1.4.2 je řešení úlohy (1.39), (1.38), (1.40) dáno formulí

$$w(t, x, \sigma) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma, \xi) d\xi,$$

takže řešení úlohy (1.36), (1.37) je

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left( \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma, \xi) d\xi \right) d\sigma.$$

Dvojnásobný integrál na pravé straně rovnosti je někdy užitečné vyjádřit jako integrál dvojný, tj.

$$\int_0^t \left( \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma, \xi) d\xi \right) d\sigma = \iint_{\Omega} f(\sigma, \xi) d\sigma d\xi,$$

kde

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sigma < t, x - (a(t - \sigma)) < \xi < x + a(t - \sigma)\} = \\ &= \{(\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^2 : x - t < \xi < x + t, 0 < \sigma < t - |\xi - x|\}. \end{aligned}$$

#### 1.4.4 Řešení obecné počáteční úlohy pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \quad (1.41)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.42)$$

kde  $a > 0$ , funkce  $\varphi$  je dvakrát diferencovatelná, funkce  $\psi$  je diferencovatelná a funkce  $f$  je spojitá.

Přímým výpočtem ověříme, že je-li  $v = v(t, x)$  řešením úlohy (1.31), (1.32) a  $v = v(t, x)$  je řešením úlohy (1.36), (1.37), pak  $u = u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$  je řešením úlohy (1.41), (1.42). Podle 1.4.1 a 1.4.3 je řešení dané úlohy

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \left( \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma, \xi) d\xi \right) d\sigma.$$

Ještě ukážeme, že úloha (1.41), (1.42) nemá jiné řešení. Jsou-li  $u_1 = u_1(t, x)$  a  $u_2 = u_2(t, x)$  řešení úlohy (1.41), (1.42), pak  $u_0 = u_0(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$  je řešením homogenní rovnice (1.31) s homogenními počátečními podmínkami (1.37). Analogicky jako v 1.4.1 ukážeme, že

$$u_0(t, x) = F(x - at) + G(x + at)$$

a pro funkce  $F, G$  platí

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= 0, \quad \text{neboli} \quad G(x) = -F(x), \\ F'(x) - G'(x) &= 0 \end{aligned}$$

pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Odtud plyne, že  $F(x) \equiv \text{const}$  a dále

$$u_0(t, x) = F(x - at) + G(x + at) = F(x - at) - F(x + at) \equiv \text{const} - \text{const} = 0.$$

Tedy  $u_1 \equiv u_2$ .

#### 1.4.5 Řešení hyperbolické rovnice ve dvou nezávisle proměnných s obecnými počátečními podmínkami a s jednou okrajovou podmínkou (kmity nekonečné struny upevněné na jednom konci)

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (1.43)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, \infty), \quad (1.44)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad t \in (0, \infty), \quad (1.45)$$

kde  $a > 0$ , funkce  $\varphi$  je dvakrát diferencovatelná, funkce  $\psi$  je diferencovatelná a platí  $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ .

Definujme liché rozšíření funkcí  $\varphi, \psi, f(t, \cdot)$ :

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & x > 0 \\ -f(t, -x), & x < 0 \end{cases}.$$

Řešení úlohy (1.43), (1.44), (1.45) je

$$u(t, x) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \left( \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \tilde{f}(\sigma, \xi) d\xi \right) d\sigma.$$

Řešení úlohy (1.43), (1.44) s nehomogenní okrajovou podmínkou

$$u(t, 0) = \alpha(t), \quad t \in (0, \infty), \quad (1.46)$$

kde  $\alpha$  je dvakrát diferencovatelná funkce splňující podmínku  $\alpha(0) = \varphi(0)$ , je tvaru  $u(t, x) = v(t, x) + \alpha(t)$ , kde funkce  $v$  je řešením úlohy

$$\begin{aligned} v_{tt}(t, x) &= a^2 v_{xx}(t, x) + f(t, x) - \alpha''(t), & (t, x) &\in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ v(0, x) &= \varphi(x) - \alpha(0), \quad v_t(0, x) = \psi(x) - \alpha'(0), & x &\in (0, \infty), \\ v(t, 0) &= 0, & t &\in (0, \infty). \end{aligned}$$

#### 1.4.6 Řešení hyperbolické rovnice ve dvou nezávisle proměnných s obecnými počátečními podmínkami a s okrajovými podmínkami Dirichletova typu (kmity konečné struny upevněné na obou koncích)

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (1.47)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (1.48)$$

$$u(t, 0) = u(t, \ell) = 0, \quad t \in (0, \infty), \quad (1.49)$$

kde  $a > 0$ , funkce  $\varphi$  je dvakrát diferencovatelná, funkce  $\psi$  je diferencovatelná a platí

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0.$$

Definujme spojitě  $2\ell$ -periodické liché rozšíření funkcí  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $f(t, \cdot)$ . Toto rozšíření je dáno sinovými řadami

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\ell} f(t, \xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

S využitím součtových vzorců  $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$  a  $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)) &= \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \left( \sin \frac{n\pi}{\ell} (x - at) + \sin \frac{n\pi}{\ell} (x + at) \right) = \\ &= \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi a}{\ell} t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi &= \frac{1}{a\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \left( \int_{x-at}^{x+at} \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) = \\
&= \frac{1}{a\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \left[ \frac{\ell}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi \right]_{\xi=x+at}^{x-at} = \\
&= \frac{1}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \left( \cos \frac{n\pi}{\ell} (x-at) - \cos \frac{n\pi}{\ell} (x+at) \right) = \\
&= \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi a}{\ell} t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2a} \int_0^t \left( \int_{x-a(t-\sigma)}^{x-a(t+\sigma)} \tilde{f}(\sigma, \xi) d\xi \right) d\sigma &= \frac{1}{a\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \left( \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) d\sigma = \\
&= \frac{1}{a\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \left[ \frac{\ell}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi \right]_{\xi=x-a(t+\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} d\sigma = \\
&= \frac{1}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \left( \cos \frac{n\pi}{\ell} (x-a(t-\sigma)) - \cos \frac{n\pi}{\ell} (x+a(t-\sigma)) \right) d\sigma = \\
&= \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi a}{\ell} (t-\sigma) d\sigma = \\
&= \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \int_0^t \sin \frac{n\pi a}{\ell} (t-\sigma) \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right) d\sigma.
\end{aligned}$$

Označíme-li tedy

$$\omega = \frac{a\pi}{\ell},$$

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi,$$

$$G(x, \xi, t - \sigma) = \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \sin \frac{n\pi a}{\ell} (t - \sigma),$$

lze řešení úlohy (1.47), (1.48), (1.49) zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x + \int_0^t \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi d\sigma.$$

Označíme-li dále  $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  a  $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}$ , platí

$$A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t = \alpha_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

a řešení úlohy (1.47), (1.48), (1.49) lze zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \sin \frac{n\pi}{\ell} x + \int_0^t \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi d\sigma.$$

Řešení úlohy (1.47), (1.48) s nehomogenní okrajovou podmínkou

$$u(t, 0) = \mu_0(t), \quad u(t, \ell) = \mu_1(t), \quad t \in (0, \infty), \quad (1.50)$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou dvakrát diferencovatelné funkce, je tvaru  $u(t, x) = v(t, x) + U(t, x)$ , kde funkce  $U = U(t, x)$  splňuje podmínky (1.50) a funkce  $v = v(t, x)$  je řešením úlohy

$$v_{tt}(t, x) = a^2 v_{xx}(t, x) + f(t, x) - U_{tt}(t, x) + a^2 U_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (1.51)$$

$$v(0, x) = \varphi(x) - U(0, x), \quad v_t(0, x) = \psi(x) - U_t(0, x), \quad x \in (0, \ell), \quad (1.52)$$

$$v(t, 0) = v(t, \ell) = 0, \quad t \in (0, \infty), \quad (1.53)$$

Za funkci  $U$  stačí vzít

$$U(t, x) = \mu_0(t) + \frac{x}{\ell}(\mu_1(t) - \mu_0(t)).$$

Při této volbě je  $U_{xx} \equiv 0$ .

## Cvičení

Najděte obecné řešení rovnice

1)  $u_x = 6x^2 u_y$

2)  $(z + y - x)u_x + (z + x - y)u_y + zu_z = 0$

3)  $u_x + 2u_y = 3$

4)  $u_x + xu_y = u$

Najděte řešení rovnice, které splňuje danou podmínku

5)  $u_x + yu_y = 0, u(0, y) = \frac{1}{y}$

6)  $u_t + au_x = 0, u(x, 0) = \sin x$

7)  $u_t + au_x = x^2 t + 1, u(x, 0) = x + 2$

8)  $yu_x - xu_y = y^2 - x^2, u(x, a) = x^2 - a^2$

9)  $xuu_x + yuu_y + xy = 0, u\left(x, \frac{1}{x}\right) = 1$

10)  $2xu_x + yu_y = 4u + 1, u(x, 1) = x^2$

11)  $u = u_x u_y, u(0, y) = y^2$

12)  $4u = u_x^2 - u_y^2, u(\cos \sigma, \sin \sigma) = \cos 2\sigma$

Určete typ lineární rovnice druhého řádu

13)  $u_{xx} + yu_{yy} = 0$

14)  $x^2 u_{xx} - 2x \sin y u_{xy} + \sin^2 y u_{yy} = 0$

Danou rovnicí převedte na kanonický tvar

15)  $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0$

16)  $xyu_{xx} - (x^2 + y^2)u_{xy} + xyu_{yy} + yu_x + xu_y = 0, x \neq y$

17)  $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$

18)  $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$

Najděte obecné řešení rovnice

19)  $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$

20)  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$

21) Řešte počáteční úlohu  $u_{tt} = u_{xx} + \sin x; \quad u(0, x) = x, u_t(0, x) = \frac{1}{x}$ .

22) Řešte počáteční úlohu  $u_{tt} - u_{xx} = \delta(x) \sin t; \quad u(0, x) = 0, u_t(0, x) = 0.$   
 $\delta(x)$  označuje Diracovu distribuci soustředěnou v bodě 0.

**Výsledky:** 1)  $u(x, y) = \Phi(2x^3 + y)$  2)  $u(x, y, z) = \Phi(x + y - 2z, z^2(x - y))$  3)  $u(x, y) = \frac{3}{2}y + \Phi(2x - y)$

4)  $u(x, y) = e^x \Phi(x^2 - 2y)$  5)  $u(x, y) = \frac{e^x}{y}$  6)  $u(x, t) = \sin(x - at)$  7)  $u(x, t) = \frac{a^2}{12}t^4 - \frac{ax}{3}t^3 + \frac{x^2}{2}t^2 - (a - 1)t + x + 2$

8)  $u(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2a^2 - a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$  9)  $u(x, y) = \sqrt{2 - xy}$  10)  $u(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}(y^4 - 1)$

11)  $u(x, y) = \frac{1}{16}(4y + x)^2$  12)  $u(x, y) = x^2 - y^2$  13) hyperbolická pro  $y < 0$ , eliptická pro  $y > 0$  14) parabolická

15)  $u_{\eta\eta} = \left(\frac{1}{\eta - \xi\eta^2} - 1\right)u_{\xi} - u_{\eta}$  16)  $u_{\xi\eta} = \frac{\xi}{\eta^2 - \xi^2}u_{\eta}$  17)  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}u_{\xi} + \frac{1}{2\eta}u_{\eta} = 0$

18)  $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{4}{9}, v = e^{\frac{1}{3}\xi + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta}, \xi = \frac{1}{2}x - y, \eta = \frac{\sqrt{3}}{2}x$  19)  $u(x, y) = \Phi(xy) \ln y + \Psi(xy)$

$$\mathbf{20)} \quad u(x, y) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{xy} + \Psi(xy) \quad \mathbf{21)} \quad u(t, x) = x + \ln\sqrt{\left|\frac{x+t}{x-t}\right|} + \sin x - \sin x \cos t$$

$$\mathbf{22)} \quad u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(t - |x|)), & |x| < t, \\ 0, & |x| > t. \end{cases}$$

## Kapitola 2

# Metody integrálních transformací

### 2.1 Fourierova transformace

Fourierova transformace  $\mathcal{F}$  převádí reálnou funkci  $f$  jedné reálné proměnné na komplexní funkci  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  jedné reálné proměnné definovanou vztahem

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

O funkci  $f$  předpokládáme, že je definovaná na  $\mathbb{R}$  a konverguje dostatečně rychle k nule pro  $|x| \rightarrow \infty$  tak, aby nevlastní integrál na pravé straně konvergoval. Z linearit y integrálu plyne, že Fourierova transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\xi) = c_1 \hat{f}_1(\xi) + c_2 \hat{f}_2(\xi).$$

Inverzní Fourierova transformace  $\mathcal{F}^{-1}$  převádí funkci  $\hat{f}$  zpět na funkci  $f$  na celém  $\mathbb{R}$ ; funkce  $f$  je přitom dána vztahem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi.$$

Konvoluce funkcí  $f, g$  definovaných na  $\mathbb{R}$  je funkce  $f * g$  daná vztahem

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

(O nevlastním integrálu opět předpokládáme, že konverguje.) Fourierův obraz konvoluce funkcí  $f, g$  je

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x)e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)e^{-ix\xi} dy \right) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)e^{-ix\xi} dx dy.$$

V tomto dvojném integrálu budeme transformovat proměnné tak, že položíme  $x = z + y, y = y$ . Jacobián tohoto zobrazení je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dále  $e^{-ix\xi} = e^{-iy\xi}e^{-iz\xi}$ , tedy

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)e^{-iy\xi}e^{-iz\xi} dz dy = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi} dy \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-iz\xi} dz \right) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

To znamená, že

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}. \tag{2.1}$$

### 2.1.1 Řešení počáteční úlohy pro homogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (vedení tepla v tenké homogenní nekonečné tyči)

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \quad (2.2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (2.3)$$

O všech funkcích i jejich derivacích opět předpokládáme, že „jdou dostatečně rychle k nule pro  $|x| \rightarrow \infty$ “. Na rovnici (2.2) aplikujeme Fourierovu transformaci (funkci  $u$  považujeme za funkci proměnné  $x$ ;  $t$  považujeme za parametr):

$$\mathcal{F}(u_t)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x) e^{-ix\xi} dx = \hat{u}_t(t, \xi),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_{xx})(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t, x) e^{-ix\xi} dx = [u_x(t, x) e^{-ix\xi}]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t, x) e^{-ix\xi} (-i\xi) dx = \\ &= i\xi \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t, x) e^{-ix\xi} dx = i\xi \left( [u(t, x) e^{-ix\xi}]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-ix\xi} (-i\xi) dx \right) = \\ &= -\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-ix\xi} dx = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi). \end{aligned}$$

Rovnice (2.2) se tedy transformuje na rovnici

$$\hat{u}_t(t, \xi) = -a^2 \xi^2 \hat{u}(t, \xi), \quad (2.4)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu ( $\xi$  hraje roli parametru). Její řešení je

$$\hat{u}(t, \xi) = C e^{-a^2 \xi^2 t},$$

kde  $C$  je integrační konstanta; nezávisí na  $t$ , ale může záviset na  $\xi$ . Určíme ji z transformované počáteční podmínky (2.3), tj. z podmínky

$$\hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi). \quad (2.5)$$

Je tedy

$$C = \hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Označme  $g(t, x)$  vzor funkce  $\hat{g}(t, \xi) = e^{-a^2 \xi^2 t}$  při Fourierově transformaci, tedy

$$\begin{aligned} g(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} (\cos x\xi + i \sin \xi x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \cos x\xi d\xi + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \sin x\xi d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \cos x\xi d\xi, \end{aligned}$$

neboť funkce  $e^{-a^2 \xi^2 t} \cos x\xi$  (jako funkce proměnné  $\xi$ ) je sudá a funkce  $e^{-a^2 \xi^2 t} \sin x\xi$  je lichá. Substitucí  $\eta = \xi \sqrt{a^2 t}$  a při označení  $q = \frac{x}{\sqrt{a^2 t}}$  nyní dostáváme

$$g(t, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 t}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos q\eta d\eta.$$



Označme dále  $I(q) = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos q\eta d\eta$ . Pak podle (B.21) je  $I(0) = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Derivováním integrálu  $I(q)$  podle parametru  $q$  a následnou integrací per partes dostaneme

$$\frac{d}{dq}I(q) = - \int_0^{\infty} \eta e^{-\eta^2} \cos q\eta d\eta = \left[ \frac{1}{2} e^{-\eta^2} \sin q\eta \right]_{\eta=0}^{\infty} - \frac{q}{2} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos q\eta d\eta = -\frac{q}{2}I(q).$$

Integrál  $I(q)$  je tedy řešením počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dq}I(q) = -\frac{q}{2}I(q), \quad I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

takže

$$I(q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{q^2}{4}}.$$

Návratem k původní proměnné  $x$  dostáváme

$$g(t, x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Řešení úlohy (2.4), (2.5) lze zapsat ve tvaru  $\hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi)\hat{g}(t, \xi)$ . Inverzní Fourierovou transformací s využitím (2.1) dostaneme řešení úlohy (2.2), (2.3) jako konvoluci funkcí  $\varphi$  a  $g(t, \cdot)$

$$u(t, x) = \varphi(\cdot) * g(t, \cdot)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)g(t, x-y)dy,$$

tedy

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) dy.$$

Při označení

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)$$

lze řešení úlohy (2.2), (2.3) zapsat jako

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)G(x, \xi, t)d\xi.$$

Na závěr ještě poznamenejme, že řešení počáteční úlohy s posunutým počátkem

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= a^2 u_{xx}(t, x), & (t, x) &\in (\sigma, \infty) \times (-\infty, \infty), \\ u(\sigma, x) &= \varphi(x), & x &\in (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

kde  $\sigma \in \mathbb{R}$ , je

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\sigma)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\sigma)}\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)G(x, \xi, t-\sigma)d\xi.$$

## 2.1.2 Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

Nejprve uvažujme úlohu s homogenní počáteční podmínkou:

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \quad (2.6)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (2.7)$$

Řešení budeme hledat ve tvaru  $u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \sigma) d\sigma$ . Pak je počáteční podmínka (2.7) splněna. Dále platí

$$u_t(t, x) = w(t, x, t) + \int_0^t w_t(t, x, \sigma) d\sigma, \quad u_{xx}(t, x) = \int_0^t w_{xx}(t, x, \sigma) d\sigma.$$

Aby byla splněna rovnice (2.6), musí platit

$$0 = u_t(t, x) - a^2 u_{xx}(t, x) - f(t, x) = w(t, x, t) + \int_0^t (w_t(t, x, \sigma) - a^2 w_{xx}(t, x, \sigma)) d\sigma - f(t, x)$$

pro všechna  $(t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ . Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když pro každé  $\sigma \in (0, \infty)$  bude funkce  $w$  řešením úlohy

$$\begin{aligned} w_t(t, x, \sigma) &= a^2 w_{xx}(t, x, \sigma), & (t, x) &\in (\sigma, \infty) \times (-\infty, \infty), \\ w(\sigma, x, \sigma) &= f(\sigma, x), & x &\in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Avšak řešení této úlohy je podle 2.1.1 dáno vzorcem

$$w(t, x, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi.$$

To znamená, že řešení úlohy (2.6), (2.7) je

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi d\sigma.$$

Řešení obecné počáteční úlohy pro parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (2.6), (2.3) je součtem řešení úloh (2.2), (2.3) a (2.6), (2.7), tj.

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi d\sigma. \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných s jednou okrajovou podmínkou

Nejprve uvažujme úlohu s homogenní okrajovou podmínkou

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (2.9)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in (0, \infty), \quad (2.10)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (2.11)$$

Nechť funkce  $\tilde{f}(t, \cdot)$  a  $\tilde{\varphi}$  jsou lichým rozšířením funkcí  $f(t, \cdot)$  a  $\varphi$ , tj.

$$\tilde{f}(t, x) = f(t, |x|) \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} f(t, x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -f(t, -x), & x < 0, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(|x|) \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

a funkce  $v$  je řešením úlohy

$$\begin{aligned} v_t(t, x) &= a^2 v_{xx}(t, x) + \tilde{f}(t, x), & (t, x) &\in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \\ v(0, x) &= \tilde{\varphi}(x), & x &\in (-\infty, \infty); \end{aligned}$$

sr. 2.1.2. Funkce  $v$  je dána formulí (2.8), v níž místo obecných funkcí  $\varphi, f(t, \cdot)$  jsou liché funkce  $\tilde{\varphi}, \tilde{f}(t, \cdot)$ ; funkce  $G(0, \cdot, t)$  je sudá. To znamená, že funkce  $v(t, \cdot)$  je lichá takže  $v(t, 0) = 0$ . Funkce  $v$  tedy splňuje homogenní okrajovou podmínku (2.11). Navíc samozřejmě splňuje rovnici (2.9) a podmínku (2.10). Je tedy řešením úlohy (2.9), (2.10), (2.11). Pro libovolnou funkci  $\psi$  definovanou na intervalu  $[0, \infty)$  platí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(|\xi|) \operatorname{sgn}(\xi) G(x, \xi, \tau) d\xi &= - \int_{-\infty}^0 \psi(-\xi) G(x, \xi, \tau) d\xi + \int_0^{\infty} \psi(\xi) G(x, \xi, \tau) d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} \psi(\eta) G(x, -\eta, \tau) d\eta + \int_0^{\infty} \psi(\xi) G(x, \xi, \tau) d\xi = \int_0^{\infty} \psi(\xi) (G(x, \xi, \tau) - G(x, -\xi, \tau)) d\xi. \end{aligned}$$

Řešení úlohy (2.9), (2.10), (2.11) lze tedy zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi) (G(x, \xi, t) - G(x, -\xi, t)) d\xi + \int_0^t \int_0^{\infty} f(\sigma, \xi) (G(x, \xi, t - \sigma) - G(x, -\xi, t - \sigma)) d\xi d\sigma.$$

Nyní homogenní okrajovou podmínku (2.11) nahradíme podmínkou nehomogenní

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in (0, \infty) \quad (2.12)$$

a o funkci  $\mu$  budeme předpokládat, že je diferencovatelná. Řešení úlohy (2.9), (2.10), (2.12) budeme hledat ve tvaru

$$u(t, x) = U(t, x) + v(t, x),$$

kde funkce  $U$  splňuje okrajovou podmínku (2.12); k tomu stačí volit  $U(t, x) = \mu(t)$ . Pak platí

$$\begin{aligned} \mu'(t) + v_t(t, x) &= a^2 v_{xx}(t, x) + f(t, x), \\ \mu(0) + v(0, x) &= \varphi(x), \\ \mu(t) + v(t, 0) &= \mu(t) \end{aligned}$$

a to znamená, že funkce  $v$  je řešením úlohy

$$\begin{aligned} v_t(t, x) &= a^2 v_{xx}(t, x) + f(t, x) - \mu'(t), & (t, x) &\in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ v(0, x) &= \varphi(x) - \mu(0), & x &\in (0, \infty), \\ v(t, 0) &= 0, & t &\in (0, \infty), \end{aligned}$$

což je úloha stejného typu jako (2.9), (2.10), (2.11).

## 2.2 Laplaceova transformace

Buď  $M$  množina reálných funkcí definovaných na intervalu  $(0, \infty)$  takových, že integrál  $\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$  konverguje a  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} = 0$  pro všechna  $p > 0$ . Laplaceova transformace  $\mathcal{L}$  převádí reálnou funkci  $f \in M$  na reálnou funkci  $\mathcal{L}f$  definovanou na intervalu  $(0, \infty)$  vztahem

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Z uvedeného definičního vztahu plyne, že Laplaceův obraz funkce  $f \in M$  je funkcí ohraničenou a že Laplaceova transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(p) = c_1 \mathcal{L}f_1(p) + c_2 \mathcal{L}f_2(p).$$

Obrazy některých funkcí v Laplaceově transformaci jsou uvedeny v tabulce 2.1.

$f(t)$	$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$	$f(t)$	$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$t^a, a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at}$	$\frac{1}{p-a}$	$\sin^2 \omega t$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$
$te^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$\cos^2 \omega t$	$\frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$
$t^n e^{at}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\text{sh } at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$t^\nu e^{at}, \nu > -1$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{(p-a)^{\nu+1}}$	$\text{ch } at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$t \text{ sh } at$	$\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$t \text{ ch } at$	$\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$
$\frac{e^{-a/t}}{\sqrt{t^3}}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ap}}$	$J_\nu(at), \nu > -1$	$\frac{(\sqrt{p^2 + a^2} - p^\nu)^\nu}{a^\nu \sqrt{p^2 + a^2}}$

Tabulka 2.1: „Operátorový slovník“ pro Laplaceovu transformaci

Vypočítáme Laplaceův obraz derivace funkce:

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = [f(t)e^{-pt}]_{t=0}^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) + p\mathcal{L}f(p).$$

Při označení  $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$  tedy platí

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}f(p) - f(0+). \quad (2.13)$$

### 2.2.1 Řešení úlohy pro homogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných s homogenní počáteční a jednou okrajovou podmínkou

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (2.14)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad (2.15)$$

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in (0, \infty). \quad (2.16)$$

Na rovnici (2.14) aplikujeme Laplaceovu transformaci (funkci  $u$  považujeme za funkci nezávisle proměnné  $t$  a  $x$  považujeme za parametr). S využitím (2.13) a (2.15) dostaneme

$$p\mathcal{L}u(p, x) = a^2 \mathcal{L}u_{xx}(p, x),$$

což je obyčejná lineární rovnice druhého řádu pro neznámou funkci  $\mathcal{L}u$ ; nyní roli parametru hraje  $p$ . Fundamentální systém řešení této rovnice je tvořen funkcemi

$$e^{-\sqrt{\frac{p}{a^2}} x}, \quad e^{\sqrt{\frac{p}{a^2}} x}.$$

Pouze první z nich je ohraničená. Obecné řešení transformované rovnice tedy je

$$\mathcal{L}u(p, x) = C(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{a^2}}x}.$$

Aby byla splněna podmínka (2.16), musí být  $C(p) = \mathcal{L}\mu(p)$ . Laplaceův obraz řešení úlohy (2.14) (2.15) (2.16) tedy je

$$\mathcal{L}u(p, x) = e^{-\sqrt{\frac{p}{a^2}}x} \mathcal{L}\mu(p).$$

## Cvičení

Řešte úlohu

1)  $u_t = a^2 u_{xx}, t > 0, x > 0$   
 $u(0, x) = T, x > 0; \quad u(t, 0) = 0, t > 0$

2)  $u_t = a^2 u_{xx}, t > 0, x > 0$   
 $u(0, x) = 0, x > 0; \quad u(t, 0) = K, t > 0$

3)  $u_t = a^2 u_{xx}, t > 0, x > 0$   
 $u(0, x) = 0, x > 0; \quad u(t, 0) = A\delta(t), t > 0$

**Výsledky:** 1)  $T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right)$  2)  $K\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right)$ , přitom  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$  je integrál chyby

3)  $A \frac{x}{2\sqrt{\pi a^2 t^3}} e^{-x^2/(4a^2t)}$



## Kapitola 3

# Metoda separace proměnných (Fourierova)

### 3.1 Hyperbolické rovnice

#### 3.1.1 Homogenní hyperbolická rovnice ve dvou proměnných s obecnými počátečními a homogenními okrajovými podmínkami

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (3.2)$$

$$\alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 u_x(t, 0) = 0 = \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 u_x(t, \ell), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.3)$$

kde  $a > 0$ ,  $\varphi, \psi$  jsou spojité funkce splňující okrajové podmínky

$$\alpha_0 \varphi(0) + \beta_0 \varphi_x(0) = 0 = \alpha_1 \varphi(\ell) + \beta_1 \varphi_x(\ell), \quad \alpha_0 \psi(0) + \beta_0 \psi_x(0) = 0 = \alpha_1 \psi(\ell) + \beta_1 \psi_x(\ell).$$

Řešení úlohy budeme hledat ve tvaru součinu, ve kterém jeden činitel závisí pouze na  $t$  a druhý pouze na  $x$ , tedy

$$u(t, x) = T(t)X(x).$$

Pak je  $u_{tt} = T''X$ ,  $u_{xx} = TX''$  a tedy  $T''X = a^2TX''$ , po úpravě

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Levá strana poslední rovnosti závisí pouze na  $t$ , pravá pouze na  $x$ . To znamená, že tyto výrazy na nezávisle proměnných nezávisí, tedy

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Odtud dostaneme

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.4)$$

$$-X''(x) = \lambda X(x). \quad (3.5)$$

K tomu, aby funkce  $u = TX$  splňovala okrajové podmínky (3.3) stačí, aby tyto podmínky splňovala funkce  $X$ , tedy

$$\alpha_0 X(0) + \beta_0 X'(0) = 0 = \alpha_1 X(\ell) + \beta_1 X'(\ell). \quad (3.6)$$

Rovnice (3.5) s okrajovou podmínkou (3.6) je Sturmova-Liouvilleova úloha (sr. A.1.5). Existuje tedy posloupnost vlastních čísel  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  a posloupnost vlastních funkcí  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ , že

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

$\alpha_0$	$\beta_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\lambda_n$	$v_n(x)$	$\ v_n\ ^2$
1	0	1	0	$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$	$\sin \frac{n\pi}{\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
1	0	0	1	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$	$\sin \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
0	1	1	0	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$	$\cos \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
0	1	0	1	0, $\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$	1, $\cos \frac{n\pi}{\ell}x$	$\ell, \frac{\ell}{2}$
1	0	$h$	1	kladné kořeny rovnice $\sqrt{\lambda_n} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n} \ell)$	$\sin \sqrt{\lambda_n} x$	$\frac{\ell(h^2 + \lambda_n) + h}{2(h^2 + \lambda_n)}$
0	1	$h$	1	kladné kořeny rovnice $h = \sqrt{\lambda_n} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n} \ell)$	$\cos \sqrt{\lambda_n} x$	$\frac{\ell(h^2 + \lambda_n) + h}{2(h^2 + \lambda_n)}$
$h$	1	$h$	1	kladné kořeny rovnice $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} = 2 \operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda_n} \ell)$	$\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + h \sin \sqrt{\lambda_n} x$	$\frac{\lambda_n \ell + h^2 \ell + 2h}{2}$

Tabulka 3.1: Vlastní hodnoty a vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6) pro speciální tvary okrajových podmínek

a Fourierova řada každé funkce splňující podmínky (3.6) stejnoměrně k této funkci konverguje. Vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6) jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Řešení rovnice (3.4), ve které klademe  $\lambda = \lambda_n$  je

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at.$$

Odtud plyne, že každá z funkcí

$$u_n(t, x) = \left( A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at \right) v_n(x)$$

je řešením rovnice (3.1) s okrajovými podmínkami (3.3). Tedy také jejich lineární kombinace, tj. funkce

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \sqrt{\lambda_n} at + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} at \right) v_n(x) \quad (3.7)$$

je řešením rovnice (3.1) s okrajovými podmínkami (3.3). Aby byly splněny počáteční podmínky (3.2), musí platit

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} a v_n(x) = \psi(x),$$



což znamená, že  $A_n$  a  $B_n \lambda_n$  jsou Fourierovy koeficienty funkcí  $\varphi$  a  $\psi$  vzhledem k ortogonálnímu systému  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ , tedy

$$A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_n(\xi) d\xi, \quad B_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n} \|v_n\|^2} \int_0^\ell \psi(\xi) v_n(\xi) d\xi, \quad \text{kde } \|v_n\|^2 = \int_0^\ell (v_n(\xi))^2 d\xi. \quad (3.8)$$

Řešení úlohy (3.1), (3.2), (3.3), je tedy dána řadou (3.7), jejíž koeficienty jsou dány formulemi (3.8), tj.

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\ell \left( \varphi(\xi) \cos \sqrt{\lambda_n} at + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \psi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} at \right) v_n(\xi) d\xi \frac{v_n(x)}{\|v_n\|^2} = \\ &= \int_0^\ell \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi(\xi) \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} at}{\sqrt{\lambda_n}} + \psi(\xi) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} at}{a\sqrt{\lambda_n}} \right) \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\|v_n\|^2} d\xi. \end{aligned}$$

Při označení

$$G(x, \xi, \tau) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a\sqrt{\lambda_n} \tau}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \quad (3.9)$$

lze řešení úlohy (3.1), (3.2), (3.3) zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{d}{dt} \int_0^\ell \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^\ell \psi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi.$$

### 3.1.2 Nehomogenní hyperbolická rovnice ve dvou nezávisle proměnných s homogenními počátečními i okrajovými podmínkami

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (3.10)$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad (3.11)$$

$$\alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 u_x(t, 0) = 0 = \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 u_x(t, \ell), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.12)$$

kde  $f$  je po částech spojitá funkce.

Nechť  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  jsou vlastní čísla a  $v_1 = v_1(x), v_2 = v_2(x), \dots$  jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6). Funkci  $f(t, \cdot)$  vyjádříme jako Fourierovu řadu vzhledem k systému funkcí  $v_1, v_2, \dots$ :

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x), \quad \text{kde } F_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell f(t, \xi) v_n(\xi) d\xi.$$

Analogicky jako v metodě variace konstant pro obyčejné lineární rovnice (viz např. Ráb M.: Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic, MU 1998, str. 67) budeme řešení úlohy (3.10), (3.11), (3.12) hledat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n(x).$$

Tato funkce splňuje okrajovou podmínku (3.12). Dále

$$u_{tt}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n''(t) v_n(x), \quad u_{xx}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \lambda_n v_n(x),$$

neboť  $v_n$  splňuje (3.5). Aby byly splněny také (3.10) a (3.11), musí platit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n''(t) + a^2 \lambda_n C_n(t)) v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(0)v_n(x) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(0)v_n(x) = 0.$$

To znamená, že funkce  $C_n = C_n(t)$  jsou řešením Cauchyovy úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$C_n''(t) + a^2\lambda_n C_n(t) = F_n(t),$$

$$C_n(0) = C_n'(0) = 0.$$

Tuto úlohu lze vyřešit např. metodou variace konstant. Její řešení je

$$C_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t F_n(\sigma) \sin a\sqrt{\lambda_n}(t - \sigma) d\sigma,$$

po dosazení za  $F_n$

$$C_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n} \|v_n\|^2} \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma, \xi) v_n(\xi) \sin a\sqrt{\lambda_n}(t - \sigma) d\xi d\sigma.$$

Řešení úlohy (3.10), (3.11), (3.12) tedy je

$$u(t, x) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \|v_n\|^2} \left( \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma, \xi) v_n(\xi) \sin a\sqrt{\lambda_n}(t - \sigma) d\xi d\sigma \right) v_n(x),$$

což lze při označení (3.9) zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi d\sigma.$$

### 3.1.3 Nehomogenní hyperbolická rovnice ve dvou proměnných s obecnými počátečními a homogenními okrajovými podmínkami

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (3.13)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (3.14)$$

$$\alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 u_x(t, 0) = 0 = \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 u_x(t, \ell), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.15)$$

Řešení je tvaru  $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$  kde  $v(t, x)$  je řešením úlohy (3.1), (3.2), (3.3) a  $w(t, x)$  je řešením úlohy (3.10), (3.11), (3.12).

### 3.1.4 Obecná úloha pro nehomogenní hyperbolickou rovnici ve dvou proměnných

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (3.16)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (3.17)$$

$$\alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 u_x(t, 0) = \mu_0(t), \quad \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 u_x(t, \ell) = \mu_1(t), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.18)$$

Řešení je tvaru  $u(t, x) = v(t, x) + U(t, x)$ , kde funkce  $U = U(t, x)$  splňuje okrajové podmínky (3.18) a funkce  $v = v(t, x)$  je řešením úlohy (1.51), (1.52), (1.53). Za funkci  $U = U(t, x)$  stačí vzít

$$U(t, x) = \frac{(\alpha_0 \mu_1(t) - \alpha_1 \mu_0(t))x + (\alpha_1 \ell + \beta_1) \mu_0(t) - \beta_0 \mu_1(t)}{\alpha_0 \alpha_1 \ell + \alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0}. \quad (3.19)$$

Při této volbě je  $U_{xx} \equiv 0$ .

### 3.1.5 Hyperbolické rovnice s nehomogenitou tvaru $\alpha u_t$ (tlumené kmity konečné struny)

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) - \alpha u_t(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (3.20)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (3.21)$$

$$\alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 u_x(t, 0) = 0 = \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 u_x(t, \ell), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.22)$$

Zavedeme novou neznámou funkci  $w = w(t, x)$  vztahem

$$u(t, x) = e^{-(\alpha/2)t} w(t, x)$$

(sr. 1.3.6). Pak je

$$u_t(t, x) = e^{-(\alpha/2)t} \left( w_t(t, x) - \frac{\alpha}{2} w(t, x) \right),$$

$$u_{tt}(t, x) = e^{-(\alpha/2)t} \left( w_{tt}(t, x) - \alpha w_t(t, x) + \frac{\alpha^2}{4} w(t, x) \right), \quad u_{xx}(t, x) = e^{-(\alpha/2)t} w_{xx}(t, x).$$

Dosadíme do rovnice (3.20), do podmínky (3.22) a upravíme:

$$w_{tt}(t, x) = w_{xx}(t, x) + \frac{\alpha^2}{4} w(t, x), \quad (3.23)$$

$$\alpha_0 w(t, 0) + \beta_0 w_x(t, 0) = 0 = \alpha_1 w(t, \ell) + \beta_1 w_x(t, \ell), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.24)$$

Řešení okrajové úlohy (3.23), (3.24) budeme opět hledat ve tvaru  $w(t, x) = T(t)X(x)$ . Po dosazení do rovnice (3.23) a úpravě dostaneme

$$\frac{T''(t) - \frac{\alpha^2}{4} T(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Pravá strana poslední rovnice závisí pouze na  $x$ , levá strana závisí pouze na  $t$  a to znamená, že výrazy na obou stranách jsou konstantní. Opět je položíme rovny  $-\lambda$ . Funkce  $X$  je opět řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6) a funkce  $T$  je řešením rovnice

$$T''(t) + \left( \lambda a^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right) T(t) = 0.$$

Předpokládejme, že  $\alpha < 4a^2\lambda_n$  (tlumení je malé). Pak řešení poslední rovnice pro  $\lambda = \lambda_n$  je

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \sin \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t.$$

Řešení úlohy (3.23), (3.24) tedy je

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \sin \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t \right) v_n(x),$$

kde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  jsou vlastní čísla a  $v_1, v_2, \dots$  jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6). Řešení rovnice (3.20) s okrajovou podmínkou (3.22) je

$$u(t, x) = e^{-(\alpha/2)t} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \sin \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t \right) v_n(x). \quad (3.25)$$

Platí

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x).$$

takže ke splnění první z podmínek (3.21) stačí, aby

$$A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_n(\xi) d\xi. \quad (3.26)$$

Dále

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= -\frac{\alpha}{2} e^{-(\alpha/2)t} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \sin \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t \right) v_n(x) + \\ &+ e^{-(\alpha/2)t} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -A_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} \sin \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} \cos \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t \right) v_n(x), \end{aligned}$$

takže

$$u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} - \frac{\alpha}{2} A_n \right) v_n(x).$$

Aby byla splněna druhá z podmínek (3.21) stačí, aby

$$B_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} - \frac{\alpha}{2} A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell \psi(\xi) v_n(\xi) d\xi,$$

neboli

$$B_n = \frac{2}{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2} \|v_n\|^2} \int_0^\ell \left( \psi(\xi) + \frac{\alpha}{2} \varphi(\xi) \right) v_n(\xi) d\xi. \quad (3.27)$$

Řešení úlohy (3.20), (3.21), (3.22) je tedy dáno řadou (3.25), kde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  jsou vlastní čísla a  $v_1, v_2, \dots$  jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6) a koeficienty  $A_n, B_n$  jsou dány formulí (3.26) a (3.27).

## 3.2 Parabolické rovnice

### 3.2.1 Parabolická rovnice ve dvou proměnných (vedení tepla v tenké tyči)

Budeme řešit parabolickou rovnici homogenní

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (3.28)$$

nebo nehomogenní

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell), \quad (3.29)$$

s počáteční podmínkou nehomogenní

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (3.30)$$

nebo homogenní

$$u(0, x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad (3.31)$$

a okrajovými podmínkami homogenními

$$\alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 u_x(t, 0) = 0 = \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 u_x(t, \ell), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.32)$$

nebo nehomogenními

$$\alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 u_x(t, 0) = \mu_0(t), \quad \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 u_x(t, \ell) = \mu_1(t), \quad t \in (0, \infty). \quad (3.33)$$

Přitom předpokládáme, že  $a > 0$ , funkce  $\varphi$  a  $f$  jsou po částech spojitě a funkce  $\mu_0, \mu_1$  jsou diferencovatelné.

Nejdříve budeme řešit úlohu (3.28), (3.30), (3.32). Řešení budeme opět předpokládat ve tvaru

$$u(t, x) = T(t)X(x).$$

Dosazením do (3.28) a (3.32) ukážeme, že funkce  $X = X(x)$  je řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6) a funkce  $T = T(t)$  splňuje rovnici

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0,$$

tedy

$$T(t) = Ce^{-a^2\lambda t}.$$

Jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  vlastní hodnoty a  $v_1, v_2, \dots$  vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6), pak řešení rovnice (3.28) splňující podmínku (3.32) je

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(x). \quad (3.34)$$

Aby byla splněna podmínka (3.30), musí platit

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(x) = \varphi(x),$$

což znamená, že

$$C_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_n(\xi) d\xi, \quad \text{kde } \|v_n\|^2 = \int_0^\ell (v_n(\xi))^2 d\xi. \quad (3.35)$$

Řešení úlohy (3.28), (3.30), (3.32) je tedy dáno řadou (3.34), jejíž koeficienty jsou dány formulí (3.35), tedy

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \left( \int_0^\ell \varphi(\xi) v_n(\xi) d\xi \right) e^{-a^2\lambda_n t} v_n(x).$$

Při označení

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} v_n(x) v_n(\xi) e^{-a^2\lambda_n t} \quad (3.36)$$

lze řešení zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi.$$

Analogicky jako při metodě variace konstant u obyčejných diferenciálních lineárních nehomogenních rovnic budeme řešení úlohy (3.29), (3.31), (3.32) hledat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n(x),$$

kde  $v_1, v_2, \dots$  jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6). Pak je

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(t) v_n(x), \quad u_{xx}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n(t) v_n(x),$$

neboť funkce  $v_n$  je řešením rovnice (3.5) s  $\lambda = \lambda_n$ . Funkci  $f(t, \cdot)$  vyjádříme jako součet Fourierovy řady vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí  $v_1, v_2, \dots$ :

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x), \quad \text{kde } F_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell f(t, \xi) v_n(\xi) d\xi,$$

Dosazením do rovnice (3.29) a podmínky (3.31) dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C'_n(t) + a^2 \lambda_n C_n(t)) v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0) v_n(x) = 0.$$

Přitom  $\lambda_n$  je vlastní hodnota úlohy (3.5), (3.6), jíž přísluší vlastní funkce  $v_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Funkce  $C_n$  jsou tedy řešením Cauchyovy úlohy pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$C'_n(t) + a^2 \lambda_n C_n(t) = F_n(t), \quad C_n(0) = 0.$$

Řešení této úlohy je

$$C_n(t) = e^{-a^2 \lambda_n t} \int_0^t F_n(\sigma) e^{a^2 \lambda_n \sigma} d\sigma,$$

po dosazení za  $F_n$  dostaneme

$$C_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma, \xi) v_n(\xi) e^{-a^2 \lambda_n (t-\sigma)} d\xi d\sigma.$$

Řešení úlohy (3.29), (3.31), (3.32) je tedy

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma, \xi) v_n(\xi) e^{-a^2 \lambda_n (t-\sigma)} d\xi d\sigma \right) v_n(x).$$

Při označení (3.36) lze řešení zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi d\sigma.$$

Řešení úlohy (3.29), (3.30), (3.32) je tvaru

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x),$$

kde  $v = v(t, x)$  je řešením úlohy (3.28), (3.30), (3.32) a  $w = w(t, x)$  je řešením úlohy (3.29), (3.31), (3.32). Řešení úlohy (3.29), (3.30), (3.32) je tedy

$$u(t, x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi d\sigma.$$

Řešení úlohy (3.29), (3.30), (3.33) je tvaru

$$u(t, x) = v(t, x) + U(t, x),$$

kde funkce  $U = U(t, x)$  splňuje okrajové podmínky (3.33) a  $v = v(t, x)$  je řešením rovnice

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x) - (U_t(t, x) - a^2 U_{xx}(t, x)), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \ell)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, x) = \varphi(x) - U(0, x), \quad x \in (0, \ell)$$

a homogenními okrajovými podmínkami (3.32). Za funkci  $U = U(t, x)$  opět stačí vzít (3.19).

**Interpretace funkce  $G$ :** Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= a^2 u_{xx}(t, x), & (t, x) &\in (0, \infty) \times (0, \ell), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x &\in (0, \ell), \\ u(t, 0) &= u(t, \ell) = 0, & t &\in (0, \infty). \end{aligned}$$

(Vedení tepla v homogenní tyči, která byla zahřáta na teplotu  $\varphi(x)$  a jejíž konce udržujeme na nulové teplotě.) Množství tepla, kterým se teplota tělesa o hmotnosti  $m$  změní o  $\Delta u$ , je

$$Q = cm\Delta u,$$

kde  $c$  je specifické teplo. Má-li těleso na počátku děje nulovou teplotu a je zahřáto na teplotu  $u$ , pak  $\Delta u = u$ . Je-li tedy tyč v bodě vzdáleném  $\xi$  od jejího začátku zahřáta z nulové teploty na teplotu  $\varphi(\xi)$ , je množství tepla dodaného části tyče o malé délce  $\Delta\xi$  ve vzdálenosti  $\xi$  od jejího začátku rovno

$$\Delta Q = c(\rho\Delta\xi)\varphi(\xi),$$

kde  $\rho$  je lineární hustota tyče. Limitním přechodem  $\Delta\xi \rightarrow 0$  dostaneme  $dQ = c\rho\varphi(\xi)d\xi$ , takže celkové množství tepla dodaného tyči je

$$Q = c\rho \int_0^\ell \varphi(\xi)d\xi.$$

Představme si nyní, že tyč měla nulovou teplotu a v čase  $t = 0$  vznikl v bodě  $\xi^* \in (0, \ell)$  bodový teplotní impuls, který „zahřál bod  $\xi^*$ “ na teplotu  $u_0$ , zbytek tyče ponechal na teplotě 0, tj.

$$\varphi(x) = u_0\delta(x - \xi^*)$$

( $\delta$  je Diracova distribuce). Velikost tohoto impulsu byla

$$Q = c\rho \int_0^\ell \varphi(\xi)d\xi = c\rho u_0 \int_0^\ell \delta(\xi - \xi^*)d\xi = c\rho u_0.$$

Pak

$$u(t, x) = \int_0^\ell \varphi(\xi)G(x, \xi, t)d\xi = u_0 \int_0^\ell \delta(x - \xi^*)G(x, \xi, t)d\xi = u_0 G(x, \xi^*, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi^*, t).$$

Odtud plyne, že  $G(x, \xi, t)$  vyjadřuje teplotní účinek okamžitého bodového zdroje tepla mohutnosti  $Q = c\rho$  umístěného v bodě  $\xi$  intervalu  $[0, \ell]$ .

### 3.3 Eliptické rovnice

#### 3.3.1 Laplaceova rovnice ve dvou proměnných s okrajovými podmínkami na obdélníku

Budeme řešit rovnici

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \quad (3.37)$$

s některými z okrajových podmínek

$$\alpha_0 u(0, y) + \beta_0 u_x(0, y) = 0 = \alpha_1 u(a, y) + \beta_1 u_x(a, y), \quad y \in (0, b), \quad (3.38)$$

$$\alpha_0 u(0, y) + \beta_0 u_x(0, y) = \mu_0(y), \quad \alpha_1 u(a, y) + \beta_1 u_x(a, y) = \mu_1(y), \quad y \in (0, b), \quad (3.39)$$

$$\gamma_0 u(x, 0) + \delta_0 u_y(x, 0) = 0 = \gamma_1 u(x, b) + \delta_1 u_y(x, b), \quad x \in (0, a), \quad (3.40)$$

$$\gamma_0 u(x, 0) + \delta_0 u_y(x, 0) = \nu_0(x), \quad \gamma_1 u(x, b) + \delta_1 u_y(x, b) = \nu_1(x), \quad x \in (0, a). \quad (3.41)$$

Řešení úlohy (3.37), (3.38), (3.41) budeme hledat ve tvaru součinu výrazů, z nichž jeden závisí pouze na  $x$  a druhý pouze na  $y$ , tedy

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Pak je  $u_{xx} = X''Y$ ,  $u_{yy} = XY''$ . Po dosazení do rovnice (3.37) a úpravě dostaneme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Výraz na levé straně nezávisí na  $y$ , výraz na pravé straně nezávisí na  $x$  a to znamená, že oba výrazy jsou rovny nějaké konstantě, řekněme  $-\lambda$ :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Opět vidíme, že funkce  $X = X(x)$  je řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6). Funkce  $Y = Y(y)$  je řešením rovnice

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  vlastní hodnoty a  $v_1, v_2, \dots$  odpovídající vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6), přičemž  $\lambda_1 > 0$ , je řešení poslední rovnice s  $\lambda = \lambda_n$  tvaru

$$Y(y) = A_n e^{\sqrt{\lambda_n} y} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n} y},$$

a tedy řešení rovnice (3.37) s podmínkou (3.38) je tvaru

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n e^{\sqrt{\lambda_n} y} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n} y} \right) v_n(x). \quad (3.42)$$

Aby byla splněna podmínka (3.41), musí platit

$$\begin{aligned} \nu_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \gamma_0 (A_n + B_n) + \delta_0 \sqrt{\lambda_n} (A_n - B_n) \right) v_n(x), \\ \nu_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \gamma_1 \left( A_n e^{\sqrt{\lambda_n} b} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n} b} \right) + \delta_1 \sqrt{\lambda_n} \left( A_n e^{\sqrt{\lambda_n} b} - B_n e^{-\sqrt{\lambda_n} b} \right) \right) v_n(x), \end{aligned}$$

což znamená, že koeficienty  $A_n, B_n$  jsou řešením soustavy rovnic

$$(\gamma_0 + \delta_0 \sqrt{\lambda_n}) A_n + (\gamma_0 - \delta_0 \sqrt{\lambda_n}) B_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^a \nu_0(\eta) v_n(\eta) d\eta, \quad (3.43)$$

$$(\gamma_1 + \delta_1 \sqrt{\lambda_n}) e^{\sqrt{\lambda_n} b} A_n + (\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{\lambda_n}) e^{-\sqrt{\lambda_n} b} B_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^a \nu_1(\eta) v_n(\eta) d\eta.$$

Řešení úlohy (3.37), (3.38), (3.41) je dáno řadou (3.42), kde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  vlastní hodnoty a  $v_1, v_2, \dots$  odpovídající vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6), přičemž  $\lambda_1 > 0$ . Koeficienty  $A_n, B_n$  řady (3.42) jsou řešením soustavy algebraických rovnic (3.43), pokud je tato soustava jednoznačně řešitelná.

Řešení úlohy (3.37), (3.39), (3.40) lze najít analogicky. Řešení úlohy (3.37), (3.39), (3.41) je tvaru

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),$$

kde  $v = v(x, y)$  je řešení úlohy (3.37), (3.38), (3.41) a  $w = w(x, y)$  je řešení úlohy (3.37), (3.39), (3.40).

### 3.3.2 Laplaceova rovnice ve dvou proměnných s Dirichletovými okrajovými podmínkami na kruhu

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad (3.44)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad x^2 + y^2 = R^2. \quad (3.45)$$

Předpokládáme, že  $R > 0$  a funkce  $g$  je spojitá.

Provedeme transformaci do polárních souřadnic

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



Rovnice (3.44) se transformuje na tvar

$$u_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}u_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = 0. \quad (3.46)$$

Označme  $f(\varphi) = g(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ . Z podmínky (3.45) dostaneme

$$u(R, \varphi) = f(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (3.47)$$

Funkce  $u = u(r, \varphi)$  musí být  $2\pi$ -periodická, tedy

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi), \quad r \in (0, R], \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.48)$$

Hodnota funkce  $u = u(r, \varphi)$  nemůže pro  $r = 0$  záviset na úhlu  $\varphi$  a samozřejmě musí být konečná, tedy

$$u(0, \varphi) = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.49)$$

Řešení rovnice (3.46) budeme hledat ve tvaru součinu funkcí, z nichž jedna závisí pouze na  $r$  a druhá pouze na  $\varphi$ , tedy

$$u(r, \varphi) = X(r)\Phi(\varphi).$$

Po dosazení do rovnice (3.46) dostaneme

$$X''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}X'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}X(r)\Phi''(\varphi) = 0,$$

po vynásobení výrazem  $\frac{r^2}{X(r)\Phi(\varphi)}$  a jednoduché úpravě

$$r^2 \frac{X''(r)}{X(r)} + r \frac{X'(r)}{X(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na proměnné  $r$ , výraz na pravé straně pouze na proměnné  $\varphi$  a to znamená, že oba výrazy jsou rovny nějaké konstantě, řekněme  $\lambda$ . Funkce  $\Phi = \Phi(\varphi)$  je tedy řešením rovnice

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 \quad (3.50)$$

a funkce  $X = X(r)$  je řešením rovnice

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) = 0. \quad (3.51)$$

Z podmínky (3.48) dostaneme

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \quad (3.52)$$

tedy funkce  $\Phi$  je  $2\pi$ -periodická. Podle příkladu 2) v A.1.4 má úloha (3.50), (3.52) netriviální řešení pouze pro hodnoty  $\lambda = \lambda_n = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Toto řešení je

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nyní budeme řešit rovnici (3.51) s  $\lambda = n^2$ . Hledanou funkci označíme  $X_n$  a řešíme tedy rovnici

$$r^2 X_n''(r) + rX_n'(r) - n^2 X_n(r) = 0.$$

Jedná se o Eulerovu rovnici. Zavedeme substituci  $s = \ln r$ , tedy

$$\frac{d}{dr}X_n = \frac{d}{ds}X_n \frac{ds}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{ds}X_n, \quad \frac{d^2}{dr^2}X_n = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{ds}X_n \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{ds}X_n + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{ds^2}X_n,$$

po dosazení

$$\frac{d^2}{ds^2}X_n - \frac{d}{ds}X_n + \frac{d}{ds}X_n - n^2 X_n = 0$$

a po úpravě

$$\frac{d^2}{ds^2} X_n - n^2 X_n = 0.$$

Řešení této rovnice je

$$X_n(s) = \begin{cases} c_0 + d_0 s, & \text{pro } n = 0 \\ c_n e^{ns} + d_n e^{-ns}, & \text{pro } n > 0 \end{cases}, \quad \text{tj. } X_n(r) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r, & \text{pro } n = 0 \\ c_n r^n + d_n r^{-n}, & \text{pro } n > 0 \end{cases}.$$

Kdyby pro nějaké  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  bylo  $d_n = 0$ , pak by  $\lim_{r \rightarrow 0^+} |X_n(r)| = \infty$  a nemohla by být splněna podmínka (3.49). Je tedy  $d_n = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  a

$$X_n(r) = c_n r^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Řešení úlohy (3.46), (3.48), (3.49) je lineární kombinací součinů funkcí  $\Phi_n = \Phi_n(\varphi)$  a  $X_n = X_n(r)$ , tj.

$$u(r, \varphi) = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

při označení  $A_0 = 2a_0 c_0$ ,  $A_n = a_n c_n$ ,  $B_n = b_n c_n$  dostaneme

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

Dosadíme do podmínky (3.47):

$$u(R, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi)$$

takže

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \cos n\sigma d\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \sin n\sigma d\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Celkem je

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n (\cos n\sigma \cos n\varphi + \sin n\sigma \sin n\varphi) \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\sigma - \varphi) \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Výraz  $\cos n(\sigma - \varphi)$  je reálnou částí komplexního čísla  $e^{in(\sigma - \varphi)}$ , tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\sigma - \varphi)$$

je reálnou částí výrazu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n e^{in(\sigma - \varphi)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r e^{i(\sigma - \varphi)}}{R} \right)^n = \frac{r e^{i(\sigma - \varphi)}}{R} \frac{1}{1 - \frac{r e^{i(\sigma - \varphi)}}{R}} = \frac{r e^{i(\sigma - \varphi)}}{R - r e^{i(\sigma - \varphi)}} = \\ &= \frac{r(\cos(\sigma - \varphi) + i \sin(\sigma - \varphi))}{R - r \cos(\sigma - \varphi) - i r \sin(\sigma - \varphi)} = \\ &= \frac{r(\cos(\sigma - \varphi) + i \sin(\sigma - \varphi))(R - r \cos(\sigma - \varphi) + i r \sin(\sigma - \varphi))}{(R - r \cos(\sigma - \varphi))^2 + r^2 \sin^2(\sigma - \varphi)}. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\sigma - \varphi) &= \frac{1}{2} + \frac{Rr \cos(\sigma - \varphi) - r^2 \cos^2(\sigma - \varphi) - r^2 \sin^2(\sigma - \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2 \cos^2(\sigma - \varphi) + r^2 \sin^2(\sigma - \varphi)} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{Rr \cos(\sigma - \varphi) - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2} = \\
&= \frac{R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2 + 2Rr \cos(\sigma - \varphi) - 2r^2}{2(R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2)} = \\
&= \frac{R^2 - r^2}{2(R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2)}.
\end{aligned}$$

Řešení úlohy (3.46), (3.47), (3.48), (3.49) tedy dostáváme ve tvaru

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2} d\sigma, \quad \text{pro } r < R, \quad u(r, \varphi) = f(\varphi), \quad \text{pro } r = R.$$

Výraz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2} d\sigma \quad (3.53)$$

se nazývá *Poissonův integrál*, výraz

$$K(r, \varphi, R, \sigma) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2}$$

se nazývá *Poissonovo jádro*.

Vrátíme se k původním proměnným, tj. provedeme zpětnou transformaci

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pak je

$$\begin{aligned}
R^2 - 2Rr \cos(\sigma - \varphi) + r^2 &= R^2 - 2Rr(\cos \sigma \cos \varphi + \sin \sigma \sin \varphi) + r^2 = \\
&= x^2 + y^2 - 2R(x \cos \sigma + y \sin \sigma) + R^2(\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma) = (x - R \cos \sigma)^2 + (y - R \sin \sigma)^2.
\end{aligned}$$

Řešení úlohy (3.44), (3.45) je tedy

$$u(x, y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} g(R \cos \sigma, R \sin \sigma) \frac{R}{(x - R \cos \sigma)^2 + (y - R \sin \sigma)^2} d\sigma.$$

Označíme-li  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $S_{(0,0)}^R$  kružnici se středem v počátku a poloměrem  $R$ ,  $S$  bod na této kružnici, lze řešení zapsat pomocí křivkového integrálu

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{2\pi R} \int_{S_{(0,0)}^R} g(S) \frac{dS}{\|\mathbf{x} - S\|^2}. \quad (3.54)$$

Tato formule se nazývá *Poissonův vzorec*.

### 3.3.3 Poissonova rovnice ve dvou proměnných s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami na kruhu

$$\Delta u(x, y) = G(x, y), \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad (3.55)$$

$$u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2. \quad (3.56)$$

Předpokládáme, že  $R > 0$  a funkce  $G$  je spojitá. Rovnici transformujeme do polárních souřadnic

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Při označení  $F(r, \varphi) = G(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  se rovnice (3.55) transformuje na tvar

$$u_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}u_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = F(r, \varphi). \quad (3.57)$$

Analogicky jako u Laplaceovy rovnice musí funkce  $u = u(r, \varphi)$  splňovat podmínky

$$u(R, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3.58)$$

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi), \quad r \in (0, R], \varphi \in \mathbb{R}, \quad (3.59)$$

$$u(0, \varphi) = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.60)$$

Poněvadž podle (3.59) je funkce  $u(r, \cdot)$   $2\pi$ -periodická pro každé  $r \in (0, R]$ , lze ji hledat ve tvaru

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi).$$

Pravá strana rovnice (3.57) bude

$$\frac{a_0''(r)}{2} + \frac{a_0'(r)}{2r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( a_n''(r) + \frac{a_n'(r)}{r} - \frac{n^2 a_n(r)}{r^2} \right) \cos n\varphi + \left( b_n''(r) + \frac{b_n'(r)}{r} - \frac{n^2 b_n(r)}{r^2} \right) \sin n\varphi \right).$$

Funkce  $F(r, \cdot)$  je také  $2\pi$ -periodická, proto ji můžeme také vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$F(r, \varphi) = \frac{c_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(r) \cos n\varphi + d_n(r) \sin n\varphi).$$

kde

$$c_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad d_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) \sin n\alpha d\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Porovnáním koeficientů vidíme, že funkce  $a_n = a_n(r)$  a  $b_n = b_n(r)$  jsou řešením Eulerových obyčejných diferenciálních rovnic

$$r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) = \frac{r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r) = \frac{r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) \sin n\alpha d\alpha, \quad n = 1, 2, \dots$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} a_n(R) &= 0, & a_n(r) &\text{ je omezená pro } r \rightarrow 0+, \\ b_n(R) &= 0, & b_n(r) &\text{ je omezená pro } r \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Vyšetříme speciální případ, kdy pravá strana rovnice (3.55) je konstantní,  $G \equiv c$ . Pak také  $F \equiv c$  a tedy

$$\int_0^{2\pi} c d\alpha = 2\pi c, \quad \int_0^{2\pi} c \cos n\alpha d\alpha = \int_0^{2\pi} c \sin n\alpha d\alpha = 0 \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

Funkce  $a_0 = a_0(r)$  je řešením rovnice

$$r^2 a_0''(r) + r a_0'(r) = 2cr^2,$$

tedy  $a_0(r) = \frac{c}{2}r^2 + A \ln r + B$ . Poněvadž  $a_0(r)$  je omezená pro  $r \rightarrow 0+$ , musí být  $A = 0$ ; poněvadž  $a_0(R) = 0$ , musí být  $B = -\frac{c}{2}R^2$ . Celkem

$$a_0(r) = \frac{c}{2}(r^2 - R^2).$$

Funkce  $a_n = a_n(r)$  pro  $n = 1, 2, \dots$  jsou řešením rovnice

$$r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) = 0,$$

tedy  $a_n(r) = Ar^n + Br^{-n}$ . Poněvadž  $a_0(r)$  je omezená pro  $r \rightarrow 0+$ , musí být  $B = 0$ ; poněvadž  $a_n(R) = 0$ , musí být  $A = 0$ . Analogické úvahy provedeme pro funkce  $b_n = b_n(r)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Celkem dostaneme

$$a_n(r) = b_n(r) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dosazením do řady vyjadřující funkci  $u = u(r, \varphi)$  dostaneme

$$u(r, \varphi) = \frac{c}{4}(r^2 - R^2)$$

a návratem k původním proměnným dostaneme řešení úlohy (3.55), (3.56) s  $G \equiv c$  ve tvaru

$$u(x, y) = \frac{c}{4}(x^2 + y^2 - R^2).$$

### 3.3.4 Rotačně (azimutálně) symetrické řešení Laplaceovy rovnice na kouli

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \quad (3.61)$$

$$u(x, y, z) = f(z), \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (3.62)$$

Provedeme transformaci do sférických souřadnic

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta.$$

Hodnoty funkce  $u$  nezávisí na úhlu  $\varphi$ , tedy  $u = u(r, \vartheta)$  a  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ . To znamená že rovnice (3.61) se transformuje na následující rovnici (sr. D)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) = 0 \quad (3.63)$$

a okrajová podmínka (3.62) na podmínku  $u(R, \vartheta) = f(R \sin \vartheta)$ , nebo při označení  $g(\xi) = f(R\xi)$  na

$$u(R, \vartheta) = g(\sin \vartheta), \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \quad (3.64)$$

Budeme hledat ohraničené řešení rovnice (3.61) a proto budeme dále požadovat

$$\limsup_{r \rightarrow 0+} |u(r, \vartheta)| < \infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \quad (3.65)$$

Z rotační symetrie řešení  $u$  rovnice (3.61) plyne

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0, z) = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0, z)$$

pro každé  $z$ ,  $-R \leq z \leq R$ . Po transformaci tedy dostaneme podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \left( r, -\frac{\pi}{2} \right) = 0 = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \left( r, \frac{\pi}{2} \right), \quad 0 < r < R. \quad (3.66)$$

Řešení rovnice (3.63) hledáme ve tvaru součinu výrazů, z nichž jeden závisí pouze na  $r$  a druhý pouze na  $\vartheta$ , tj.

$$u(r, \vartheta) = X(r)\Theta(\vartheta). \quad (3.67)$$

Dosazením do rovnice (3.63) dostaneme po snadné úpravě

$$\frac{(r^2 X')'}{X} = -\frac{(\Theta' \cos \vartheta)'}{\Theta \cos \vartheta}.$$

Symbol  $'$  označuje obyčejnou derivaci podle příslušné proměnné; na levé straně podle  $r$ , na pravé podle  $\vartheta$ . Výraz na levé straně závisí pouze na  $r$ , výraz na pravé straně závisí pouze na  $\vartheta$ . To znamená, že obě strany předchozí rovnosti jsou rovny nějaké konstantě, řekněme  $\lambda$ . Tedy

$$\frac{(r^2 X')'}{X} = -\frac{(\Theta' \cos \vartheta)'}{\Theta \cos \vartheta} = \lambda. \quad (3.68)$$

Nejprve budeme řešit rovnici

$$\frac{1}{\cos \vartheta} (\Theta' \cos \vartheta)' + \lambda \Theta = 0 \quad (3.69)$$

s okrajovou podmínkou

$$\Theta' \left( -\frac{\pi}{2} \right) = 0 = \Theta' \left( \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.70)$$

kteřá plyne z podmínky (3.66). Zavedeme novou nezávisle proměnnou  $\xi = \sin \vartheta$ . Pak je

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{d\vartheta} = \frac{d\Theta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\vartheta} = \cos \vartheta \frac{d\Theta}{d\xi}$$

a podmínka (3.70) je splněna. Dále

$$(\Theta' \cos \vartheta)' = \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{d\Theta}{d\vartheta} \cos \vartheta \right) = \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{d\Theta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\vartheta} \cos \vartheta \right) = \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{d\vartheta} = \left( (1 - \xi^2) \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) \cos \vartheta.$$

Rovnice (3.69) se tedy transformuje na rovnici

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + \lambda \Theta = 0,$$

což je Legendreova rovnice (sr. B.1), která má netriviální řešení pro  $\lambda_n = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Těmito řešeními jsou Legendreovy polynomy  $P_n$ . Úloha (3.69), (3.70) má tedy řešení

$$\Theta_n(\vartheta) = P_n(\sin \vartheta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.71)$$

Nalezené vlastní hodnoty  $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$  dosadíme do rovnice (3.68). Dostaneme Eulerovu obyčejnou diferenciální rovnici

$$(r^2 X_n')' - n(n+1)X_n = 0,$$

kteřá má obecné řešení

$$X_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}.$$

Z podmínky (3.65) plyne, že  $\limsup_{r \rightarrow 0^+} |X_n(r)| < \infty$  a tedy  $B_n = 0$  pro všechna  $n = 0, 1, 2, \dots$ , tj

$$X_n(r) = A_n r^n. \quad (3.72)$$

Z vyjádření (3.67), nalezených řešení (3.71), (3.72) a faktu, že lineární rovnice (3.68) je homogenní, dostaneme řešení rovnice (3.63) je tvaru

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\sin \vartheta).$$

Toto řešení splňuje podmínky (3.65) a (3.66). Podmínku (3.66) můžeme přepsat na

$$g(\sin \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\sin \vartheta)$$

neboli

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\xi).$$

Odtud plyne, že  $A_n R^n$  jsou Fourierovými koeficienty funkce  $g$  vzhledem k orthogonální soustavě Legendreových polynomů. Tedy podle věty B.1.4 platí

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_{-1}^1 g(\xi) P_n(\xi) d\xi = \frac{2n+1}{2R^n} \int_{-1}^1 f(R\xi) P_n(\xi) d\xi.$$

Řešení úlohy (3.63), (3.64), (3.65), (3.66) je

$$u(r, \vartheta) = \int_{-1}^1 f(R\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\sin \theta) P_n(\xi) d\xi$$

a řešení úlohy (3.61), (3.62) je

$$u(x, y, z) = \int_{-1}^1 f(R\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{R}\right)^n P_n\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) P_n(\xi) d\xi.$$

### 3.3.5 Řešení Laplaceovy rovnice na válci

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad 0 < z < h, \quad (3.73)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, h) = f(x, y), \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad (3.74)$$

$$u(x, y, z) = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad 0 < z < h. \quad (3.75)$$

Rovnici i okrajové podmínky transformujeme do cylindrických souřadnic

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Podle D dostaneme rovnici

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < R, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad 0 < z < h. \quad (3.76)$$

Okrajové podmínky se transformují na tvar

$$u(r, \varphi, 0) = 0, \quad u(r, \varphi, h) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad 0 < r < R, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (3.77)$$

$$u(R, \varphi, z) = 0, \quad \limsup_{r \rightarrow 0^+} |u(r, \varphi, z)| < \infty, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad 0 < z < h, \quad (3.78)$$

$$u(r, \varphi, z) = u(r, \varphi + 2\pi, z), \quad 0 < r < R, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad 0 < z < h. \quad (3.79)$$

Řešení transformované úlohy budeme hledat ve tvaru součinu tří funkcí, z nichž každá závisí právě na jedné z proměnných, tj.

$$u(r, \varphi, z) = X(r)\Phi(\varphi)Z(z). \quad (3.80)$$

Po dosazení do rovnice (3.76) a jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{(rX)'}{rX} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = -\frac{Z''}{Z}.$$

Symbol  $'$  označuje obyčejnou derivaci funkce podle její jediné proměnné. Na levé straně rovnosti je výraz, který závisí pouze na proměnných  $r$  a  $\varphi$ , výraz na pravé straně závisí pouze na  $\varphi$ . To je možné jedině tak, že výrazy na obou stranách rovnosti jsou rovny nějaké konstantě. Označíme ji  $-\lambda$  a dostaneme

$$\frac{Z''}{Z} = \lambda = -\frac{(rX')'}{rX} - \frac{\Phi''}{r^2\Phi}. \quad (3.81)$$

Druhá z těchto rovností dává

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = r\frac{(rX')'}{X} + \lambda r^2.$$

Výraz na levé straně nezávisí na proměnné  $r$ , výraz na pravé straně nezávisí na proměnné  $\varphi$ . Musí se tedy oba rovnat nějaké konstantě, řekněme  $\mu$ . Tedy

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu = r\frac{(rX')'}{X} + \lambda r^2. \quad (3.82)$$

Z první rovnosti (3.81), z rovností (3.82) a z podmínek v (3.77), (3.78), (3.79) dostaneme tři obyčejné rovnice druhého řádu s okrajovými podmínkami:

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \quad (3.83)$$

$$r(rX')' + (\lambda r^2 - \mu)X = 0, \quad \limsup_{r \rightarrow 0^+} |X(r)| < \infty, \quad X(R) = 0, \quad (3.84)$$

$$Z'' - \lambda Z = 0, \quad Z(0) = 0. \quad (3.85)$$

Úloha (3.83) je shodná s úlohou (3.50), (3.52). Má tedy netriviální řešení pouze pro  $\mu = m^2$ , kde  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a toto řešení je

$$\Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.86)$$

Předpokládejme, že  $\lambda > 0$ . Položíme  $\lambda = l^2$  a v úloze (3.84) s  $\mu = m^2$  zavedeme novou nezávisle proměnnou  $\varrho$  vztahem  $\varrho = lr$ ; jedná se o změnu měřítka průvodiče. Pak

$$X' = l \frac{dX}{d\varrho}, \quad (rX')' = l \frac{d}{d\varrho} \left( \frac{\varrho}{l} l \frac{dX}{d\varrho} \right) = l \left( \varrho \frac{d^2X}{d\varrho^2} + \frac{dX}{d\varrho} \right)$$

a rovnice v (3.84) se transformuje na Besselovu rovnici celočíselného řádu  $m$ ,

$$\varrho^2 \frac{d^2X}{d\varrho^2} + \varrho \frac{dX}{d\varrho} + (\varrho^2 - m^2)X = 0,$$

sr. B.5. Obecné řešení této rovnice je podle B.5.11 rovno

$$X = X_{ml}(\varrho) = C_{ml}J_m(\varrho) + D_{ml}Y_m(\varrho),$$

kde  $C_{ml}$ ,  $D_{ml}$  jsou nějaké konstanty,  $J_m$ , resp.  $Y_m$ , je Besselova funkce prvního, resp. druhého, druhu. Avšak podle B.5.8 je  $\left| \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} Y_m \right| = \infty$ . Aby byla splněna podmínka ohraničenosti v (3.84), musí být  $D_{ml} = 0$ . Řešení úlohy (3.84) jsou tedy tvaru

$$X = X_{ml}(r) = C_{ml}J_m(lr).$$

Z druhé okrajové podmínky (3.84) plyne  $C_{ml}J_m(lR) = 0$ . Aby řešení bylo nenulové a současně bylo  $l > 0$ , musí být

$$l = l_{mk} = \frac{x_{mk}}{R}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

kde  $x_{mk}$  je  $k$ -tý jednoduchý kořen Besselovy funkce  $J_m$ , sr. B.5.6. Řešení úlohy (3.84) tedy jsou

$$X_{mk}(r) = c_{mk}J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.87)$$

kde  $c_{mk} = C_{ml}$  pro  $l = \frac{x_{mk}}{R}$ .



Za předpokladu  $\lambda > 0$  tedy je  $\lambda = l_{mk}^2 = \left(\frac{x_{mk}}{R}\right)^2$ . Řešení rovnice (3.85) v takovém případě bude

$$Z_{mk}(z) = D_{mk}e^{l_{mk}z} + E_{mk}e^{-l_{mk}z},$$

kde  $D_{mk}$ ,  $E_{mk}$  jsou nějaké konstanty. Z okrajové podmínky v (3.85) dostaneme  $0 = Z_{mk}(0) = D_{mk} + E_{mk}$ . Odtud plyne  $E_{mk} = -D_{mk}$  a tedy

$$Z_{mk}(z) = D_{mk} \operatorname{sh}(l_{mk}z) = D_{mk} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}z\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.88)$$

Označme  $a_{mk} = A_m c_{mk} D_{mk}$ ,  $b_{mk} = B_m c_{mk} D_{mk}$ . Z vyjádření (3.80), nalezených řešení (3.86), (3.87) a (3.88) a ze skutečnosti, že rovnice (3.76) je homogenní, dostaneme její řešení ve tvaru

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}z\right) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right) (a_{mk} \cos m\varphi + b_{mk} \sin m\varphi). \quad (3.89)$$

Toto řešení splňuje okrajové podmínky (3.78), (3.79) a první z podmínek (3.77). Konstanty  $a_{mk}$ ,  $b_{mk}$  určíme tak, aby byla splněna druhá z podmínek (3.77), tedy aby platilo

$$g(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right) (a_{mk} \cos m\varphi + b_{mk} \sin m\varphi),$$

kde  $g(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Výraz  $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right) a_{mk}$  je tedy Fourierovým koeficientem funkce  $g(r, \cdot)$  vzhledem k báze funkci  $\cos(m \cdot)$ , takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right) a_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \sigma) \cos m\sigma d\sigma$$

pro  $m > 0$  a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{R}h\right) J_0\left(\frac{x_{0k}}{R}r\right) a_{0k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \sigma) d\sigma.$$

Podle B.5.7 funkce  $J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\cdot\right)$  tvoří ortogonální systém funkcí na intervalu  $(0, R)$ ; skalární součin funkcí  $F, G$  definovaných na  $(0, R)$  je přitom definován jako  $(F, G) = \int_0^R \xi F(\xi) G(\xi) d\xi$ . Z předchozí rovnosti tedy plyne, že výraz  $a_{mk} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right)$ , resp.  $a_{0k} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{R}h\right)$ , je Fourierovým koeficientem funkce

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\cdot, \sigma) \cos m\sigma d\sigma, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\cdot, \sigma) d\sigma,$$

příslušným k báze funkci  $J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\cdot\right)$ , resp.  $J_0\left(\frac{x_{0k}}{R}\cdot\right)$ . Vzhledem k B.5.7 to znamená, že

$$a_{mk} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) = \frac{2}{\pi R^2 (J_{m+1}(x_{mk}))^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho g(\varrho, \sigma) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\varrho\right) \cos m\sigma d\sigma d\varrho$$

pro  $m = 1, 2, 3, \dots$ , tedy

$$a_{mk} = \frac{2}{\pi R^2 \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) (J_{m+1}(x_{mk}))^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho f(\varrho \cos \sigma, \varrho \sin \sigma) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\varrho\right) \cos m\sigma d\sigma d\varrho, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.90)$$

Analogicky dostaneme

$$a_{0k} = \frac{1}{\pi R^2 \operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{R}h\right) (J_1(x_{0k}))^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho f(\varrho \cos \sigma, \varrho \sin \sigma) J_0\left(\frac{x_{0k}}{R}\varrho\right) d\sigma d\varrho, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.91)$$

$$b_{mk} = \frac{2}{\pi R^2 \operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) (J_{m+1}(x_{mk}))^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho f(\varrho \cos \sigma, \varrho \sin \sigma) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\varrho\right) \sin m\sigma d\sigma d\varrho, \\ m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.92)$$

$$b_{0,k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.93)$$

Řešení úlohy (3.76)–(3.79), což je řešení původní úlohy (3.73)–(3.75) v cylindrických souřadnicích, je dáno formulí (3.89), přičemž koeficienty  $a_{mk}$ ,  $b_{mk}$  jsou vyjádřeny rovnostmi (3.90)–(3.93).

Poznamenejme, že toto řešení jsme našli za předpokladu  $\lambda > 0$ . Naskytá se otázka, zda volba  $\lambda \leq 0$  nedá nějaké jiné řešení. Ovšem dále (v odstavci 4.2) bude ukázáno, že úloha (3.73)–(3.75) má jediné řešení.

## Cvičení

1) Řešte úlohu o chvění struny délky  $l$ , je-li

a) struna upevněna na obou koncích, na počátku je ve vzdálenosti  $c$  od jednoho konce vychýlena na vzdálenost  $h$  od rovnovážné polohy a nepohybuje se.

b) struna upevněna na obou koncích a je rozechvěna úderem plochého tvrdého kladívka o šířce  $2\delta$ , jehož střed se struny dotkne ve vzdálenosti  $c$  od jednoho konce a jež se pohybuje rychlostí  $v$ .

c) struna je upevněna na obou koncích a působí na ni konstantní síla  $f$ ; na počátku je struna v rovnovážné poloze a nepohybuje se.

d) struna je upevněna na jednom konci, druhý konec vykonává harmonický pohyb s amplitudou  $A$  a frekvencí  $\omega = \frac{a\pi}{l}$ . (Na počátku je druhý konec vychýlen na vzdálenost  $A$  a struna je v klidu.)

2) Řešte úlohu o chlazení homogenní tyče délky  $l$  která byla stejnoměrně zahřáta na teplotu  $u_0$ , na jejímž bočním povrchu nedochází k výměně tepla a

a) jeden její konec udržujeme na teplotě 0, druhý je tepelně izolován.

b) jeden její konec udržujeme na teplotě  $u_1$ , druhý na teplotě  $u_2$ .

c) na koncích nastává výměna tepla s prostředím nulové teploty.

3) Homogenní koule o poloměru  $R$  byla zahřáta tak, že její počáteční teplota v libovolném bodě závisí pouze na vzdálenosti  $r$  tohoto bodu od středu koule, tj.  $u(0, x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ . Povrch koule udržujeme na nulové teplotě. Určete teplotu koule v libovolném bodě a libovolném čase.

Řešte úlohu

4)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$

$$u(0, y) = Ay(b - y), \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \quad u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a$$

5)  $u_{xx} + u_{yy} = -2$ ,  $0 < x < a$ ,  $-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}; \quad u(x, -\frac{b}{2}) = u(x, \frac{b}{2}) = 0, \quad 0 \leq x \leq a$$

**Výsledky:**

1a)  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$$u(0, x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & x \in [0, c) \\ \frac{h}{c-l}(x-l), & x \in [c, l], \end{cases} \quad u_t(0, x) = 0$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0$$

$$u(t, x) = \frac{2l^2 h}{c(l-c)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{l}c\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)$$

$$1b) u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$u(0, x) = 0, u_t(0, x) = \begin{cases} v, & x \in [c - \delta, c + \delta] \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0$$

$$u(t, x) = \frac{4lv}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{l}c\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\delta\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)$$

$$1c) u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$$

$$u(0, x) = u_t(0, x) = 0, u(t, 0) = u(t, l) = 0$$

$$u(t, x) = \frac{4l^2 f}{a^2 \pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(1 - \cos\left(\frac{a\pi(2n+1)}{l}t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}x\right)$$

$$1d) u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$u(0, x) = \frac{A}{l}x, u_t(0, x) = 0, u(t, 0) = 0, u(t, l) = A \cos \omega t$$

$$u(t, x) = \frac{A}{l} \left(x \cos\left(\frac{a\pi}{l}t\right) - at \sin\left(\frac{a\pi}{l}t\right)\right) + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 - n} \sin\left(\frac{a\pi(n+1)}{l}t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$2a) u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(0, x) = u_0; u(t, 0) = 0, u_x(t, l) = 0$$

$$u(t, x) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)}{(2n+1) \exp\left\{\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2l}\right)^2 t\right\}}, \text{ stacionární stav } u \equiv 0$$

$$2b) u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(0, x) = u_0; u(t, 0) = u_1, u(t, l) = u_2$$

$$u(t, x) = \frac{u_2 - u_1}{l}x + u_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_0 - u_1 + (-1)^{n+1}(u_0 - u_2)) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)}{n \exp\left\{\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right\}}, \text{ stacionární stav } u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x$$

$$2c) u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(0, x) = u_0; u_x(t, 0) = hu(t, 0), u_x(t, l) = -hu(t, l)$$

$$u(x, t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a^2 \lambda_n t)}{\lambda_n l + h^2 l + 2h} \left(\sin(\sqrt{\lambda_n} l) - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} (\cos(\sqrt{\lambda_n} l) - 1)\right) (\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + h \sin(\sqrt{\lambda_n} x)),$$

$$\text{kde } \lambda_1, \lambda_2 \dots \text{ jsou kladné kořeny rovnice } \frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cotg(\sqrt{\lambda} l)$$

$$3) u_t = a^2 \Delta u$$

$$u(0, x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right), u(t, x, y, z) = 0 \text{ pro } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$u(t, x, y, z) = \frac{2}{R\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{n\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{R}\right) \int_0^R \rho f(\rho) \sin\left(\frac{n\pi\rho}{R}\right) d\rho$$

$$4) u(x, y) = \frac{B \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(b-y)}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi b}{a}\right)} + \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right)}{(2n+1)^3 \operatorname{sh}\left(\frac{(2n+1)\pi a}{b}\right)}$$

$$5) u(x, y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{a}\pi y\right) \sin\left(\frac{2n+1}{a}\pi x\right)}{(2n+1)^3 \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2a}\pi b\right)}$$



# Kapitola 4

## Metody řešení eliptické rovnice

### 4.1 Integrace per partes a Greenovy vzorce

Buď  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\partial\Omega$ ,  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2) = (\nu_1(x, y), \nu_2(x, y))$  jednotkový vektor vnější normály k  $\partial\Omega$ ,  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  diferencovatelná funkce. Integrací podle jedné proměnné ověříme, že platí

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} f \nu_1 dS, \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\partial\Omega} f \nu_2 dS.$$

Položíme-li  $f = uv$ , kde  $u, v$  jsou diferencovatelné funkce na  $\overline{\Omega}$ , dostaneme vzorce pro integraci per partes u dvojných integrálů:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} uv \nu_1 dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \int_{\partial\Omega} uv \nu_2 dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy.$$

Odtud plyne

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} \nu_1 dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy, \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} \nu_2 dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy.$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx dy = \int_{\partial\Omega} u \left( \frac{\partial v}{\partial x} \nu_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \nu_2 \right) dS - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Výraz  $\frac{\partial v}{\partial x} \nu_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \nu_2$  je derivace funkce  $v$  ve směru jednotkového vektoru vnější normály. Označíme ho  $\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}$  a dostaneme *první Greenův vzorec*

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Analogicky odvodíme

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Odečtením prvních Greenových vzorců dostaneme *druhý Greenův vzorec*

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dS.$$

Analogické vzorce platí i pro funkce více proměnných: Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\partial\Omega$ ,  $u, v$  diferencovatelné funkce na  $\overline{\Omega}$  a  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  jednotkový vektor vnější normály k  $\partial\Omega$ . Pak platí

- Integrace per partes

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dV = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dV, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- První Greenův vzorec

$$\int_{\Omega} u \Delta v dV = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dV = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV.$$

- Druhý Greenův vzorec

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

## 4.2 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici

Buď  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\partial\Omega$ . Uvažujme *Poissonovu rovnici*

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.1)$$

s *Dirichletovou*

$$u(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4.2)$$

nebo *Neumannovou*

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} = g_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4.3)$$

okrajovou podmínkou. Nechť funkce  $u_1, u_2$  současně splňují rovnici (4.1) s některou z podmínek (4.2) nebo (4.3). Položme  $u = u_1 - u_2$ . Pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  platí

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \Delta u_1(\mathbf{x}) - \Delta u_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0,$$

tedy funkce  $u$  splňuje na  $\Omega$  Laplaceovu rovnici. Pro  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  platí

$$u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) - g_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial \nu} = g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{x}) = 0,$$

zejména tedy  $u(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} = 0$  na  $\partial\Omega$ . S využitím prvního Greenova vzorce dostaneme

$$0 = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_{\Omega} u \Delta u dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dV = 0 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV.$$

Odtud plyne, že  $\nabla u(\mathbf{x}) = 0$  pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  a tedy, že  $u(\mathbf{x}) = \text{const}$ . To dále znamená, že  $u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = \text{const}$  pro  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ , neboť řešení každé z úloh (4.1), (4.2) a (4.1), (4.3) je spojitě na  $\bar{\Omega}$ . V případě Dirichletovy podmínky je  $\text{const} = 0$ , neboť  $u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = 0$  pro  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Platí tedy: Všechna řešení úlohy (4.1), (4.2) jsou shodná, tj. úloha (4.1), (4.2) má nejvýše jedno řešení; všechna řešení úlohy (4.1), (4.3) se liší o aditivní konstantu.

## 4.3 Laplaceova rovnice a harmonické funkce

Buď  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  oblast (otevřená souvislá množina). Řekneme, že funkce  $u$  definovaná na  $\Omega$  je *harmonická*, má-li spojitě parciální derivace druhého řádu, na  $\Omega$  splňuje *Laplaceovu rovnici*

$$\Delta u = 0$$

$\left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)$  a je-li  $\Omega$  neohrazená, platí navíc

$$\limsup_{\mathbf{x} \in \Omega, |\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^{n-2} u(\mathbf{x}) < \infty.$$

( $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  je euklidovská vzdálenost bodu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  od počátku  $(0, 0, \dots, 0)$ .)

### 4.3.1 Jednoduché harmonické funkce v rovině

Rovnice

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

má v polárních souřadnicích  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  tvar

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

Snadno ověříme, že funkce

$$u(r, \varphi) = r^k \cos k\varphi \quad \text{a} \quad v(r, \varphi) = r^k \sin k\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

jsou řešením poslední rovnice. Vyjádříme tyto funkce v kartézských souřadnicích

$u(r, \varphi)$	1	$r \cos \varphi$	$r \sin \varphi$	$r^2 \cos 2\varphi$	$r^2 \sin 2\varphi$	$r^3 \cos 3\varphi$	$r^3 \sin 3\varphi$	...
$u(x, y)$	1	$x$	$y$	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^3 - 3xy^2$	$3x^2y - y^3$	...

Získáme polynomy stupně  $k$ , které nazýváme *jednoduché harmonické funkce stupně  $k$* . Nechť  $\Omega$  je ohraničená oblast, jejíž hranice  $\partial\Omega$  je jednoduchá uzavřená křivka implicitně daná rovnicí  $P(x, y) = 0$ , kde  $P$  je polynom stupně nejvýše  $k$ . Řešení rovnice

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

s některou z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} u(x, y) &= g_1(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y) &= g_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y) &= h(g_3(x, y) - u(x, y)), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

$g_1$  je polynom stupně nejvýše  $k$ ;  $g_2$ ,  $g_3$  jsou polynomy stupně nejvýše  $k - 1$  a  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  značí derivaci ve směru vnější normály, lze v tomto případě hledat ve tvaru lineární kombinace jednoduchých harmonických funkcí stupně nejvýše  $k$ .

### 4.3.2 Kruhová a kulová inverze

Kruhová inverze vzhledem ke kružnici  $x^2 + y^2 = a^2$ , v polárních souřadnicích  $r = a$ , je zobrazení  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dané předpisem

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{xa^2}{x^2 + y^2}, \frac{ya^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{a^2}{|(x, y)|^2}(x, y),$$

v polárních souřadnicích

$$(r, \varphi) \mapsto \left( \frac{a^2}{r}, \varphi \right).$$

Kruhová inverze je prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq a^2\}$  na množinu  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , body kružnice jsou pevné (samodružné) body tohoto zobrazení.

Funkce  $u = u(r, \varphi)$  je harmonická na množině  $\{(r, \varphi) : r < a\}$  právě tehdy, když funkce

$$v = v(r', \varphi) = u\left(\frac{a^2}{r'}, \varphi\right) = u(r, \varphi)$$

je harmonická na množině  $\{(r', \varphi) : r' > a\}$ .

D.:  $r = \frac{a^2}{r'}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial r'} = -\frac{a^2}{r'^2} = -\frac{r^2}{a^2}$ , tedy

$$\begin{aligned} v_{r'}(r', \varphi) &= v_r(r', \varphi) \frac{\partial r}{\partial r'} = -\frac{r^2}{a^2} u_r(r, \varphi), \\ v_{r'r'}(r', \varphi) &= \frac{\partial}{\partial r} v_{r'}(r', \varphi) \frac{\partial r}{\partial r'} = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{r^2}{a^2} u_r(r, \varphi) \right) \left( -\frac{r^2}{a^2} \right) = \\ &= \frac{r^2}{a^4} (2r u_r(r, \varphi) + r^2 u_{rr}(r, \varphi)) = \frac{2r^3}{a^4} u_r(r, \varphi) + \frac{r^4}{a^4} u_{rr}(r, \varphi), \\ \Delta_{r', \varphi} v(r', \varphi) &= v_{r'r'}(r', \varphi) + \frac{1}{r'^2} v_{\varphi\varphi}(r', \varphi) + \frac{1}{r'} v_{r'}(r', \varphi) = \\ &= \frac{2r^3}{a^4} u_r(r, \varphi) + \frac{r^4}{a^4} u_{rr}(r, \varphi) + \frac{r^2}{a^4} u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) - \frac{r^3}{a^4} u_r(r, \varphi) = \\ &= \frac{r^4}{a^4} \left( u_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r} u_r(r, \varphi) + u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \right) = \frac{r^4}{a^4} \Delta_{r, \varphi} u(r, \varphi). \end{aligned}$$

□

Tato vlastnost umožňuje převádět řešení úlohy

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < a^2$$

na řešení úlohy

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 > a^2.$$

Kruhová inverze jednoduchých harmonických funkcí:

$$1, \frac{1}{r} \cos \varphi, \frac{1}{r} \sin \varphi, \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi, \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi, \dots$$

Kulová inverze vzhledem ke sféře  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , ve sférických souřadnicích  $r = a$ , je zobrazení dané předpisem

$$(x, y, z) \mapsto \frac{a^2}{|(x, y, z)|^2} (x, y, z),$$

ve sférických souřadnicích

$$(r, \varphi, \vartheta) \mapsto \left( \frac{a^2}{r}, \varphi, \vartheta \right).$$

Kulová inverze je prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2\}$  na množinu  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ , body sféry jsou pevné body tohoto zobrazení.

Funkce  $u = u(r, \varphi, \vartheta)$  je harmonická právě tehdy, když funkce

$$v = v(r', \varphi, \vartheta) = \frac{a^2}{r'} u \left( \frac{a^2}{r'}, \varphi, \vartheta \right) = r u(r, \varphi, \vartheta)$$

je harmonická.

D.:  $r = \frac{a^2}{r'}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial r'} = -\frac{r^2}{a^2}$ . Tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r'^2 \frac{\partial v}{\partial r'} \right) &= \frac{r^2}{a^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a^4}{r^2} \frac{\partial r u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r'} \right) \frac{\partial r}{\partial r'} = \frac{r^2}{a^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( -a^2 \left( u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \left( -\frac{r^2}{a^2} \right) = \\ &= \frac{r^4}{a^4} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{r^3}{a^4} \left( 2r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \\ &= \frac{r^3}{a^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{r^5}{a^4} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \frac{1}{r'^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} &= \frac{r^2}{a^4} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 r u}{\partial \varphi^2} = \frac{r^3}{a^4} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{r^5}{a^4} \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{1}{r'^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) &= \frac{r^2}{a^4} \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial r u}{\partial \vartheta} \right) = \frac{r^5}{a^4} \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right), \end{aligned}$$



odtud

$$\Delta_{r', \varphi, \vartheta} v = \frac{r^5}{a^4} \Delta_{r, \varphi, \vartheta} u.$$

□

Transformace

$$v(r', \varphi, \vartheta) = ru(r, \varphi, \vartheta), \quad \text{kde } r = \frac{1}{r'}$$

se nazývá *Kelvinova*.

### 4.3.3 Fundamentální harmonické funkce

Hledáme symetrické řešení rovnice

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Provedeme transformaci do sférických souřadnic

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1 \dots \cos \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\ x_2 &= r \cos \varphi_1 \dots \cos \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \\ x_3 &= r \cos \varphi_1 \dots \cos \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ x_n &= r \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

Poněvadž funkce  $u$  má být symetrická, t.j. její hodnota závisí pouze na vzdálenosti argumentu od počátku, je  $u = u(r)$  a  $\frac{\partial u}{\partial \varphi_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Tedy

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \frac{\partial r}{\partial x_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

Poněvadž  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r}, \quad \text{tedy } \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{x_i^2}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} &= \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} - \frac{x_i^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) = \frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{n-1}{r}.$$

Celkem máme

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r = 0.$$

Řešení této rovnice je

$$u(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & n = 2 \\ \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2, & n \geq 3 \end{cases}.$$

Aby  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{n-2}u(r) < \infty$ , musí být  $C_1 < 0$  v případě  $n = 2$ . Volíme  $C_2 = 0$  a  $C_1 = \begin{cases} -1, & n = 2 \\ 1, & n \geq 3 \end{cases}$ .

**Definice:** Funkci  $v(\mathbf{x}_0, \cdot)$  definovanou na  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  vztahem

$$v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|}, & n = 2 \\ \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

nazýváme *fundamentální (elementární) harmonickou funkcí se singularitou v bodě  $\mathbf{x}_0$* .

Speciální případy:

$$\begin{aligned} v(x_0, y_0, x, y) &= \ln \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}}, \\ v(x_0, y_0, z_0, x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}}. \end{aligned}$$

Z úvahy provedené před definicí plyne, že fundamentální harmonická funkce se singularitou v bodě  $\mathbf{x}_0$  je harmonickou funkcí na oblasti  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ . Dále je zřejmé, že

$$v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \quad (4.4)$$

a pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  platí

$$\Delta_{x_1, x_2, \dots, x_n} v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \Delta_{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}} v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}). \quad (4.5)$$

### Interpretace fundamentální harmonické funkce $v(\mathbf{x}_0, \cdot)$ a její derivace.

Pro  $n = 3$  při označení  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{-2(x_0 - x)}{((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} = -\frac{x - x_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}, \end{aligned}$$

a podobně

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})}{\partial y} = -\frac{y - y_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}, \quad \frac{\partial v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})}{\partial z} = -\frac{z - z_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3},$$

takže

$$\nabla v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}.$$

Nechť v bodě o souřadnicích  $\mathbf{x}_0$  se nachází bodový náboj velikosti  $Q$ . Na kladný jednotkový bodový náboj umístěný v bodě  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  působí podle Coulombova zákona elektrostatičká síla o velikosti

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2},$$

kteřá je orientovaná ve směru vektoru  $\text{sgn } Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ ; přitom  $\epsilon$  označuje permitivitu prostředí. V bodě  $\mathbf{x}$  je tedy intenzita elektrostatičkého pole vytvářeného nábojem  $Q$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  rovna

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} (-\nabla v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})).$$

Při označení

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi} v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \quad (4.6)$$

tedy intenzitu  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon} (-\nabla\varphi(\mathbf{x})).$$

To znamená, že funkce  $v(\mathbf{x}_0, \cdot)$  vyjadřuje (až na multiplikatívni konstantu charakterizující permitivitu prostředí) potenciál elektrostatického pole vytvářeného bodovým nábojem umístěným v bodě  $\mathbf{x}_0$ .

Uvažujme nyní elektrický dipól, tj. dva bodové náboje opačného znaménka stejné velikosti  $|Q|$  v malé vzdálenosti  $h$  od sebe. Nechť náboj  $Q$  se nachází v bodě  $\mathbf{x}_+$  a náboj  $-Q$  v bodě  $\mathbf{x}_-$ . Označme dále  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_-$ ,  $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_+ + \mathbf{x}_-)$ . Vektor  $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$  se nazývá dipólový moment, jeho velikost je  $N = Q|\mathbf{d}| = Qh$  a směr  $\mathbf{d}_0 = \frac{\mathbf{d}}{h}$ ; bod  $\mathbf{x}_0$  lze považovat za umístění dipólu.

Potenciál elektrostatického pole vytvářeného uvažovaným dipólem v pevně zvoleném bodě  $\mathbf{x}$  bude podle (4.6) roven

$$\varphi_{III}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi}v(\mathbf{x}_+, \mathbf{x}) - \frac{Q}{4\pi}v(\mathbf{x}_-, \mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi}(v(\mathbf{x}_+, \mathbf{x}) - v(\mathbf{x}_-, \mathbf{x}))$$

(až na multiplikatívni konstantu vyjadřující permitivitu). Podle věty o střední hodnotě je

$$v(\mathbf{x}_+, \mathbf{x}) - v(\mathbf{x}_-, \mathbf{x}) = \frac{\partial v(\mathbf{x}_- + \vartheta\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial\mathbf{d}} = h \frac{\partial v(\mathbf{x}_- + \vartheta\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial\mathbf{d}_0},$$

kde  $\vartheta \in [0, 1]$  a  $\frac{\partial}{\partial\mathbf{d}}$  označuje směrovou derivaci podle vektoru  $\mathbf{d}$ . Potenciál  $\varphi_{III}$  tedy můžeme vyjádřit vztahem

$$\varphi_{III}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}N \frac{\partial v(\mathbf{x}_- + \vartheta\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial\mathbf{d}_0}.$$

Pokud vzdálenost nábojů  $h$  je malá ve srovnání se vzdáleností  $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|$  bodu  $\mathbf{x}$  od dipólu, je

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_- + \vartheta\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial\mathbf{d}_0} \approx \frac{\partial v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})}{\partial\mathbf{d}_0}$$

a potenciál dipólu s momentem velikosti  $N$  a směru  $\mathbf{d}_0$  lze vyjádřit formulí

$$\varphi_{III}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}N \frac{\partial v(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})}{\partial\mathbf{d}_0}. \quad (4.7)$$

#### 4.3.4 Integrovní representace dvakrát diferencovatelné funkce

Buď  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\partial\Omega$ ,  $u$  funkce definovaná na  $\overline{\Omega}$ , která má na  $\overline{\Omega}$  spojitě parciální derivace druhého řádu. Pak pro každé  $\mathbf{x} \in \Omega$  platí

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \left( v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}} \right) dS - \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u dV,$$

kde  $v(\mathbf{x}, \cdot)$  je fundamentální harmonická funkce se singularitou v  $\mathbf{x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}$  je derivace ve směru jednotkového vektoru vnější normály  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ , tj.  $\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\nu}$  a

$$c_n = \begin{cases} 2\pi, & n = 2 \\ (n-2)\sigma_n, & n \geq 3 \end{cases},$$

kde  $\sigma_n$  je  $(n-1)$ -rozměrná míra jednotkové sféry v  $\mathbb{R}^n$ ,  $\sigma_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}$ ,  $\sigma_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}$ . (Zejména  $c_3 = 4\pi$ .)

Neavlátní integrál na pravé straně rovnosti definujeme vztahem

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u dV = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \setminus K_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u dV,$$

kde  $K_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}$  je koule se středem  $\mathbf{x}$  a poloměrem  $\varepsilon$ .

**D.:** Důkaz provedeme pro  $n \geq 3$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Označme  $K_{\mathbf{x}}^a$ , resp.  $S_{\mathbf{x}}^a$  kouli, resp. sféru se středem  $\mathbf{x}$  a poloměrem  $a$ . Buďte  $\mathbf{x} \in \Omega$  a  $\varepsilon > 0$  takové, že  $K_{\mathbf{x}}^\varepsilon \subseteq \Omega$ . Podle druhého Greenova vzorce platí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus K_{\mathbf{x}}^\varepsilon} (u \Delta v(\mathbf{x}, \cdot) - v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u) dV &= \\ &= \int_{\partial \Omega} \left( u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dS - \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} \left( u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dS, \end{aligned}$$

Poněvadž funkce  $v(\mathbf{x}, \cdot)$  je na  $\Omega \setminus K_{\mathbf{x}}^\varepsilon$  harmonická, je

$$- \int_{\Omega \setminus K_{\mathbf{x}}^\varepsilon} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u dV = \int_{\partial \Omega} \left( u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dS + \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} \left( v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dS.$$

Normálový vektor k  $S_{\mathbf{x}}^\varepsilon$  v bodě  $\mathbf{y}$  má složky  $\nu_i = \frac{1}{\varepsilon}(y_i - x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pro  $\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}^\varepsilon$  je

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} = \frac{n-2}{\varepsilon^n} (x_i - y_i),$$

takže pro  $\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}^\varepsilon$  je

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -\frac{n-2}{\varepsilon^{n+1}} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = -\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}.$$

Dále podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje  $\boldsymbol{\xi} \in S_{\mathbf{x}}^\varepsilon$ , že

$$\begin{aligned} \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS &= u(\boldsymbol{\xi}) \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS = -u(\boldsymbol{\xi}) \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} dS = -u(\boldsymbol{\xi}) \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} \sigma_n \varepsilon^{n-1} = \\ &= -(n-2) \sigma_n u(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned}$$

takže

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS = -(n-2) \sigma_n u(\mathbf{x}).$$

Poněvadž  $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$  je spojitá na  $S_{\mathbf{x}}^\varepsilon$ , existuje podle 1. Weierstrassovy věty  $K \in \mathbb{R}$  takové, že  $\left| \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right| \leq K$  pro každý bod na  $S_{\mathbf{x}}^\varepsilon$ . Tedy

$$\left| \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS \right| \leq K \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}} dS_{\mathbf{y}} = \frac{K}{\varepsilon^{n-2}} \sigma_n \varepsilon^{n-1} = K \sigma_n \varepsilon,$$

takže

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\mathbf{x}}^\varepsilon} v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS = 0.$$

□

## Důsledky:

1. Je-li funkce  $u$  navíc harmonická na  $\Omega$ , platí pro každé  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial \Omega} \left( v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dS. \quad (4.8)$$

2. Pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci  $\psi$  s kompaktním nosičem (sr. C.1.1) platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta v(\mathbf{x}, \cdot) dV = -c_n \psi(\mathbf{x}),$$

neboli

$$\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -c_n \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad (4.9)$$

kde  $\delta$  je Diracova distribuce.

**D.:**  $\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  je distribuce, která splňuje

$$\langle \Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \psi(\mathbf{y}) \rangle = \langle v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \Delta \psi(\mathbf{y}) \rangle$$

pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci  $\psi$  s kompaktním nosičem (sr. C.1.6). Buď  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  taková oblast s hladkou hranicí, že  $\text{Supp } \psi \subseteq \Omega$ .

Pak pro  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  je  $\psi(\mathbf{y}) = 0 = \frac{\partial \psi(\mathbf{y})}{\partial \nu}$  a tedy s využitím předchozí věty dostaneme

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \psi(\mathbf{y}) \rangle &= \langle v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \Delta \psi(\mathbf{y}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta \psi dV = \int_{\Omega} v(\mathbf{x}, \cdot) \Delta \psi dV = \\ &= -c_n \left( \psi(\mathbf{x}) - \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \left( v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} \right) dS \right) = -c_n \psi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

### 4.3.5 Vlastnosti harmonických funkcí

Buď  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\partial\Omega$ ,  $u$  harmonická funkce se spojitými druhými parciálními derivacemi na  $\bar{\Omega}$ . Pak platí

1.

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0.$$

**D.:** Ve druhém Greenově vzorci stačí položit  $v \equiv 1$ . □

2. Věta o střední hodnotě

Buď  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $S_{\mathbf{x}}^a$  sféra se středem  $\mathbf{x}$  a poloměrem  $a$  taková, že  $S_{\mathbf{x}}^a \subseteq \Omega$ . Pak

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi a} \int_{S_{\mathbf{x}}^a} u dS, & \text{pro } n = 2, \\ u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_{\mathbf{x}}^a} u dS, & \text{pro } n = 3, \\ u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sigma_n a^{n-1}} \int_{S_{\mathbf{x}}^a} u dS, & \text{pro } n > 3, \end{aligned}$$

kde  $\sigma_n$  je číslo zavedené v 4.3.4.

**D.:** Důkaz provedeme pro  $n \geq 3$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Je  $\nu_i = \frac{1}{a}(y_i - x_i)$ . Pro  $\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}^a$  platí  $v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}} = \frac{1}{a^{n-2}}$ , takže podle 1. je

$$\int_{S_{\mathbf{x}}^a} v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \frac{1}{a^{n-1}} \int_{S_{\mathbf{x}}^a} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0.$$

Dále pro  $\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}^a$  je

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \nu_i = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \frac{(2-n)(y_i - x_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} (y_i - x_i) = \frac{2-n}{a|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}} = \frac{2-n}{a^{n-1}},$$

takže

$$\int_{S_{\mathbf{x}}^a} u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS = \frac{2-n}{a^{n-1}} \int_{S_{\mathbf{x}}^a} u dS.$$

Podle (4.8) je

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{S_{\mathbf{x}}^a} \left( v(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dS = \frac{n-2}{c_n a^{n-1}} \int_{S_{\mathbf{x}}^a} u dS = \frac{1}{\sigma_n a^{n-1}} \int_{S_{\mathbf{x}}^a} u dS.$$

□

### 3. Princip maxima

Je-li harmonická funkce  $u$  nekonstantní na oblasti  $\Omega$ , pak nabývá své největší a nejmenší hodnoty na hranici  $\partial\Omega$ , tj. pro každé  $\mathbf{x} \in \Omega$  platí

$$\min\{u(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \partial\Omega\} < u(\mathbf{x}) < \max\{u(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \partial\Omega\}.$$

**D.:** Plyne z předchozího tvrzení. □

## 4.4 Metoda potenciálů

V celém oddílu bude  $v(\mathbf{x}, \cdot)$  označovat fundamentální harmonickou funkci se singularitou v  $\mathbf{x}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  oblast s hladkou hranicí  $\partial\Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}$  derivaci ve směru jednotkového vektoru vnější normály k  $\partial\Omega$ ,  $c_n$  číslo zavedené v 4.3.4.

Nejprve provedeme heuristickou úvahu. Představme si, že v omezené oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  je rozložen elektrický náboj, jeho hustotu v bodě  $\mathbf{y} \in \Omega$  označíme  $\rho(\mathbf{y})$ . Náboj objemového elementu  $dV_{\mathbf{y}}$  v okolí bodu  $\mathbf{y}$  tedy je  $\rho(\mathbf{y})dV_{\mathbf{y}}$  a potenciál tohoto elementu v bodě  $\mathbf{x} \notin \Omega$  je podle (4.6) a (4.4) roven

$$d\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{y})dV_{\mathbf{y}}}{4\pi} v(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{c_3} \rho(\mathbf{y})v(\mathbf{x}, \mathbf{y})dV_{\mathbf{y}}$$

(až na multiplikatívni konstantu vyjadřující permitivitu prostředí). Celkový potenciál náboje rozloženého v oblasti  $\Omega$  tedy je

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_3} \int_{\Omega} \rho v(\mathbf{x}, \cdot) dV.$$

Pokud by byl elektrický náboj rozložen pouze na hranici oblasti  $\Omega$  (na povrchu tělesa) a v bodě  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  by měl plošnou hustotu  $\mu = \mu(\mathbf{y})$  (tj. náboj plošného elementu  $dS_{\mathbf{y}}$  v okolí bodu  $\mathbf{y}$  by byl  $\mu(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}$ ), jeho potenciál v bodě  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$  by se rovnal

$$\varphi_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_3} \int_{\partial\Omega} \mu v(\mathbf{x}, \cdot) dS.$$

Uvažujme dále dipóly rozmístěné na hranici oblasti  $\Omega$  s hustotou  $\lambda$  a orientované ve směru vnější normály, tj. dipólový moment plošného elementu  $dS_{\mathbf{y}}$  v okolí bodu  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  má velikost  $N_{\mathbf{y}} = \lambda(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}$  a orientaci  $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{y}}$ . Potenciál plošného elementu  $dS_{\mathbf{y}}$  v bodě  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$  je podle (4.7) a (4.4) roven

$$d\varphi_{III}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \lambda(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} \frac{\partial v(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{y}}} = \frac{1}{c_3} \lambda(\mathbf{y}) \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{y}}} dS_{\mathbf{y}}.$$

V bodě  $\mathbf{x}$  je tedy celkový potenciál hranice oblasti roven plošnému integrálu

$$\varphi_{III}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_3} \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS.$$

Tento výraz lze interpretovat jako elektrostatický potenciál tenké nevodivé plochy (povrchu tělesa), na jejíž vnější straně je rozmístěn elektrický náboj a na vnitřní straně je stejně rozmístěn stejně velký náboj opačného znaménka.

#### 4.4.1 Objemový potenciál

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je ohraničená a  $\varrho : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce.

Funkce  $\varphi_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  vztahem

$$\varphi_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho v(\mathbf{x}, \cdot) dV$$

se nazývá *objemový potenciál*.

- Je-li funkce  $\varrho$  spojitá na  $\bar{\Omega}$ , pak  $\varphi_I$  je harmonickou funkcí na  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  pro  $n \geq 3$ . Je-li  $n = 2$  a funkce  $\varrho$  je navíc nezáporná, je  $\varphi_I$  harmonickou funkcí na  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ .

**D.:** Z toho, že funkce  $f$  je spojitá na kompaktní množině  $\bar{\Omega}$  plyne, že následující výpočet je korektní.

$$\Delta \varphi_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}} (\varrho v(\mathbf{x}, \cdot)) dV = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho \Delta_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}, \cdot) dV = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} = 0.$$

Předposlední rovnost plyne z (4.5), poslední z toho, že pro  $\mathbf{x} \notin \bar{\Omega}$  je  $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  harmonická v každém  $\mathbf{y} \in \Omega$ .

Dále pro  $n \geq 3$  platí

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^{n-2} \varphi_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^{n-2} v(\mathbf{x}, \cdot) dV = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho dV < \infty.$$

Je-li  $n = 2$  a  $\varrho \geq 0$  na  $\Omega$ , pak

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \varphi_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \varrho \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}, \cdot) dV = -\infty < \infty.$$

□

- Má-li funkce  $\varrho$  spojitě parciální derivace prvního řádu na  $\Omega$  a je spojitá na  $\bar{\Omega}$ , pak  $\varphi_I$  má spojitě parciální derivace druhého řádu na  $\Omega$  a platí

$$\Delta \varphi_I = -\varrho.$$

**D.:** Pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  dostaneme s využitím (4.5) a (4.9)

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_I(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}} (\varrho v(\mathbf{x}, \cdot)) dV = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho \Delta_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}, \cdot) dV = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho \Delta_{\mathbf{x}} v(\cdot, \mathbf{x}) dV = \\ &= \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} v(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dV_{\mathbf{y}} = -\frac{1}{c_n} \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{y}) c_n \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{y}} = -\varrho(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

#### 4.4.2 Řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde  $\Omega$  je ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí.

Řešení hledáme ve tvaru  $u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ , kde

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega} f(\xi_1, \dots, \xi_n) v(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

a  $w$  je řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici

$$\begin{aligned} \Delta w(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ w(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

### 4.4.3 Plošné potenciály

Buďte  $\mu, \lambda : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funkce takové, že v případě neohraničenosti  $\partial\Omega$  platí

$$\lim_{\mathbf{x} \in \partial\Omega, |\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^{n-2} \mu(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{\mathbf{x} \in \partial\Omega, |\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^{n-2} \lambda(\mathbf{x}) = 0.$$

Funkce  $\varphi_{II} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  vztahem

$$\varphi_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \mu v(\mathbf{x}, \cdot) dS$$

se nazývá *potenciál jednoduché vrstvy*.

Funkce  $\varphi_{III} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná pro každé  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  vztahem

$$\varphi_{III}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} dS$$

se nazývá *potenciál dvojvrstvy*.

- Jsou-li funkce  $\mu, \lambda$  spojité na  $\partial\Omega$ , pak funkce  $\varphi_{II}$  a  $\varphi_{III}$  jsou harmonické na  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ .

**D.:** Důkaz je analogií důkazu analogického tvrzení pro objemový potenciál.  $\square$

Každý z integrálů  $\varphi_{II}, \varphi_{III}$  určuje vlastně dvě funkce. Jednu funkci harmonickou na  $\Omega$  a druhou harmonickou na  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ .

- Buď  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  a  $\psi$  funkce definovaná v okolí bodu  $\mathbf{x}_0$ . Označme

$$[\psi(\mathbf{x}_0)]_I = \lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}), \quad [\psi(\mathbf{x}_0)]_E = \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}),$$

za předpokladu, že tyto limity existují.

Pro každý bod  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  platí

$$\left[ \frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu} \right]_I = \frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu} + \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}), \quad \left[ \frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu} \right]_E = \frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu} - \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}), \quad (4.10)$$

$$[\varphi_{III}(\mathbf{x})]_I = \varphi_{III}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{x}), \quad [\varphi_{III}(\mathbf{x})]_E = \varphi_{III}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{x}). \quad (4.11)$$

**D.:** A. N. Tichonov, A. A. Samarskij: *Rovnice matematické fyziky*, Praha 1955, str. 395–402.  $\square$

Derivace potenciálu jednoduché vrstvy ve směru vnější normály má tedy na  $\partial\Omega$  nespojitost prvního druhu se skokem velikosti

$$\left[ \frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu} \right]_E - \left[ \frac{\partial \varphi_{II}(\mathbf{x})}{\partial \nu} \right]_I = -\mu(\mathbf{x}),$$

potenciál dvojvrstvy má na  $\partial\Omega$  nespojitost prvního druhu se skokem velikosti

$$[\varphi_{III}(\mathbf{x})]_E - [\varphi_{III}(\mathbf{x})]_I = \lambda(\mathbf{x}).$$

Podle 4.3.4 lze každou dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci  $u$  vyjádřit jako součet potenciálu objemového, jednoduché vrstvy a dvojvrstvy, přičemž

$$\varrho = -\Delta u, \quad \mu = \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad \lambda = -u.$$

Proto se 4.3.4 někdy nazývá věta o třech potenciálech.



#### 4.4.4 Řešení okrajových úloh pro Laplaceovu rovnici

Budeme řešit některou z rovnic

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.12)$$

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \quad (4.13)$$

s některou z okrajových podmínek

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (4.15)$$

Úloha  $(4.12), (4.14)$  se nazývá *vnitřní Dirichletova úloha*,  
 $(4.13), (4.14)$  se nazývá *vnější Dirichletova úloha*,  
 $(4.12), (4.15)$  se nazývá *vnitřní Neumannova úloha*,  
 $(4.13), (4.15)$  se nazývá *vnější Neumannova úloha*.

**Řešení Dirichletovy úlohy** hledáme ve tvaru potenciálu dvojvrstvy

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} dS,$$

kde  $\lambda$  je zatím neurčená funkce. Pro každé  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  je podle (4.11)

$$[u(\mathbf{x})]_I + \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) = [u(\mathbf{x})]_E - \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{x}).$$

Označme

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \nu(\mathbf{s})} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial s_i} \nu_i(\mathbf{s}).$$

Pak

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \lambda K(\mathbf{x}, \cdot) dS.$$

Při řešení vnitřní úlohy musí být  $[u(\mathbf{x})]_I = f(\mathbf{x})$ , tedy funkce  $\lambda$  musí splňovat integrální rovnici

$$-\frac{1}{2}\lambda(\mathbf{x}) + \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \lambda K(\mathbf{x}, \cdot) dS = f(\mathbf{x}),$$

při řešení vnější úlohy musí být  $[u(\mathbf{x})]_E = f(\mathbf{x})$ , tedy funkce  $\lambda$  musí splňovat integrální rovnici

$$\frac{1}{2}\lambda(\mathbf{x}) + \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \lambda K(\mathbf{x}, \cdot) dS = f(\mathbf{x}).$$

**Řešení Neumannovy úlohy** hledáme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \mu v(\mathbf{x}, \cdot) dS,$$

kde  $\mu$  je zatím neurčená funkce. Pro každé  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  je podle (4.10)

$$\left[ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} \right]_I - \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} = \left[ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} \right]_E + \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}).$$

Platí

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} = \frac{1}{c_n} \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial v(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu(\mathbf{x})} dS.$$

Označme

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial x_i} \nu_i(\mathbf{x}).$$

Pak

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{c_n} \int_{\partial \Omega} \mu L(\mathbf{x}, \cdot) dS.$$

Při řešení vnitřní úlohy musí být  $\left[ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right]_I = f(\mathbf{x})$ , tedy funkce  $\mu$  musí splňovat integrální rovnici

$$\frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{c_n} \int_{\partial \Omega} \mu L(\mathbf{x}, \cdot) dS = f(\mathbf{x}),$$

při řešení vnější úlohy musí být  $\left[ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right]_E = f(\mathbf{x})$ , tedy funkce  $\mu$  musí splňovat integrální rovnici

$$-\frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{c_n} \int_{\partial \Omega} \mu L(\mathbf{x}, \cdot) dS = f(\mathbf{x}).$$

Výrazy  $K(\cdot, \cdot)$  a  $L(\cdot, \cdot)$  nazýváme *jádro* příslušné integrální rovnice.

### Příklady:

- Dirichletova úloha na polorovině

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0, \quad (4.16)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

V tomto případě je

$$v(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2} \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2),$$

$$\frac{\partial v(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \frac{\partial v(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{y - \eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

$$\boldsymbol{\nu}(\xi, \eta) = (0, -1), \text{ pro } \eta = 0, \quad K(x, y, \xi, \eta) = \frac{\eta - y}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Jádro integrální rovnice je  $K(x, 0, \xi, 0) = 0$ , takže funkce  $\lambda = \lambda(x)$  musí splňovat rovnici

$$-\frac{1}{2} \lambda(x) = f(x),$$

tedy  $\lambda(x) = -2f(x)$  a řešení dané úlohy je

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (4.18)$$

- Neumannova úloha na polorovině

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0,$$

$$-u_y(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

V tomto případě je

$$v(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2} \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2), \quad \boldsymbol{\nu}(x, y) = (0, -1), \text{ pro } y = 0,$$

takže

$$L(x, y, \xi, \eta) = \frac{\partial v(x, y, \xi, \eta)}{\partial \boldsymbol{\nu}(x, y)} = \frac{y - \eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad L(x, 0, \xi, 0) = 0.$$

Funkce  $\mu$  tedy splňuje rovnici

$$\frac{1}{2}\mu(x) = f(x),$$

tj.  $\mu(x) = 2f(x)$  a řešení dané úlohy je

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2f(\xi) \left( -\frac{1}{2} \ln((x - \xi)^2 - (y - 0)^2) \right) d\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \ln((x - \xi)^2 + y^2) d\xi.$$

• Dirichletova úloha na kruhu

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, & x^2 + y^2 &< R^2, \\ u(x, y) &= f(x, y), & x^2 + y^2 &= R^2. \end{aligned}$$

V tomto případě je

$$\begin{aligned} v(x, y, \xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2), \\ \frac{\partial v(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, & \frac{\partial v(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{y - \eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \\ \Omega = K_{(0,0)}^R &= \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 < R^2\}, & \partial\Omega = S_{(0,0)}^R &= \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = R^2\}, \\ \nu(\xi, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}(\xi, \eta) = \frac{1}{R}(\xi, \eta), & \frac{\partial v(x, y, \xi, \eta)}{\partial \nu} &= \frac{x\xi + y\eta - \xi^2 - \eta^2}{R((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)}. \end{aligned}$$

Řešení úlohy hledáme ve tvaru potenciálu dvojvrstvy

$$u(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \lambda(\xi, \eta) \frac{x\xi + y\eta - \xi^2 - \eta^2}{R((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)} dS_{(\xi, \eta)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(\sigma) \frac{xR \cos \sigma + yR \sin \sigma - R^2}{x^2 + y^2 + R^2 - 2R(x \cos \sigma + y \sin \sigma)} d\sigma.$$

Funkci  $u$  lze vyjádřit také v polárních souřadnicích

$$u(r, \varphi) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(\sigma) \frac{r \cos \varphi \cos \sigma + r \sin \varphi \sin \sigma - R}{r^2 + R^2 - 2Rr(\cos \varphi \cos \sigma + \sin \varphi \sin \sigma)} d\sigma = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(\sigma) \frac{r \cos(\varphi - \sigma) - R}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} d\sigma.$$

Podle (4.11) musí funkce  $\lambda$  splňovat integrální rovnici

$$u(R, \varphi) + \frac{1}{2}\lambda(\varphi) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(\sigma) \frac{R \cos(\varphi - \sigma) - R}{R^2 + R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} d\sigma.$$

Při označení  $g(\varphi) = f(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$  dostaneme

$$g(\varphi) + \frac{1}{2}\lambda(\varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(\sigma) d\sigma. \quad (4.19)$$

Výraz na pravé straně nezávisí na  $\varphi$ , takže derivováním podle  $\varphi$  dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici

$$g'(\varphi) + \frac{1}{2}\lambda'(\varphi) = 0,$$

jejíž řešení je  $\lambda(\varphi) = C - 2g(\varphi)$ . Hodnotu integrační konstanty  $C$  zjistíme dosazením do původní integrální rovnice (4.19):

$$g(\varphi) + \frac{C}{2} - g(\varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (C - 2g(\sigma)) d\sigma,$$

tedy  $C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s) ds$  a řešení dané úlohy je

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s) ds - 2g(\sigma) \right) \frac{r \cos(\varphi - \sigma) - R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} d\sigma = \\ &= \frac{R}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} g(s) ds \int_0^{2\pi} \frac{r \cos(\varphi - \sigma) - R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} d\sigma - \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma) \frac{r \cos(\varphi - \sigma) - R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} d\sigma. \end{aligned}$$

Druhý integrál v prvním členu pravé strany upravíme:

$$\begin{aligned} R \int_0^{2\pi} \frac{r \cos(\varphi - \sigma) - R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} d\sigma &= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \frac{Rr \cos \varphi \cos \sigma + Rr \sin \varphi \sin \sigma - R^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi \cos \sigma - 2Rr \sin \varphi \sin \sigma} R d\sigma = \\ &= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \varphi R \cos \sigma + r \sin \varphi R \sin \sigma - R^2}{(r \cos \varphi - R \cos \sigma)^2 + (r \sin \varphi - R \sin \sigma)^2} R d\sigma = \\ &= \frac{1}{R} \int_{\partial\Omega} \frac{x\xi + y\eta - R^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} dS_{(\xi, \eta)} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v(x, y, \xi, \eta)}{\partial \nu} dS_{(\xi, \eta)}. \end{aligned}$$

V prvním Greenově vzorci položíme  $u \equiv 1$  a využijeme vlastnost (4.9); tak dostaneme hodnotu posledního integrálu

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v(x, y, \xi, \eta)}{\partial \nu} dS_{(\xi, \eta)} = \int_{\Omega} \Delta v(x, y, \xi, \eta) dV_{(\xi, \eta)} = -2\pi.$$

Řešení dané úlohy tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{4\pi^2} (-2\pi) \int_0^{2\pi} g(s) ds - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma) \frac{Rr \cos(\varphi - \sigma) - R^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} d\sigma = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma) \left( \frac{1}{2} + \frac{Rr \cos(\varphi - \sigma) - R^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} \right) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \sigma)} d\sigma, \end{aligned}$$

což je Poissonův integrál (3.53).

## 4.5 Greenova funkce Laplaceova operátoru

Buď  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  oblast s hladkou hranicí  $\partial\Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  derivace ve směru vnější normály k  $\partial\Omega$ .

Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou typu  $(\alpha, \beta)$  je funkce  $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  definovaná na  $\Omega \times \overline{\Omega}$ , pro níž platí

- (i)  $G(\mathbf{x}, \cdot)$  je harmonická na  $\Omega \setminus \{\mathbf{x}\}$ ;
- (ii) pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci  $\psi$  s kompaktním nosičem (sr. C.1.1) platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G(\mathbf{x}, \cdot) dV = \psi(\mathbf{x}),$$

neboli

$$\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

kde  $\delta$  je Diracova distribuce;

(iii) pro každé  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  splňuje podmínku

$$\alpha \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} + \beta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

**Lemma:** Necht  $G_k(\mathbf{x}, \cdot)$  je pro každé  $k \in \mathbb{N}$  řešením úlohy

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{y}} G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= d_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega, \\ \alpha \frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} + \beta G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, & \mathbf{y} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde

$$d_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{y} \notin K_{\mathbf{x}}^{1/k} \\ \omega_k, & \mathbf{y} \in K_{\mathbf{x}}^{1/k} \end{cases},$$

přičemž  $K_{\mathbf{x}}^{1/k} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \frac{1}{k} \right\}$  je koule se středem  $\mathbf{x}$  a poloměrem  $\frac{1}{k}$ ,  $\omega_k$  je převrácená hodnota  $n$ -rozměrné míry této koule, tedy  $\int_{K_{\mathbf{x}}^{1/k}} \omega_k dV = 1$ .

Pak Greenova funkce Laplaceova operátoru s počáteční podmínkou typu  $(\alpha, \beta)$  je

$$G(\mathbf{x}, \cdot) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k(\mathbf{x}, \cdot).$$

**D.:** Důkaz pouze naznačíme. Nebudeme dokazovat, že všechny použité záměny limitních operací jsou korektní.

(i) Existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$ , že pro každé  $k \geq k_0$  je funkce  $G_k(\mathbf{x}, \cdot)$  harmonická na oblasti  $\Omega \setminus \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \frac{1}{k} \right\}$ .

(ii) Platí

$$\begin{aligned} \Delta G(\mathbf{x}, \cdot) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta G_k(\mathbf{x}, \cdot), \\ \int_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G(\mathbf{x}, \cdot) dV &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G_k(\mathbf{x}, \cdot) dV = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi d_k(\mathbf{x}, \cdot) dV = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}_k) \int_{K_{\mathbf{x}}^{1/k}} \omega_k dV = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}_k), \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{x}_k \in K_{\mathbf{x}}^{1/k}$  je číslo z věty o střední hodnotě integrálního počtu. Ze spojitosti funkce  $\psi$  plyne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}_k) = \psi(\mathbf{x}).$$

Odtud již plyne platnost podmínky.

(iii) Je zřejmé.

□

#### 4.5.1 Řešení okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.20)$$

$$\alpha \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} + \beta u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (4.21)$$

Nechť  $G_k$  jsou funkce z předchozího lemma. Podle druhého Greenova vzorce je

$$\int_{\Omega} (u \Delta G_k(\mathbf{x}, \cdot) - G_k(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u) dV = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G_k(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u \Delta G_k(\mathbf{x}, \cdot) dV &= \int_{\Omega} u \Delta G(\mathbf{x}, \cdot) dV = u(\mathbf{x}), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G_k(\mathbf{x}, \cdot) \Delta u dV &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \cdot) f dV, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G_k(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS &= \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial G(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS. \end{aligned}$$

Pro každé  $\mathbf{x} \in \Omega$  tedy řešení úlohy (4.20), (4.21) splňuje rovnici

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \cdot) f dV + \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial G(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Speciální případy podmínek (4.21):

- $\alpha = 0, \beta = 1$  (Dirichletova úloha)

Pro  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  je  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a  $u(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$  podle (4.21). Tedy pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  je

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f G(\mathbf{x}, \cdot) dV + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial G(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} dS.$$

- $\alpha = 1, \beta = 0$  (Neumannova úloha)

Pro  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  je  $\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} = 0$  podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a  $\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} = g(\mathbf{x})$  podle (4.21). Tedy pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  je

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f G(\mathbf{x}, \cdot) dV - \int_{\partial\Omega} g G(\mathbf{x}, \cdot) dS.$$

- $\alpha \neq 0 \neq \beta$  (Newtonova úloha)

Pro  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  je  $\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} = -\frac{\beta}{\alpha} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a

$\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} = \frac{1}{\alpha} (g(\mathbf{y}) - \beta u(\mathbf{y}))$  podle (4.21), tedy

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial G(\mathbf{x}, \cdot)}{\partial \nu} - G(\mathbf{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS &= \int_{\partial\Omega} \left( -\frac{\beta}{\alpha} u G(\mathbf{x}, \cdot) - \frac{1}{\alpha} (g - \beta u) G(\mathbf{x}, \cdot) \right) dS = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_{\partial\Omega} g G(\mathbf{x}, \cdot) dS. \end{aligned}$$

Pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  je tedy

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f G(\mathbf{x}, \cdot) dV - \frac{1}{\alpha} \int_{\partial\Omega} g G(\mathbf{x}, \cdot) dS.$$

## 4.5.2 Vyjádření Greenovy funkce

Nechť  $h = h(\mathbf{y})$  je řešením úlohy

$$\Delta h(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Omega, \quad (4.22)$$

$$\alpha \frac{\partial h(\mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} + \beta h(\mathbf{y}) = \frac{\alpha}{c_n} \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} + \frac{\beta}{c_n} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial\Omega, \quad (4.23)$$

kde  $c_n$  je číslo z 4.3.4 a  $v(\mathbf{x}, \cdot)$  je fundamentální harmonická funkce se singularitou v  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Potom funkce  $G(\mathbf{x}, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná vztahem

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{c_n} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + h(\mathbf{y})$$

je Greenovou funkcí Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou typu  $(\alpha, \beta)$ .

**D.:** Podmínky (i) a (iii) jsou zřejmé, podmínka (ii) plyne z (4.9).  $\square$

## 4.5.3 Řešení úlohy (4.22), (4.23) ve speciálním případě

Nechť oblast  $\Omega$  má vlastnost: Ke každému  $\mathbf{x} \in \Omega$  existuje  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  takové, že pro všechna  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  podíl

$$\frac{v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{v(\mathbf{x}', \mathbf{y})} = \gamma(\mathbf{x})$$

nezávisí na  $\mathbf{y}$ . Nechť dále  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ .

V tomto případě je funkce

$$h(\mathbf{y}) = \frac{1}{c_n} \gamma(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}', \mathbf{y})$$

řešením úlohy (4.22), (4.23) pro libovolné  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**D.:** Poněvadž  $\mathbf{x}' \notin \Omega$ , je  $\Delta_{\mathbf{y}} h(\mathbf{y}) = \Delta_{\mathbf{y}} \left( \frac{1}{c_n} \gamma(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \right) = \frac{1}{c_n} \gamma(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = 0$  pro každé  $\mathbf{y} \in \Omega$ .

Pro  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  je

$$h(\mathbf{y}) = \frac{1}{c_n} \gamma(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \frac{1}{c_n} \frac{v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{v(\mathbf{x}', \mathbf{y})} v(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \frac{1}{c_n} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

$\square$

## 4.5.4 Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na poloprostoru

Nechť  $\Omega = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  je poloprostor.

Pro  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$  položíme  $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$  — symetrie podle nadroviny  $x_n = 0$ . Pak  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ . Buď  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \partial\Omega$ .

Pro  $n = 2$  je

$$\frac{v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{v(\mathbf{x}', \mathbf{y})} = \frac{\ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\ln |\mathbf{x}' - \mathbf{y}|} = \frac{\ln ((x_1 - y_1)^2 + x_2^2)}{\ln ((x_1 - y_1)^2 + (-x_2)^2)} = 1,$$

pro  $n \geq 3$  je

$$\frac{v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{v(\mathbf{x}', \mathbf{y})} = \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|^{n-2}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}} = \left( \frac{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (-x_n)^2}{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + x_n^2} \right)^{(n-2)/2} = 1.$$

Tedy  $\gamma \equiv 1$  a Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$$

je

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{c_n} (v(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - v(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Jednotkový vektor vnější normály k  $\partial\Omega$  je  $\nu = (0, \dots, 0, -1)$ , takže

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu} = -\frac{\partial G(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_n}.$$

• Řešení úlohy

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= f(x, y), & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned}(x, y)' &= (x, -y), \\ c_n &= 2\pi, \\ v(x, y, \xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2), \\ G(x, y, \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{2} \ln((x - \xi)^2 + (-y - \eta)^2) + \frac{1}{2} \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}, \\ \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4\pi} \frac{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 - 2(y - \eta)((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2) - 2(y + \eta)((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2)^2} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{2y(x - \xi)^2 + 2y(y^2 - \eta^2)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2)} = \\ &= -\frac{y}{\pi} \frac{(x - \xi)^2 + (y^2 - \eta^2)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2)}, \\ \frac{\partial G(x, y, \xi, 0)}{\partial \eta} &= -\frac{y}{\pi} \frac{(x - \xi)^2 + y^2}{((x - \xi)^2 + y^2)^2} = -\frac{y}{\pi} \frac{1}{(x - \xi)^2 + y^2},\end{aligned}$$

takže řešení dané úlohy je

$$u(x, y) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\xi \in \mathbb{R}, \eta > 0} f(\xi, \eta) \ln \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} d\xi d\eta + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2};$$

zvláštním případem je řešení (4.18) úlohy (4.16), (4.17).

• Řešení úlohy

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y, z) &= f(x, y, z), & x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z > 0, \\ u(x, y, 0) &= g(x, y), & x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, y, -z), \\ c_n &= 4\pi, \\ v(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}, \\ G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (-z - \zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \right), \\ \frac{\partial G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{-2(z - \zeta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} - \frac{2(z + \zeta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2)^{3/2}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{z - \zeta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} + \frac{z + \zeta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2)^{3/2}} \right), \\ \frac{\partial G(x, y, z, \xi, \eta, 0)}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{z}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}},\end{aligned}$$



takže řešení dané úlohy je

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\xi \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}, \zeta > 0} f(\xi, \eta, \zeta) \left( \frac{1}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2}} \right) d\xi d\eta d\zeta + \\ &\quad + \frac{z}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} g(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

#### 4.5.5 Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na kouli

Nechť  $\Omega = K_0^R = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < R\}$  je otevřená koule.

Pro  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K_0^R$  položíme  $\mathbf{x}' = \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x}$  — kulová inverze.

Buď  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S_0^R = \partial K_0^R$ , tedy  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = R^2$ . Pak je

$$\begin{aligned} \left| \frac{R}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} - \frac{|\mathbf{x}|}{R} \mathbf{y} \right|^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{R}{|\mathbf{x}|} x_i - \frac{|\mathbf{x}|}{R} y_i \right)^2 = \left( \frac{R}{|\mathbf{x}|} \right)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \left( \frac{|\mathbf{x}|}{R} \right)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 = \\ &= R^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + |\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2, \end{aligned}$$

tedy

$$\left| \frac{R}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} - \frac{|\mathbf{x}|}{R} \mathbf{y} \right| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Pro  $n \geq 3$  s využitím předchozího vztahu dostaneme

$$\frac{v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{v(\mathbf{x}', \mathbf{y})} = \left| \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{y}}{\mathbf{x} - \mathbf{y}} \right|^{n-2} = \left| \frac{\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x} - \mathbf{y}}{\mathbf{x} - \mathbf{y}} \right|^{n-2} = \left( \frac{R}{|\mathbf{x}|} \right)^{n-2} \left| \frac{\frac{R}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} - \frac{|\mathbf{x}|}{R} \mathbf{y}}{\mathbf{x} - \mathbf{y}} \right|^{n-2} = \left( \frac{R}{|\mathbf{x}|} \right)^{n-2},$$

takže  $\gamma(\mathbf{x}) = \left( \frac{R}{|\mathbf{x}|} \right)^{n-2}$ , což znamená, že

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{c_n} \left( \left( \frac{R}{|\mathbf{x}|} \right)^{n-2} v \left( \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) - v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \quad (4.24)$$

je Greenovou funkcí Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \pm \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2}) = 0.$$

Jednotkový vektor vnější normály k  $S_0^R$  v bodě  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  je  $\frac{1}{R}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} = (2-n) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-n} \frac{-2(x_i - y_i)}{2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{(n-2)(x_i - y_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}, \\ \frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} &= \frac{n-2}{R|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) y_i = \frac{n-2}{R|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - R^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v\left(\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}, \mathbf{y}\right)}{\partial \nu(\mathbf{y})} &= \frac{n-2}{R\left|\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x} - \mathbf{y}\right|^n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} x_i y_i - R^2\right) = \\ &= \frac{n-2}{\frac{R^{n+1}}{|\mathbf{x}|^n} \left|\frac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x} - \frac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}\right|^n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} x_i y_i - R^2\right) = \left(\frac{|\mathbf{x}|}{R}\right)^n \frac{n-2}{R|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} x_i y_i - R^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} &= \frac{1}{c_n} \frac{n-2}{R|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \left(\frac{|\mathbf{x}|^2}{R^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} x_i y_i - R^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - R^2\right)\right) = \\ &= \frac{n-2}{c_n R |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} (R^2 - |\mathbf{x}|^2). \end{aligned}$$

Poněvadž  $c_n = (n-2)\sigma_n$ , kde  $\sigma_n$  je  $(n-1)$ -rozměrná míra jednotkové sféry v  $\mathbb{R}^n$ , platí

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} = \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{\sigma_n R} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}.$$

Označíme-li  $|S^R|$  míru sféry o poloměru  $R$ , je  $|S^R| = \sigma_n R^{n-1}$ . Řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n), & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &< R^2, \\ u(x_1, x_2, \dots, x_n) &= g(x_1, x_2, \dots, x_n), & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= R^2 \end{aligned}$$

lze tedy zapsat ve tvaru

$$u(\mathbf{x}) = \int_{K_0^R} f(\cdot) G(\mathbf{x}, \cdot) dV + R^{n-2} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{|S^R|} \int_{S_0^R} g(\cdot) \frac{dS}{|\mathbf{x} - \cdot|^n},$$

kde funkce  $G$  je dána vztahem (4.24). Pro  $f \equiv 0$  dostaneme *Poissonův vzorec*

$$u(\mathbf{x}) = R^{n-2} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{|S^R|} \int_{S_0^R} g(\cdot) \frac{dS}{|\mathbf{x} - \cdot|^n}.$$

Zejména pro  $n = 3$  je

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{4\pi R} \int_{S_{(0,0,0)}^R} g(\cdot) \frac{dS}{|\mathbf{x} - \cdot|^3}.$$

#### 4.5.6 Greenova funkce pro kruh

Funkce

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{\frac{R}{|\mathbf{x}|}}{\left|\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x} - \mathbf{y}\right|} - \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\left|\frac{R}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x} - \frac{|\mathbf{x}|}{R}\mathbf{y}\right|}$$

je Greenovou funkcí Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u\left(x, \sqrt{R^2 - x}\right) = 0.$$

D.:

$$(i) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{R}{|\mathbf{x}|} + v \left( \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) - v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right).$$

Pro  $\mathbf{y} \in K_0^R \setminus \{\mathbf{x}\}$  je  $\Delta_{\mathbf{y}} \ln \frac{R}{|\mathbf{x}|} = 0$ ,  $\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

Je-li  $\mathbf{x} \in K_0^R$ , pak  $\frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x} \notin K_0^R$ , a tedy  $\Delta_{\mathbf{y}} v \left( \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) = 0$ .

Je-li  $\mathbf{x} \in \partial K_0^R$ , pak  $|\mathbf{x}| = R$  a tedy  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = 0$ .

(ii) Plyne z toho, že  $\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ .

(ii) Analogicky jako v 4.5.5 lze ukázat, že pro  $\mathbf{y} \in \partial K_0^R$  je  $\left| \frac{R}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} - \frac{|\mathbf{x}|}{R} \mathbf{y} \right| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ .

Tedy pro  $\mathbf{y} \in \partial K_0^R$  je

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{\left| \frac{R}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} - \frac{|\mathbf{x}|}{R} \mathbf{y} \right|} - \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 0.$$

□

Řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, & x^2 + y^2 &< R^2, \\ u(x, y) &= g(x, y), & x^2 + y^2 &= R^2. \end{aligned}$$

tedy je

$$u(x, y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi R} \int_{S_{(0,0)}^R} g(\cdot) \frac{dS}{|(x, y) - \cdot|^2},$$

což je Poissonův vzorec (3.54).

## 4.6 Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru

Buď  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\partial\Omega$ . Číslo  $\lambda \in \mathbb{R}$  nazveme *vlastním číslem* a funkci  $v$  definovanou na  $\overline{\Omega}$  nazveme *vlastní funkcí Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor*, je-li  $v \not\equiv 0$  a platí

$$\begin{aligned} \Delta v(\mathbf{x}) &= -\lambda v(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \Omega, \\ v(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Jsou-li  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  vlastní čísla a  $v_1, v_2$  příslušné vlastní funkce Laplaceova operátoru, pak jsou funkce  $v_1, v_2$  ortogonální na  $\Omega$ , tj. platí

$$\int_{\Omega} v_1 v_2 dV = 0.$$

D.: Poněvadž pro  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  je  $v_1(\mathbf{x}) = 0 = v_2(\mathbf{x})$ , dostaneme s využitím druhého Greenova vzorce

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_1 v_2 dV &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{\Omega} (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 v_2 dV = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{\Omega} (\lambda_1 v_1 v_2 - v_1 \lambda_2 v_2) dV = \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{\Omega} (-v_2 \Delta v_1 + v_1 \Delta v_2) dV = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{\partial\Omega} \left( v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \right) dS = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Platí:

- Všechna vlastní čísla Laplaceova operátoru jsou nenulová.

Úloha

$$\begin{aligned}\Delta v(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ v(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega\end{aligned}$$

má totiž podle 4.2 jediné řešení a toto řešení je  $v \equiv 0$ .

- Dirichletova úloha pro Laplaceův operátor má početnou množinu vlastních čísel. Množina příslušných vlastních funkcí tvoří úplnou ortogonální množinu v prostoru funkcí spojitých na  $\overline{\Omega}$ .

Řešení úlohy

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega\end{aligned}\tag{4.26}$$

hledáme ve tvaru

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(\mathbf{x}),$$

kde  $v_n$  jsou vlastní funkce Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor a  $C_n$  jsou reálné konstanty,  $n = 1, 2, \dots$ . Je-li funkce  $f$  integrovatelná ve druhé mocnině ( $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ), pak

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\mathbf{x}), \quad \text{kde } F_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_{\Omega} f v_n dV \text{ a } \|v_n\|^2 = \int_{\Omega} v_n^2 dV.$$

Budte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  vlastní čísla příslušná k vlastním funkcím  $v_1, v_2, \dots$ . Pak je

$$\begin{aligned}\Delta \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\mathbf{x}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Delta v_n(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\mathbf{x}), \\ - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda_n v_n(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Odtud

$$C_n = -\frac{F_n}{\lambda_n} = -\frac{1}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_{\Omega} f v_n dV.$$

Řešení úlohy (4.26) tedy je

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_{\Omega} f v_n dV \right) v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{v_n(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{y})}{\lambda_n \|v_n\|^2} \right) dV.$$

To znamená, že Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

je

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{y})}{\lambda_n \|v_n\|^2},$$

kde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  jsou vlastní čísla a  $v_1, v_2, \dots$  jsou vlastní funkce úlohy (4.25).

## Cvičení

Řešte úlohu

1)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$   
 $u(0, y) = Ay(b - y)$ ,  $u(a, y) = 0$ ,  $0 \leq y \leq b$ ;  $u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}$ ,  $u(x, b) = 0$ ,  $0 \leq x \leq a$

2)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $x^2 + y^2 > a$   
 $u(a \cos \varphi, a \sin \varphi) = 2 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi$ ,  $u$  je ohraničená

3)  $u_{xx} + u_{yy} = c$ ,  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1$ ;  $u(x, y) = 0$ ,  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

4)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$   
 $u(x, 0) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$

**Výsledky:** 1)  $u(x, y) = \frac{B \operatorname{sh} \left( \frac{\pi(b-y)}{a} \right) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\pi b}{a} \right)} + \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b} \right) \sin \left( \frac{(2n+1)\pi y}{b} \right)}{(2n+1)^3 \operatorname{sh} \left( \frac{(2n+1)\pi a}{b} \right)}$

2)  $u(x, y) = \frac{5}{2} + \frac{a^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$  3)  $u(x, y) = \frac{c}{2} \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 \right)$

4)  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \omega(x, y)$ , kde  $\omega(x, y)$  je zorný úhel, pod kterým je z bodu  $(x, y)$  vidět interval  $(a, b)$ .



## Kapitola 5

# Schrödingerova rovnice

Stav částice je popsán rovnicí

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi = -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (5.1)$$

kde  $\Psi = \Psi(t)$  ... vlnová funkce,

$V = V(\mathbf{x})$  ... potenciální energie částice,

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ... Planckova konstanta,

$m$  ... hmotnost částice.

Vlnová funkce popisuje pravděpodobnost výskytu částice v bodě  $\mathbf{x}$  v čase  $t$  tak, že funkce  $|\Psi(t, \mathbf{x})|^2$  je hustotou rozložení pravděpodobnosti výskytu částice v čase  $t$ . To znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(t, \mathbf{x})|^2 dV_{\mathbf{x}} = 1 \quad (5.2)$$

pro  $t \geq 0$ . Zeměna tedy platí, že funkce  $\Psi$  je ohraničená.

Budeme separovat proměnné, tj. řešení rovnice (5.1) budeme hledat ve tvaru  $\Psi(t, \mathbf{x}) = T(t)\psi(\mathbf{x})$ , sr. kap. 3. V takovém případě platí

$$-\frac{\hbar^2}{2m}T\Delta\psi + VT\psi = -i\hbar T'\psi.$$

Tuto rovnost vydělíme součinem  $T\psi$  a dostaneme

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\psi}{\psi} + V = -i\hbar\frac{T'}{T}.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na prostorové proměnné  $\mathbf{x}$ , výraz na pravé straně pouze na čase  $t$ . Musí tedy být oba výrazy rovny nějaké konstantě. Poněvadž výraz na levé straně má rozměr energie, označíme tuto konstantu  $E$ . Dostaneme tak rovnici pro vývoj vlnové funkce v závislosti na energii částice

$$T' = \frac{iE}{\hbar}T \quad (5.3)$$

a *stacionární Schrödingerovu rovnici*

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0, \quad (5.4)$$

kteřou lze přepsat do tvaru úlohy na vlastní hodnoty a vlastní funkce

$$\left(\Delta - \frac{2m}{\hbar^2}V\right)\psi = -\left(\frac{2m}{\hbar^2}E\right)\psi.$$

Základní postulát kvantové mechaniky požaduje, aby naměřené hodnoty energie  $E$  byly takové, že hodnota  $\frac{2m}{\hbar^2}E$  je vlastní hodnotou operátoru  $-\left(\Delta - \frac{2m}{\hbar^2}V\right)$ .

Řešení obyčejné lineární rovnice (5.3) je tvaru

$$T(t) = e^{\frac{iE}{\hbar}t} = \cos \frac{E}{\hbar}t + i \sin \frac{E}{\hbar}t.$$

Pro tuto funkci platí  $|T(t)| = 1$  pro všechna  $t > 0$ . Z normovací podmínky (5.2) tedy dostaneme podmínku pro řešení stacionární Schrödingerovy rovnice

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x})|^2 dV_{\mathbf{x}} = 1. \quad (5.5)$$

## 5.1 Řešení za zjednodušujících předpokladů

### 5.1.1 Kvantový oscilátor

Uvažujme částici, která se může vyskytovat na přímce. Její potenciální energie má klasický tvar energie harmonického oscilátoru

$$V = V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2,$$

takže rovnice (5.4) nabývá tvar

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi = 0. \quad (5.6)$$

V této rovnici nejprve změníme délkové měřítko, tj. zavedeme novou nezávisle proměnnou  $\xi$  vztahem

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\xi.$$

Pak

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2},$$

a rovnice (5.6) přejde na tvar

$$\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\frac{\hbar}{m\omega}\xi^2\psi = 0,$$

který lze upravit na

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \xi^2\psi = -\frac{2E}{\hbar\omega}\psi. \quad (5.7)$$

Integrál  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)|^2 d\xi$  má podle (5.5) konvergovat. Proto budeme řešení rovnice (5.7) hledat ve tvaru

$$\psi(\xi) = H(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

kde  $H$  je polynom. Pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}He^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left((H' - \xi H)e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) = (H'' - H - \xi H' - \xi(H' - \xi H))e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \\ &= (H'' - 2\xi H' + (\xi^2 - 1)H)e^{-\frac{\xi^2}{2}} \end{aligned}$$

a po dosazení do rovnice (5.7) dostaneme

$$(H'' - 2\xi H' + (\xi^2 - 1)H)e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \xi^2 He^{-\frac{\xi^2}{2}} + \frac{2E}{\hbar\omega}He^{-\frac{\xi^2}{2}} = 0,$$

po úpravě

$$H'' - 2\xi H' + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)H = 0.$$



Při označení  $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} - 1$  dostaneme rovnici

$$H'' - 2\xi H' + \lambda H = 0. \quad (5.8)$$

To je diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy, sr. B.3.3. Ta má řešení v oboru polynomů pouze pro  $\lambda = \lambda_n = 2n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Odtud dostaneme, že  $\frac{2E_n}{\hbar\omega} - 1 = 2n$ , neboli že možné hodnoty energie tvoří diskrétní množinu

$$E_n = \frac{2n+1}{2}\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

Získaný výsledek odůvodňuje Planckův výklad interakce záření s látkou za předpokladu, že látku můžeme považovat za soubor oscilátorů, z nichž každý vysílá nebo pohlcuje záření o frekvenci jemu vlastní. Výměna energie je omezena vlastními hodnotami pro dané oscilátory tak, že může probíhat pouze v jednotkách  $\hbar\omega$ .

Pro  $\lambda = 0$ , tedy pro základní stav odpovídají energii  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ , je řešením rovnice polynom nultého stupně, tj. konstanta. Vlnová funkce  $\psi_0$  odpovídající základnímu energetickému stavu je tedy dána vztahem

$$\psi_0(\xi) = ce^{-\frac{\xi^2}{2}}. \quad (5.10)$$

Vrátíme-li se k původní délkové jednotce, dostaneme vlnovou funkci částice v základním stavu

$$\psi_0(x) = ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Hodnotu konstanty  $c$  určíme z podmínky (5.5) kladené na vlnovou funkci, tedy z podmínky

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \right|^2 dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = c^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = c^2 \sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}};$$

využili jsme rovnost (B.21). Odtud dostaneme  $c^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}$ . To znamená, že hustota rozložení pravděpodobnosti výskytu částice v základním stavu je

$$|\psi_0(x)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}.$$

Jedná se o hustotu normálního (Gaussova) rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0 a rozptylem  $\frac{\hbar}{2m\omega}$ .

Hodnoty energie  $E_n$  dosadíme z vyjádření (5.9) do rovnice (5.7) a tu upravíme na operátorový tvar

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2 \right) \psi_n = -(2n+1)\psi_n, \quad (5.11)$$

kde  $\psi_n$  označuje vlastní funkci příslušnou k  $n$ -té vlastní hodnotě. S využitím rovnosti (5.11) dostaneme

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \psi_n &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right) \left( \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} - \xi \psi_n \right) = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} - \psi_n - \xi \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} - \xi^2 \psi_n = \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2 \right) \psi_n - \psi_n = -(2n+1)\psi_n - \psi_n = -2(n+1)\psi_n, \end{aligned} \quad (5.12)$$

jinak řečeno, funkce  $\psi_n$  je vlastní funkcí operátoru  $-\left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right)$  příslušná k vlastní hodnotě  $2(n+1)$ .

Podobně dostaneme

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right) \psi_n = -2n\psi_n, \quad (5.13)$$

takže funkce  $\psi_n$  je vlastní funkcí operátoru  $-\left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right)$  příslušná k vlastní hodnotě  $2n$ .

Na obě strany rovnosti (5.12) aplikujeme lineární operátor  $\left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right)$ . Dostaneme

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \psi_n = -2(n+1) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \psi_n,$$

neboli

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right) \right] \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \psi_n = -2(n+1) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \psi_n,$$

což znamená, že funkce  $\left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \psi_n$  je vlastní funkcí operátoru  $-\left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right)$  příslušnou k vlastní hodnotě  $2(n+1)$ , takže vzhledem k (5.13) je

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \right) \psi_n = \psi_{n+1}. \quad (5.14)$$

Analogicky odvodíme vztah

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right) \psi_n = \psi_{n-1}. \quad (5.15)$$

Vzorec (5.14) lze využít jako rekurentní formuli pro výpočet vlastních funkcí  $\psi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  příslušných k jednotlivým energetickým hladinám  $E_n$  z vlnové funkce (5.10) pro základní stav.

Relace (5.14) a (5.15) lze také interpretovat jako popis přechodu částice z jedné energetické hladiny na sousední. Poněvadž energie se v procesu musí buď objevit nebo zničit, nazývají se operátory na levé straně rovností (5.14) a (5.15) *operátory kreace a anihilace*.

### 5.1.2 Rotátor s vlnou osou

Uvažujme částici o hmotnosti  $\mu$ , která se pohybuje stále v téže vzdálenosti  $r$  od pevného středu, takže její potenciální energii můžeme považovat za nulovou. Budeme hledat charakteristické hodnoty její celkové energie.

Stacionární Schrödingerova rovnice pro rotátor je

$$\Delta \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \psi = 0.$$

Tuto rovnici transformujeme do sférických souřadnic a využijeme toho, že  $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ . Dostaneme (sr. D)

$$\frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (5.16)$$

Řešení této rovnice má být vzhledem k normovací podmínce (5.5) ohraničené a v proměnné  $\varphi$  má být  $2\pi$ -periodické. Dostáváme tedy okrajové podmínky

$$\psi(\varphi + 2\pi, \vartheta) = \psi(\varphi, \vartheta), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad \vartheta \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.17)$$

$$\limsup_{\vartheta \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} |\psi(\varphi, \vartheta)| < \infty, \quad \limsup_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}-} |\psi(\varphi, \vartheta)| < \infty, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

Poznamenejme, že nenulová řešení úlohy (5.16), (5.17), (5.18) se nazývají *sférické funkce*. Tato řešení budeme hledat separací proměnných, tj. ve tvaru  $\psi(\varphi, \vartheta) = \Phi(\varphi)\Theta(\vartheta)$ . Dosazením do rovnice (5.16) dostaneme

$$\frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \Phi'' \Theta + \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} (\Theta' \cos \vartheta)' \Phi + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \Phi \Theta = 0$$

a po úpravě

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\cos \vartheta}{\Theta} (\Theta' \cos \vartheta)' + \frac{2\mu E r^2 \cos^2 \vartheta}{\hbar^2}. \quad (5.19)$$

Levá strana závisí pouze na proměnné  $\varphi$ , pravá pouze na proměnné  $\vartheta$ , proto se musí obě strany rovnat nějaké konstantě  $\sigma$ . Funkce  $\Phi$  je tedy řešením okrajové úlohy

$$\Phi'' + \sigma \Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Tato úloha má nenulové řešení pouze pro  $\sigma = m^2$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  (sr. řešení úlohy (3.50), (3.52)). Tuto hodnotu dosadíme do rovnice (5.19). Dostaneme

$$\frac{\cos \vartheta}{\Theta} (\Theta' \cos \vartheta)' + \frac{2\mu E r^2 \cos^2 \vartheta}{\hbar^2} = m^2. \quad (5.20)$$

Zavedeme novou nezávisle proměnnou  $s$  vztahem  $s = \sin \vartheta$ . Pak  $\frac{ds}{d\vartheta} = \cos \vartheta = \sqrt{1-s^2}$  a tedy

$$\begin{aligned} (\Theta' \cos \vartheta)' &= \frac{d}{ds} \left( \cos \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) = \frac{d}{ds} \left( \sqrt{1-s^2} \frac{d\Theta}{ds} \frac{ds}{d\vartheta} \right) \frac{d\vartheta}{ds} = \sqrt{1-s^2} \frac{d}{ds} \left( (1-s^2) \frac{d\Theta}{ds} \right) = \\ &= \sqrt{1-s^2} \left( (1-s^2) \frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s \frac{d\Theta}{ds} \right). \end{aligned}$$

To znamená, že rovnice (5.20) se transformuje na tvar

$$\frac{1-s^2}{\Theta} \left( (1-s^2) \frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s \frac{d\Theta}{ds} \right) + \frac{2\mu E r^2 (1-s^2)}{\hbar^2} = m^2.$$

Označíme

$$\lambda = \frac{2\mu E r^2}{\hbar^2} \quad (5.21)$$

a předchozí rovnici upravíme na tvar

$$(1-s^2) \frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s \frac{d\Theta}{ds} + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-s^2} \right) \Theta = 0.$$

To je rovnice pro přidružené funkce k Legendreovým polynomům, sr. B.1.6. Tato rovnice má ohraničené řešení pouze pro  $\lambda = l(l+1)$ , kde  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Vlastní funkce jakožto  $m$ -té derivace Legendreových polynomů stupně  $l$  jsou nenulové pouze pro  $m \leq l$ . Charakteristické hodnoty energie tedy podle (5.21) jsou

$$E_{ml} = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, l;$$

přítom  $I = \mu r^2$  je moment setrvačnosti uvažované částice.

### 5.1.3 Kvantová částice v krabici

Představme si částici o hmotnosti  $\mu$ , která se jistě nachází uvnitř oblasti prostoru tvaru hranolu o hranách  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a na kterou nepůsobí žádná síla (částice se nachází v nekonečně hluboké pravouhlé potenciálové jámě). V takovém případě je potenciál identicky nulový a stacionární Schrödingerova rovnice (5.4) je tvaru

$$\Delta\psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (5.22)$$

Vlnová funkce má být nulová vně uvažovaného hranolu a z její spjitosti plyne, že také na jeho hranici. Souřadnou soustavu zvolíme tak, aby osy hranolu byly rovnoběžné se souřadnými osami a jeden jeho vrchol byl v počátku. Pak jsou splněny okrajové podmínky

$$\psi(0, y, z) = \psi(a, y, z) = \psi(x, 0, z) = \psi(x, b, z) = \psi(x, y, 0) = \psi(x, y, c) = 0 \quad (5.23)$$

pro všechna  $(x, y, z) \in (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$ .

V rovnici (5.22) budeme separovat proměnné, tj. řešení hledáme ve tvaru  $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ . Funkce  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  musí splňovat rovnost

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + \frac{2\mu E}{\hbar^2} XYZ = 0,$$

kde ' označuje obyčejnou derivaci podle jediné nezávisle proměnné příslušné funkce. Odtud plyne

$$\frac{X''}{X} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z}.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na  $x$ , výraz na pravé straně na  $x$  nezávisí. Obě strany rovnosti se tedy musí rovnat nějaké konstantě  $\lambda$ ,

$$\frac{X''}{X} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

Odtud podobnou úvahou dostaneme

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = -\frac{Z''}{Z} = \sigma,$$

takže funkce  $X$ ,  $Y$  a  $Z$  jsou vzhledem k podmínkám (5.23) řešením okrajových úloh

$$\begin{aligned} X'' + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \lambda\right) X &= 0, & X(0) = 0 = X(a), \\ Y'' + (\lambda - \sigma)Y &= 0, & Y(0) = 0 = Y(b), \\ Z'' + \sigma Z &= 0, & Z(0) = 0 = Z(c). \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2, & Z_l(z) &= \sin \frac{l\pi}{c} z & \text{pro } l = 1, 2, 3, \dots, \\ \lambda_{ml} - \sigma_l &= \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, & Y_{ml}(y) &= \sin \frac{m\pi}{b} y & \text{pro } m = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{2\mu}{\hbar^2} E_{nml} - \lambda_{ml} &= \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, & X_{nml}(x) &= \sin \frac{n\pi}{a} x & \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Sečtením vlastních hodnot z jednotlivých úloh dostaneme

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} E_{nml} = \pi^2 \left[ \left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2 \right].$$

Možné pozorované hodnoty energie uvažované částice tedy jsou

$$E_{nml} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu} \left[ \left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2 \right].$$

Každá trojice kladných celých čísel  $(n, m, l)$  tedy reprezentuje kvantový stav částice.

Nechť nyní  $a = b = c = L$ . Pak možné energetické stavy jsou

$$E_{nml} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu L^2} (n^2 + m^2 + l^2). \quad (5.24)$$

Základní stav je

$$E_{111} = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2\mu L^2};$$

je to jediná nedegenerovaná energetická hladina, tj. energie, jíž odpovídá jediný kvantový stav. Ostatní energetické hladiny jsou degenerované, jedné energii odpovídá více stavů. Např. energie

$$\frac{3\hbar^2 \pi^2}{\mu L^2}$$

je stejná pro stavy  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$  a  $(1, 1, 2)$ , jedná se o hladinu s degenerací stupně 3. Stupeň degenerace roste s rostoucími hodnotami  $n$ ,  $m$ ,  $l$ .

Označíme-li  $V = L^3$  objem uvažované krychlové krabičky a

$$R^2 = \frac{2\mu V^{2/3}}{\hbar^2 \pi^2} E_f,$$

můžeme rovnost (5.24) pro  $E_{nml} = E_f$  přepsat na tvar

$$n^2 + m^2 + l^2 = R^2,$$

což je rovnice sféry o poloměru  $R$  v prostoru  $nml$ . Pro dostatečně velké  $R$  je tedy počet stavů, které mají energii nepřevyšující  $E_f$  úměrný objemu prvního oktantu koule. Označíme tento počet symbolem  $N$  a dostaneme

$$N \sim \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi}{6} \left( \frac{\sqrt{2\mu E_f}}{\hbar \pi} \right)^3 V = \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \right)^3 E_f^{3/2} V,$$

takže pro *hustotu stavů*  $\nu = N/V$  (počet stavů na jednotku objemu) a pro energii  $E_f$  platí

$$E_f = \alpha \nu^{2/3},$$

kde  $\alpha$  je nějaká konstanta;  $E_f$  je (až na malou modifikaci vynucenou spinem částice) *Fermiho energie*.



# Příloha A

## Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

### A.1 Formulace úloh

Označení:  $C^k(0, \ell)$  — množina funkcí  $k$ -krát diferencovatelných na  $(0, \ell)$ ,  $\ell \in \mathbb{R}^*$ .

#### A.1.1 Diferenciální operátor

Buďte  $a, b, c \in C^0(0, \ell)$ ,  $a(x) \neq 0$  pro  $x \in (0, \ell)$ . Lineární diferenciální operátor druhého řádu  $L = L(a, b, c) : C^2(0, \ell) \rightarrow C^0(0, \ell)$  definujeme předpisem

$$Ly(x) = a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x), \quad x \in (0, \ell).$$

Rovnice

$$Ly = g \in C^0(0, \ell)$$

je lineární diferenciální rovnice druhého řádu; v případě  $g \equiv 0$  homogenní, v opačném nehomogenní.

Buďte  $p \in C^1(0, \ell)$ ,  $q \in C^0(0, \ell)$ . Pak operátor  $L(-p, -p', q)$  daný vztahem

$$L(-p, -p', q)y(x) = -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$$

nazveme *samoadjungovaný*. Každý lineární diferenciální operátor druhého řádu  $L(a, b, c)$ , pro jehož koeficienty  $a, b$  platí

$$b(x) = a'(x), \quad x \in (0, \ell)$$

je samoadjungovaný. Rovnice

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, \ell)$$

se nazývá *samoadjungovaná* nebo *Sturmova - Liouvilleova* rovnice.

Každou lineární diferenciální rovnici s koeficientem  $a \in C^1(0, \ell)$  lze vyjádřit v samoadjungovaném tvaru.

**D.:** Buď

$$h(x) = \int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)} dx, \quad \rho(x) = e^{h(x)}.$$

Pak

$$\begin{aligned} (\rho(x)a(x))' &= \left( e^{h(x)} a(x) \right)' = e^{h(x)} h'(x) a(x) + e^{h(x)} a'(x) = \rho(x) \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)} a(x) + \rho(x) a'(x) = \\ &= \rho(x) b(x), \end{aligned}$$

tedy

$$\rho(x)a(x)y''(x) + \rho(x)b(x)y'(x) + \rho(x)c(x)y(x) = \rho(x)g(x)$$

je samoadjungovaná rovnice ( $p = -\rho a$ ,  $q = \rho c$ ,  $f = \rho g$ ).  $\square$

### A.1.2 Okrajové podmínky

Budeme hledat řešení rovnice

$$Ly(x) = f(x),$$

kteřé splňuje některé z následujících podmínek.

*Newtonovy podmínky:*

$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = y_0, \quad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) = y_1,$$

přičemž  $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \neq \alpha_1^2 + \beta_1^2$ .

*Dirichletovy podmínky:*

$$y(0) = y_0, \quad y(\ell) = y_1.$$

(Jsou zvláštním případem Newtonových podmínek pro  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1, \beta_0 = \beta_1 = 0$ .)

*Neumannovy podmínky:*

$$y'(0) = y_0, \quad y'(\ell) = y_1.$$

(Jsou zvláštním případem Newtonových podmínek pro  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \beta_0 = \beta_1 = 1$ .)

*Podmínky periodičnosti:*

$$y(x) = y(x + \ell) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

*Podmínky omezenosti:*

$$y(x) \text{ je omezená pro } x \rightarrow 0+, \quad y(x) \text{ je omezená pro } x \rightarrow \ell -.$$

U podmínek omezenosti můžeme připustit  $\ell = \infty$  a jako levý okraj použít  $-\infty$ , nikoliv 0.

Podmínky různého typu lze kombinovat; můžeme například požadovat splnění Neumanovy podmínky v levém krajním bodě a podmínky omezenosti v pravém krajním bodě.

Jakoukoliv okrajovou podmínku nazveme *homogenní*, jestliže s libovolnými dvěma funkcemi  $y_1, y_2$ , které této podmínce vyhovují, vyhovuje téže podmínce i jejich libovolná lineární kombinace  $k_1 y_1 + k_2 y_2$ .

Newtonovy podmínky s  $y_0 = y_1 = 0$ , podmínky periodičnosti i podmínky omezenosti s  $y_1 = 0$  nebo  $y_0 = 0$  jsou homogenní.

Okrajová úloha, v níž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní se nazývá *homogenní okrajová úloha*, v opačném případě *nehomogenní okrajová úloha*.

### A.1.3 Symetrický diferenciální operátor

Řekneme, že operátor  $L$  je *symetrický na množině*  $M \subseteq C^2(0, \ell)$ , jestliže pro všechny  $u, v \in M$  platí

$$\int_0^\ell Lu(x)v(x)dx = \int_0^\ell u(x)Lv(x)dx.$$

Buď  $L = L(-p, -p', q)$  samoadjungovaný operátor. Pak platí (s využitím integrace „per partes“)

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell Lu(x)v(x)dx - \int_0^\ell u(x)Lv(x)dx = \\ &= \int_0^\ell \left[ \left( - (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) \right) v(x) - u(x) \left( - (p(x)v'(x))' + q(x)v(x) \right) \right] dx = \\ &= \int_0^\ell \left[ (p(x)v'(x))' u(x) - (p(x)u'(x))' v(x) \right] dx = \\ &= [p(x)v'(x)u(x)]_0^\ell - \int_0^\ell p(x)v'(x)u'(x)dx - [p(x)u'(x)v(x)]_0^\ell + \int_0^\ell p(x)u'(x)v'(x)dx = \\ &= p(\ell)v'(\ell)u(\ell) - p(0)v'(0)u(0) - p(\ell)u'(\ell)v(\ell) + p(0)u'(0)v(0) = \\ &= p(\ell)(v'(\ell)u(\ell) - u'(\ell)v(\ell)) - p(0)(v'(0)u(0) - u'(0)v(0)). \end{aligned}$$



- Samoadjungovaný operátor  $L = L(-p, -p', q)$  je symetrický na množině funkcí, které splňují homogenní Newtonovy podmínky.

**D.:** Je-li  $\beta_0 \neq 0$ , pak  $u'(0) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}u(0)$ ,  $v'(0) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}v(0)$ , takže  $v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = 0$ .

Je-li  $\alpha_0 \neq 0$ , pak  $u(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}u'(0)$ ,  $v(0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}v'(0)$ , takže opět  $v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = 0$ .

Analogicky ověříme, že  $v'(\ell)u(\ell) - u'(\ell)v(\ell) = 0$ .  $\square$

- Pokud funkce  $p$  je  $\ell$ -periodická, pak samoadjungovaný operátor  $L = L(-p, -p', q)$  je symetrický na množině  $\ell$ -periodických funkcí.

### A.1.4 Homogenní okrajová úloha s parametrem

Nechť  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Uvažujme homogenní okrajovou úlohu pro rovnici

$$Lv(x) = \lambda v(x).$$

Tato úloha má vždy *triviální řešení*  $v \equiv 0$ . Pokud existuje netriviální řešení  $v = v(x)$ , nazveme ho *vlastní funkcí okrajové úlohy* a parametr  $\lambda$  nazveme *vlastním číslem operátoru  $L$* .

Je-li  $\lambda$  vlastní číslo operátoru  $L$  a  $v = v(x)$  je příslušná vlastní funkce uvažované okrajové úlohy, pak také funkce  $cv$  je pro libovolnou konstantu  $c \in \mathbb{R}$  vlastní funkcí.

Jestliže vlastnímu číslu  $\lambda$  odpovídá  $k$  lineárně nezávislých vlastních funkcí, řekneme, že  $\lambda$  je  *$k$ -násobné vlastní číslo*.

Označme  $M_L$  množinu funkcí splňujících příslušné homogenní okrajové podmínky. Je-li operátor  $L$  symetrický na množině  $M_L$  a  $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$  jsou jeho dvě vlastní čísla, pak odpovídající vlastní funkce jsou ortogonální v prostoru  $\mathcal{L}^2(0, \ell)$ .

**D.:**

$$\begin{aligned} \int_0^\ell v_1(x)v_2(x)dx &= \frac{1}{\lambda_1} \int_0^\ell \lambda_1 v_1(x)v_2(x)dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_0^\ell Lv_1(x)v_2(x)dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_0^\ell v_1(x)Lv_2(x)dx = \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^\ell v_1(x)v_2(x)dx. \end{aligned}$$

Kdyby  $\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)dx \neq 0$  pak by  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$ , což by byl spor.  $\square$

#### Příklady:

Uvažujme samoadjungovaný operátor  $L = L(-a^2, 0, 0)$ , kde  $a$  je nějaká nenulová konstanta. Rovnici

$$-a^2 y''(x) = \lambda y(x) \tag{A.1}$$

můžeme přepsat na tvar

$$y''(x) + \frac{\lambda}{a^2}y(x) = 0.$$

Řešení této homogenní lineární rovnice druhého řádu závisí na znaménku parametru  $\lambda$ . Obecné řešení rovnice je dáno vztahem

$$y(x) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}x\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}x\right), & \lambda < 0, \\ Ax + B, & \lambda = 0, \\ A \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|x} + B \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|x}, & \lambda > 0, \end{cases}$$

kde  $A, B$  jsou nějaké konstanty.

1) Hledáme řešení rovnice (A.1) na intervalu  $(0, \ell)$ , které splňuje Dirichletovy homogenní okrajové podmínky

$$y(0) = 0 = y(\ell).$$

Je-li  $\lambda = 0$ , pak má platit

$$y(0) = 0 = B, \quad y(\ell) = 0 = A\ell + B,$$

takže  $B = 0$  a v důsledku toho také  $A = 0$  a rovnice má pouze triviální řešení.

Je-li  $\lambda < 0$ , pak má platit

$$y(0) = 0 = A + B, \quad \text{tj. } B = -A, \quad y(\ell) = 0 = Ae^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}\ell} - Ae^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}\ell} = 2A \operatorname{sh} \frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}\ell;$$

pro  $-\lambda > 0$  je však  $\operatorname{sh} \frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}\ell > 0$  a z toho plyne, že  $A = 0$ . Rovnice (A.1) má opět pouze triviální řešení.

Je-li  $\lambda > 0$ , pak má platit

$$y(0) = 0 = A, \quad y(\ell) = 0 = B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell.$$

Odtud plyne, že  $\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = k\pi$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ , tedy  $\lambda = \left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2$  pro  $k = 1, 2, 3, \dots$ , neboť  $\lambda > 0$ .

Vlastní čísla operátoru  $L(-a^2, 0, 0)$  s homogenními Dirichletovými podmínkami na intervalu  $(0, \ell)$  a příslušné vlastní funkce jsou

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin \frac{k\pi|a|}{\ell}x, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

2) Nyní hledáme řešení rovnice (A.1) na  $\mathbb{R}$ , které splňuje podmínky periodičnosti

$$y(x) = y(x + \ell).$$

Je-li  $\lambda < 0$ , pak je řešení  $y(x)$  je monotónní; konkrétně rostoucí pro  $A > 0$  nebo  $A = 0$ ,  $B < 0$ , klesající pro  $A < 0$  nebo  $A = 0$ ,  $B > 0$  a konstantní nulové pro  $A = B = 0$ . Úloha má tedy pouze triviální řešení.

Pro  $\lambda = 0$  má rovnice řešení  $y(x) = Ax + B$ , které je periodické a netriviální pouze pro  $A = 0$ ,  $B \neq 0$ . První vlastní číslo tedy je  $\lambda_0 = 0$  a příslušná vlastní funkce  $v_0$  je nenulová konstanta.

Pro  $\lambda > 0$  má rovnice řešení  $y(x) = A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$  které má splňovat podmínku

$$\begin{aligned} A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x &= A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}(x + \ell) + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}(x + \ell) = \\ &= A \left( \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell - \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell \right) + B \left( \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell \right) = \\ &= \left( A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell \right) \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + \left( -A \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + B \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell \right) \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x. \end{aligned}$$

Poněvadž funkce  $\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$  a  $\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$  jsou nezávislé, plyne odtud

$$A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = A, \quad -A \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + B \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = B,$$

neboli

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell - 1 \right) A + \left( \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell \right) B &= 0, \\ \left( -\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell \right) A + \left( \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell - 1 \right) B &= 0. \end{aligned}$$

Tato homogenní soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé  $A, B$  má nenulové řešení právě tehdy, když determinant její matice je nulový, tj. právě tehdy, když

$$\left(\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} \ell - 1\right)^2 + \left(\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} \ell\right)^2 = 0.$$

Tato rovnost je splněna právě tehdy, když  $\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} \ell = 1$  a  $\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} \ell = 0$ , což znamená, že  $\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} \ell = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Celkem tedy vlastní čísla operátoru  $L(-a^2, 0, 0)$  s podmínkami periodičnosti a příslušné vlastní funkce jsou

$$\lambda_0 = 0, \quad v_0(x) = \text{const} \neq 0,$$

$$\lambda_k = \left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2, \quad v_k(x) = \cos \frac{2k\pi}{\ell} x, \quad \tilde{v}_k(x) = \sin \frac{2k\pi}{\ell} x, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Kladná vlastní čísla jsou tedy dvojnásobná.

**3)** Nakonec najdeme řešení rovnice (A.1) na  $(0, \infty)$ , které splňuje podmínky omezení

$$y(x) \text{ je omezená pro } x \rightarrow 0+ \text{ a pro } x \rightarrow \infty.$$

Je-li  $\lambda < 0$ , pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = \begin{cases} \infty, & A \neq 0, \\ 0, & A = 0. \end{cases}$$

V tomto případě tedy všechna záporná čísla  $\lambda_-$  jsou vlastními čísly a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_-(x) = e^{-\frac{\sqrt{-\lambda_-}}{|a|} x}.$$

Podobně pro  $\lambda = 0$  je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = \begin{cases} \infty, & A \neq 0, \\ B, & A = 0. \end{cases}$$

Číslo  $\lambda_0 = 0$  je vlastním číslem a příslušná vlastní funkce je

$$v_0(x) = \text{const} \neq 0.$$

Pro  $\lambda > 0$  jsou všechna řešení omezená, takže jakékoliv kladné číslo  $\lambda_+$  je vlastním číslem a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_+(x) = \cos \frac{\sqrt{\lambda_+}}{|a|} x, \quad \tilde{v}_+(x) = \sin \frac{\sqrt{\lambda_+}}{|a|} x.$$

### A.1.5 Sturmova-Liouvilleova úloha

$$\begin{aligned} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) &= \lambda y(x), & x \in (0, \ell), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

- Sturmova-Liouvilleova úloha má nekonečně mnoho vlastních čísel  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , pro která platí

$$\min\{q(x) : x \in [0, \ell]\} \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

- Každému vlastnímu číslu Sturmovy-Liouvilleovy úlohy přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce.
- Vlastní funkce  $v_n = v_n(x)$  odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_n$  má v intervalu  $(0, \ell)$  právě  $n - 1$  nulových bodů. Mezi každými dvěma sousedními nulovými body vlastní funkce  $v_n$  leží právě jeden nulový bod vlastní funkce  $v_{n+1}$ .

- Posloupnost  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  normovaných vlastních funkcí Sturmovy-Liouvilleovy úlohy tvoří úplnou ortonormální posloupnost na  $[0, \ell]$ . Tj. je-li funkce  $f \in \mathcal{L}^2(0, \ell)$ , pak Fourierova řada funkce  $f$  vzhledem k ortonormální posloupnosti  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k funkci  $f$  podle středu (konvergence v prostoru  $\mathcal{L}^2(0, \ell)$ ). Je-li funkce  $f$  navíc spojitá a splňuje homogenní okrajové podmínky, je tato konvergence stejnoměrná.

**D.:** J. Kalas, M. Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, MU Brno 1995, str. 158–163. Důkaz je tam proveden pro případ  $p \equiv 1$ .  $\square$

Tvrzení jsou ilustrována příkladem 1) z předchozího odstavce.

## A.2 Řešení nehomogenní okrajové úlohy

### A.2.1 Nehomogenní rovnice s homogenními Newtonovými podmínkami — Fourierova metoda

$$Ly(x) \equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, \ell),$$

$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell).$$

- Najdeme posloupnost vlastních čísel  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  a ortogonální posloupnost příslušných vlastních funkcí  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  Sturmovy-Liouvilleovy úlohy, tj. rostoucí posloupnost čísel  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  a posloupnost funkcí  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ , které splňují:

$$Lv_n(x) = \lambda_n v_n(x),$$

$$\alpha_0 v_n(0) + \beta_0 v_n'(0) = 0 = \alpha_1 v_n(\ell) + \beta_1 v_n'(\ell).$$

- Funkci  $f$  vyjádříme ve tvaru

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad \text{kde} \quad d_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^{\ell} f(\xi) v_n(\xi) d\xi.$$

- Řešení úlohy hledáme ve tvaru

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x).$$

Musí tedy platit

$$Ly(x) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Lv_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x),$$

takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x),$$

z čehož plyne

$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

pokud všechna vlastní čísla jsou nenulová.

Hledané řešení tedy je

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_0^{\ell} f(\xi) v_n(\xi) d\xi = \int_0^{\ell} \left( f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \right) d\xi.$$

Označíme-li

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2},$$

lze řešení zapsat

$$y(x) = \int_0^{\ell} f(\xi)G(x, \xi)d\xi.$$

### A.2.2 Nehomogenní rovnice s homogenními Newtonovými podmínkami — metoda variace konstant

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, \ell), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

- Najdeme řešení  $u, v$  dvou pomocných homogenních úloh

$$\begin{aligned} Lu &= -(pu')' + qu = 0, & \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) &= 0, \\ Lv &= -(pv')' + qv = 0, & \alpha_1 v(\ell) + \beta_1 v'(\ell) &= 0. \end{aligned}$$

Funkce  $u, v$  nejsou určeny jednoznačně. Vezmeme ty, které jsou lineárně nezávislé.

- Pro Wronskián  $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$  funkcí  $u, v$  platí  $p(x)W(x) \equiv K$ , kde  $K$  je nenulová konstanta, neboť

$$\begin{aligned} (pW)' &= (p(uv' - u'v))' = p'uv' + pu'v' + puv'' - p'u'v - pu''v - pu'v' = \\ &= (pv'' + p'v')u - (pu'' + p'u')v = (pv')'u - (pu')'v = qvu - quv = 0, \end{aligned}$$

kdyby  $K = 0$ , pak by  $W \equiv 0$ , což by byl spor s lineární nezávislostí.

- Řešení nehomogenní úlohy hledáme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)u(x) + c_2(x)v(x).$$

Funkce  $y$  má být řešením dané nehomogenní rovnice, takže musí platit

$$\begin{aligned} f &= L(c_1u + c_2v) = -(p(c_1u))' + qc_1u - (p(c_2v))' + qc_2v = \\ &= -p(c_1''u + 2c_1'u' + c_1u'') - p'(c_1'u + c_1u') + qc_1u - \\ &\quad -p(c_2''v + 2c_2'v' + c_2v'') - p'(c_2'v + c_2v') + qc_2v = \\ &= c_1(-pu'' - p'u' + qu) - pc_1'u' - p(c_1''u + c_1'u') - p'c_1'u + \\ &\quad c_2(-pv'' - p'v' + qv) - pc_2'v' - p(c_2''v + c_2'v') - p'c_2'v = \\ &= c_1Lu - pc_1'u' - (p(c_1'u))' + c_2Lv - pc_2'v' - (p(c_2'v))' = \\ &= -p(c_1'u' + c_2'v') - (p(c_1'u + c_2'v))'. \end{aligned}$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když funkce  $c_1, c_2$  splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x)u(x) + c_2'(x)v(x) &= 0, \\ c_1'(x)u'(x) + c_2'(x)v'(x) &= -\frac{f(x)}{p(x)}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Platí tedy

$$c_1'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & v(x) \\ -\frac{f(x)}{p(x)} & v'(x) \end{vmatrix} = \frac{f(x)v(x)}{K}, \quad c_2'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} u(x) & 0 \\ u'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)u(x)}{K}. \tag{A.3}$$

- Funkce  $y(x)$  má splňovat okrajové podmínky, tj.

$$\begin{aligned} \alpha_0 [c_1(0)u(0) + c_2(0)v(0)] + \beta_0 [c_1'(0)u(0) + c_1(0)u'(0) + c_2'(0)v(0) + c_2(0)v'(0)] &= 0, \\ \alpha_1 [c_1(\ell)u(\ell) + c_2(\ell)v(\ell)] + \beta_1 [c_1'(\ell)u(\ell) + c_1(\ell)u'(\ell) + c_2'(\ell)v(\ell) + c_2(\ell)v'(\ell)] &= 0, \end{aligned}$$

po úpravě s využitím (A.2)

$$\begin{aligned} c_1(0)(\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0)) + c_2(0)(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)) &= 0, \\ c_1(\ell)(\alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)) + c_2(\ell)(\alpha_1 v(\ell) + \beta_1 v'(\ell)) &= 0; \end{aligned}$$

každá z funkcí splňuje jednu okrajovou podmínku, tedy

$$\begin{aligned} c_2(0)(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)) &= 0, \\ c_1(\ell)(\alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)) &= 0, \end{aligned}$$

takže

$$c_1(\ell) = 0, \quad c_2(0) = 0. \quad (\text{A.4})$$

- Funkce  $c_1, c_2$  jsou řešením rovnic (A.3) s počátečními podmínkami (A.4) a jsou tedy dány výrazy

$$c_1(x) = \frac{1}{K} \int_{\ell}^x f(\xi)v(\xi)d\xi, \quad c_2(x) = -\frac{1}{K} \int_0^x f(\xi)u(\xi)d\xi.$$

- Řešení úlohy je

$$y(x) = -\frac{u(x)}{K} \int_x^{\ell} f(\xi)v(\xi)d\xi - \frac{v(x)}{K} \int_0^x f(\xi)u(\xi)d\xi.$$

Označíme-li

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{u(x)v(\xi)}{K}, & 0 \leq x < \xi \leq \ell \\ -\frac{v(x)u(\xi)}{K}, & 0 \leq \xi < x \leq \ell \end{cases},$$

lze řešení zapsat

$$y(x) = \int_0^{\ell} f(\xi)G(x, \xi)d\xi.$$

### A.2.3 Greenova funkce

Funkci  $G : [0, \ell] \times [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme *Greenovou funkcí homogenní okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

kde  $p(x) > 0$  pro  $x \in [0, \ell]$ , jestliže

- $G$  je spojitá pro  $x \in [0, \ell] \times [0, \ell]$ ,
- $G$  je symetrická, tj.  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ ,
- pro každé  $\xi \in [0, \ell]$  má funkce  $G(\cdot, \xi)$  spojitě derivace druhého řádu,
- pro každé  $\xi \in [0, \ell]$  je funkce  $G(\cdot, \xi)$  řešením uvažované okrajové úlohy,
- $\lim_{x \rightarrow \xi^+} G_x(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} G_x(x, \xi) = -\frac{1}{p(\xi)}$  pro  $\xi \in (0, \ell)$ .

Platí: Má-li uvažovaná homogenní okrajová úloha jen triviální řešení  $y \equiv 0$  a jsou-li  $p \in C^1(0, \ell)$ ,  $q \in C^2(0, \ell)$ , existuje právě jedna její Greenova funkce. Nehomogenní okrajová úloha

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, \ell), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

má pak jediné řešení tvaru

$$y(x) = \int_0^{\ell} f(\xi)G(x, \xi)d\xi.$$

**D.:** I. Kiguradze: Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic, MU Brno 1997, str. 82. Důkaz je proveden pro mnohem obecnější situaci.  $\square$

### A.2.4 Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$Ly(x) \equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, \ell),$$

$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = y_0, \quad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) = y_1.$$

Jestliže funkce  $w = w(x)$  splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) = y_0, \quad \alpha_1 w(\ell) + \beta_1 w'(\ell) = y_1$$

a funkce  $u = u(x)$  je řešením úlohy

$$Lu(x) = f(x) - Lw(x)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = 0 = \alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell),$$

pak funkce

$$y(x) = u(x) + w(x)$$

je řešením uvažované úlohy.

Funkci  $w$  je vhodné volit v co nejjednodušším tvaru, například polynom.

## Cvičení

Řešte okrajové úlohy

- 1)  $-y'' - \frac{2}{x}y' = 0$ ,  $x \in (0, 1)$ ;  $y(1) = y_0$ ,  $y$  je omezená pro  $x \rightarrow 0_+$ .
- 2)  $-(x^2 y')' = 0$ ,  $x \in (1, \infty)$ ;  $y(1) = y_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ .
- 3)  $-(xy')' = 0$ ,  $x \in (1, \infty)$ ;  $y(1) = y_0$ ,  $y$  je omezená pro  $x \rightarrow \infty$ .
- 4)  $-xy'' - y' = 0$ ,  $x \in (1, 2)$ ;  $y(1) = y_1$ ,  $y(2) = 0$ .
- 5)  $-x^2 y'' - xy' + k^2 y = 0$ ,  $x \in (0, \ell)$ ;  $y(\ell) = 1$ ,  $y$  je omezená pro  $x \rightarrow 0_+$ ;  $k$  je parametr.
- 6)  $-xy'' - y' = -x$ ,  $x \in (0, \ell)$ ;  $y(0) = y(\ell) = 0$ .
- 7)  $-y'' = \sin x$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ ;  $y'(0) = y'(2\pi) = 0$ .

Najděte vlastní funkce okrajových úloh a vlastní čísla příslušných operátorů

- 8)  $-v'' = \lambda v$ ,  $x \in (0, \ell)$ ;  $v'(0) = v'(\ell) = 0$ .
- 9)  $-v'' = \lambda v$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $v(x) = v(x + 2\pi)$ .
- 10)  $-v'' + qv = \lambda v$ ,  $x \in (0, \ell)$ ;  $v'(0) = 0$ ,  $v(\ell) = 0$ ;  $q$  je parametr.

Řešte okrajové úlohy

- 11)  $-y'' - \omega^2 y = f(x)$ ,  $x \in (0, \ell)$ ;  $y(0) = y(\ell) = 0$ ;  $\omega$  je parametr.
- 12)  $-y'' - 3y = \frac{\pi - x}{2}$ ,  $x \in (0, \pi)$ ;  $y(0) = y(\pi) = 0$ .
- 13) Najděte Greenovu funkci úlohy  $-y'' + y = 0$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ .

**Výsledky:** 1)  $y(x) = y_0$  2)  $y(x) = \frac{y_0}{x}$  3)  $y(x) = y_0$  4)  $y(x) = y_1 \frac{\ln 2 - \ln x}{\ln 2}$  5)  $y(x) = \left(\frac{x}{\ell}\right)^{|k|}$  6) nemá řešení  
 7)  $y(x) = \sin x - x + C$ ,  $C$  je libovolná konstanta 8)  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ ,  $v_n(x) = \cos \frac{n\pi}{\ell} x$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  9)  $\lambda_n = n^2$ ,  
 $v_n(x) = C_n \cos nx + D_n \sin nx$ ,  $C_n, D_n$  jsou libovolné konstanty,  $C_0 \neq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  10)  $\lambda_n = q + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$ ,

$$v_n(x) = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x. \quad \mathbf{11)} \quad y(x) = B \sin \frac{k\pi}{\ell} x + \frac{1}{\omega} \int_0^x f(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} (\xi - x) d\xi \quad \text{pro } \frac{\omega\ell}{\pi} = k \in \mathbb{N} \text{ a } \int_0^\ell f(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi d\xi = 0,$$

$B$  je libovolná konstanta;

$$y(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x f(\xi) \sin \omega(\xi - x) d\xi - \frac{\sin \omega x}{\omega \sin \omega \ell} \int_0^\ell f(\xi) \sin \omega(\xi - x) d\xi = 2\ell \int_0^x f(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \sin \frac{k\pi}{\ell} x}{k^2 \pi^2 - \omega^2 \ell^2} d\xi \quad \text{pro } \frac{\omega\ell}{\pi} \notin \mathbb{N}$$

$$\mathbf{12)} \quad y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k^2-3)} = \frac{\pi}{6} (\cos \sqrt{3}x - \cotg \sqrt{3}\pi \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{6}(x-\pi) \quad \mathbf{13)} \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(1-x) \text{sh} \xi}{\text{sh} 1}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ \frac{\text{sh} x \text{sh}(1-\xi)}{\text{sh} 1}, & 0 \leq x < \xi \leq 1 \end{cases}$$



# Příloha B

## Speciální funkce

### B.1 Legendreovy polynomy

#### B.1.1 Definice

Legendreův polynom stupně  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je pro každé  $x \in \mathbb{R}$  definován vztahem

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Zejména

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_1(x) &= x & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

Poněvadž

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} x^{2n-2k},$$

platí

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}.$$

Tedy pro  $m \in \mathbb{N}$  je

$$\begin{aligned} P_{2m} &= \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k} = \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k (4m-2k)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-1} = \\ &= \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-1} = \\ &= \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)(4m-2k-1)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-2} = \\ &= \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)!}{2^{2m} k!(2m-k)!(4m-2k-2)!} x^{4m-2k-2} = \dots = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (4m-2k)!}{2^{2m} k!(2m-k)!(2m-2k)!} x^{2(m-k)}, \end{aligned}$$

analogicky

$$P_{2m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k-2)!}{2^{2m-1} k!(2m-k-1)!(2m-2k-1)!} x^{2(m-k)-1},$$

souhrnně

$$P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}. \quad (\text{B.1})$$

### B.1.2 Rekurentní vztahy pro Legendreovy polynomy

Pomocí (B.1) lze odvodit:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.2})$$

$$P'_n(x) = \frac{n}{1-x^2} (P_{n-1}(x) - x P_n(x)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.3})$$

### B.1.3 Věta

Legendreův polynom  $P_n$  je pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  řešením diferenciální rovnice

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \quad (\text{B.4})$$

s podmínkou  $y(1) = 1$ .

**D.:** Pro  $n = 0$  je tvrzení zřejmé. Nechť tedy  $n > 0$ .

Položme  $\eta(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^n$ . Pak  $\eta'(x) = \frac{2xn(x^2 - 1)^{n-1}}{2^n n!}$ , takže  $(x^2 - 1)\eta'(x) = 2xn\eta(x)$ . Derivujme tuto rovnost  $(n+1)$ -krát (s využitím Leibnizovy formule):

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)\eta^{(n+2)}(x) + (n+1)2x\eta^{(n+1)}(x) + \frac{n(n+1)}{2} 2\eta^{(n)}(x) &= 2n \left( x\eta^{(n+1)}(x) + (n+1)\eta^{(n)}(x) \right), \\ (x^2 - 1)\eta^{(n+2)}(x) + 2x\eta^{(n+1)}(x) - n(n+1)\eta^{(n)}(x) &= 0, \end{aligned}$$

a poněvadž  $\eta^{(n)}(x) = P_n(x)$ , vidíme, že  $P_n(x)$  je řešením uvedené rovnice.

Přímým výpočtem ověříme, že  $P_0(1) = P_1(1) = 1$ . Odtud a z rekurentní formule (B.2) úplnou indukcí plyne, že  $P_n(1) = 1$  pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .  $\square$

Rovnici z tvrzení věty lze také zapsat ve tvaru

$$\left( (1-x^2)y'(x) \right)' + n(n+1)y(x) = 0. \quad (\text{B.5})$$

### B.1.4 Věta (Orthogonalita Legendreových polynomů)

Pro Legendreovy polynomy platí

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

**D.:** Buďte  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Rovnici (B.5) jednou napíšeme pro  $y(x) = P_m(x)$  a vynásobíme  $P_n(x)$ , podruhé ji napíšeme pro  $y(x) = P_n(x)$  a vynásobíme  $P_m(x)$ :

$$\begin{aligned} \left( (1-x^2)P'_m(x) \right)' P_n(x) + m(m+1)P_m(x)P_n(x) &= 0, \\ \left( (1-x^2)P'_n(x) \right)' P_m(x) + n(n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Tyto rovnice odečteme, upravíme a zintegrujeme v mezích od  $-1$  do  $1$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} \left( (1-x^2)P'_m(x) \right)' P_n(x) - \left( (1-x^2)P'_n(x) \right)' P_m(x) + (m(m+1) - n(n+1))P_n(x)P_m(x) &= 0, \\ \left( (1-x^2)(P'_m(x)P_n(x) - P_m(x)P'_n(x)) \right)' + (m-n)(m+n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0, \\ \left[ (1-x^2)(P'_m(x)P_n(x) - P_m(x)P'_n(x)) \right]_{-1}^1 + (m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

a poněvadž první sčítanec se rovná nule, platí pro  $m \neq n$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0.$$

Pro výpočet  $\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx$  použijeme  $n$ -krát metodu per partes. Pro zjednodušení zápisu označíme  $Q(x) = (x^2 - 1)^n$  a uvědomíme si, že 1 a  $-1$  jsou  $2n$ -násobné kořeny polynomu  $Q$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^1 Q^{(n)}(x)Q^{(n)}(x)dx = \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \left( \left[Q^{(n-1)}(x)Q^{(n)}(x)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q^{(n+1)}(x)Q^{(n-1)}(x)dx \right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^1 Q^{(n+1)}(x)Q^{(n-1)}(x)dx = \dots = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^1 Q^{(2n)}(x)Q(x)dx = \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^1 (2n)!(x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x+1)^n(x-1)^n dx. \end{aligned}$$

Pro výpočet integrálu  $\int_{-1}^1 (x+1)^n(x-1)^n dx$  opět použijeme  $n$ -krát metodu per partes:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x+1)^n(x-1)^n dx &= \left[ (x+1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 n(x+1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} dx = \\ &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (x+1)^{n-1}(x-1)^{n+1} dx = \\ &= -\frac{n}{n+1} \left( \left[ (x+1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n+2}}{n+2} \right]_{-1}^1 - \frac{n-1}{n+2} \int_{-1}^1 (x+1)^{n-2}(x-1)^{n+2} dx \right) = \\ &= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_{-1}^1 (x+1)^{n-2}(x-1)^{n+2} dx = \dots = \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(2n)} (-1)^n \int_{-1}^1 (x-1)^{2n} dx = \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n \left[ \frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^1 = -\frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n \frac{(-2)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}.$$

□

### B.1.5 Věta

Legendreovy polynomy  $P_n$  jsou vlastními funkcemi homogenní okrajové úlohy

$$-((1-x^2)y'(x))' = \lambda y(x), \quad y(x) \text{ je omezená pro } x \rightarrow 1- \text{ a pro } x \rightarrow -1+ \quad (\text{B.6})$$

příslušné k vlastním číslům  $\lambda = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Jiná vlastní čísla tato úloha nemá.

D.: Řešení rovnice budeme hledat Frobeniovou metodou (tj. budeme řešení předpokládat ve tvaru mocninné řady). Máme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n = a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - (n-1) a_{n-1}) x^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -((1-x^2)y'(x))' &= -2a_2 - \sum_{n=2}^{\infty} n((n+1) a_{n+1} - (n-1) a_{n-1}) x^{n-1} = \\ &= -2a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n a_n - (n+2) a_{n+2}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n a_n - (n+2) a_{n+2}) x^n. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n a_n - (n+2) a_{n+2}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n.$$

Odtud plyne  $\lambda a_n = (n+1)n a_n - (n+1)(n+2) a_{n+2}$ , takže

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n. \quad (\text{B.7})$$

Fundamentální systém řešení rovnice (B.6) bude dán mocninnou řadou s  $a_0 = 1$  a  $a_1 = 1$  a řadou s  $a_0 = 0$  a  $a_1 = 1$ , tedy

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}, \quad \text{kde } b_0 = 1, \quad b_{k+1} = \frac{(2k+1)(2k+2) - \lambda}{(2k+2)(2k+3)} b_k, \\ y_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}, \quad \text{kde } c_0 = 1, \quad c_{k+1} = \frac{2k(2k+1) - \lambda}{(2k+1)(2k+2)} c_k. \end{aligned}$$

Pokud  $\lambda = n(n+1)$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , je právě jedna z funkcí  $y_1, y_2$  polynomem, druhá je vyjádřena nekonečnou řadou. Pokud  $\lambda \neq n(n+1)$  pro šechna  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , jsou obě funkce  $y_1, y_2$  dány nekonečnými řadami. Vyšetříme konvergenci těchto řad. Poněvadž

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1} x^{2k+3}}{b_k x^{2k+1}} \right| &= x^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(2k+1)(2k+2) - \lambda}{(2k+2)(2k+3)} \right| = x^2, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1} x^{2k+2}}{c_k x^{2k}} \right| &= x^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2k(2k+1) - \lambda}{(2k+1)(2k+2)} \right| = x^2, \end{aligned}$$

řady konvergují absolutně a stejnoměrně pro  $|x| < 1$  podle limitního podílového kritéria a divergují pro  $|x| > 1$ .

Dále platí

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} y_1(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y_2(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Poněvadž členy posloupností  $\{b_k\}$  a  $\{c_k\}$  od jistého indexu nemění znaménko, lze k vyšetřování konvergence řad  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  použít Gaussovo kritérium<sup>1</sup>. Jest

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+1)(2k+2) - \lambda} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \frac{(\lambda-2)(k+1)}{(2k+1)(2k+2) - \lambda},$$

$$\frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2k(2k+1) - \lambda} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \frac{\lambda k(k+1)}{2k(2k+1) - \lambda},$$

takže obě řady divergují. Libovolná lineární kombinace  $\alpha y_1 + \beta y_2$  funkcí  $y_1, y_2$  s koeficienty takovými, že  $|\alpha| + |\beta| > 0$  je tedy v příslušném jednostranném okolí alespoň jednoho z bodů  $1, -1$  neohraničená.

Jediná vlastní čísla uvažované úlohy tedy jsou  $\lambda = n(n+1)$  pro  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a příslušné vlastní funkce jsou polynomy.  $\square$

### B.1.6 Přidružené funkce k Legendreovým polynomům

Přidružené funkce  $P_n^{[m]}$  jsou definovány jako řešení rovnice

$$(1-x^2)z'' - 2xz' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)z = 0, \quad (\text{B.8})$$

neboli

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dz}{dx} \right) + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) z = 0,$$

která jsou ohraničená na intervalu  $(-1, 1)$ .

V této rovnici zavedeme novou neznámou funkci  $Y$  vztahem

$$z = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} Y(x).$$

Pak

$$z' = -\frac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} 2xY + (1-x^2)^{\frac{m}{2}} Y' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} ((1-x^2)Y' - mXY),$$

$$\begin{aligned} ((1-x^2)z')' &= ((1-x^2)^{\frac{m}{2}} ((1-x^2)Y' - mXY))' = \\ &= -mX(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} ((1-x^2)Y' - mXY) + (1-x^2)^{\frac{m}{2}} ((1-x^2)Y'' - 2XY' - mXY' - mY) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \left( (1-x^2)^2 Y'' - 2(m+1)x(1-x^2)Y' + (m^2 x^2 - m(1-x^2))Y \right). \end{aligned}$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (B.8) a postupně upravujeme,

$$\begin{aligned} (1+x^2)^{\frac{m}{2}-1} \left[ (1-x^2)^2 Y'' - 2(m+1)x(1-x^2)Y' + (m^2 x^2 - m(1-x^2))Y + n(n+1)(1+x^2)Y - m^2 Y \right] &= 0 \\ (1-x^2)^2 Y'' - 2(m+1)x(1-x^2)Y' + (m^2 x^2 - m(1-x^2) + n(n+1)(1-x^2) - m^2)Y &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice (B.8) se tedy transformuje na rovnici

$$(1-x^2)Y'' - 2(m+1)xY' + (n(n+1) - m(m+1))Y = 0. \quad (\text{B.9})$$

---

<sup>1</sup> Gaussovo kritérium konvergence řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  s nezápornými členy:

Nechť existuje  $\varepsilon > 0$  a ohraničená posloupnost  $\{\Theta_n\}_{n=1}^{\infty}$  takové že  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \Theta_n$ .

Je-li  $\lambda > 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

Je-li  $\lambda < 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

Je-li  $\lambda = 1$  a  $\mu > 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

Je-li  $\lambda = 1$  a  $\mu \leq 1$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

Nyní budeme postupně derivovat levou stranu Legendreovy rovnice (B.4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] &= (1-x^2)y''' - 2xy'' - 2xy'' - 2y' + n(n+1)y' = \\ &= (1-x^2)y''' - 4xy'' + (n(n+1)-2)y', \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)y''' - 4xy'' + (n(n+1)-2)y'] = (1-x^2)y'''' - 2 \cdot 3xy''' + (n(n+1)-2 \cdot 3)y''$$

atd. Obecně pro přirozené číslo  $k$  dostaneme

$$\frac{d^k}{dx^k} [(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] = (1-x^2)y^{(k+2)} - 2(k+1)xy^{(k+1)} + (n(n+1) - k(k+1))y^{(k)};$$

tento výsledek lze ověřit úplnou indukcí. Derivujeme-li tedy  $m$ -krát Legendreovu rovnici (B.4), dostaneme

$$(1-x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} + (n(n+1) - m(m+1))y^{(m)} = 0.$$

Porovnáním s rovnicí (B.9) vidíme, že řešení  $Y$  rovnice (B.9) je  $m$ -krát zderivované řešení Legendreovy rovnice (B.4), tj.

$$Y(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),$$

kde  $P_n(x)$  je Legendreův polynom stupně  $n$ . Přidružené funkce jsou tedy dány výrazem

$$P_n^{[m]}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

Platí věta analogická k větě B.1.5: Rovnice

$$(1-x^2)z'' - 2xz' + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) z = 0$$

má řešení ohraničené v intervalu  $(-1, 1)$  právě tehdy, když  $\lambda = n(n+1)$  pro nějaké  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Tato řešení jsou přidružené funkce  $P_n^{[m]}$ .

## B.2 Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

### B.2.1 Definice

Čebyševův-Laguerreův polynom stupně  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je pro každé  $x > 0$  definován vztahem

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

Zejména

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 & L_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & L_4(x) &= \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ L_1(x) &= -x + 1 & L_3(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 & L_5(x) &= -\frac{1}{120}x^5 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 5x + 1 \end{aligned}$$

### B.2.2 Explicitní vyjádření Čebyševova-Laguerreova polynomu

Nechť  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} x^k$ . S využitím Leibnizovy formule dostaneme

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}, \quad (\text{B.10})$$

takže

$$a_{nk} = \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{a_{n(k+1)}}{a_{nk}} = -\frac{k!}{(k+1)!} \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = -\frac{k!n!k!(n-k)!}{(k+1)!n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k-n}{(k+1)^2},$$

tedy

$$a_{n(k+1)} = \frac{k-n}{(k+1)^2} a_{nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad a_{n0} = \binom{n}{0} = 1.$$

### B.2.3 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

S využitím (B.10) dostaneme

$$\begin{aligned} nL_n(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n}{k!} x^k + n, \\ xL'_n(x) &= x \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!} x^k, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} nL_n(x) - xL'_n(x) &= n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{n}{k} - 1\right) x^k = n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-k}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{k!} x^k = \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \frac{x^k}{k!} = nL_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Odtud dostaneme vyjádření derivace Čebyševova-Laguerreova polynomu pomocí tohoto polynomu a polynomu nižšího stupně:

$$L'_n(x) = \frac{n}{x} (L_n(x) - L_{n-1}(x)). \quad (\text{B.11})$$

S využitím (B.10) také dostaneme

$$\begin{aligned} L'_n(x) - L'_{n-1}(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[ \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right] \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \left[ \frac{n}{n-k} - 1 \right] \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \frac{x^k}{k!} = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{x^k}{k!} = -L_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Máme tedy další rekurentní formuli

$$L'_n(x) - L'_{n-1}(x) + L_{n-1}(x) = 0. \quad (\text{B.12})$$

Z formulí (B.11) a (B.12) dostaneme

$$\frac{n}{x} (L_n(x) - L_{n-1}(x)) = L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x),$$

tedy

$$L_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)L_{n-1}(x) + \frac{x}{n}L'_{n-1}(x), \quad (\text{B.13})$$

což je formule pro výpočet Čebyševova-Laguerreova polynomu pomocí Čebyševova-Laguerreova polynomu stupně nižšího a jeho derivace. Napišeme-li tuto formuli pro  $n+1$  místo pro  $n$  a za  $L'_n$  dosadíme z (B.11), dostaneme

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x) + \frac{x}{n+1}\frac{n}{x}(L_n(x) - L_{n-1}(x)).$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

Tento vzorec lze použít k postupnému výpočtu Čebyševových-Laguerreových polynomů z prvních dvou

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

## B.2.4 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

Derivováním rovnice (B.11) dostaneme

$$L_n''(x) = -\frac{n}{x^2}(L_n(x) - L_{n-1}(x)) + \frac{n}{x}(L'_n(x) - L'_{n-1}(x)).$$

Do této rovnice dosadíme z (B.12) za výraz  $L'_n(x) - L'_{n-1}(x)$  a upravíme:

$$\begin{aligned} xL_n''(x) &= -\frac{n}{x}(L_n(x) - L_{n-1}(x)) - nL_{n-1}(x), \\ xL_n''(x) &= -\frac{n}{x}L_n(x) + \left(\frac{n}{x} - n\right)L_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Za výraz  $L_{n-1}(x)$  v poslední rovnici dosadíme z (B.11) a dostaneme

$$xL_n''(x) = -\frac{n}{x}L_n(x) + \frac{n(1-x)}{x} \left(-\frac{x}{n}L'_n(x) + L_n(x)\right),$$

po úpravě

$$xL_n''(x) = (x-1)L'_n(x) - nL_n(x).$$

To znamená, že Čebyševovy-Laguerreovy polynomy  $L_n$  jsou řešením diferenciální rovnice

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$(xe^{-x}y')' + ne^{-x}y = 0.$$

Čebyševovy-Laguerreovy polynomy jsou řešením této rovnice s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}y(x) = 0.$$

## B.2.5 Věta (Orthonormalita Čebyševových-Laguerrových polynomů)

Pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy platí

$$\int_0^{\infty} L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}.$$



D.: Pro každé  $0 < l < n$  platí

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} (e^{-x}x^n) &= \frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (k+n)(k+n-1)\cdots(k+l+1)x^{k+l} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(k+n)!}{(k+l)!} x^{k+l}, \end{aligned}$$

takže

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} (e^{-x}x^n) = 0; \quad (\text{B.14})$$

také platí  $\frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} (e^{-x}x^n) = P(x)e^{-x}$ , kde  $P(x)$  je nějaký polynom, takže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L_m(x) \frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} (e^{-x}x^n) = 0 \quad (\text{B.15})$$

pro každé  $m \in \mathbb{N}$ .

Nechť pro určitost je  $m \leq n$ . Uvažujme integrál

$$J = \int_0^{\infty} L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} L_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x}x^n) dx.$$

K jeho výpočtu použijeme  $m$  krát metodu per partes a vztahy (B.14), (B.15):

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{n!} \left( \left[ L_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x}x^n) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} L'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x}x^n) dx \right) = \\ &= -\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} L'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x}x^n) dx = \dots = \frac{(-1)^m}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^m}{dx^m} L_m(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x}x^n) dx. \end{aligned}$$

S využitím B.2.2 dostaneme

$$J = \frac{(-1)^m}{n!} \int_0^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{m}{m} m! \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x}x^n) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x}x^n) dx.$$

Je-li  $m = n$ , pak podle B.4.2 je

$$J = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx = \frac{1}{n!} \Gamma(n+1) = \frac{1}{n!} n! = 1,$$

Jeli  $m < n$ , pak podle (B.14) a (B.14) je

$$J = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (e^{-x}x^n) \right]_0^{\infty} = 0.$$

□

Z věty plyne, že funkce

$$\psi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru  $\mathcal{L}^2(0, \infty)$ .

## B.2.6 Zobecněné Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

Zobecněný Čebyševův-Laguerreův polynom stupně  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je pro všechna reálná  $x > 0$  a  $s > -1$  definován vztahem

$$Q_n^s(x) = \frac{e^x}{n!} x^{-s} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+s}).$$

Tyto polynomy jsou řešením diferenciální rovnice

$$xy''(x) + (s+1-x)y'(x) + ny(x) = 0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$(x^{s+1}e^{-x}y')' + ne^{-x}x^s y = 0.$$

Zobecněné Čebyševovy-Laguerreovy polynomy splňují rekurentní formule

$$(n+1)Q_{n+1}^s(x) = (2n+s+1-x)Q_n^s(x) - (n+s)Q_{n-1}^s(x)$$

$$\frac{d}{dx}Q_n^s(x) = \frac{1}{x} (nQ_n^s(x) - (n+s)Q_{n-1}^s(x)),$$

$$Q_n^{s+1}(x) - Q_{n-1}^{s+1}(x) = Q_n^s(x),$$

$$\frac{d}{dx}Q_n^s(x) = -Q_{n-1}^{s+1}(x)$$

a rovnici

$$\int_0^\infty Q_m^s(x)Q_n^s(x)e^{-x}x^s dx = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+s+1)}{n!}, & m = n; \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

přítom  $\Gamma(n+s+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n+s} dt$ , sr. B.4. Z poslední rovnice plyne, že funkce

$$\Phi_n^s(x) = x^{s/2}e^{-x/2} \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+s+1)}} Q_n^s(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tvorí ortonormální posloupnost v prostoru  $\mathcal{L}^2(0, \infty)$ .

## B.3 Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

### B.3.1 Definice

Čebyševův-Hermiteův polynom stupně  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je pro každé  $x \in \mathbb{R}$  definován vztahem

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Zejména

$$\begin{array}{lll} H_0(x) = 1 & H_2(x) = 4x^2 - 2 & H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_1(x) = 2x & H_3(x) = 8x^3 - 12x & H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{array}$$

### B.3.2 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím Leibnizovy formule pro výpočet vyšší derivace součinu funkcí dostaneme pro každé  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} = (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (-2xe^{-x^2}) = 2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (xe^{-x^2}) = \\ &= 2(-1)^n e^{x^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} x \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-x^2} = 2(-1)^n e^{x^2} \left[ \binom{n}{0} x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + \binom{n}{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right] = \\ &= 2x(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - 2n(-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \end{aligned}$$

tedy

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \quad (\text{B.16})$$

Této rovnice lze využít k postupnému výpočtu Čebyševových-Hermiteových polynomů pomocí prvních dvou.

Dále platí

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= \frac{d}{dx} \left[ (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] = 2x(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} = \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Odtud s využitím (B.16) dostaneme

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad (\text{B.17})$$

tj. vyjádření derivace polynomu  $H_n$  pomocí polynomu nižšího stupně.

### B.3.3 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím vztahů (B.17) a (B.16) dostaneme

$$\begin{aligned} H''_n(x) &= (2nH_{n-1}(x))' = (2xH_n(x) - H_{n+1}(x))' = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H'_{n+1}(x) = \\ &= 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - 2(n+1)H_n(x) = 2xH'_n(x) - 2nH_n(x). \end{aligned}$$

Pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je tedy Čebyševův-Hermiteův polynom  $H_n(x)$  řešením diferenciální rovnice

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0, \quad (\text{B.18})$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left( e^{-x^2} y' \right)' + 2ne^{-x^2} y = 0.$$

Poznamenejme ještě, že Čebyševův-Hermiteův polynom je řešením rovnice (B.18) s okrajovými podmínkami

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} y(x) = 0.$$

### B.3.4 Věta (Orthogonalita Čebyševových-Hermiteových polynomů)

Pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

**D.:** Pro určitost budeme předpokládat, že  $m \leq n$ . Označme

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx.$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme  $m$  krát metodu per partes; přitom využijeme (B.17) a skutečnost, že pro libovolný polynom  $P$  platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} P(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} J &= (-1)^n \left( \left[ H_m(x) e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \right) = \\ &= (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx = (-1)^{n-2} 2m 2(m-1) \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-2}(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} dx = \\ &= \dots = (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Je-li  $m < n$ , pak

$$J = (-1)^{n-m} 2^m m! \left[ \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0;$$

je-li  $m = n$ , pak podle (B.21) je

$$J = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

□

Z věty plyne, že funkce

$$\psi_n = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru  $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ .

### B.3.5 Rekurentní vztahy pro koeficienty Čebyševových-Hermiteových polynomů

Hledáme řešení rovnice (B.18) ve tvaru mocninné řady  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x^k$ .

Platí

$$\begin{aligned} 2ny(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2na_{nk} x^k, \\ 2xy'(x) &= 2x \sum_{k=0}^{\infty} ka_{nk} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2ka_{nk} x^k, \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_{nk} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_{nk} x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{n(k+2)} x^k. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (B.18) dostaneme

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{n(k+2)} - 2ka_{nk} + 2na_{nk}] x^k = 0,$$

a tedy

$$a_{n(k+2)} = \frac{2(n-k)}{(k+2)(k+1)} a_{nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n-2.$$

## B.4 Funkce $\Gamma$

### B.4.1 Poznámky

1. Nevlastní integrál  $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  absolutně konverguje pro každé  $x > 0$ .

**D.:** Je-li  $x \geq 1$ , integrál  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$  není nevlastní.

Je-li  $x < 1$ , vezmeme  $\delta \in (0, x)$ . Pak  $\lim_{t \rightarrow 0+} t^{1-\delta} |e^{-t} t^{x-1}| = \lim_{t \rightarrow 0+} e^{-t} t^{x-\delta} = 0$  a podle limitního srovnávacího kriteriia pro nevlastní integrály druhého druhu a vzhledem k tomu, že nevlastní integrál  $\int_0^1 t^{-k} dt$  konverguje pro  $k < 1$ , také nevlastní integrál  $\int_0^1 |e^{-t} t^{x-1}| dt$  konverguje.

Dále je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((x+1) \ln t - t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \left( (x+1) \ln \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) = - \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\tau(x+1) \ln \tau + 1}{\tau} = -\infty,$$

neboť podle de l'Hospitalova pravidla platí

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \tau \ln \tau = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\ln \tau}{\frac{1}{\tau}} = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\tau}}{-\frac{1}{\tau^2}} = - \lim_{\tau \rightarrow 0+} \tau = 0,$$

takže podle věty o limitě složené funkce dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 |e^{-t} t^{x-1}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{x+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(x+1) \ln t - t} = 0 < \infty.$$

Podle limitního srovnávacího kriteriia pro nevlastní integrály prvního druhu a z toho, že  $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$  konverguje, nyní dostáváme, že také integrál  $\int_1^{\infty} |e^{-t} t^{x-1}| dt$  konverguje.  $\square$

2. Pro  $x > 0$  položme

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (\text{B.19})$$

Pro každé  $x > 0$  a každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  pak platí

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1) \cdots (x+n)}. \quad (\text{B.20})$$

**D.:** Úplnou indukcí:

Integrací „per partes“ dostaneme  $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -[e^{-t} t^x]_{t=0}^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x)$ , takže (B.20) platí pro  $n = 0$ .

Podobně  $\Gamma(x+n+2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+n+1} dt = -[e^{-t} t^{x+n+1}]_{t=0}^{\infty} + (x+n+1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+n} dt = (x+n+1)\Gamma(x+n+1)$ , což je indukční krok.  $\square$

Podle (B.19) je

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -[e^{-t}]_0^{\infty} = 1.$$

Z (B.20) nyní pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  plyne

$$1 = \Gamma(1) = \frac{\Gamma(n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} = \frac{\Gamma(n+2)}{(n+1)!}, \quad \text{tj. } \Gamma(n+2) = (n+1)!,$$

tedy pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

## B.4.2 Definice

Funkce  $\Gamma$  je pro každé  $x > 0$  definována vztahem (B.19), pro  $x < 0$ ,  $x \notin \mathbb{Z}$  je funkce  $\Gamma$  definována vztahem (B.20), kde za  $n$  vezmeme  $[-x] = -[x] - 1$ , t.j.

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x - [x])}{x(x+1) \cdots (x - [x] - 1)}.$$

$\text{Dom } \Gamma = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ .

## B.4.3 Věta

1. Pro každé  $x \in \text{Dom } \Gamma$  platí

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{neboli} \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

a pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2) \cdots (x-n)\Gamma(x-n).$$

2. Pro každé  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  platí

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

D.:

1. Pro  $x > 0$  byl první vztah dokázán v B.4.1.2, pro  $x \in (-1, 0)$  je podle definice  $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ , což je první vztah a pro  $x < -1$  je

$$x\Gamma(x) = x \frac{\Gamma(x - [x])}{x(x+1) \cdots (x - [x] - 1)} = \frac{\Gamma(x+1 - [x+1])}{(x+1)(x+2) \cdots (x+1 - [x+1] - 1)} = \Gamma(x+1),$$

což je opět první vztah. Ten druhý z něho plyne indukcí.

2. Nechť  $x \in (0, 1)$ . Pak

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^\infty e^{-s} s^{-x} ds = \iint_{[0, \infty) \times [0, \infty)} e^{-(t+s)} s^{-x} t^{x-1} ds dt.$$

Položíme  $u = s+t$ ,  $v = \frac{t}{s}$ , neboli  $s = \frac{u}{v+1}$ ,  $t = \frac{uv}{v+1}$ . Podle věty o transformaci dvojného integrálu dostaneme

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{v+1}{u}\right)^x \left(\frac{uv}{v+1}\right)^x \frac{v+1}{uv} \frac{u}{(v+1)^2} du \right) ds = \\ &= \int_0^\infty e^{-u} du \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1} dv = \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1} dv. \end{aligned}$$

Podle známého vzorce z teorie integrálu [Jarník, I2, str. 277–281] je

$$\int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1} dv = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Nechť  $x > 1$ . Pak podle 1. je  $\Gamma(x) = (x-1)(x-2) \cdots (x-[x])\Gamma(x-[x])$ .  $1-x < 0$ , takže podle definice

$$\Gamma(1-x) = \frac{\Gamma(1-x+[x])}{(1-x)(2-x) \cdots ([x]-x)} = \frac{(-1)^{[x]}\Gamma(1-x+[x])}{(x-1)(x-2) \cdots (x-[x])},$$

$x - [x] \in (0, 1)$ , takže podle již dokázaného je

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= (-1)^{[x]}\Gamma(x-[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin \pi(x-[x])} = \\ &= (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin \pi x \cos \pi[x] - \cos \pi x \sin \pi[x]} = (-1)^{[x]}\frac{\pi}{(-1)^{[x]}\sin \pi x} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.\end{aligned}$$

Nechť  $x < 0$ . Pak podle definice je  $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)}$  a podle 1. je

$$\Gamma(1-x) = -x(-x-1)\cdots(-x+1+[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]}x(x+1)\cdots(x-[x]-1)\Gamma(1-x+[x]).$$

Opět  $x - [x] \in (0, 1)$  a podle již dokázaného

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = (-1)^{[x]}\Gamma(x-[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin \pi(x-[x])} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

□

Známe-li  $\Gamma(x)$  pro  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ , lze podle B.4.3 vypočítat  $\Gamma(x)$  pro jakékoliv  $x \in \text{Dom } \Gamma$ . Již víme, že  $\Gamma(1) = 1$ . Položíme-li v B.4.3.2  $x = \frac{1}{2}$ , dostaneme

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi \quad \text{neboli} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Odtud také plyne

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (\text{B.21})$$

Podle vět z teorie integrálů závislých na parametrech platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \infty, \quad \text{neboť} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} = 1 > 0,$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

#### B.4.4 Logaritmická derivace funkce $\Gamma$

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Omezíme se na  $\text{Dom } \psi = (0, \infty)$ .

Podle B.4.3 platí

$$\begin{aligned}\psi(x+1) &= \frac{1}{x} + \psi(x) \\ \psi(x) &= \psi(x-n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}, n < x \\ \psi(x+n) &= \psi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \\ \psi(1-x) - \psi(x) &= \pi \cotg \pi x\end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Tyto vztahy lze využít pro výpočet hodnot funkce  $\psi$ , známe-li  $\psi(x)$  pro  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

Podle vět z teorie integrálů závislých na parametrech platí pro  $x > 0$

$$\Gamma'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t dt. \quad (\text{B.23})$$

Položíme  $\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt = 0.5772157 \dots$  (Eulerova konstanta). Dosadíme-li v (B.22) 1 za  $x$ , dostaneme

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Platí (tzv. Frullaniho integrál)

$$\ln t = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi} - e^{-\xi t}}{\xi} d\xi. \quad (\text{B.24})$$

Dosadíme do (B.23) a dostaneme

$$\begin{aligned} \Gamma'(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \left( \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi} - e^{-\xi t}}{\xi} d\xi \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \left( e^{-\xi} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^{\infty} e^{-t(\xi+1)} t^{x-1} dt \right) d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \left( e^{-\xi} \Gamma(x) - \int_0^{\infty} e^{-t(\xi+1)} t^{x-1} dt \right) d\xi. \end{aligned}$$

Ve vnitřním integrálu zavedeme substituci  $u = t(\xi + 1)$  a dostaneme

$$\int_0^{\infty} e^{-t(\xi+1)} t^{x-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \left( \frac{u}{\xi+1} \right)^{x-1} \frac{du}{\xi+1} = \frac{1}{(\xi+1)^x} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du = \frac{1}{(\xi+1)^x} \Gamma(x),$$

takže

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x) \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} (e^{-\xi} - (\xi+1)^{-x}) d\xi = \Gamma(x) \left( \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi - \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi(\xi+1)^x} \right),$$

což znamená, že

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi - \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi(\xi+1)^x}.$$

Ve druhém integrálu zavedeme substituci  $\xi + 1 = e^t$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi(\xi+1)^x} = \int_0^{\infty} \frac{e^t dt}{(e^t - 1)e^{tx}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} dt$$

a v prvním přeznačíme integrační proměnnou. Dostaneme

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right) dt. \quad (\text{B.25})$$

Zejména pro  $x = 1$  dostaneme

$$-\gamma = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

Odečteme-li poslední dvě rovnice, dostaneme

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{1 - e^{-t}} dt.$$

Zavedeme substituci  $\eta = e^{-t}$ :

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - \eta^{x-1}}{1 - \eta} d\eta. \quad (\text{B.26})$$



Bud'  $s \in (0, 1)$  libovolné číslo. Funkce  $\eta \mapsto \eta - \eta^x$  je na intervalu  $[0, s]$  spojitá, takže podle první Weierstrassovy věty je na tomto intervalu ohraničená. Existuje tedy konstanta  $c \geq 0$  taková, že

$$|\eta^n - \eta^{n+x-1}| = |\eta^n| |\eta - \eta^x| \leq s^n c$$

pro každé  $n \geq 1$  a každé  $\eta \in [0, s]$ . Geometrická řada  $\sum_{n=+}^{\infty} cs^n$  konverguje. Podle Weierstrassova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\eta^n - \eta^{n+x-1}) = 1 - \eta^{x-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (\eta^n - \eta^{n+x-1})$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na intervalu  $[0, s]$ . Odtud plyne, že následující výpočet je korektní.

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{1 - \eta^{x-1}}{1 - \eta} d\eta &= \int_0^s \left( (1 - \eta^{x-1}) \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \right) d\eta = \int_0^s \sum_{n=0}^{\infty} (\eta^n - \eta^{n+x-1}) d\eta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s (\eta^n - \eta^{n+x-1}) d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Přitom poslední řada konverguje stejnoměrně na intervalu  $[0, s]$ ; vzhledem k tomu, že  $s$  bylo libovolné číslo z intervalu  $(0, 1)$ , tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu  $[0, 1)$ . Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}$$

konverguje podle Cauchyova-Maclaurinova Kritéria. Z B.27 nyní plyne

$$\int_0^1 \frac{1 - \eta^{x-1}}{1 - \eta} d\eta = \lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{s \rightarrow 1^-} \left( \frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right).$$

Odtud a z B.26 dostáváme vyjádření logaritmické derivace funkce  $\Gamma$  ve tvaru

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right). \quad (\text{B.28})$$

#### B.4.5 Rozvoj funkce $\Gamma$ ve Weierstrassův nekonečný součin

Podle (B.28) je

$$\frac{d}{dt} \ln \Gamma(t) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+t} \right).$$

Integrujeme-li tuto rovnost podle  $t$  v mezích od 1 do  $x+1$ , dostaneme

$$\ln \Gamma(x+1) = -\gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n} - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \right).$$

Odtud dostaneme

$$\Gamma(x+1) = e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{x}{n}} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}, \quad \frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{x}{n}} \left( 1 + \frac{x}{n} \right).$$

### B.4.6 Asymptotické vyjádření funkce $\Gamma$

Z (B.25) s využitím (B.24) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(\xi+1)}{\Gamma(\xi+1)} &= \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t\xi}e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t\xi}}{e^t-1} \right) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t\xi}}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t\xi} dt - \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) e^{-t\xi} dt = \ln \xi + \frac{1}{2\xi} - \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) e^{-t\xi} dt. \end{aligned}$$

Zintegrujeme tuto rovnost podle  $\xi$  v mezích od 1 do  $x$ :

$$\ln \Gamma(x+1) - \ln \Gamma(2) = x \ln x - x + 1 + \frac{1}{2} \ln x - \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt.$$

Při označení  $f(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) \frac{1}{t}$  a s využitím  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $\Gamma(2) = 1$  máme

$$\ln \Gamma(x) = \left( x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + 1 - \int_0^{\infty} f(t)e^{-t} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-tx} dt. \quad (\text{B.29})$$

Označme

$$I = \int_0^{\infty} f(t)e^{-t} dt, \quad J = \int_0^{\infty} f(t)e^{-t/2} dt, \quad \omega(x) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-tx} dt.$$

Platí

$$\begin{aligned} J - I &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-t/2} dt - \int_0^{\infty} f(t)e^{-t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-t/2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{2}\right) e^{-t/2} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{t} + \frac{1}{e^{t/2}-1} \right) \frac{2}{t} \right) e^{-t/2} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{t} + \frac{1 - (e^{t/2} + 1)}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-t/2}}{t} dt = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

takže (při výpočtu využijeme (B.24))

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\infty} \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) e^{-t} + \frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t} = \\
&= \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} + \frac{e^{-t} - 1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-t}(1 - e^t)}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t} = \\
&= \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} \right) \frac{dt}{t} = \\
&= \int_0^{\infty} \left( \left( \frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-t/2}}{2} \right) \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} \right) dt = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{2(e^{-t/2} - e^{-t}) - t(2e^{-t} - e^{-t/2})}{2t^2} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} dt = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{(-e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t/2})t - (e^{-t} - e^{-t/2})}{t^2} dt + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} dt - \frac{1}{2} \ln 2 = \left[ \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2} \ln 2 = \\
&= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{2} \ln 2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{2}e^{-t/2} + e^{-t} \right) - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Položíme-li v (B.29)  $x = \frac{1}{2}$ , dostaneme

$$\ln \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} - I + J,$$

což spolu s předchozím výsledkem dá

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi.$$

Dosadíme do (B.29) a dostaneme

$$\ln \Gamma(x) = \left( x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \omega(x).$$

Funkce  $f$  je na intervalu  $(0, \infty)$  klesající,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  a

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{te^t - t - 2e^t + 2 + 2t}{2t^2(e^t - 1)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t + te^t - 2e^t + 1}{4t(e^t - 1) + 2t^2e^t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-e^t + e^t + te^t}{(4 + 4t)e^t + (4t + 2t^2)e^t - 4} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t + te^t}{(8 + 4t + 4 + 8t + 2t^2)e^t} = \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

což znamená, že

$$|\omega(x)| = \left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-tx} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-tx} dt \leq \frac{1}{12} \int_0^{\infty} e^{-tx} dt = -\frac{1}{12x} [e^{-tx}]_0^{\infty} = \frac{1}{12x},$$

z čehož plyne, že  $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega(x) = 0$ , takže pro velká  $x$  lze psát

$$\ln \Gamma(x) \approx \left( x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi, \quad \text{neboli} \quad \Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (\text{B.30})$$

Odtud dostaneme

$$n! = \Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-1}$$

a poněvadž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-1}}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{e} e \cdot 1 = 1,$$

lze psát

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

pro velká  $n$  (Stirlingova formule).

## B.5 Besselovy funkce

### B.5.1 Definice

Obyčejná lineární homogenní rovnice druhého řádu

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \quad (\text{B.31})$$

kde  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (0, \infty)$  se nazývá *Besselova rovnice řádu  $\nu$* .

Rovnici (B.31) lze ekvivalentně zapsat

$$x(xy'(x))' + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0.$$

### B.5.2 Řešení rovnice (B.31) Frobeniovou metodou

Hledáme nějaké řešení rovnice (B.31). Budeme předpokládat, že je tvaru

$$y(x) = a_0 x^\sigma + a_1 x^{\sigma+1} + a_2 x^{\sigma+2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\sigma+k}, \quad (\text{B.32})$$

kde  $\sigma \in \mathbb{R}$  je tzv. *charakteristický součinitel*, jehož hodnotu určíme později. Pak je

$$\begin{aligned} x^2 y'' &= a_0 \sigma(\sigma-1)x^\sigma + a_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)(\sigma+k-1)x^{\sigma+k}, \\ xy'(x) &= a_0 \sigma x^\sigma + a_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)x^{\sigma+k}, \\ x^2 y(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{\sigma+k}, \\ -\nu^2 y(x) &= -\nu^2 a_0 x^\sigma - \nu^2 a_1 x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-\nu^2 a_k) x^{\sigma+k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$a_0(\sigma^2 - \nu^2)x^\sigma + a_1(\sigma^2 + 2\sigma + 1 - \nu^2)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k(\sigma^2 + 2\sigma k + k^2 - \nu^2) + a_{k-2})x^{\sigma+k} = 0,$$

takže (B.32) je formálním řešením Besselovy rovnice (B.31) pokud platí rovnosti

$$\begin{aligned} a_0(\sigma^2 - \nu^2) &= 0 \\ a_1(\sigma^2 + 2\sigma + 1 - \nu^2) &= 0 \\ a_k(\sigma^2 + 2\sigma k + k^2 - \nu^2) + a_{k-2} &= 0, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

První z těchto rovností je splněna, pokud  $\sigma$  a  $\nu$  vyhovují tzv. *charakteristické rovnici*

$$\sigma^2 - \nu^2 = 0, \quad \text{tj. } \sigma = \pm \nu. \quad (\text{B.33})$$

Položíme  $\sigma = \nu$  a dosadíme do zbývajících rovností. Dostaneme

$$a_1(2\nu + 1) = 0 \quad (\text{B.34})$$

$$a_k(2\nu + k)k = a_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (\text{B.35})$$

Rovnost (B.34) a rovnosti (B.35) s lichými indexy  $k$ , tj.  $k = 2m + 1$  pro vhodné  $m \in \mathbb{N}$ , jsou zřejmě splněny, pokud  $a_{2m+1} = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Najdeme podmínky, za jakých jsou splněny rovnosti (B.35) se sudými indexy  $k$ . Pokud  $2\nu + k \neq 0$  pro  $k = 2, 4, 6, \dots, 2m$ , pak

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -\frac{a_{2(m-1)}}{2^2 m(m+\nu)} = -\frac{-\frac{a_{2(m-2)}}{2^2(m-1)(m-1+\nu)}}{2^2 m(m+\nu)} = \frac{a_{2(m-2)}}{2^4 m(m-1)(m+\nu)(m-1+\nu)} = \dots = \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m(m-1) \cdots 1 \cdot (m+\nu)(m-1+\nu) \cdots (1+\nu)} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+\nu)}{2^{2m} m!(m+\nu)(m-1+\nu) \cdots (1+\nu) \Gamma(1+\nu)} = \\ &= \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+\nu)}{2^{2m} \Gamma(m+1) \Gamma(m+\nu+1)}. \end{aligned}$$

Tento výpočet naznačuje, že lze volit

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} \Gamma(m+1) \Gamma(m+\nu+1)}.$$

Pokud  $2\nu + k = 0$  pro nějaké  $k = 2m_1$ , pak  $2\nu + k$  je celé záporné číslo pro všechna  $k = 2, 4, 6, \dots, 2(m_1 - 1)$  a  $2\nu + k > 0$  pro všechna  $k = 2(m_1 + 1), 2(m_1 + 2), \dots$ . Tedy  $1 + \nu, 2 + \nu, \dots, m_1 + \nu$  nejsou v definičním oboru funkce  $\Gamma$  a  $m_1 + \nu + 1, m_1 + \nu + 2, \dots$  v něm jsou. V takovém případě lze volit

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2(m_1-1)} = 0, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} \Gamma(m+1) \Gamma(m+\nu+1)} \text{ pro } m \geq m_1.$$

Snadno ověříme, že při uvedené volbě budou rovnosti (B.35) splněny pro každý sudý index  $k$ .

Formální řešení rovnice (B.31) je tedy tvaru

$$y(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (\text{B.36})$$

kde

$$k_0 = \begin{cases} 0, & \nu \notin (-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}, \\ -\nu, & \nu \in (-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Abychom ověřili, že se jedná o řešení, je potřeba ukázat, že tato řada konverguje pro každé  $x > 0$ . Pro poloměr konvergence  $r$  mocninné řady

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} x^{2k}$$

podle Cauchyovy-Hadamardovy věty a s využitím (B.30) platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2\pi(k+1)^{k+1/2} (k+\nu+1)^{k+\nu+1/2} e^{-2k+\nu-1}}} = 0, \end{aligned}$$

takže tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé  $x \in \mathbb{R}$ . Řada (B.36) tedy konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé  $x > 0$ . (Pro  $x = 0$  nemusí být  $y(x) = x^\nu S(x)$  vůbec definována.)

### B.5.3 Definice

Funkce

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

se nazývá *Besselova funkce prvního druhu řádu  $\nu$* . Je-li pro nějaké  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  číslo  $k + \nu + 1$  celé nekladné (tj.  $k + \nu + 1 \notin \text{Dom } \Gamma$ ), klademe  $k$ -tý člen uvažované řady roven 0.

Označme

$$u_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Pak je  $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)$ .

### B.5.4 Poznámka

$$u_\nu(0) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad u'_\nu(0) = 0.$$

**D.:** První vzorec plyne z toho, že  $\Gamma(1) = 1$ .

$$\begin{aligned} u'_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}. \end{aligned}$$

(Poslední rovnost plyne z faktu, že  $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$ .)  $\square$

### B.5.5 Vlastnosti Besselovy funkce prvního druhu

1. Funkce  $J_\nu(x)$  je spojitá na  $(0, \infty)$ .

**D.:** Plyne z toho, že  $u_\nu(x)$  jakožto součet mocninné řady je funkce spojitá.  $\square$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu > 0 \text{ nebo } \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \infty(-1)^{[\nu]}, & \nu \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z} \end{cases}.$$

**D.:** Plyne bezprostředně z [B.5.4](#).  $\square$

3. Pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  pro všechna  $x \in (0, \infty)$ .

$$\mathbf{D.}: J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x).$$

$\square$

4.  $(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$ ,  $(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ .

**D.:** Platí:

$$\begin{aligned}
(x^{-\nu} J_{\nu}(x))' &= \left( 2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right)' = \\
&= 2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\
&= 2^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\
&= 2^{-\nu} \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)} = \\
&= 2^{-\nu} \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\
&= -2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\
&= -x^{-\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\
&= -x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu+1)+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1}
\end{aligned}$$

Druhý vztah lze dokázat analogicky.  $\square$

$$5. J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x), \quad J'_{\nu}(x) = \frac{1}{2}(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)).$$

První formule (rekurentní vzorec) umožňuje vypočítat  $J_{\nu+1}(x)$  ze znalosti  $J_{\nu}(x)$  a  $J_{\nu-1}(x)$ ; druhá formule je vzorec pro derivaci Besselovy funkce prvního druhu.

**D.:** První formuli z 4. vynásobíme  $x^{\nu}$ , druhou  $x^{-\nu}$  a rozepíšeme derivaci součinu. Tím dostaneme

$$J'_{\nu}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) = -J_{\nu+1}(x), \quad J'_{\nu}(x) + \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x).$$

Odečtením těchto rovnic dostaneme první formuli, sečtením druhou.  $\square$

6. Platí

$$\begin{aligned}
J_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \\
J_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.
\end{aligned}$$

$$7. J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

**D.:** Poněvadž podle [B.4.3](#) je pro každé  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) &= \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(k - \frac{2k-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2^k} \sqrt{\pi} = \\
&= \frac{(2k)!}{(2k)!! 2^k} \sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}} \sqrt{\pi},
\end{aligned}$$

kde  $(2k)!! = 2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2$ , tak platí  $\Gamma(k+1)\Gamma(k+\frac{1}{2}) = k! \frac{(2k)!}{k!2^{2k}} \sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}} \sqrt{\pi}$  a tedy

$$\begin{aligned} J_{-1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{aligned}$$

Druhý vztah se dokáže analogicky.  $\square$

Rekurentní formule uvedené v 5 spolu s vyjádřením funkcí  $J_0, J_1, J_{-n}, J_{-1/2}, J_{1/2}$  uvedenými v 6, 3 a 7 umožňují vypočítat Besselovy funkce 1. druhu libovolného celočíselného a poločíselného řádu.

### B.5.6 Věta (Nulové body Besselových funkcí celočíselného řádu)

Funkce  $J_n, n = 0, 1, 2, \dots$  má jednoduché nulové body  $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots$  takové, že

$$0 < x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{nk} = \infty$$

a posloupnost  $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$  nemá hromadné body. Funkce  $J_n, n = 1, 2, \dots$  má navíc  $n$ -násobný nulový bod  $x_{n0} = 0$ .

**D.:** Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, kap. XV.  $\square$

### B.5.7 Věta (Orthogonalita Besselových funkcí celočíselného řádu)

Besselovy funkce  $J_n, n = 0, 1, 2, \dots$  splňují pro každé  $a > 0$  a všechna  $k, l \in \mathbb{N}$  rovnost

$$\int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right) d\xi = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{1}{2}a^2 (J_{n+1}(x_{nk}))^2, & k = l \end{cases}$$

kde  $x_{nk}$  (resp.  $x_{nl}$ ) je  $k$ -tý (resp.  $l$ -tý) jednoduchý nulový bod funkce  $J_n$ .

**D.:** Položme  $f(\xi) = J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)$ ,  $g(\xi) = J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right)$ . Pak

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{x_{nk}}{a} J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right), \quad \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} = \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 J_n''\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right).$$

Poněvadž  $J_n$  je řešením Besselovy rovnice (B.31), platí

$$\begin{aligned} \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} &= \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 \left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^{-2} \left(-\frac{x_{nk}}{a}\xi J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) - \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right) J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{\xi^2} \left(\xi \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right) f(\xi)\right), \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) f(\xi) = 0.$$

Analogicky dostaneme

$$\frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dg(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) g(\xi) = 0.$$

První rovnost vynásobíme  $\xi g$ , druhou vynásobíme  $\xi f$  a odečteme je:

$$\xi (gf'' - fg'') + (gf' - fg') + \xi fg \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2\right) = 0.$$



Po úpravě

$$\xi(gf'' + g'f' - g'f' - fg'') + (gf' - fg') + \xi fg \frac{x_{nk}^2 - x_{nl}^2}{a^2} = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi}(\xi(gf' - fg')) = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \xi fg.$$

Integrací poslední rovnosti v mezích od 0 do  $a$  dostaneme

$$a(g(a)f'(a) - f(a)g'(a)) = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \int_0^a \xi f(\xi)g(\xi) d\xi.$$

Poněvadž  $f(a) = J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}a\right) = 0$  a  $g(a) = J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}a\right) = 0$ , platí

$$0 = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right) d\xi,$$

takže pro  $k \neq l$  je dokazovaná rovnost splněna.

Poněvadž  $J_n$  splňuje Besselovu rovnici (B.31), platí pro každé  $x > 0$  rovnost

$$x^2 J_n(x) = n^2 J_n(x) - x J_n'(x) - x^2 J_n''(x).$$

Integrací per partes s využitím této rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \int x(J_n(x))^2 dx &= \frac{1}{2}x^2(J_n(x))^2 - \int x^2 J_n(x)J_n'(x) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2(J_n(x))^2 - \int \left(n^2 J_n(x)J_n'(x) - x(J_n'(x))^2 - x^2 J_n''(x)J_n'(x)\right) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2(J_n(x))^2 - \int \left(\frac{n^2}{2}[(J_n(x))^2]' - \left[\frac{x^2}{2}(J_n'(x))^2\right]'\right) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2(J_n(x))^2 - \frac{n^2}{2}(J_n(x))^2 + \frac{x^2}{2}(J_n'(x))^2 = \frac{x^2}{2} \left((J_n(x))^2 + (J_n'(x))^2\right) - \frac{n^2}{2}(J_n(x))^2. \end{aligned}$$

Podle B.5.5.5 je  $(J_n(x))^2 + (J_n'(x))^2 = (J_n(x))^2 + (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x))^2$  a tento výraz je podle B.5.5.2 pro  $x$  z pravého okolí nuly ohraničený. To znamená, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} \left[(J_n(x))^2 + (J_n'(x))^2\right] = 0.$$

Dále podle B.5.5.2 je také

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(nJ_n(x))^2 = 0.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} \int_0^a \xi \left[J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right]^2 d\xi &= \frac{a^2}{x_{nk}^2} \int_0^{x_{nk}} x [J_n(x)]^2 dx = \\ &= \frac{a^2}{x_{nk}^2} \left[\frac{x_{nk}^2}{2} \left((J_n(x_{nk}))^2 + (J_n'(x_{nk}))^2\right) - \frac{n^2}{2}(J_n(x_{nk}))^2\right] = \frac{a^2}{2}(J_n'(x_{nk}))^2. \end{aligned}$$

Podle B.5.5.4 je

$$-x^{-n}J_{n+1}(x) = (x^{-n}J_n(x))' = -\frac{n}{x^{n+1}}J_n(x) + x^{-n}J_n'(x),$$

takže  $J_n'(x_{nk}) = -J_{n+1}(x_{nk})$ . Celkem tedy

$$\int_0^a \xi \left[J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right]^2 d\xi = \frac{a^2}{2}(J_{n+1}(x_{nk}))^2,$$

což je dokazovaná rovnost pro  $k = l$ .  $\square$

### B.5.8 Věta

Nechť  $\nu \in \mathbb{Z}$  a  $v$  je řešením Besselovy rovnice (B.31) lineárně nezávislé na  $J_\nu$ . Pak  $\left| \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) \right| = \infty$ .

D.: Označme

$$W = W(x) = W(x; J_\nu, v) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & v(x) \\ J'_\nu(x) & v'(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)v'(x) - J'_\nu(x)v(x)$$

wronskián funkcí  $J_\nu, v$ . S využitím faktu, že  $J_\nu$  a  $v$  jsou řešením rovnice (B.31) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W &= \frac{d}{dx}(J_\nu v' - J'_\nu v) = J'_\nu v' + J_\nu v'' - J''_\nu v - J'_\nu v' = J_\nu v'' - J''_\nu v = \\ &= J_\nu \frac{(\nu^2 - x^2)v - xv'}{x^2} - v \frac{(\nu^2 - x^2)J_\nu - xJ'_\nu}{x^2} = \frac{1}{x}(J'_\nu v - J_\nu v') = -\frac{1}{x}W. \end{aligned}$$

Wronskián  $W$  tedy splňuje diferenciální rovnici  $W' = -\frac{W}{x}$ , což znamená, že

$$W(x) = \frac{C}{x},$$

kde  $C$  je nějaká nenulová konstanta (neboť funkce  $J_\nu, v$  jsou nezávislé). Dále platí

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v}{J_\nu} \right) = \frac{v'J_\nu - vJ'_\nu}{J_\nu^2} = \frac{W}{J_\nu^2} = \frac{C}{xJ_\nu^2}.$$

Buď  $\alpha > 0$  libovolná konstanta. Integrací poslední rovnosti v mezích od  $x$  do  $\alpha$  dostaneme

$$\frac{v(x)}{J_\nu(x)} = D - C \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2},$$

kde  $D = \frac{v(\alpha)}{J_\nu(\alpha)}$  je konstanta. Odtud plyne, že pro každé  $x \in (0, \alpha)$  platí

$$v(x) = J_\nu(x) \left( D - C \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} \right)$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = D \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) - C \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2}. \quad (\text{B.37})$$

Buď  $\varepsilon > 0$  libovolné. Položme  $\eta = \begin{cases} (1 + \varepsilon)^2, & \nu = 0 \\ \varepsilon^2, & \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$ . Pak  $\eta > 0$  a podle B.5.5.2 k němu existuje

$\delta > 0$  takové, že pro všechna  $\xi \in (0, \delta)$  je  $(J_\nu(\xi))^2 < \eta$ . Odtud plyne, že pro  $x \in (0, \delta)$  platí

$$\int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} = \int_x^\delta \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} + \int_\delta^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} > \frac{1}{\eta} \int_x^\delta \frac{d\xi}{\xi} + \int_\delta^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{\delta}{x} + \int_\delta^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2},$$

tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} \geq \int_\delta^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} + \frac{1}{\eta} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{\delta}{x} = \infty.$$

Odtud vzhledem k B.5.5.2 a (B.37) dále plyne, že pro  $\nu = 0$  je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = (-\operatorname{sgn} C) \infty$$

a pro  $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  podle de l'Hospitalova pravidla a podle B.5.5.5 je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) &= -C \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} = -C \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2}}{\frac{1}{J_\nu(x)}} = -C \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x(J_\nu(x))^2}}{-\frac{J'_\nu(x)}{(J_\nu(x))^2}} = \\ &= -C \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xJ'_\nu} = -C \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x))}. \end{aligned}$$

Podle B.5.5.2 je funkce  $x \mapsto J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}$  v pravém okolí nuly ohraničená a tedy  $\left| \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) \right| = \infty$ .  $\square$

### B.5.9 Věta

Je-li  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , jsou Besselovy funkce prvního druhu  $J_\nu$  a  $J_{-\nu}$  řešením rovnice (B.31) a jsou lineárně nezávislé.

**D.:** Funkce  $J_\nu$ ,  $J_{-\nu}$  byly v B.5.2 nalezeny jako řešení rovnice (B.31). Stačí tedy ověřit tvrzení o nezávislosti. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že  $\nu > 0$ . Wronskián funkcí  $J_\nu$ ,  $J_{-\nu}$  je

$$\begin{aligned} W(x, J_\nu, J_{-\nu}) &= \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J'_\nu(x) = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x) \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x)\right)' - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x) \left(\left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)\right)' = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x) \left(-\frac{\nu}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1} u_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u'_{-\nu}(x)\right) - \\ &\quad - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x) \left(\frac{\nu}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} u_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u'_\nu(x)\right) = \\ &= u_\nu(x)u'_{-\nu}(x) - u_{-\nu}(x)u'_\nu(x) - \frac{2\nu}{x}u_\nu(x)u_{-\nu}(x). \end{aligned}$$

Podle B.5.4 pro  $\nu \notin \mathbb{Z}$  platí  $\left| \lim_{x \rightarrow 0^+} W(x, J_\nu, J_{-\nu}) \right| = \infty$ , což znamená, že pro nějaké  $x > 0$  je

$W(x, J_\nu, J_{-\nu}) \neq 0$  a tedy podle známé věty z teorie lineárních homogenních obyčejných diferenciálních rovnic funkce  $J_\nu$ ,  $J_{-\nu}$  tvoří fundamentální systém řešení rovnice (B.31).  $\square$

Pro  $\nu \notin \mathbb{Z}$  tedy Besselovy funkce prvního druhu  $J_\nu$  a  $J_{-\nu}$  tvoří fundamentální systém řešení rovnice (B.31). V případě  $\nu \in \mathbb{Z}$  máme pouze jedno báze řešení (sr. B.5.5.3).

### B.5.10 Definice

Funkce  $Y_\nu$  definovaná pro každé  $\nu \in \mathbb{R}$  a každé  $x \in (0, \infty)$  vztahem

$$Y_\nu(x) = \lim_{\xi \rightarrow \nu} \frac{J_\xi(x) \cos \pi \nu - J_{-\xi}(x)}{\sin \pi \xi}$$

se nazývá *Besselova funkce druhého druhu řádu  $\nu$* . (Někdy také *Neumannova funkce*.)

Pokud  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , je jmenovatel zlomku za limitou nenulový a tedy pro  $\nu \notin \mathbb{Z}$  lze psát

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}.$$

Je-li  $\nu = n \in \mathbb{Z}$ , jsou číselník i jmenovatel zlomku za limitou nulové a limitu lze tedy vypočítat podle de l'Hospitalova pravidla:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n} \right).$$

### B.5.11 Věta

Funkce  $Y_\nu$  je řešením rovnice (B.31) pro libovolné  $\nu \in \mathbb{R}$ . Pro wronskián funkcí  $J_\nu$  a  $Y_\nu$  platí  $W(x, J_\nu, Y_\nu) = \frac{2}{\pi x}$ . (Funkce  $J_\nu$  a  $Y_\nu$  tedy tvoří fundamentální systém řešení rovnice (B.31).)

D.: Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, str. 58–76.  $\square$

### B.5.12 Poznámka

Besselovy funkce druhého druhu splňují stejné vztahy, jako funkce prvního druhu:

$$\begin{aligned}(x^{-\nu}Y_\nu(x))' &= -x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x), \\(x^\nu Y_\nu(x))' &= x^\nu Y_{\nu-1}(x), \\Y_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x), \\Y_\nu'(x) &= \frac{1}{2}(Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x))\end{aligned}$$

# Příloha C

## Distribuce

### C.1.1 Základní pojmy

Nechť  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce  $n$  proměnných definovaná na celém prostoru  $\mathbb{R}^n$ . *Nosič funkce*  $\varphi$  definujeme jako uzávěr množiny  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}$  a značíme ho  $\text{Supp } \varphi$ .

Symbolem  $\mathcal{D}$  označíme množinu funkcí definovaných na  $\mathbb{R}^n$ , které zde jsou třídy  $C^\infty$  (mají spojité všechny parciální derivace libovolného řádu) a jejichž nosič je kompaktní množina.

Na množině  $\mathcal{D}$  definujeme metriku  $\rho$  vztahem

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} (\varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})) \right| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, (i_1, i_2, \dots, i_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \right\}.$$

Množinu  $\mathcal{D}$  s touto metrikou nazýváme *prostor testovacích funkcí*, jeho prvky nazýváme *testovací funkce*.

Zobrazení  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , pro které platí

$$T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi), \quad T(c\varphi) = cT(\varphi), \quad c \in \mathbb{R}$$

nazýváme *lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí*. Obraz funkce  $\varphi$  při zobrazení  $T$  budeme značit

$$T(\varphi), \quad T \cdot \varphi, \quad T\varphi.$$

Množinu všech lineárních funkcionálů  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *prostor duální k  $\mathcal{D}$*  a značíme ji  $\mathcal{D}'$ .

### C.1.2 Definice

Spojité lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí se nazývá *distribuce*.

Podrobněji: Zobrazení  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme distribuce, jestliže

$$(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}) \quad T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi,$$

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}) (\forall c \in \mathbb{R}) \quad T(c\varphi) = cT\varphi,$$

$$(\forall \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}) (\forall \varphi \in \mathcal{D}) \quad \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ v prostoru } (\mathcal{D}, \rho) \Rightarrow T\varphi_n \rightarrow T\varphi \text{ v } \mathbb{R} \text{ s přirozenou metrikou.}$$

### C.1.3 Příklady distribucí

1. Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce taková, že pro každou kompaktní množinu  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  existuje konečný integrál  $\int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  (tzv. *lokálně integrabilní funkce*). Definujeme  $T_f \in \mathcal{D}'$  vztahem

$$T_f \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

$T_f \varphi$  budeme také značit  $\langle f \mid \varphi \rangle$ , nebo podrobněji  $\langle f(\mathbf{x}) \mid \varphi(\mathbf{x}) \rangle$ .

Distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  taková, že existuje lokálně integrabilní funkce  $f$  pro niž  $T\varphi = \langle f \mid \varphi \rangle$  pro všechny  $\varphi \in \mathcal{D}$ , se nazývá *regulární distribuce*. Distribuce, která není regulární, se někdy nazývá *singulární*.

Každou funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  lze považovat za regulární distribuci. Tedy  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$ . Proto se distribuce někdy nazývají *zobecněné funkce*.

2. *Diracova distribuce*  $\delta$  přiřadí každé testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  hodnotu  $\varphi(0)$ . Diracova distribuce není regulární. Přesto se používá zápis

$$\langle \delta \mid \varphi \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}) \mid \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \varphi(0).$$

### C.1.4 Nosič distribuce

Řekneme, že distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  je na množině  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  *nulová*, jestliže  $T\varphi = 0$  pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  takovou, že  $\text{Supp } \varphi \subseteq \Omega$ .

*Nosič distribuce*  $T$  je nejmenší (vzhledem k množinové inklusi) uzavřená množina taková, že na jejím komplementu je  $T$  nulová.

### C.1.5 Základní operace v prostoru distribucí

- Součet distribucí  $T, S \in \mathcal{D}'$ :  
 $T + S \in \mathcal{D}'$  je distribuce, pro niž platí

$$(T + S)\varphi = T\varphi + S\varphi$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

- Násobení distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  funkcí  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  třídy  $C^\infty$ :  
Je-li  $\varphi \in \mathcal{D}$  testovací funkce, pak  $\varphi$  má kompaktní nosič. To znamená, že také funkce  $a\varphi$  má kompaktní nosič, tedy  $a\varphi \in \mathcal{D}$ .  
 $aT \in \mathcal{D}'$  je distribuce, pro niž platí

$$(aT)\varphi = T(a\varphi)$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

- Translace (posunutí) distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  o vektor  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ :  
Je-li  $\varphi \in \mathcal{D}$ , pak funkce  $\varphi_{\vec{h}}$  definovaná vztahem  $\varphi_{\vec{h}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} + \vec{h})$  má kompaktní nosič, je tedy také testovací funkcí.  
Translace distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  o  $\vec{h}$  je distribuce  $\tau_{\vec{h}}T \in \mathcal{D}'$ , pro niž platí

$$(\tau_{\vec{h}}T)\varphi = T\varphi_{\vec{h}}$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Pro regulární distribuci určenou funkcí  $f$  platí

$$(\tau_{\vec{h}}T_f)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x} + \vec{h})d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \vec{h})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Nechť  $\mathbf{x}_0 = 0 + \vec{h}$ . Translace Diracovy distribuce o vektor  $\vec{h}$ , je distribuce  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , pro niž platí

$$\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mid \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}) \mid \varphi(\mathbf{x} + \vec{h}) \rangle = \varphi(\mathbf{x}_0)$$

pro každou  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Tato distribuce se nazývá *Diracova distribuce soustředěná v bodě*  $\mathbf{x}_0$ .

### C.1.6 Derivování distribucí

Nechť  $f$  je diferencovatelná (a tedy lokálně integrabilní) funkce,  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Pak platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1}dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( [f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1}dx_n = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}dx_n = - \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

poněvadž  $\text{Supp}(f\varphi)$  je kompaktní.

Jako zobecnění této úvahy definujeme:

Parciální derivace podle první proměnné distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  je distribuce  $\frac{\partial}{\partial x_1}T$ , pro niž platí

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}T\right)\varphi = -T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$$

pro každou  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Obecně

$$\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}}T\right)\varphi = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n}T\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}}\varphi\right).$$

Každá distribuce má derivace libovolného řádu.

Každá lokálně integrabilní funkce  $f$  určuje regulární distribuci. Tato distribuce má derivaci libovolného řádu. V tomto smyslu lze říci, že každá lokálně integrabilní funkce  $f$  má derivaci libovolného řádu. Tato distribuce však obecně není funkcí ale distribucí. Nazýváme ji *distributivní derivací funkce  $f$* .

### C.1.7 Heavisidova skoková funkce (distribuce)

Funkce  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná vztahem

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

je lokálně integrabilní. Určuje tedy regulární distribuci, pro niž platí

$$\langle H | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Dále platí

$$\langle H' | \varphi \rangle = -\langle H | \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = -[\varphi(x)]_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta | \varphi \rangle,$$

tedy distributivní derivací funkce  $H$  je Diracova distribuce (soustředěná v bodě 0).

Obecně: Funkce  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná vztahem

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

určuje regulární distribuci:

$$\begin{aligned} \langle H | \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H(x_1, x_2, \dots, x_n)\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Poněvadž

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} H \mid \varphi \right\rangle &= (-1)^n \left\langle H \mid \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \varphi \right\rangle = \\
&= (-1)^n \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\
&= (-1)^n \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2 \partial x_3 \dots \partial x_n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]_{x_1=0}^\infty dx_2 dx_3 \dots dx_n = \\
&= -(-1)^n \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2 \partial x_3 \dots \partial x_n} \varphi(0, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n = \dots = \\
&= (-1)^{2n} \varphi(0, 0, \dots, 0) = \varphi(0, 0, \dots, 0),
\end{aligned}$$

je  $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} H = \delta$ .

### C.1.8 Distributivní derivace funkcí jedné proměnné

Nechť funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je třídy  $C^\infty$  na každém z intervalů  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$  a nechť každá její derivace je lokálně integrabilní. Tato funkce určuje regulární distribuci  $T_f$ .

Označme  $\sigma_m = \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(m)}(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f^{(m)}(x)$  a  $T'_f = \frac{\partial}{\partial x} T$ ,  $T''_f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T$  ...,  $T_f^{(k)} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} T$ .

Pro každou  $\varphi \in \mathcal{D}$  platí

$$\begin{aligned}
T'_f \varphi &= -\langle f(x) \mid \varphi'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^0 f(x) \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\
&= -[f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 f'(x) \varphi(x) dx - [f(x) \varphi(x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \\
&= \varphi(0) \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \\
&= \sigma_0 \varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \sigma_0 \langle \delta \mid \varphi \rangle + \langle f' \mid \varphi \rangle = \sigma_0 \langle \delta \mid \varphi \rangle + T_{f'} \varphi,
\end{aligned}$$

symbolicky

$$T'_f = \sigma_0 \delta + T_{f'}.$$

Obecně

$$T_f^{(k)} \varphi = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-m-1} \sigma_m \varphi^{(k-m-1)}(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) \varphi(x) dx,$$

Symbolicky

$$T_f^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m \delta^{(k-m-1)} + T_{f^{(k)}}.$$



### C.1.9 Konvergence distribucí

Řekneme, že posloupnost distribucí  $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}'$  konverguje pro  $k \rightarrow \infty$  k distribuci  $T \in \mathcal{D}'$  a píšeme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

jestliže pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  je  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k \varphi = T \varphi$  (v tomto případě jde o konvergenci číselných posloupností).

Nechť  $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}'$  je posloupnost distribucí taková, že pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  existuje limita posloupnosti čísel  $\{T_k \varphi\}_{k=1}^\infty$ . Definujme zobrazení  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  předpisem

$$T(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k \varphi.$$

Pak  $T$  je lineární (to plyne z linearitu každé z distribucí  $T_k$  a z linearitu operátoru limity posloupností) a spojitě (důkaz např. v: Laurent Schwartz: Théorie des distributions, Paris 1973). To znamená, že  $T$  je distribuce.

### C.1.10 $\delta$ -vytvorující posloupnosti

Nechť  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  je posloupnost lokálně integrabilních funkcí na  $\mathbb{R}^n$  takových, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_{f_k} = \delta$ , tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k | \varphi \rangle = \varphi(0)$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Pak  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  se nazývá  $\delta$ -vytvorující posloupnost, funkce  $f_k$  se nazývají *impulsní funkce*.

Příklady  $\delta$ -vytvorujících posloupností:

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \leq \frac{1}{2k} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2k} \end{cases}, \quad f_k(x) = \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \leq \frac{1}{k} \\ 0, & |x| > \frac{1}{k} \end{cases},$$

$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-kx^2/2}, \quad f_k(x) = \frac{\sin kx}{\pi x},$$

$$f_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_k}{x^2 + \alpha_k^2}, \text{ kde } \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \text{ je libovolná posloupnost kladných čísel taková, že } \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0,$$

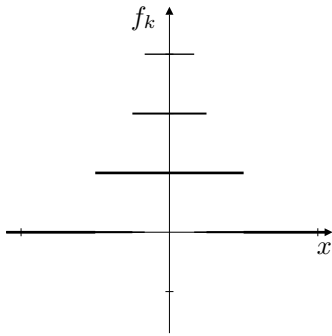
$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{m=1}^k \cos \frac{2\pi m}{\ell} x, & |x| \leq \frac{1}{2}\ell \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}\ell \end{cases}.$$

Na následujících obrázcích je znázorněno několik prvních členů některých  $\delta$ -vytvorujících posloupností. S rostoucím  $k$  se zmenšuje síla čáry.

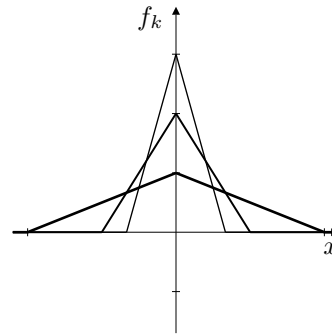
## Cvičení

- 1) Vypočítejte první a druhou distributivní derivaci funkce  $f(x) = |x|$ .
- 2) Nechť  $H$  je Heavisidova funkce a položme  $x_+ = xH(x)$ ,  $x_- = -xH(-x)$ . Vypočítejte distributivní derivace těchto funkcí.
- 3) Určete distribuci  $x^n \delta^{(n)}(x)$

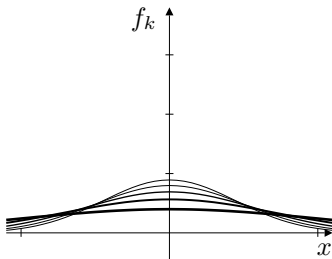
**Výsledky:** 1)  $\text{sgn } x$ ,  $2\delta(x)$  2)  $x'_+ = H(x)$ ,  $x'_- = -H(-x)$  3)  $(-1)^n n! \delta(x)$



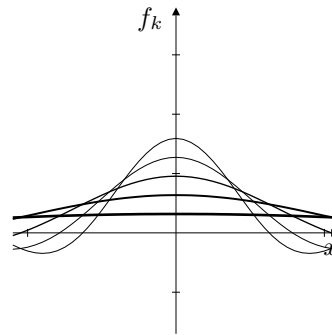
$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \leq 1/(2k) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



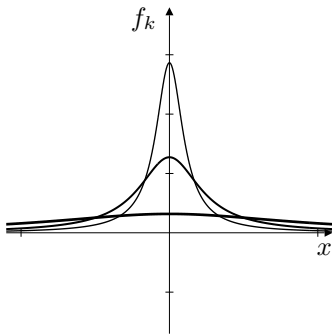
$$f_k(x) = \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \leq 1/k \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



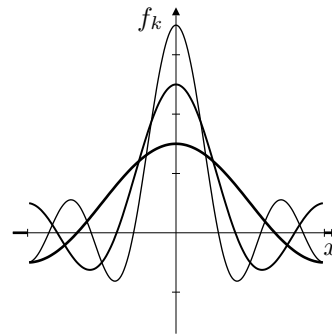
$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}kx^2}$$



$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{\pi x}$$



$$f_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{k^2}{k^4 x^2 + 1}$$



$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\pi x, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

## Příloha D

# Laplaceův operátor v křivočarém souřadném systému

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

podrobněji

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta_{x_1, x_2, \dots, x_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^2}.$$

Souřadnice  $x_1, x_2, \dots, x_n$  transformujeme na souřadnice  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Pak je

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n), & q_i &= q_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n$ . Tedy

$$\begin{aligned} \Delta_{q_1, q_2, \dots, q_n} u &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right). \end{aligned}$$

### Speciální případy:

#### Polární souřadnice v rovině

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{sgn} x) + 2k\pi$$

V tomto případě je

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = y \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -x \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

a dále

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Laplaceův operátor transformovaný do polárních souřadnic tedy je

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left( \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \left( \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Tento výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

### Cylindrické souřadnice v trojrozměrném prostoru

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x) + 2k\pi, \quad z = z$$

$$\Delta_{r,\varphi,z} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

### Sférické souřadnice v trojrozměrném prostoru

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x) + 2k\pi, \quad \vartheta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\Delta_{r,\varphi,\vartheta} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)$$