Lineární programování – jaro 2010 – 2. termín

1. (15 bodů) Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby soustava $Ax = By$ v proměnných $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \ldots, y_m)^{\mathrm{T}}$ měla řešení splňující $x_1 \geq 1, \ldots, x_n \geq 1$.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných y, matici B a vektor d takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{ f \mid yB = d,\ y \geq 0 \}$$

je duální k úloze

$$\max \{ cx \mid Ax = b,\ x \geq 0 \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Definujte polyedry a jejich stěny. Charakterizujte stěny polyedrů algebraicky pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte.

4. (30 bodů) Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{lr} \text{minimalizovat} & 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{maximalizovat} & -2x_1 - x_2 - 3x_3 \end{array}$$

při stejných omezeních $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ a

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 + 2x_3 &\geq 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq 4, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 1. \end{aligned}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.