Lineární programování – jaro 2010 – 4. termín

1. **(15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby polyedry $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b \}$ a $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = c,\ x \leq 0 \}$ měly neprázdný průnik.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici D a vektor k takové, že úloha lineárního programování

   $$\max \{ f \mid zD = k,\ z \geq 0 \}$$

   je duální k úloze

   $$\min \{ hx \mid A(x + y) = b,\ Cx \geq d,\ Fy \leq g \}$$

   s vektory proměnných x a y stejné dimenze. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Formulujte větu o rozkladu polyedrů a definujte v ní použité pojmy. Dokažte libovolnou ze dvou implikací této věty.

4. **(30 bodů)** Mějme dvě úlohy lineárního programování:

   $$\begin{array}{lr} \text{maximalizovat} & x - 3y + 2z \\ \text{minimalizovat} & 5x + y + z \end{array}$$

   při stejných omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

   $$\begin{aligned} 2x - y + 2z &\leq 9, \\ 2x - 2y + z &\geq 2, \\ x + y - z &\geq 3. \end{aligned}$$

   Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.