

Testy normality dat

K ověřování normality dat slouží celá řada testů, které jsou podrobně popsány ve statistické literatuře. Zde se omezíme na dva testy, které jsou implementovány v systému STATISTICA, a to Kolmogorovův – Smirnovův test a jeho Lilieforsovu variantu a Shapirův – Wilksův test. K závěrům těchto testů však přistupujeme s určitou opatrností. Máme-li k dispozici rozsáhlejší datový soubor (orientačně $n > 30$) a test zamítne na obvyklé hladině významnosti 0,01 nebo 0,05 hypotézu o normalitě, i když vzhled diagnostických grafů svědčí jenom o lehkém porušení normality, nedopustíme se závažné chyby, pokud použijeme statistickou metodu založenou na normalitě dat.

Kolmogorovův – Smirnovův test a jeho Lilieforsova varianta

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z normálního rozložení s parametry μ a σ^2 .

Distribuční funkci tohoto rozložení označme $\Phi_T(x)$.

Necht' $F_n(x)$ je výběrová distribuční funkce.

Testovou statistikou je statistika $D_n = \sup_{-e < x < e} |F_n(x) - \Phi_T(x)|$.

Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α , když $D_n \geq D_n(\alpha)$, kde $D_n(\alpha)$ je tabelovaná kritická hodnota.

Pro $n \geq 30$ lze $D_n(\alpha)$ aproximovat výrazem $\sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\alpha}}$.

V případě, že neznáme parametry μ a σ^2 normálního rozložení, musíme je odhadnout z dat (střední hodnotu odhadneme pomocí m a rozptyl pomocí s^2). Tím se změní rozložení testové statistiky D_n . Příslušné modifikované kvantily byly určeny pomocí simulačních studií. V této situaci používáme **Lilieforsovu variantu Kolmogorovova – Smirnovova testu**.

Shapiro – Wilksův test normality dat

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

Testová statistika má tvar:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{x_{(i)} - x_{(i+1)}}{s} \right)^2}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2},$$

kde $m = n/2$ pro n sudé a $m = (n-1)/2$ pro n liché. Koeficienty $a_i^{(n)}$ jsou tabelovány.

Na testovou statistiku W lze pohlížet jako na korelační koeficient mezi uspořádanými pozorováními a jim odpovídajícími kvantily standardizovaného normálního rozložení. V případě, že data vykazují perfektní shodu s normálním rozložením, bude mít W hodnotu 1. Hypotézu o normalitě tedy zamítneme na hladině významnosti α , když se na této hladině neprokáže korelace mezi daty a jim odpovídajícími kvantily rozložení $N(0,1)$.

Lze také říci, že $S - W$ test je založen na zjištění, zda body v Q-Q grafu jsou významně odlišné od regresní přímky proložené těmito body.

(S-W test se používá především pro výběry menších rozsahů, $n < 50$, ale v systému STATISTICA je implementováno jeho rozšíření i na výběry velkých rozsahů, kolem 2000.)

Příklad:

Jsou dány hodnoty 10, 12, 8, 9, 16. Pomocí Lilieforsova testu a S – W testu zjistěte na hladině významnosti 0,05, zda tato data pocházejí z normálního rozložení.

Řešení:

Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné nazvané X a pěti případech. Do proměnné X zapíšeme uvedené hodnoty. V menu vybereme Statistika – Základní statistiky/tabulky – Tabulky četností – OK, Proměnné X – OK. Na záložce zvolíme Normalita a zaškrtneme Lilieforsův test a Shapiro – Wilksův W test – Testy normality.

Proměnná	Testy normality (Tabulka1)				
	N	max D	Lilliefors p	W	p
X	5	0,224085	p > .20	0,912401	0,482151

Vidíme, že testová statistika K-S testu je $d = 0,22409$, odpovídající Lilieforsova p-hodnota je větší než 0,2, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Testová statistika S-W testu je $W = 0,9124$, odpovídající p-hodnota je 0,48215, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

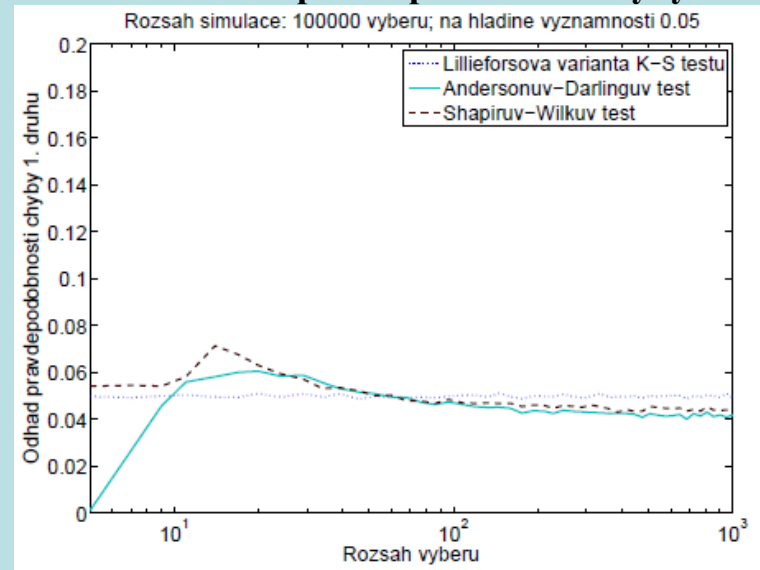
Srovnání S-W testu a Lilieforsovy varianty K-S testu pomocí simulačních studií

Simulační studie byly provedeny v bakalářské práci **Marka Haičmana Simulace a testy normality** (zde byl zkoumán i Andersonův – Darlingův test).

Odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu

Bylo vygenerováno 100 000 náhodných výběrů z normálního rozložení, jejichž rozsahy se pohybovaly od 5 do 1000. Na tyto výběry byly aplikovány oba testy (s hladinou významnosti 0,05) a byla stanovena relativní četnost těch případů, kdy došlo k neoprávněnému zamítnutí pravdivé nulové hypotézy. Tato relativní četnost je považována za odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu.

Závislost odhadu pravděpodobnosti chyby 1. druhu na rozsahu výběru (hodnoty na vodorovné ose jsou logaritmovány)



Výsledek:

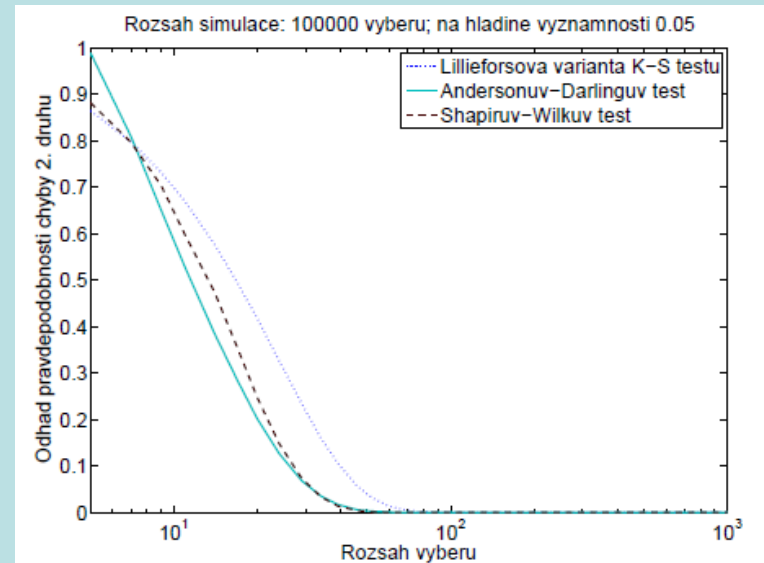
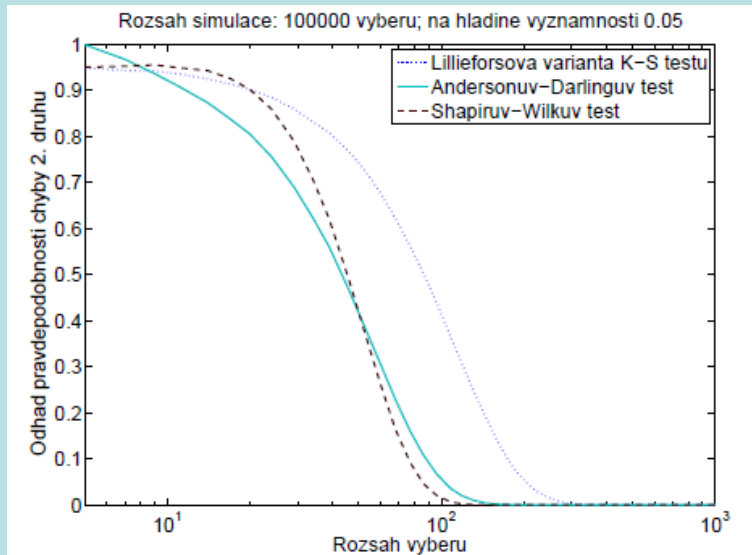
Lilieforsův test má pravděpodobnost chyby 1. druhu nezávislou na rozsahu výběru, udržuje se na 5 %.

S-W test má do velikosti výběru 60 vyšší pravděpodobnost chyby 1. druhu, poté poklesne pod 5 % a již nevystoupí nad 5 %.

Odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu

Pro toto zkoumání byla vybrána následující rozložení: rovnoměrné spojité, exponenciální, logaritmicko – normální, Studentovo s jedním, třemi a pěti stupni volnosti. Pro každé z těchto rozložení bylo vygenerováno 100 000 náhodných výběrů o rozsazích 5 až 1 000. Při aplikaci S-W testu a Lilieforsova testu byla zjišťována relativní četnost těch případů, kdy test nezamítl nepravdivou nulovou hypotézu. Tato relativní četnost je považována za odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu.

Ilustrace pro rovnoměrné spojité rozložení a exponenciální rozložení: závislost odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu na rozsahu výběru (hodnoty na vodorovné ose jsou logaritmovány)



Výsledek:

Lilieforsův test nejméně chybuje u velmi malých výběrů, orientačně do 10 prvků.

S-W test se pro výběry větších rozsahů (nad 60) vesměs nedopouští chyby. K chybám však dochází i pro velmi rozsáhlé výběry ze Studentova rozložení.

Stanovení hranice 20 % odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu

Zde byl hledán rozsah výběru z rovnoměrného, exponenciálního, logaritmicko – normálního a Studentova rozložení tak, aby odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu byl nanejvýš 20 %.

Tabulka minimálních rozsahů výběrů, pro něž je odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu nejvýše 20 %:

Test normality	Norm	Rovno.	Expo.	Logn.	Stud(1)	Stud(3)	Stud(5)
Anderson-Darling	–	72	21	15	16	87	247
Lilliefors	–	143	32	21	18	121	377
Shapiro-Wilk	–	65	22	17	19	89	221

Výsledek:

S-W test je možno použít na výběry menších rozsahů než Lillieforsův test.

U výběrů, jejichž rozsah je menší než 15, nemá příliš smysl testovat hypotézu o normalitě, neboť pravděpodobnost chyby 2. druhu je příliš vysoká (nad 70 %).

Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z normálního rozložení

K nejčastěji používaným statistickým metodám patří konstrukce intervalů spolehlivosti pro parametry normálního rozložení či testování hypotéz o těchto parametrech. Normální rozložení je charakterizováno dvěma parametry – střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Budeme tedy řešit úlohy, které se týkají těchto dvou parametrů. K tomu slouží např. jednovýběrový z-test, t-test či test o rozptylu. Můžeme také mít k dispozici náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s vektorem středních hodnot $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ a naším úkolem bude posoudit rozdílnost středních hodnot μ_1, μ_2 . K řešení tohoto problému slouží párový t-test.

Rozložení statistik odvozených z výběrového průměru a rozptylu

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Pak platí

a) $M \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, tedy $U = \frac{M - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

(Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o μ , když σ^2 známe.)

b) $K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

(Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o σ^2 , když μ neznáme.)

c) $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$.

(Tato pivotová statistika slouží k řešení úloh o σ^2 , když μ známe.)

d) $T = \frac{M - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$.

(Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o μ , když σ^2 neznáme.)

Vysvětlení

ad a) Výběrový průměr M je lineární kombinace náhodných veličin s normálním rozložením, má tedy normální rozložení s parametry $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$. Statistika U se získá standardizací M .

ad b) Vhodnou úpravou výběrového rozptylu S^2 , kde použijeme obrat $X_i - M = (X_i - \mu) - (M - \mu)$, lze statistiku K vyjádřit jako součet kvadrátů $n - 1$ stochasticky nezávislých náhodných veličin se standardizovaným normálním rozložením. Tento součet se řídí rozložením $\chi^2(n-1)$.

ad c) Tato statistika je součet kvadrátů n stochasticky nezávislých náhodných veličin se standardizovaným normálním rozložením, řídí se tedy rozložením $\chi^2(n)$.

ad d) $U \sim N(0, 1)$, $K \sim \chi^2(n-1)$ jsou stochasticky nezávislé, protože M a S^2 jsou stochasticky nezávislé, tudíž statistika

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{n-1}}} = \frac{M - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1).$$

Příklad: Hmotnost balíčku krystalového cukru baleného na automatické lince se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 1002 g a směrodatnou odchylkou 8 g. Kontrolor náhodně vybírá 9 balíčků z jedné série a zjišťuje, zda jejich průměrná hmotnost je alespoň 999 g. Pokud ne, podnik musí zaplatit pokutu 20 000 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že podnik bude muset zaplatit pokutu?

Řešení:

$$X \sim N(1002, 64), M \sim N\left(1002, \frac{64}{9}\right)$$

$$P\{M \leq 999\} = P\left\{\frac{M - 1002}{\sqrt{\frac{64}{9}}} \leq \frac{999 - 1002}{\sqrt{\frac{64}{9}}}\right\} = P\left\{U \leq -\frac{3}{8}\right\} = \Phi\left(-\frac{3}{8}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{8}\right) = 1 - \Phi(1,125) = 1 - 0,87076 = 0,12924$$

Pravděpodobnost, že podnik bude platit pokutu, je asi 12,9%.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Využijeme toho, že STATISTICA pomocí funkce INormal(x;mu;sigma) umí vypočítat hodnotu distribuční funkce normálního rozložení se střední hodnotou mu a směrodatnou odchylkou sigma. Tedy $P\{M \leq 999\} = \Phi\left(\frac{999}{9}\right)$, kde Φ je distribuční funkce rozložení $N(1002, 64/9)$.

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případě. Dvakrát klikneme na název proměnné Prom1. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme = INormal(999;1002;8/3).

V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,130295.

Vzorce pro meze 100(1- α)% empirických intervalů spolehlivosti pro μ a σ^2

a) Interval spolehlivosti pro μ , když σ^2 známe (využití pivotové statistiky U)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \right)$$

b) Interval spolehlivosti pro μ , když σ^2 neznáme (využití pivotové statistiky T)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) \right)$$

c) Interval spolehlivosti pro σ^2 , když μ neznáme (využití pivotové statistiky K)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} \right)$$

d) Interval spolehlivosti pro σ^2 , když μ známe (využití pivotové statistiky $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)} \right)$$

Příklad: 10 krát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ . Výsledky měření byly: 2,1, 1,8, 2,1, 2,4, 1,9, 2,1, 2,1, 1,8, 2,3, 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru X_1, \dots, X_{10} z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$, kde parametry μ, σ^2 neznáme. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti jak pro μ , tak pro σ^2 a to

- oboustranný,
- levostranný,
- pravostranný.

Řešení: $m = 2,06$, $s^2 = 0,0404$, $s = 0,2011$, $\alpha = 0,05$, $t_{0,975}(9) = 2,2622$, $t_{0,95}(9) = 1,8331$, $\chi^2_{0,975}(9) = 19,023$, $\chi^2_{0,025}(9) = 2,7$, $\chi^2_{0,95}(9) = 16,919$, $\chi^2_{0,05}(9) = 3,325$

ad a) **Oboustranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ**

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2,06 - \frac{0,2011}{\sqrt{10}} 2,2622 = 1,92$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2,06 + \frac{0,2011}{\sqrt{10}} 2,2622 = 2,20$$

$1,92 < \mu < 2,20$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Oboustranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$d = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0,0404}{19,023} = 0,0191$$

$$h = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0,0404}{2,7} = 0,1347$$

$0,0191 < \sigma^2 < 0,1347$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b) **Levostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ**

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) = 2,06 - \frac{0,2011}{\sqrt{10}} 1,8331 = 1,94$$

$1,94 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Levostranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$d = \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)} = \frac{9 \cdot 0,0404}{16,919} = 0,0215$$

$\sigma^2 > 0,0215$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) **Pravostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ**

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) = 2,06 + \frac{0,2011}{\sqrt{10}} 1,8331 = 2,18$$

$\mu < 2,18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Pravostranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$h = \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)} = \frac{9 \cdot 0,0404}{3,325} = 0,1094$$

$\sigma^2 < 0,1094$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné X a 10 případech. Do proměnné X napíšeme dané hodnoty.

Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme

Meze spolehl. prům. a Meze sp. směr. odch. (ostatní volby zrušíme) – pro oboustranný 95% interval spolehlivosti

ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00, pro jednostranné intervaly změňíme hodnotu na 90,00.

Výsledky pro oboustranné 95% intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu μ , pro směrodatnou odchylku σ a rozptyl σ^2 :

Proměnná	Int. spolehl.	Int. spolehl.	Spolehlivost	Spolehlivost	NProm1	NProm2
	-95,000%	95,000	Sm.Odch.	Sm.Odch.	= $\sqrt{3}$ ^2	= $\sqrt{4}$ ^2
X	1,916136	2,203864	0,138329	0,367145	0,019135	0,134795

Vidíme, že

$1,92 < \mu < 2,20$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$0,1383 < \sigma < 0,3671$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

$0,0191 < \sigma^2 < 0,1348$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výsledky pro jednostranné 95% intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu μ , pro směrodatnou odchylku σ a rozptyl σ^2 :

	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000	Spolehlivost Sm.Odch. -90,000%	Spolehlivost Sm.Odch. +90,000%	NProm1 = $\sqrt{3}$	NProm2 = $\sqrt{4}$
Proměnná						
X	1,943421	2,176579	0,146678	0,330862	0,021514	0,10947

Vidíme, že

$\mu > 1,94$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\mu < 2,20$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\sigma > 0,1467$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\sigma < 0,3309$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\sigma^2 > 0,0215$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\sigma^2 < 0,1095$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

Jednotlivé typy testů pro parametry normálního rozložení

a) Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Necht' $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$ se nazývá **jednovýběrový z-test**.

b) Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 neznáme. Necht' $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$ se nazývá **jednovýběrový t-test**.

c) Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ neznáme. Necht' $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test $H_0: \sigma^2 = c$ proti $H_1: \sigma^2 \neq c$ se nazývá **test o rozptylu**.

Provedení testů o parametrech μ, σ^2 pomocí kritického oboru

a) Provedení jednovýběrového z-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{\bar{m} - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W . Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině

významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle -\infty, -u_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$.

Levostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu < c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle -\infty, -u_{1-\alpha} \rangle$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle$.

b) Provedení jednovýběrového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{\bar{m} - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W . Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině

významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle -\infty, -t_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$.

Levostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu < c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle -\infty, -t_{1-\alpha} \rangle$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle t_{1-\alpha}, \infty \rangle$.

c) Provedení testu o rozptylu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{s^2}{c}$. Stanovíme kritický obor W . Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \sigma^2 = c$ proti $H_1: \sigma^2 \neq c$. Kritický obor má tvar:

$$W = \left(0, \chi^2_{\alpha/2}\right) \cup \left(\chi^2_{1-\alpha/2}, \infty\right)$$

Levostranný test: Testujeme $H_0: \sigma^2 = c$ proti $H_1: \sigma^2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = \left(0, \chi^2_{\alpha}\right)$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \sigma^2 = c$ proti $H_1: \sigma^2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \left(\chi^2_{1-\alpha}, \infty\right)$.

Příklad: Podle údajů na obalu čokolády by její čistá hmotnost měla být 125 g. Výrobce dostal několik stížností od kupujících, ve kterých tvrdili, že hmotnost čokolád je nižší než deklarovaných 125 g. Z tohoto důvodu oddělení kontroly náhodně vybralo 50 čokolád a zjistilo, že jejich průměrná hmotnost je 122 g a směrodatná odchylka 8,6 g. Za předpokladu, že hmotnost čokolád se řídí normálním rozložením, můžeme na hladině významnosti 0,01 považovat stížnosti kupujících za oprávněné?

Řešení: X_1, \dots, X_{50} je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Testujeme hypotézu $H_0: \mu = 125$ proti levostranné alternativě $H_1: \mu < 125$. Protože neznáme rozptyl σ^2 , použijeme jednovýběrový t-test.

$$\text{Testové kritérium } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{122 - 125}{\frac{8,6}{\sqrt{50}}} = -2,4667$$

$$\text{Kritický obor } W = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -t_{1-\alpha, n-1} \right\} = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -t_{0,99, 49} \right\} = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -2,4049 \right\}$$

Jelikož testové kritérium se realizuje v kritickém oboru, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01. Stížnosti kupujících tedy lze považovat za oprávněné.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – zaškrtneme Výběrový průměr vs. Střední hodnota a zvolíme jednostr. – do políčka Pr1 napíšeme 122, do políčka SmOd1 napíšeme 8,6, do políčka N1 napíšeme 50, do políčka Pr2 napíšeme 125 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0086, tedy zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01

Náhodný výběr z dvourozměrného rozložení

Necht' $\left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \right\}$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení, přičemž $n \geq 2$. Označíme $\mu = \mu_1 - \mu_2$ a zavedeme

rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_n = X_n - Y_n$, o němž předpokládáme, že se řídí normálním rozložením.

Vypočteme $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - M)^2$.

Vzorec pro meze 100(1- α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu rozdílového náhodného výběru

Oboustranný: $(d, h) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$

Levostranný: $(d, \infty) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = (-\infty, m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1))$

Příklad: Dvěma rozdílnými laboratorními metodami se zjišťoval obsah chemické látky v roztoku (v procentech). Bylo vybráno 5 vzorků a proměřeno oběma metodami. Výsledky měření jsou obsaženy v tabulce:

číslo vzorku	1	2	3	4	5
1. metoda	2,3	1,9	2,1	2,4	2,6
2. metoda	2,4	2,0	2,0	2,3	2,5

Za předpokladu, že data mají normální rozložení, sestrojte 90% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot výsledků obou metod.

Řešení:

Přejdeme k rozdílovému náhodnému výběru, jehož realizace jsou: -0,1 -0,1 0,1 0,1 0,1. Vypočteme $m = 0,02$, $s^2 = 0,012$, $s = 0,109545$. Předpokládáme, že tato data pocházejí z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Vypočteme meze 90% oboustranného intervalu spolehlivosti pro μ při neznámém σ :

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} = 0,02 - \frac{0,109545}{\sqrt{5}} t_{0,95} = 0,02 - \frac{0,109545}{\sqrt{5}} 2,1318 = -0,0844$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} = 0,02 + \frac{0,109545}{\sqrt{5}} t_{0,95} = 0,02 + \frac{0,109545}{\sqrt{5}} 2,1318 = 0,1244$$

$-0,0844 < \mu < 0,1244$ s pravděpodobností aspoň 0,9.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o 3 proměnných a 5 případech. Do 1. proměnné X napíšeme hodnoty pro 1. metodu, do 2. proměnné Y hodnoty pro 2. metodu a do 3. proměnné Z rozdíly mezi X a Y.

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky, OK - Proměnné Z, Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. Prům. – Interval 90% - Výpočet. Dostaneme tabulku:

Popisné statistiky (chemická látka)		
Proměnná	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000
Z	-0,084439	0,124439

Vidíme tedy, že $-0,0844 < \mu < 0,1244$ s pravděpodobností aspoň 0,9.

Párový t-test

Nechť $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ je náhodný výběr z rozložení $N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$, přičemž $n \geq 2$. Testujeme $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$ (tj. $\mu = c$) proti $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$ (tj. $\mu \neq c$) nebo testujeme nulovou hypotézu proti jedné z jednostranných alternativ. Tento test se nazývá **párový t-test**.

Provedení párového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{\bar{m} - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W . Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině

významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$. Kritický obor má tvar: $w = \left\langle -\infty, -t_{1-\alpha/2} \right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}, \infty \right\rangle$.

Levostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu < c$. Kritický obor má tvar: $w = \left\langle -\infty, -t_{1-\alpha} \right\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu > c$. Kritický obor má tvar: $w = \left\langle t_{1-\alpha}, \infty \right\rangle$.

Příklad: V následující tabulce jsou údaje o výnosnosti dosažené 12 náhodně vybranými firmami při investování do mezinárodního podnikání (veličina X) a do domácího podnikání (veličina Y):

č.firmy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	10	12	14	12	12	17	9	15	9	11	7	15
Y	11	14	15	11	13	16	10	13	11	17	9	19

(Výnosnost je vyjádřena v procentech a představuje podíl na zisku vložených investic za rok.)

Za předpokladu, že data pocházejí z dvourozměrného rozložení a jejich rozdíl se řídí normálním rozložením, na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu, že neexistuje rozdíl mezi střední hodnotou výnosnosti investic do mezinárodního a domácího podnikání proti oboustranné alternativě.

Testování proved'te

a) pomocí intervalu spolehlivosti, b) pomocí kritického oboru.

(Pro úsporu času známe realizace výběrového průměru $m = -0,3$ a výběrového rozptylu $s^2 = 4,78$ rozdílového náhodného výběru $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \dots, 12$.)

Řešení:

Testujeme $H_0: \mu = 0$ proti $H_1: \mu \neq 0$

ad a) 90% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ při neznámém rozptylu σ^2 má meze:

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95} = -0,3 - \frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}} \cdot 1,7959 = -2,4677$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95} = -0,3 + \frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}} \cdot 1,7959 = -0,1989$$

Protože číslo $c = 0$ neleží v intervalu $(-2,4677; -0,1989)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,1.

ad b) Vypočítáme realizaci testové statistiky $t_0 = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{-0,3}{\frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}}} = -1,1085$

Stanovíme kritický obor $w = (-\infty, -t_{0,95}) \cup (t_{0,95}, \infty) = (-\infty, -1,7959) \cup (1,7959, \infty)$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,1.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o 2 proměnných a 12 případech. Do 1. proměnné X napíšeme hodnoty pro mezinárodní podnikání, do 2. proměnné hodnoty pro domácí podnikání.

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – t-test pro závislé vzorky, OK - Proměnné X, Y – OK – Výpočet. Dostaneme tabulku:

Proměnná	t-test pro závislé vzorky (investovani) Označ. rozdíly jsou významné na hlad. $p < ,05000$							
	Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílu	t	sv	p
X	11,91667	2,937480						
Y	13,25000	3,048845	12	-1,33333	2,188122	-2,11085	11	0,058490

Vypočtenou p-hodnotu 0,05849 porovnáme se zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,1$. Protože $p \leq \alpha$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,1.