

Parametrické úlohy o jednom a dvou výběrech z alternativního rozložení

Případ jednoho náhodného výběru: S náhodným výběrem rozsahu n z alternativního rozložení se setkáváme v situaci, kdy provádíme n opakovaných nezávislých pokusů a v každém z těchto pokusů sledujeme nastoupení úspěchu. Pravděpodobnost úspěchu je pro všechny pokusy stejná. Náhodná veličina X_i nabude hodnoty 1, pokud v i -tém pokusu nastal úspěch a hodnoty 0, pokud v i -tém pokusu úspěch nenastal, $i = 1, 2, \dots, n$. Realizací náhodného výběru X_1, \dots, X_n je tedy posloupnost 0 a 1.

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ . Píšeme $X \sim A(\vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 - \vartheta & \text{pro } x = 0 \\ \vartheta & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{neboli } \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{1-x} & \text{pro } x = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ . Píšeme $X \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{n-x} & \text{pro } x = 0, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = n\vartheta, \quad D(X) = n\vartheta(1 - \vartheta)$$

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro $n = 1$.)

Jsou-li X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, $i = 1, \dots, n$, pak $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.

Centrální limitní věta:

Jsou-li náhodné veličiny X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 , pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^n x_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$. Zkráceně píšeme

$\sum_{i=1}^n x_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$. Pokud součet $\sum_{i=1}^n x_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru.

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\theta)$ a necht' je splněna podmínka $n\theta(1-\theta) > 9$. Pak statistika $U = \frac{M - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}$

konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení $N(0,1)$ a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Vysvětlení:

Protože X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\theta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^n x_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \theta)$. Y_n

má střední hodnotu $E(Y_n) = n\theta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\theta(1-\theta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika $U = \frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením $N(0,1)$. Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n ,

dostaneme vyjádření: $U = \frac{\frac{Y_n - n\theta}{n}}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} = \frac{M - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \approx N(0,1)$

Vzorec pro meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr θ .

Meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr θ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}, h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D\left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením

$N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\begin{aligned} \forall \epsilon \in \mathbb{R} : 1 - \alpha &\leq P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M - \theta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) = \\ &= P\left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} < \theta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2}\right) \end{aligned}$$

Příklad:

Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich nakupuje v internetových obchodech. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba nakupuje v internetových obchodech.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{100} , přičemž $X_i = 1$, když i -tá osoba nakupuje v internetových obchodech a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 100$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\theta)$.

$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Ověření podmínky $n\theta(1-\theta) > 9$: parametr θ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $100 \cdot 0,34 \cdot 0,66 = 22,44 > 9$.

$$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} \cdot 1,96 = 0,2472, \quad h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} \cdot 1,96 = 0,4328.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \theta < 0,4328$. Znamená to, že s pravděpodobností přibližně 95% je v uvažované populaci nejméně 24,7% a nejvíce 43,3% osob, které nakupují v internetových obchodech.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

a) Přesný způsob

Otevřeme nový datový soubor se dvěma proměnnými a jedním případu.

První proměnnou nazveme d a do jejího Dlouhého jména napíšeme

$$=0,34-\text{sqrt}(0,34*0,66/100)*\text{VNormal}(0,975;0;1)$$

Druhou proměnnou nazveme h a do jejího Dlouhého jména napíšeme

$$=0,34+\text{sqrt}(0,34*0,66/100)*\text{VNormal}(0,975;0;1)$$

Dostaneme výsledek:

	1	2
	d	h
1	0,247155	0,432845

Vidíme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost nákupu v inetrnetových obchodech bude pohybovat v mezích 0,2471 až 0,4328.

b) Přibližný způsob, použitelný pro dostatečně velký rozsah výběru

Do nového datového souboru o jedné proměnné X a 100 případech uložíme 34 jedniček (nakupování v internetových obchodech) a 66 nul.

Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. – ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00 – Výpočet.

Dostaneme tabulku:

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka3)			
	N platných	Průměr	Int. spolehl.	Int. spolehl.
X	100	0,340000	-95,000%	95,000
			0,245532	0,434468

Dospěli jsme k výsledku, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost nákupu v inetrnetových obchodech bude pohybovat v mezích 0,2455 až 0,4345.

Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla nanejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:

Šířka $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr θ :

$$h - d = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} - \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right) = 2 \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby $h - d \leq \Delta$, tedy $2 \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} \leq \Delta$. Odtud vyjádříme $n \geq \frac{4m(1-m) u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2}$.

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m , aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m) = m - m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. V tomto případě volíme relativní četnost $m = 0,5$.

$$\text{ad a) } n \geq \frac{4m(1-m) u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 751,67$$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

$$\text{ad b) } n \geq \frac{4m(1-m) u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 27060,25$$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost $m = 0,3$.

$$\text{ad a) } n \geq \frac{4m^2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 531,41$$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.

Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$$n \geq \frac{4m^2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 22730,61$$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

Testování hypotézy o parametru ϑ

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a necht' je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > \epsilon$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

$H_0: \vartheta = c$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq c$ (resp. $H_1: \vartheta < c$ resp. $H_1: \vartheta > c$).

Testovým kritériem je statistika $T_0 = \frac{M - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení $N(0,1)$.

Kritický obor má tvar $w = \langle -\infty, -u_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$ (resp. $w = \langle -\infty, -u_{1-\alpha} \rangle$ resp. $w = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle$).

(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí $100(1-\alpha)\%$ asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0,01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti oboustranné alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{1000} , přičemž $X_i = 1$, když i -tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 1000$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Známe: $n = 1000$, $m = \frac{16}{1000} = 0,016$, $c = 0,01$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 9,9 > 9$.

a) Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m - c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1-c)}{n}}} = \frac{0,016 - 0,01}{\sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{1000}}} = 1,907$.

Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{0,975}) \cup (u_{0,975}, \infty) = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty)$. Protože $1,907 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} = 0,016 - \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{1000}} \cdot 1,96 = 0,0082$

$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} = 0,016 + \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{1000}} \cdot 1,96 = 0,0238$

Protože číslo $c = 0,01$ leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:

$p = 2 \min \{ \Phi(1,907), 1 - \Phi(1,907) \} = 2 \min \{ 0,97104, 1 - 0,97104 \} = 0,05792$.

Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka3

Poslat/tisknout výsledky každ. výpočtu do okna protokolu Storno

Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty

r1: 0,00 N1: 10 p: 1,0000 Jednostr. Výpočet
r2: 0,00 N2: 10 Oboustr.

Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)

Pr1: 0, SmOd1: 1, N1: 10 p: 1,0000 Výpočet
Pr2: 0, SmOd2: 1, N2: 10 Jednostr.
 Oboustr.

Výběrový průměr vs. střední hodnota

Rozdíl mezi dvěma poměry

P 1: .01600 N1: 1000 p: .0626 Jednostr. Výpočet
P 2: .01000 N2: 32767 Oboustr.

Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob, tj. u 60%. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{40} , přičemž
 $X_i = 1$, když terapie u i -tého pacienta byl úspěšná a
 $X_i = 0$ jinak,
 $i = 1, \dots, 40$.

Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(9)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \theta \leq 0,5$ proti pravostranné alternativě $H_1: \theta > 0,5$.

Známe: $n = 40$, $m = \frac{24}{40} = 0,6$, $c = 0,5$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$

Ověření podmínky $n\theta(1-\theta) > 9$: $40 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 9,6 > 9$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m - c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1-c)}{n}}} = \frac{0,6 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{40}}} = 1,2649$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle = \langle u_{0,95}, \infty \rangle = \langle 1,645, \infty \rangle$.

Protože $1,2649 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka9' dialog box in STATISTICA. It contains three sections for different types of tests, each with input fields and a 'Výpočet' button.

- Top section: Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty**
 - Inputs: r1: 0,00, N1: 10, r2: 0,00, N2: 10, p: 1,0000
 - Options: Jednostr., Oboustr.
 - Buttons: Storno, Výpočet
- Middle section: Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)**
 - Inputs: Pr1: 0, SmOd1: 1, N1: 10, Pr2: 0, SmOd2: 1, N2: 10, p: 1,0000
 - Options: Jednostr., Oboustr.
 - Checkbox: Výběrový průměr vs. střední hodnota
 - Buttons: Výpočet
- Bottom section: Rozdíl mezi dvěma poměry**
 - Inputs: P 1: ,60000, N1: 40, P 2: ,50000, N2: 32767, p: ,1031
 - Options: Jednostr., Oboustr.
 - Buttons: Výpočet

Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy větší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Případ dvou nezávislých výběrů z alternativních rozložení: Provádíme opakovaně nezávisle n_1 -krát jeden náhodný pokus a nezávisle na tom n_2 -krát druhý náhodný pokus. V první sérii pokusů sledujeme nějaký jev, který v každém pokusu může nastat s pravděpodobností θ_1 a ve druhé sérii pokusů sledujeme nějaký jiný jev, jehož pravděpodobnost nastoupení je θ_2 . Parametry θ_1, θ_2 neznáme. Naším úkolem bude konstruovat interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $\theta_1 - \theta_2$ nebo testovat hypotézu o této parametrické funkci, a to pomocí dvou nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení $A(\theta_1), A(\theta_2)$.

Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů alternativních rozložení

Nechť x_{11}, \dots, x_{1n_1} je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\theta_1)$ a x_{21}, \dots, x_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\theta_2)$ a necht' jsou splněny podmínky $n_1 \theta_1 (1 - \theta_1) > 9$ a $n_2 \theta_2 (1 - \theta_2) > 9$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry.

Pak statistika
$$U = \frac{M_1 - M_2 - (\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}} \approx N(0, 1).$$

Vysvětlení: Analogicky jako v případě jednoho náhodného výběru z alternativního rozložení.

Vzorec pro meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$.

Meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - n_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-n_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-n_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2}, \quad h = m_1 - n_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-n_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-n_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2}$$

Vysvětlení: Pokud rozptyl $D\left(\frac{M_i - \vartheta_i}{n_i}\right)$ nahradíme odhadem $\frac{M_i - M_i}{n_i}$, $i = 1, 2$, konvergence náhodné veličiny U

k veličině s rozložením $N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta_1 - \vartheta_2 \in \mathbb{R} \quad 1 - \alpha \leq P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M_1 - M_2 - \vartheta_1 - \vartheta_2}{\sqrt{\frac{M_1 - M_1}{n_1} + \frac{M_2 - M_2}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$P\left(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{M_1 - M_1}{n_1} + \frac{M_2 - M_2}{n_2}} u_{1-\alpha/2} < \vartheta_1 - \vartheta_2 < M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{M_1 - M_1}{n_1} + \frac{M_2 - M_2}{n_2}} u_{1-\alpha/2}\right)$$

Příklad: Management supermarketu vyhlásil týden slev a sledoval, zda toto vyhlášení má vliv na podíl větších nákupů (nad 500 Kč). Na základě náhodného výběru 200 zákazníků v týdnu bez slev bylo zjištěno 97 velkých nákupů, zatímco v týdnu se slevou z 300 náhodně vybraných zákazníků učinilo velký nákup 162 zákazníků. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností uskutečnění většího nákupu v týdnu bez slevy a v týdnu se slevou.

Řešení:

Zavedeme náhodnou veličinu X_{1i} , která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu bez slevy i -tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, $i = 1, \dots, 200$. Náhodné veličiny $X_{1,1}, \dots, X_{1,200}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\theta_1)$. Dále zavedeme náhodnou veličinu X_{2i} , která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu se slevou i -tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, $i = 1, \dots, 300$. Náhodné veličiny $X_{2,1}, \dots, X_{2,300}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\theta_2)$.

$$n_1 = 200, n_2 = 300, m_1 = 97/200 = 0,485, m_2 = 162/300 = 0,54.$$

Ověření podmínek $n_1 \theta_1 (1 - \theta_1) > 9$ a $n_2 \theta_2 (1 - \theta_2) > 9$: Parametry θ_1 a θ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2 , tedy $97 \cdot (1 - 97/200) = 49,955 > 9$, $162 \cdot (1 - 162/300) = 74,52 > 9$.

Meze $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\theta_1 - \theta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} - \sqrt{\frac{97}{200} \left(1 - \frac{97}{200}\right) + \frac{162}{300} \left(1 - \frac{162}{300}\right)} 1,96 = -0,1443$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{97}{200} \left(1 - \frac{97}{200}\right) + \frac{162}{300} \left(1 - \frac{162}{300}\right)} 1,96 = 0,0343$$

Zjistili jsme tedy, že s pravděpodobností přibližně 0,95: $-0,1443 < \theta_1 - \theta_2 < 0,0343$.

Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Nechť x_{11}, \dots, x_{1n_1} je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a x_{21}, \dots, x_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a necht' jsou splněny podmínky $n_1 \vartheta_1 (1 - \vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1 - \vartheta_2) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu $H_0: \vartheta_1 - \vartheta_2 = c$ proti alternativě $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 \neq c$ (resp. $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 < c$ resp. $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 > c$).

Testovým kritériem je statistika

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2 - c}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}},$$
 která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení $N(0,1)$.

Kritický obor má tvar $w = \langle -\infty, -u_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$

(resp. $w = \langle -\infty, -u_{1-\alpha} \rangle$ resp. $w = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle$).

(Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ lze provést též pomocí $100(1-\alpha)\%$ asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Poznámka: Postup při testování hypotézy $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$

Je-li $c = 0$, pak označme $M_* = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2}$ vážený průměr výběrových průměrů. Jako testová statistika slouží

$T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_* \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení $N(0,1)$.

Kritický obor má tvar $w = \langle -\infty, -u_{1-\alpha/2} \rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty \rangle$ (resp. $w = \langle -\infty, -u_{1-\alpha} \rangle$ resp. $w = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle$).

Testová statistika T_0 vznikne standardizací statistiky $M_1 - M_2$, kde neznámé parametry ϑ_1, ϑ_2 nahradíme společným odhadem M_* .

Příklad: Pro údaje z příkladu o slevách v supermarketu testujte na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu, že týden se slevami nezvýší pravděpodobnost uskutečnění většího nákupu.

Řešení:

Testujeme hypotézu $\theta_1 - \theta_2 = 0$ proti levostranné alternativě $H_1: \theta_1 - \theta_2 < 0$ na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$n_1 = 200, n_2 = 300, m_1 = 97/200, m_2 = 162/300, m_* = (97 + 162)/500 = 0,518$.

Podmínky dobré aproximace byly ověřeny v předešlém příkladu.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti:

Pro levostrannou alternativu používáme pravostranný interval spolehlivosti:

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1 - \frac{m_1}{n_1})}{n_1} + \frac{m_2(1 - \frac{m_2}{n_2})}{n_2}} u_{1-\alpha} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1 - \frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1 - \frac{162}{300})}{300}} 1,645 = 0,02$$

Protože číslo $c = 0$ je obsaženo v intervalu $(-\infty, 0,02)$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - \frac{n_2}{n_1} m_2}{\sqrt{m_* (1 - m_*) (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{\frac{97}{200} - \frac{162}{300}}{\sqrt{0,518 (1 - 0,518) (\frac{1}{200} + \frac{1}{300})}} = -0,2058$$

Kritický obor je $w = (-\infty, -u_{1-\alpha}) = (-\infty, -u_{0,95}) = (-\infty, -1,645)$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí p-hodnoty:

Pro levostrannou alternativu se p-hodnota počítá podle vzorce $p = P(T_0 \leq t_0)$:

$$p = P(T_0 \leq -0,2058) = \Phi(-0,2058) = 1 - \Phi(0,2058) = 1 - 0,8861 = 0,1139$$

Protože p-hodnota je větší než 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,485, do políčka N1 napíšeme 200, do políčka P 2 napíšeme 0,54, do políčka N2 napíšeme 300 – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1142, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Testy rozdílů: r, %, průměry: tram_bus

Poslat/tisknout výsledky každ. výpočtu do okna protokolu

Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty

r1: 0,00 N1: 10 r2: 0,00 N2: 10 p: 1,0000 Jednostr. Oboustr.

Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)

Pr1: 0, SmOd1: 1, N1: 10 Pr2: 0, SmOd2: 1, N2: 10 p: 1,0000 Jednostr. Oboustr.

Výběrový průměr vs. střední hodnota

Rozdíl mezi dvěma poměry

P 1: .48500 N1: 200 P 2: .54000 N2: 300 p: .1142 Jednostr. Oboustr.